

Esercitazione 30 e 31

Marco Bonvini

24 Maggio 2018

1 L'asta imperniata che urta il blocchetto

Un'asta rigida di lunghezza ℓ e massa M è incernierata al suo estremo A e viene tenuta ferma orizzontale. La cerniera A è posta ad un'altezza dal suolo pari a ℓ . Al suolo, esattamente sotto A , è posizionato un corpo di massa m inizialmente fermo. Ad un certo istante l'asta viene lasciata libera di ruotare attorno alla cerniera, ed essa scendendo urta il corpo. Determinare:

1. i parametri del moto immediatamente dopo l'urto assumendo che esso sia elastico;
2. i parametri del moto immediatamente dopo l'urto assumendo che esso sia completamente anaelastico;
3. la massima altezza raggiunta dalla sbarra in entrambi i casi precedenti;
4. La quantità di moto si conserva? Motivare la risposta.

Studiare i limiti $M \gg m$ e $M \ll m$ nei casi precedenti.

[Sol: Durante l'urto il momento angolare rispetto ad A si conserva

1. $\omega_e = \frac{M-3m}{M+3m} \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$, $v_e = \frac{2M}{M+3m} \sqrt{3g\ell}$; 2. $\omega_a \ell = v_a = \frac{M}{M+3m} \sqrt{3g\ell}$;
3. $\theta_e^{\max} = \text{sign}(M - 3m) \arccos\left(1 - \left[\frac{3m-M}{3m+M}\right]^2\right)$, $\theta_a^{\max} = \arccos\left(1 - \left[\frac{M}{3m+M}\right]^2\right)$;
4. No, per causa del vincolo che fornisce una forza impulsiva. Si ha $\frac{\Delta p_e}{p_i} = \frac{-2m}{M+3m}$, $\frac{\Delta p_a}{p_i} = \frac{-m}{M+3m}$]

2 La palla, il proiettile e il gradino

Una palla di raggio $R = 80\text{cm}$ e massa $M = 6.0\text{kg}$ si trova in quiete su un piano liscio. Un proiettile di massa $m = 60\text{g}$ viene sparato orizzontalmente con velocità v , alla quota del centro della palla. Esso colpisce la palla e vi si conficca dentro, fino a raggiungerne esattamente il centro.

1. Determinare la velocità del sistema dopo l'urto rispetto a quella del proiettile.
2. Determinare la percentuale di energia dissipata nell'urto.
3. Se la palla incontra un gradino di altezza $h = 15\text{cm}$, ed impatta su di esso in modo anaelastico tale che il punto della palla che tocca lo spigolo del gradino resta fermo, qual'è il valore minimo di v affinché la palla salga sopra il gradino? Quanta energia viene dissipata?
4. Cosa cambia se nel tratto tra la posizione iniziale della palla e il gradino vi è attrito con coefficiente dinamico $\mu = 0.1$? Si assuma che la distanza tra la posizione iniziale della palla e il gradino sia sufficientemente grande.

[Sol: 1. $V_0/v = \frac{m}{m+M} = 0.010$; 2. $K_1/K_{in} = \frac{m}{m+M} = 1.0\%$, $\Delta K/K_{in} = \frac{M}{m+M} = 99\%$; 3. $v \geq \frac{R\sqrt{2gh(m+M)(m+7M/5)}}{m(R-h)} = 2.5 \cdot 10^2 \text{m/s}$. Definendo K_3 l'energia cinetica immediatamente dopo l'urto col gradino si ha $K_3/K_1 = 0.47$, ovvero l'energia dissipata è il 53%; 4. La palla comincia a rotolare strisciando e rallentando. La velocità diminuisce come $V(t) = V_0 - g\mu t$ e la velocità angolare aumenta come $\omega = -\frac{5(m+M)}{2MR}g\mu t$. Dopo un tempo $t = \frac{V_0}{g\mu} \frac{2M}{5m+7M}$ si ha $V = -\omega R = V_0 \frac{m+M}{m+7M/5}$ e la palla rotola senza strisciare. Questo avviene dopo aver percorso $x = V_0 t - \frac{1}{2}g\mu t^2$. Assumiamo che questo spazio sia minore della distanza tra la posizione iniziale e il gradino, come suggerito dal testo. Sotto questa assunzione, il moto di puro rotolamento inizia prima di raggiungere il gradino. Nel transire al moto di puro rotolamento vi è un'ulteriore perdita di energia $K_2 = \frac{1}{2}(m+M)V^2 + \frac{1}{2}I_C \left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{m+M}{m+7M/5}K_0 = 0.72K_0$ rispetto a quella immediatamente dopo l'urto del proiettile. Tuttavia la palla ha iniziato a ruotare, quindi è agevolata nella salita. Imponendo la conservazione del momento angolare nell'urto col gradino, e richiedendo sufficiente energia per salire, si trova $\frac{1}{2}I_O \left(\frac{(m+M)(R-h)+I_C/R}{I_O}V\right)^2 \geq (m+M)gh$, con $I_O = (m+M)R^2 + I_C = (m+7M/5)R^2$. Sostituendo le espressioni di V in funzione di V_0 in funzione di v , si trova $v \geq \frac{R(m+7M/5)\sqrt{2gh(m+M)(m+7M/5)}}{m[R(m+7M/5)-h(m+M)]} = 2.4 \cdot 10^2 \text{m/s}$. Notare che la velocità richiesta quando c'è attrito è paradossalmente minore che nel caso senza attrito. Il motivo è che, sebbene l'attrito dissipi energia, l'energia dissipata nell'urto della palla col gradino è minore, visto che in questo caso arriva già rotolando. Infatti, si ha $K_3/K_2 = \left[1 - \frac{h(m+M)}{R(m+7M/5)}\right]^2 = 0.75$, da cui si trova che $K_3/K_1 = 0.54$, ovvero l'energia finale è ridotta del 46% rispetto a quella che aveva immediatamente dopo l'urto col proiettile, ed è quindi maggiore di quella del caso senza attrito.]