

Esercitazione 17 e 18

Marco Bonvini

16 Aprile 2018

1 Pesetti molleggiati

Un corpo di massa $m = 2.0\text{kg}$ è appoggiato sul piano di un tavolo. Il corpo è attaccato a una molla ideale di costante elastica $k = 32\text{N/m}$ fissata su un lato del tavolo, mentre dall'altro lato una fune ideale lo lega ad un pesetto di massa $M = 9.2\text{kg}$ che pende dal tavolo, tramite una carrucola posta sul bordo del tavolo. Tra il corpo e il piano vi è attrito con coefficiente dinamico $\mu_d = 0.10$ e coefficiente statico $\mu_s = 0.15$.

1. Trovare la condizione di equilibrio (espressa in termini dell'elongazione della molla x rispetto alla lunghezza di riposo).

Il pesetto viene tirato verso il basso, di una quantità tale da provocare un'elongazione della molla di $\delta x = 3.8\text{m}$, e poi rilasciato. Assumendo che la fune resti sempre tesa,

1. determinare l'altezza massima che raggiunge il pesetto rispetto alla quota di partenza;
2. determinare la velocità massima del pesetto;
3. verificare che la fune resti effettivamente sempre tesa (ovvero determinare la condizione per cui la fune sia sempre tesa).

[Sol: $0. \frac{g}{k}(M - m\mu_s) \leq x \leq \frac{g}{k}(M + m\mu_s)$, ovvero tra 2.7m e 2.9m ; 1. $\Delta h = 2(\delta x - \frac{g}{k}(M + m\mu_d)) = 1.8\text{m}$; 2. In generale nel tratto in salita si ha

$$\dot{x}^2 = \frac{k}{M+m} \left[\left(\delta x - \frac{g}{k}(M + m\mu_d) \right)^2 - \left(x - \frac{g}{k}(M + m\mu_d) \right)^2 \right],$$

quindi $\dot{x}_{\max} = \sqrt{\frac{k}{M+m}} (\delta x - \frac{g}{k}(M + m\mu_d)) = 1.6\text{m/s}$; 3. $\delta x \leq \frac{g}{k}[2M + m(1 + \mu_d)] = 6.3\text{m}$]

2 Il calice di cristallo semplificato

Un pesetto di massa $m = 0.10\text{kg}$ è appoggiato su un tavolo piano orizzontale senza attrito. Il pesetto è connesso ad una fune, che passa per un buco al centro del tavolo. Sotto al buco, all'altra estremità della fune, è appeso un corpo di massa $M = 0.50\text{kg}$. All'istante iniziale il corpo è appena sotto il tavolo, e tutta la fune (di lunghezza $\ell = 1.0\text{m}$) sta sul piano del tavolo ed è tesa. Il pesetto di massa m all'istante iniziale si muove con una velocità ortogonale alla fune di intensità v_0 . Mostrare che il sistema resta in "equilibrio" (ovvero il corpo di massa M non si muove) se

$$v_0 = v_{\text{eq}} \equiv \sqrt{\frac{Mg\ell}{m}} = 7.0\text{m/s}.$$

Si supponga adesso $v_0 < v_{\text{eq}}$, specificamente $v_0 = 1.0\text{m/s}$. Si dimostri che il corpo scende al massimo di

$$x_{\max} = \ell \hat{x}_+ = 0.89\text{m}, \quad \hat{x}_{\pm} = 1 - \frac{v_0^2}{4v_{\text{eq}}^2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{8v_{\text{eq}}^2}{v_0^2}} \right),$$

dopodiché risale alla posizione di partenza. Si dimostri che il tempo necessario per un ciclo completo è

$$\begin{aligned}
 T &= 2 \int_0^{x_{\max}} dx \sqrt{\frac{(M+m)(\ell-x)^2}{2Mgx(\ell-x)^2 - mv_0^2(\ell^2 - (\ell-x)^2)}} \\
 &= 2 \sqrt{\frac{(M+m)\ell}{2Mg}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} \sqrt{\frac{(1-\hat{x}_+y)^2}{\hat{x}_- - \hat{x}_+y}} \\
 &= 1.0\text{s.}
 \end{aligned}$$

Qual'è l'energia cinetica massima del sistema?

[Sol: $K_{\max} = Mgx_{\max} + mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \frac{\ell^2}{(\ell-x_{\max})^2} = 4.4\text{J}$]