

# Esercitazione 23 e 24

Marco Bonvini

11 Maggio 2018

## 1 Palline connesse da molla

Si considerino due punti materiali di masse  $m_1$  e  $m_2$  connessi da una molla ideale di costante elastica  $k$  e lunghezza di riposo  $\ell$ . Il sistema appoggia su un piano privo di attrito, e all'istante iniziale la massa  $m_1$  appoggia ad una parete verticale mentre la massa  $m_2$  comprime la molla fino a distare  $r_0$  da  $m_1$ . Il sistema è inizialmente fermo. Assumendo che il moto sia unidimensionale, determinare

1. la legge oraria del sistema,
2. la condizione per cui la massa  $m_2$  durante il suo moto ha velocità che cambia segno.

L'energia meccanica si conserva? Se sì, perché?

[Sol: 1. Per  $0 \leq t \leq t_0 = \pi/2\omega_2$ , con  $\omega_2 = \sqrt{k/m_2}$ , si ha  $x_2(t) = \ell - (\ell - r_0)\cos(\omega_2 t)$ , mentre  $x_1(t) = 0$ . Per  $t \geq t_0$  si ha invece  $x_{\text{cm}}(t) = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\ell(\ell - r_0)\omega_2(t - t_0))$  e  $r(t) = \ell + (\ell - r_0)\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}}\sin(\omega(t - t_0))$  con  $\omega = \sqrt{k/\mu}$  e  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ , da cui si può ricavare  $x_1(t) = x_{\text{cm}}(t) - \frac{m_2}{m_1+m_2}r(t)$  e  $x_2(t) = x_{\text{cm}}(t) + \frac{m_1}{m_1+m_2}r(t)$ . 2. La condizione  $\dot{x}_2(t) < 0$  per qualche valore di  $t$  è soddisfatta se  $m_2 < m_1$ . Infatti uno può anche vedere che  $\dot{x}_1(t) \geq 0$ , con  $\dot{x}_1(t) = 0$  per  $t = t_0 + 2k\pi/\omega$ , indipendentemente dalle masse. Quindi se  $m_1 = m_2$ , anche  $\dot{x}_2(t) = 0$  per  $t = t_0 + (2k+1)\pi/\omega$ , ma mai negativo. 3. Si conserva, perché l'unica forza esterna è la reazione normale della parete, che agisce per  $t < t_0$  e non compie lavoro. Un calcolo esplicito mostra che essa vale  $E = \frac{1}{2}k(\ell - r_0)^2$  sia all'inizio che a regime.]

## 2 Slitta molla massa

Una slitta di massa  $M$  e lunga  $d$  è libera di muoversi su piano orizzontale con attrito trascurabile. Ad un estremo della slitta, all'interno, è posta una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza di riposo  $\ell_0$ . All'altro estremo della slitta, sempre all'interno, vi è un blocchetto di massa  $m$ . Per  $t < t_0$  il sistema è fermo. All'istante  $t_0$  una piccola esplosione all'interno della slitta fornisce al sistema un'energia  $E$ , mettendo in movimento slitta e massa. Dopo l'esplosione il blocchetto si sposta all'interno della slitta, raggiunge la molla e la comprime. Tra slitta e blocchetto vi è attrito dinamico con coefficiente  $\mu_d$ . Si calcoli:

1. la velocità  $v_0$  del blocchetto e  $V_0$  della slitta nell'istante immediatamente successivo all'esplosione;
2. la velocità  $v_1$  del blocchetto e  $V_1$  della slitta nell'istante in cui la compressione della molla è massima;
3. la massima compressione  $x$  della molla.

[Sol: 1.  $V_0 = \sqrt{\frac{2Em}{M(m+M)}}$ ,  $v_0 = -\sqrt{\frac{2EM}{m(m+M)}}$ ; 2.  $v_1 = V_1 = 0$ ;

3.  $x = -\frac{mg\mu_d}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg\mu_d}{k}\right)^2 + \frac{2}{k}(E - mg\mu_d(d - \ell_0))}$ ]

Risolvere di nuovo il problema assumendo che l'esplosione sia avvenuta all'esterno, dal lato della molla.

[Sol: 1.  $v_0 = 0$ ,  $V_0 = \sqrt{\frac{2E}{M}}$ ; 2.  $v_1 = V_1 = \frac{M}{m+M}V_0 = \frac{\sqrt{2ME}}{m+M}$ ;

3.  $x = -\frac{mg\mu_d}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg\mu_d}{k}\right)^2 + \frac{2}{k}\left(\frac{m}{m+M}E - mg\mu_d(d - \ell_0)\right)}$ ]