

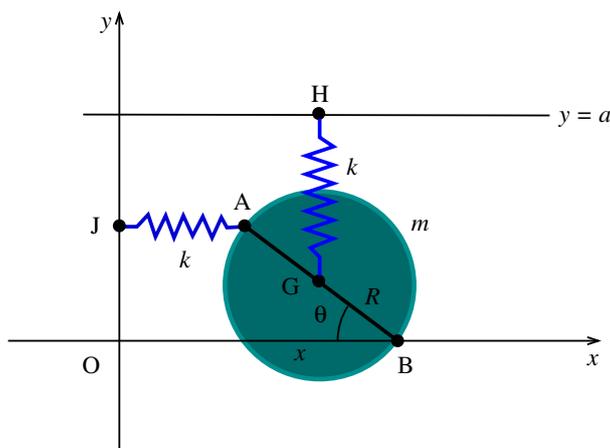
Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 15 febbraio 2021
Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Meccanica Lagrangiana [12 punti].

In un piano orizzontale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy , si muove un disco rigido omogeneo, di raggio R e massa m . Il punto B sul bordo del disco è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse Ox , ed il disco è libero di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxy e passante per B (si veda la figura). Sul sistema agiscono le forze attive $\underline{F}_1 = -kHG$, con $k > 0$, e $\underline{F}_2 = -kJA$, con G centro di massa del disco, H proiezione ortogonale di G sulla retta $y = a$ e J proiezione ortogonale di A sulla retta $x = 0$. Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di B e l'angolo θ che il diametro AB del disco forma con l'asse Ox .

1. Si scriva la funzione di Lagrange \mathcal{L} del sistema.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $a \in (-\infty, +\infty)$.
3. Ponendo ora $k = 1$, $m = 1$, $a = 1$, $R = 2$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia del disco rispetto al suo centro di massa G è $I_G = \frac{1}{2}mR^2$.



2. Trasformazioni canoniche [6 punti]. È assegnata la trasformazione

$$p = \alpha q e^{Q/\beta},$$

$$P = -(q^\gamma e^Q + \gamma Q),$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P , con α, β, γ parametri reali.

1. Dire per quali valori dei parametri α, β, γ la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza dei valori trovati al punto precedente, determinare la funzione generatrice della trasformazione canonica $F_1(q, Q)$.

3. Dilatazione dei tempi [6 punti]. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Una astronave parte da Terra muovendosi lungo l'asse x con velocità $v_1 = c/5$. Dopo un tempo $T_0 = 1$ anno, da Terra viene mandato un segnale elettromagnetico con l'indicazione di tornare indietro. Appena ricevuto il segnale, l'astronave inverte la direzione di moto e torna sulla Terra con velocità $v_2 = c/2$.

1. A che distanza dalla Terra si trova l'astronave quando riceve il segnale?
2. Qual è la durata complessiva del viaggio di andata e ritorno, misurata da un orologio a Terra e da un orologio sull'astronave?

4. Dinamica relativistica e urti [6 punti]. Una particella relativistica di massa propria m , ferma in un sistema di riferimento inerziale K all'istante $t = 0$, viene messa in moto da una forza $F(t) = \alpha A \exp(\alpha t)$ diretta lungo l'asse y , con A, α costanti dimensionali.

1. Si determini la legge oraria $v(t)$ per $t > 0$.
2. Assumendo $A = mc/3$, si trovi il tempo t^* in funzione di α in cui la velocità valga $v^* \equiv v(t^*) = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

Nell'istante t^* la particella urta una particella di massa di riposo $M = 2m$, in quiete nello stesso riferimento K , creando una nuova unica particella di massa μ .

3. Determinare la velocità della particella finale.
4. Determinare la sua massa di riposo μ in funzione di m .

Soluzioni del compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 15 febbraio 2021

Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Meccanica lagrangiana.

1. Si ha $x_G = x - R \cos \theta$, $y_G = R \sin \theta$, $x_A = x - 2R \cos \theta$, $y_A = 2R \sin \theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \frac{3}{2}R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}kx_A^2 + \frac{1}{2}k(a - y_G)^2 = \frac{1}{2}k(x^2 + a^2 + R^2 + 3R^2\cos^2\theta - 4Rx\cos\theta - 2aR\sin\theta).$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$.

