

Prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 19 gennaio 2021

Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. **Trasformazioni canoniche [8 punti].** È assegnata la trasformazione

$$\begin{aligned} p &= (\alpha q^\beta + Q)^{1/\gamma}, \\ P &= -\beta q^\alpha + Q, \end{aligned}$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P , con α, β, γ parametri reali.

1. Dire per quali valori di α, β, γ la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice della trasformazione canonica, $F_1(q, Q)$.

• **Si risolvano i seguenti tre problemi nell'ambito della relatività ristretta.**

2. **Trasformazioni di Lorentz [8 punti].** Sia dato, in un sistema di riferimento inerziale, un sistema di coordinate (ct, x, y, z) . Siano dati tre eventi E_1, E_2 e E_3 che, nel sistema di riferimento dato, hanno coordinate

$$E_1 = (5, 4, 3, 2); \quad E_2 = (4, 3, 3, 3); \quad E_3 = (2, 4, 2, 3).$$

1. Indicare se esiste un riferimento in cui gli eventi E_1 e E_2 avvengono simultaneamente e, in tal caso, determinare una trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.
2. Indicare se esiste un riferimento in cui gli eventi E_1 e E_3 avvengono nello stesso luogo e, in tal caso, determinare la trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.
3. Calcolare la separazione temporale tra E_1 e E_3 nel sistema di riferimento trovato al punto precedente.

3. **Cinematica relativistica [7 punti].** All'istante $t = 0$, dopo aver sincronizzato i loro orologi con quelli di un osservatore inerziale O , due astronauti A_1 e A_2 si muovono lungo l'asse x di un sistema di riferimento solidale con O , con velocità, rispettivamente, $v_1 = \frac{4}{5}c$ e $v_2 = \frac{3}{5}c$. Quando sull'orologio di O è segnato il tempo t_0 , A_1 inverte il moto e va incontro a A_2 con velocità in modulo uguale a v_1 .

1. Determinare l'istante t^* che l'orologio di O segna quando A_1 e A_2 si incontrano nuovamente.
2. Determinare e confrontare i tempi segnati dagli orologi di A_1 e A_2 , rispettivamente τ_1 e τ_2 , per $t = t^*$.

4. **Urti [7 punti].** Due particelle di massa a riposo, rispettivamente, $m_1 = m$ e $m_2 = \lambda m$ (con $\lambda > 0$ parametro adimensionale), si muovono lungo l'asse x con velocità $v_1 = \frac{c}{2}$ e $v_2 = -\frac{c}{4}$. Nell'urto delle due particelle, vengono generate due particelle uguali, di massa a riposo M , che si muovono lungo l'asse y con velocità uguali e opposte, V e $-V$.

1. Dire per quale valore di λ il processo è compatibile con la legge di conservazione dell'impulso.
2. Fissato λ al valore trovato al punto precedente, determinare M_{\max} definito come il valore massimo possibile di M compatibile con la legge di conservazione dell'energia.
3. Sempre per lo stesso valore di λ , determinare V per $M = \frac{4\sqrt{3}}{5}m$.

Soluzioni della prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 19 gennaio 2021

Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Trasformazioni canoniche. Esprimiamo le variabili Q, P in funzione di q, p :

$$\begin{aligned} Q &= p^\gamma - \alpha q^\beta, \\ P &= p^\gamma - \beta q^\alpha - \alpha q^\beta. \end{aligned}$$

