

Esercitazione 26 e 27

Marco Bonvini

21 Maggio 2018

1 Dimostrazioni

- Teorema di Huygens-Steiner, con un asse identificato da un punto \vec{x}_n e un versore \hat{n} , usando come distanza dall'asse il modulo del vettore $\vec{x}_\perp = \vec{x} - \vec{x}_n - [(\vec{x} - \vec{x}_n) \cdot \hat{n}]\hat{n}$.
- Teorema di Huygens-Steiner, usando come distanza dall'asse $|\vec{x}_\perp| = |(\vec{x} - \vec{x}_n) \wedge \hat{n}|$.
- Il tensore di inerzia I_{ij} , definito da $L_{cm,i} = I_{ij}\omega_j$, che si trova quindi essere

$$I_{ij} = \int dM [x'^2 \delta_{ij} - x'_i x'_j],$$

essendo $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{x}_{cm}$.

- La relazione tra tensore di inerzia e momento di inerzia, ottenuta assumendo l'asse parallelo a $\vec{\omega}$, ovvero $\vec{\omega} = \omega \hat{n}$, calcolando $\hat{n} \cdot \vec{L}_{cm} = I_{cm,\hat{n}}\omega$, da cui

$$I_{cm,\hat{n}} = I_{ij}n_i n_j = \int dM [x'^2 - (\vec{x}' \cdot \vec{n})^2],$$

che corrisponde alla definizione originale, ottenuta usando il vettore \vec{x}_\perp .

2 La scimmia

Una scimmia siede su un disco che può ruotare senza attrito attorno ad un asse verticale passante per il centro e ortogonale al piano del disco. Sull'asse di rotazione, più in alto, vi è una ruota di bicicletta (di raggio $r = 35\text{cm}$ e massa $m = 3.0\text{kg}$) libera di ruotare senza attrito attorno all'asse stesso. All'istante iniziale la ruota gira con velocità angolare $\omega_0 = 60\text{rad/s}$. La scimmia, improvvisamente, acchiappa la ruota e la ferma. Descrivere il moto, sapendo che il momento di inerzia complessivo del sistema disco-scimmia-ruota rispetto all'asse di rotazione è $I_{tot} = 2.0\text{kgm}^2$. L'energia si conserva?

[Sol: il sistema si muove rigidamente con velocità angolare $\omega = \omega_0 m r^2 / I_{tot} = 0.18\text{rad/s}$. L'energia non si conserva]

3 L'asta con cerniera molleggiata

Un'asta rigida di lunghezza $\ell = 0.80\text{m}$ e massa M è incernierata al suo estremo A e appesa all'altro estremo B , tramite una fune ideale e una carrucola, ad un corpo di massa $m = 10.0\text{kg}$. Il sistema è in equilibrio, con l'asta in posizione orizzontale.

1. Calcolare la massa M dell'asta.
2. Calcolare modulo, direzione e verso della reazione vincolare nel punto A .

A un certo istante la fune viene tagliata, e l'asta comincia a ruotare attorno al polo A . Il vincolo in A oppone resistenza elastica, descritta dal momento $\tau = k\theta$, essendo θ l'angolo rispetto alla posizione orizzontale iniziale.

3. Calcolare la costante elastica k sapendo che l'asta inverte il moto per la prima volta ad un angolo $\theta_1 = 150^\circ$.

[Sol: 1. $M = 2m = 20.0\text{kg}$; 2. $R_y = mg = 98.1\text{N}$; 3. $k = Mg\ell \sin \theta_1 / \theta_1^2 = 11.5\text{Nm/rad}$]