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U = kx - 2kR\cos\theta, \quad \partial_\theta U = -3kR^2\sin\theta\cos\theta + 2kRx\sin\theta - kRa\cos\theta.$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$\begin{cases} x = 2R\cos\theta, \\ kR(R\sin\theta - a)\cos\theta = 0. \end{cases}$$

La prima posizione di equilibrio è $x_1 = 0$ e $\cos\theta_1 = 0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$.

La seconda posizione di equilibrio è $x_2 = 0$ e $\cos\theta_2 = 0$, $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$.

Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\sin\theta_{3,4} = \frac{a}{R}$, $\cos\theta_3 \geq 0$ e $\cos\theta_4 \leq 0$ e $x_{3,4} = \pm 2R\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}$. Queste due posizioni esistono solo se $|\frac{a}{R}| \leq 1$. Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial_{xx}^2 U = k, \quad \partial_{\theta\theta}^2 U = -3kR^2\cos 2\theta + 2kRx\cos\theta + kRa\sin\theta, \quad \partial_{x\theta}^2 U = \partial_{\theta x}^2 U = 2kR\sin\theta.$$

Poiché $\partial_{xx}^2 U > 0$ andiamo a calcolare il determinante della matrice Hessiana dell'energia potenziale \mathbb{U} imponendo che sia maggiore di 0:

$$\det \mathbb{U} = -3k^2R^2\cos^2\theta - k^2R^2\sin^2\theta + 2k^2Rx\cos\theta + k^2Ra\sin\theta > 0.$$

Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_1, θ_1) è stabile per $a > R$.

La posizione di equilibrio (x_2, θ_2) è stabile per $a < -R$.

Le posizioni 3, 4 infine sono stabili per $|a| < R$.

Riassumendo, per $|a| < R$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, due instabili (la 1 e la 2) e due stabili (la 3 e la 4); per $a > R$ si hanno due posizioni di equilibrio, la 1 stabile e la 2 instabile; per $a < -R$ si hanno due posizioni di equilibrio, la 1 instabile e la 2 stabile.

3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la 3 e la 4. Si ha $\sin\theta_{3,4} = \frac{1}{2}$ e $\cos^2\theta_{3,4} = \frac{3}{4}$. La matrice Hessiana dell'energia cinetica è

$$\mathbb{T}_{\dot{x}\dot{x}} = m \quad \mathbb{T}_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \frac{3}{2}mR^2, \quad \mathbb{T}_{\dot{x}\dot{\theta}} = \mathbb{T}_{\dot{\theta}\dot{x}} = mR\sin\theta.$$

La matrice Hessiana dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$\mathbb{U}_{xx} = k, \quad \mathbb{U}_{\theta\theta} = kR^2 + 3ka^2, \quad \mathbb{U}_{x\theta} = \mathbb{U}_{\theta x} = 2ka.$$

L'equazione secolare $\det|\mathbb{U} - \omega^2\mathbb{T}| = 0$ dà

$$(1 - \omega^2)(7 - 6\omega^2) - (2 - \omega^2)^2 = 0,$$

che si può riscrivere come

$$5\omega^4 - 9\omega^2 + 3 = 0.$$

L'equazione ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{10} \quad \Rightarrow \quad \omega_+^2 = 1.358, \quad \omega_-^2 = 0.442.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = 1.165$ e $\omega_- = 0.665$.

2. Trasformazioni canoniche.

1. Invertendo la trasformazione si trova

$$Q = \beta \log \frac{p}{\alpha q},$$
$$P = - \left[q^{\gamma-\beta} \left(\frac{p}{\alpha} \right)^\beta + \gamma\beta \log \frac{p}{\alpha q} \right].$$

Imponendo che la parentesi di Poisson $[Q, P]_{q,p} = 1$, si trova

$$\frac{\gamma\beta}{\alpha^\beta} q^{\gamma-\beta-1} p^{\beta-1} = 1,$$

da cui segue $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\alpha = 2$.