Per fissare i parametri α, β, γ imponiamo la condizione:

$$[Q, P]_{q,p} = -\alpha\beta\gamma q^{\beta-1} p^{\gamma-1} + \alpha\beta\gamma p^{\gamma-1} (q^{\alpha-1} + q^{\beta-1}) = \alpha\beta\gamma p^{\gamma-1} q^{\alpha-1} = 1,$$

dalla quale segue che $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1$. La trasformazione canonica si può quindi riscrivere:

$$\begin{aligned} p &= q + Q, \\ P &= -q + Q. \end{aligned}$$

Integrando il differenziale $dF_1(q, Q) = p dq - P dQ$ si ottiene:

$$F_1(q, Q) = \frac{q^2}{2} + Qq - \frac{Q^2}{2}.$$

2. Trasformazioni di Lorentz. Sia K il riferimento di partenza, di coordinate (ct, x, y, z) .

1. La separazione tra gli eventi E_1, E_2 è il quadrivettore

$$\underline{E_1 E_2} = (-1, -1, 0, 1).$$

L'intervallo spazio-temporale tra gli eventi è la norma

$$|\underline{E_1 E_2}|^2 = -1 < 0,$$

quindi la separazione è di tipo spazio, ed esistono sistemi di riferimento inerziali in cui gli eventi sono simultanei. Ne scegliamo uno \tilde{K}' tale che la trasformazione tra K e \tilde{K}' sia la composizione $K \rightarrow \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}'$. Il passaggio da K a \tilde{K} si ottiene con una rotazione attorno all'asse y , tale che in \tilde{K} la separazione spaziale tra gli eventi sia lungo l'asse x . Il passaggio da \tilde{K} a \tilde{K}' si ottiene con un boost di Lorentz.

La rotazione $K \rightarrow \tilde{K}$ è:

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= t \\ \tilde{x} &= \frac{x - z}{\sqrt{2}} \\ \tilde{y} &= y \\ \tilde{z} &= \frac{x + z}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

per cui $c\Delta\tilde{t} = c\Delta t = -1$, $\Delta\tilde{x} = \frac{\Delta x - \Delta z}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$, $\Delta\tilde{y} = \Delta y = 0$, $\Delta\tilde{z} = \frac{\Delta x + \Delta z}{\sqrt{2}} = 0$.

La trasformazione di Lorentz speciale $\tilde{K} \rightarrow \tilde{K}'$ è:

$$\begin{aligned} \tilde{t}' &= \gamma \left(\tilde{t} - \frac{\tilde{v}}{c^2} \tilde{x} \right) \\ \tilde{x}' &= \gamma (\tilde{x} - \tilde{v} \tilde{t}) \\ \tilde{y}' &= \tilde{y} \\ \tilde{z}' &= \tilde{z} \end{aligned}$$

e

$$c\Delta\tilde{t}' = \gamma \left(c\Delta\tilde{t} - \frac{\tilde{v}}{c} \Delta\tilde{x} \right) = \gamma \left(-1 + \frac{\tilde{v}}{c} \sqrt{2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{v} = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Analogamente, si sarebbe potuto scegliere un sistema di riferimento K' con assi paralleli a K ottenuto da quest'ultimo con un boost di velocità $\vec{v} = (\frac{c}{2}, 0, -\frac{c}{2})$.

2. La separazione tra gli eventi E_1, E_3 è il quadrivettore

$$\underline{E_1 E_3} = (-3, 0, -1, 1).$$

L'intervallo spazio-temporale tra gli eventi è la norma

$$|\underline{E_1 E_3}|^2 = 7 > 0,$$

quindi la separazione è di tipo tempo, ed esiste un riferimento inerziale \hat{K}' in cui gli eventi avvengono nello stesso luogo. La trasformazione tra K e \hat{K}' sarà la composizione $K \rightarrow \hat{K} \rightarrow \hat{K}'$ di una rotazione attorno all'asse x , tale che in \hat{K} la separazione spaziale tra gli eventi sia lungo l'asse y , e una trasformazione di Lorentz speciale.

