

Esercitazione 23 e 24

Marco Bonvini

11 Maggio 2018

1 Palline connesse da molla

Si considerino due punti materiali di masse m_1 e m_2 connessi da una molla ideale di costante elastica k e lunghezza di riposo ℓ . Il sistema appoggia su un piano privo di attrito, e all'istante iniziale la massa m_1 appoggia ad una parete verticale mentre la massa m_2 comprime la molla fino a distare r_0 da m_1 . Il sistema è inizialmente fermo. Assumendo che il moto sia unidimensionale, determinare

1. la legge oraria del sistema,
2. la condizione per cui la massa m_2 durante il suo moto ha velocità che cambia segno.

L'energia meccanica si conserva? Se sì, perché?

[Sol: 1. Per $0 \leq t \leq t_0 = \pi/2\omega_2$, con $\omega_2 = \sqrt{k/m_2}$, si ha $x_2(t) = \ell - (\ell - r_0)\cos(\omega_2 t)$, mentre $x_1(t) = 0$. Per $t \geq t_0$ si ha invece $x_{\text{cm}}(t) = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\ell(\ell - r_0)\omega_2(t - t_0))$ e $r(t) = \ell + (\ell - r_0)\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}}\sin(\omega(t - t_0))$ con $\omega = \sqrt{k/\mu}$ e $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$, da cui si può ricavare $x_1(t) = x_{\text{cm}}(t) - \frac{m_2}{m_1+m_2}r(t)$ e $x_2(t) = x_{\text{cm}}(t) + \frac{m_1}{m_1+m_2}r(t)$. 2. La condizione $\dot{x}_2(t) < 0$ per qualche valore di t è soddisfatta se $m_2 < m_1$. Infatti uno può anche vedere che $\dot{x}_1(t) \geq 0$, con $\dot{x}_1(t) = 0$ per $t = t_0 + 2k\pi/\omega$, indipendentemente dalle masse. Quindi se $m_1 = m_2$, anche $\dot{x}_2(t) = 0$ per $t = t_0 + (2k+1)\pi/\omega$, ma mai negativo. 3. Si conserva, perché l'unica forza esterna è la reazione normale della parete, che agisce per $t < t_0$ e non compie lavoro. Un calcolo esplicito mostra che essa vale $E = \frac{1}{2}k(\ell - r_0)^2$ sia all'inizio che a regime.]

2 Slitta molla massa

Una slitta di massa M e lunga d è libera di muoversi su piano orizzontale con attrito trascurabile. Ad un estremo della slitta, all'interno, è posta una molla di costante elastica k e lunghezza di riposo ℓ_0 . All'altro estremo della slitta, sempre all'interno, vi è un blocchetto di massa m . Per $t < t_0$ il sistema è fermo. All'istante t_0 una piccola esplosione all'interno della slitta fornisce al sistema un'energia E , mettendo in movimento slitta e massa. Dopo l'esplosione il blocchetto si sposta all'interno della slitta, raggiunge la molla e la comprime. Tra slitta e blocchetto vi è attrito dinamico con coefficiente μ_d . Si calcoli:

1. la velocità v_0 del blocchetto e V_0 della slitta nell'istante immediatamente successivo all'esplosione;
2. la velocità v_1 del blocchetto e V_1 della slitta nell'istante in cui la compressione della molla è massima;
3. la massima compressione x della molla.

[Sol: 1. $V_0 = \sqrt{\frac{2Em}{M(m+M)}}$, $v_0 = -\sqrt{\frac{2EM}{m(m+M)}}$; 2. $v_1 = V_1 = 0$;

3. $x = -\frac{mg\mu_d}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg\mu_d}{k}\right)^2 + \frac{2}{k}(E - mg\mu_d(d - \ell_0))}$]

Risolvere di nuovo il problema assumendo che l'esplosione sia avvenuta all'esterno, dal lato della molla.

[Sol: 1. $v_0 = 0$, $V_0 = \sqrt{\frac{2E}{M}}$; 2. $v_1 = V_1 = \frac{M}{m+M}V_0 = \frac{\sqrt{2ME}}{m+M}$;

3. $x = -\frac{mg\mu_d}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg\mu_d}{k}\right)^2 + \frac{2}{k}\left(\frac{m}{m+M}E - mg\mu_d(d - \ell_0)\right)}$]