

# Teorema di Dirichlet

Marco Bonvini

Appunti integrativi al corso Meccanica Analitica e Relativistica  
Corso di laurea in Fisica, Sapienza Università di Roma, AA 2020/2021

**Definizione 1.** Una configurazione  $P_i^* \equiv P_i(q^*)$  è di equilibrio stabile se  $\forall$  intorno  $\mathcal{E}$  in  $\hat{\mathcal{A}}_{2n}$  dell'atto do moto nullo  $\tilde{q} \equiv (q^*|0) \exists$  un intorno  $\Delta \ni \tilde{q}$  tale che l'evoluzione temporale di ogni atto di moto  $(q|\dot{q}) \in \Delta$  resta in  $\mathcal{E} \forall t$ .

Un punto in  $\Delta$  rappresenta un set di condizioni iniziali per il problema di Cauchy, e quindi determina un'unica soluzione del moto, ovvero una curva in  $\hat{\mathcal{A}}_{2n}$ . Tale curva può uscire da  $\Delta$  ma deve stare interamente dentro  $\mathcal{E}$  affinché la posizione sia di equilibrio stabile. Va da se che  $\Delta \subseteq \mathcal{E}$ .

**Teorema 1** (di Dirichlet). Assumiamo un sistema lagrangiano scleronomo, in coordinate adatte, con lagrangiana  $L$  indipendente dal tempo. Condizione sufficiente affinché una posizione  $P_i^* \equiv P_i(q^*)$  sia di equilibrio stabile è che  $q^*$  sia un massimo locale di  $L_0(q)$ , ovvero  $\exists$  un intorno  $\tilde{\Delta} \ni q^*$  tale che  $L_0(q) < L_0(q^*) \forall q \in \tilde{\Delta}, q \neq q^*$ .

*Dimostrazione.* Siccome il potenziale è definito a meno di una costante, possiamo in tutta generalità scegliere  $L_0(q^*) = 0$ . Siccome  $L_2 = T_2$  è definita positiva, e per ipotesi  $L_0(q) < 0$  in tutti i punti di  $\tilde{\Delta}$  eccetto  $q^*$ , si ha che l'energia generalizzata

$$\mathcal{H} = L_2 - L_0 > 0 \quad \text{in tutti i punti di } \tilde{\Delta} \text{ eccetto } q^*. \quad (1)$$

L'energia generalizzata  $\mathcal{H}$  dipende però sia dalle  $q$  che dalle  $\dot{q}$ , ed è perciò conveniente spostare la nostra discussione nello spazio  $\hat{\mathcal{A}}_{2n}$ , anche per un confronto diretto con la definizione 1 di equilibrio stabile.

Dall'equazione (1) possiamo dedurre che in  $\hat{\mathcal{A}}_{2n} \exists$  un intorno  $\mathcal{Z} \ni \tilde{q} \equiv (q^*|0)$  tale che  $\mathcal{H} > 0 \forall (q|\dot{q}) \in \mathcal{Z}$  eccetto che in  $\tilde{q}$ , dove  $\mathcal{H} = 0$ . (In pratica è sufficiente che i valori delle componenti  $q$  dei punti in  $\mathcal{Z}$  siano in  $\tilde{\Delta}$ .) Siccome lo scopo è dimostrare che sotto queste condizioni  $q^*$  è posizione di equilibrio stabile, prendiamo un qualunque intorno  $\mathcal{E} \ni \tilde{q}$  e cerchiamo di trovare un opportuno  $\Delta$  soddisfacente la definizione 1.

A tal fine, restringiamo la nostra attenzione all'intersezione (sicuramente non vuota)  $\mathcal{E} \cap \mathcal{Z}$ , che è a sua volta un intorno di  $\tilde{q}$ . Prendiamo al suo interno un intorno  $K \ni \tilde{q}$  compatto,  $K \subset (\mathcal{E} \cap \mathcal{Z})$ . La frontiera di  $K$ , indicata con  $\partial K$ , è per costruzione contenuta in  $\mathcal{Z}$ . Perciò, su  $\partial K \subset \mathcal{Z}$ , si ha  $\mathcal{H} > 0$  (strettamente, perché l'unico punto in cui  $\mathcal{H} = 0$  è  $\tilde{q}$  che sicuramente non è sulla frontiera di  $K$ , ma al suo interno). E siccome  $K$  è compatto, anche la sua frontiera  $\partial K$  è compatta. Quindi, per il teorema di Weierstrass,  $\mathcal{H}$  (che è una funzione continua) ha un minimo  $\mathcal{H}_{\min}$  su  $\partial K$ .

Possiamo ora costruire l'intorno  $\Delta \ni \tilde{q}$  (candidato a soddisfare la definizione 1) come

$$\Delta = \{(q|\dot{q}) \mid (q|\dot{q}) \in K, \quad \mathcal{H}(q|\dot{q}) < \mathcal{H}_{\min}\}. \quad (2)$$

Si noti che la condizione richiede  $\mathcal{H}(q|\dot{q})$  strettamente minore di  $\mathcal{H}_{\min}$ , per cui  $\Delta$  è un aperto. Inoltre, per costruzione,  $\Delta \subset K \subset (\mathcal{E} \cap \mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{E}$ , e quindi  $\Delta \subset \mathcal{E}$ . Infine, contiene il punto  $\tilde{q}$ , ed è quindi un suo intorno.

Per verificare che  $\Delta$  così definito soddisfi la definizione 1 notiamo che, siccome per ipotesi  $L$  è indipendente dal tempo, l'energia generalizzata  $\mathcal{H}$  è costante sulle curve soluzioni del moto. Partendo da un atto di moto  $(q(0)|\dot{q}(0)) \in \Delta$ , il moto deve avvenire con  $\mathcal{H} < \mathcal{H}_{\min}$  costante, e quindi  $(q(t)|\dot{q}(t))$  deve rimanere all'interno di  $\Delta$  per ogni tempo  $t$ . Siccome  $\Delta \subset \mathcal{E}$  segue anche che il moto avviene dentro  $\mathcal{E}$ .  $\square$