La rotazione $K \rightarrow \hat{K}$ è:

$$\begin{aligned} \hat{t} &= t \\ \hat{x} &= x \\ \hat{y} &= \frac{y-z}{\sqrt{2}} \\ \hat{z} &= \frac{y+z}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

per cui $c\Delta\hat{t} = c\Delta t = -3$, $\Delta\hat{x} = \Delta x = 0$, $\Delta\hat{y} = \frac{\Delta y - \Delta z}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$, $\Delta\hat{z} = \frac{\Delta y + \Delta z}{\sqrt{2}} = 0$. La trasformazione di Lorentz speciale $\hat{K} \rightarrow \hat{K}'$ è:

$$\begin{aligned} \hat{t}' &= \gamma \left(\hat{t} - \frac{\hat{v}}{c^2} \hat{y} \right) \\ \hat{x}' &= \hat{x} \\ \hat{y}' &= \gamma (\hat{y} - \hat{v} \hat{t}) \\ \hat{z}' &= \hat{z} \end{aligned}$$

e

$$\Delta\hat{y}' = \gamma \left(\Delta\hat{y} - \frac{\hat{v}}{c} c\Delta\hat{t} \right) = \gamma \left(-\sqrt{2} + \frac{\hat{v}}{c} 3 \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{v} = \frac{\sqrt{2}}{3} c, \quad \gamma = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

Analogamente, si sarebbe potuto scegliere un sistema di riferimento K'' con assi paralleli a K ottenuto da quest'ultimo con un boost di velocità $\vec{v} = (0, \frac{c}{3}, -\frac{c}{3})$.

3. La separazione temporale (moltiplicata per c) tra E_1 ed E_3 nei sistemi di riferimento \hat{K}' e K'' è

$$c\Delta t'' = c\Delta\hat{t}' = \gamma \left(c\Delta\hat{t} - \frac{\hat{v}}{c} \Delta\hat{y} \right) = \frac{3}{\sqrt{7}} \left(-3 + \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{-9+2}{\sqrt{7}} = -\sqrt{7},$$

come è anche evidente dal fatto che $|\underline{E_1 E_3}|^2 = 7$.

3. Cinematica Relativistica. La condizione per determinare t^* è:

$$\frac{3}{5} c t^* + \frac{4}{5} c (t^* - t_0) = \frac{4}{5} c t_0,$$

dalla quale si ottiene:

$$t^* = \frac{8}{7}t_0.$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{t^*}{\gamma_1} = \frac{8}{7}t_0\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{24}{35}t_0, \\ \tau_2 &= \frac{t^*}{\gamma_2} = \frac{8}{7}t_0\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{32}{35}t_0,\end{aligned}$$

4. Urti. I quadrimomenti delle due particelle iniziali sono

$$p_1 = (m\gamma_1c, m\gamma_1v_1, 0, 0), \quad p_2 = (\lambda m\gamma_2c, \lambda m\gamma_2v_2, 0, 0), \quad \gamma_i = (1 - v_i^2/c^2)^{-1/2}$$

mentre quelli delle due particelle finali sono

$$p_3 = (M\gamma c, 0, M\gamma V, 0), \quad p_4 = (M\gamma c, 0, -M\gamma V, 0), \quad \gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$$

e si ha, per conservazione del quadrimomento,

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4.$$

1. Proiettando sulla prima componente spaziale, si trova

$$m\gamma_1v_1 + \lambda m\gamma_2v_2 = 0$$

ovvero, sostituendo $v_1 = c/2$ e $v_2 = -c/4$ (da cui $\gamma_1 = 2/\sqrt{3}$ e $\gamma_2 = 4/\sqrt{15}$) ed essendo $m > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \lambda \frac{1}{\sqrt{15}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \sqrt{5}.$$

2. Proiettando sulla componente temporale (conservazione dell'energia), si trova

$$m\gamma_1c + \lambda m\gamma_2c = 2M\gamma c \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\gamma_1 + \lambda\gamma_2}{2\gamma}m = \frac{\sqrt{3}}{\gamma}m,$$

che è massima quando γ è minima, ovvero quando $\gamma = 1$, corrispondente a $V = 0$ (particelle prodotte ferme). In tal caso

$$M_{\max} = \sqrt{3}m.$$

3. Fissato ora $M = \frac{4}{5}M_{\max}$, si trova dalla stessa equazione

$$\gamma = \frac{M_{\max}}{M} = \frac{5}{4},$$

da cui

$$V = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}c = \frac{3}{5}c.$$