2. In corrispondenza dei valori trovati al punto precedente si ha

$$p = 2q e^Q,$$
$$P = - (q^2 e^Q + 2Q).$$

Integrando la forma differenziale $dF_1 = p dq - P dQ$ si trova

$$F_1(q, Q) = \int 2q e^Q dq = q^2 e^Q + C(Q),$$
$$F_1(q, Q) = \int (q^2 e^Q + 2Q) dQ = q^2 e^Q + Q^2 + \tilde{C}(q).$$

e dal confronto si deduce $C(Q) = Q^2$, $\tilde{C}(q) = 0$ e

$$F_1(q, Q) = q^2 e^Q + Q^2.$$

3. Dilatazione dei tempi.

1. Siano (t_1, x_1) le coordinate dell'evento in cui l'astronave riceve il segnale. Sarà

$$x_1 = c(t_1 - T_0) = \frac{c}{5} t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{5}{4} T_0$$

quindi l'astronave riceve il segnale a $x_1 = \frac{cT_0}{4} = 0.25$ a.l. (anni luce).

2. L'astronave torna a Terra al tempo t_2 nel riferimento di Terra. Essa percorre il tratto x_1 a velocità $c/2$ nel tempo

$$t_2 - t_1 = \frac{x_1}{c/2} = \frac{T_0}{2} \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{5}{4} T_0 + \frac{1}{2} T_0 = \frac{7}{4} T_0 = 1.75 \text{ anni.}$$

L'orologio sull'astronave segna $\tau = \tau_1 + \tau_2$ con

$$\tau_1 = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} t_1 = \frac{2}{5} \sqrt{6} \cdot \frac{5}{4} T_0 = \frac{\sqrt{6}}{2} T_0$$
$$\tau_2 = \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}} (t_2 - t_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} T_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} T_0$$

quindi

$$\tau = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) T_0 = 1.66 \text{ anni.}$$

4. Dinamica relativistica e urti.

1. Dalle relazioni $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ e $\vec{P} = \gamma\vec{v}$, si trova immediatamente (tenendo conto che $v \equiv |\vec{v}| = v_y$)

$$\frac{mv(t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}} = I(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2(t)}{c^2} = \frac{I^2(t)}{I^2(t) + m^2c^2}$$

con

$$I(t) \equiv \int_0^t dt' F(t') = A[\exp(\alpha t) - 1],$$

da cui

$$v(t) = c \frac{A[\exp(\alpha t) - 1]}{\sqrt{A^2[\exp(\alpha t) - 1]^2 + m^2c^2}}.$$

2. Utilizzando la prima equazione, si può scrivere

$$I(t^*) = \frac{mv(t^*)}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t^*)}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \exp(\alpha t^*) = 1 + \frac{mv^*/A}{\sqrt{1 - \frac{v^{*2}}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad t^* = \frac{1}{\alpha} \log \left(1 + \frac{3v^*/c}{\sqrt{1 - \frac{v^{*2}}{c^2}}} \right) = \frac{1.82}{\alpha}.$$

3. Il quadri-impulso della particella di massa m nell'istante t^* dell'urto è

$$P_1 = (m\gamma^*c, 0, m\gamma^*v^*, 0), \quad \gamma^* = \left(1 - \frac{v^{*2}}{c^2}\right)^{-1/2} = 2$$

mentre per la particella di massa M

$$P_2 = (Mc, 0, 0, 0).$$

La particella di stato finale avrà

$$P_{\text{fin}} = (\mu\gamma'c, 0, \mu\gamma'v', 0), \quad \gamma' = \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)^{-1/2},$$

che per conservazione del quadri-impulso durante l'urto deve essere uguale a $P_1 + P_2$. Seguono le relazioni

$$\begin{aligned} m\gamma^*c + Mc &= \mu\gamma'c, \\ m\gamma^*v^* &= \mu\gamma'v'. \end{aligned}$$

Eliminando $\mu\gamma'$ si trova

$$m\gamma^*v^* = (m\gamma^* + M)v'$$

da cui

$$v' = \frac{m\gamma^*}{m\gamma^* + M}v^* = \frac{2m}{2m + 2m}v^* = \frac{v^*}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

4. Sostituendo questo risultato nella prima delle due equazioni si ottiene

$$\mu = \frac{m\gamma^* + M}{\gamma'} = \sqrt{13}m.$$