Prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 24 novembre 2020
Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

In un piano orizzontale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si muove una barra rigida e omogenea AB, di massa M e lunghezza L. L'estremo A della barra è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con la retta $y = s$ (dove s è un parametro reale). La barra è libera di ruotare rigidamente sul piano Oxy, attorno ad un asse perpendicolare al piano stesso e passante per A, ed è soggetta alle due forze attive $\underline{F}_{\rm a} = -K\,\underline{\rm OA}$ e $\underline{F}_{\rm b} = -K\,\underline{\rm OB}$, con $K > 0$.
Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di A e l'angolo θ che la barra AB forma con il verso positivo dell'asse Ox (si veda la Fig. 1).

1. Si scriva la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$; si determinino i momenti cinetici coniugati p_x e p_θ.

2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $\lambda \equiv \frac{2s}{L}$ (con $-\infty < \lambda < +\infty$).

3. Ponendo ora $s = 1$, $L = 1$, $M = 1$, $K = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia della barra rispetto al suo centro di massa G è $I_{\rm G} = \frac{1}{12}ML^2$.

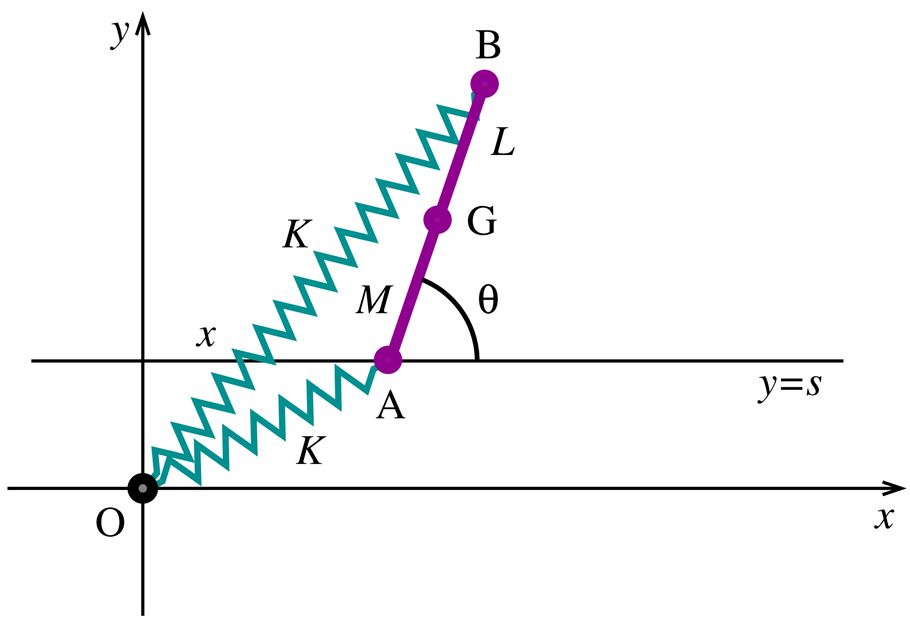

Fig. 1

Soluzione della prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 24 novembre 2020
Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Si ha $x_{\rm G} = x + \frac{L}{2}\cos\theta$, $y_{\rm G} = s + \frac{L}{2}\sin\theta$, $x_{\rm A} = x$, $y_{\rm A} = s$, $x_{\rm B} = x + L\cos\theta$, $y_{\rm B} = s + L\sin\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_{\rm G}^2 + \dot{y}_{\rm G}^2\right) + \frac{1}{2}I_{\rm G}\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \frac{1}{3}L^2\,\dot{\theta}^2 - L\sin\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta}\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}K\left(x_{\rm A}^2 + y_{\rm A}^2 + x_{\rm B}^2 + y_{\rm B}^2\right) = \frac{1}{2}K\left[x^2 + s^2 + (x + L\cos\theta)^2 + (s + L\sin\theta)^2\right].$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$. I momenti cinetici coniugati sono

$$p_x = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = M\dot{x} - \frac{ML}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}, \qquad p_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \frac{ML^2}{3}\dot{\theta} - \frac{ML}{2}\sin\theta\,\dot{x}.$$

Per completezza, si riportano di seguito anche le equazioni del moto, non richieste dalla traccia,

$$M\left(\ddot{x} - \frac{L}{2}\sin\theta\,\ddot{\theta} - \frac{L}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) = -K\left(2x + L\cos\theta\right),$$

$$M\left(\frac{L}{3}\,\ddot{\theta} - \frac{1}{2}\sin\theta\,\ddot{x}\right) = K\left(x\sin\theta - s\cos\theta\right).$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U = K\left(2x + L\cos\theta\right), \qquad \partial_\theta U = KL\left(s\cos\theta - x\sin\theta\right).$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$x = -\frac{L}{2}\cos\theta, \qquad \left(s + \frac{L}{2}\sin\theta\right)\cos\theta = 0.$$

La prima posizione di equilibrio è $\cos\theta_1 = 0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ e $x_1 = 0$.
La seconda posizione di equilibrio è $\cos\theta_2 = 0$, $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$ e $x_2 = 0$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\cos\theta \neq 0$, $\sin\theta_{3,4} = -\frac{2s}{L} \equiv -\lambda$, $\cos\theta_3 > 0$ e $\cos\theta_4 < 0$, e $x_{3,4} = \mp\frac{L}{2}\sqrt{1-\lambda^2}$.
Queste due posizioni esistono solo se $-1 \leq \lambda \leq 1$.
Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{xx}U = 2K, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = -KL\left(s\sin\theta + x\cos\theta\right), \quad \partial^2_{x\theta}U = \partial^2_{\theta x}U = -KL\sin\theta.$$

Poiché $\partial_{xx}U > 0$, la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che l'hessiano sia positivo. L'hessiano nella prima posizione vale $-K^2L(2s+L) \equiv -K^2L^2(\lambda+1)$, la posizione di equilibrio (x_1,θ_1) è stabile per $\lambda < -1$.
L'hessiano nella seconda posizione vale $K^2L(2s-L) \equiv K^2L^2(\lambda-1)$, quindi la posizione di equilibrio (x_2,θ_2) è stabile per $\lambda > 1$.
Nelle posizioni $3,4$ l'hessiano $K^2L^2\cos^2\theta$ è sempre positivo, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $-1 \leq \lambda \leq 1$.
Riassumendo, per $-1 \leq \lambda \leq 1$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili; per $\lambda < -1$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile; per $\lambda > 1$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima instabile, la seconda stabile
3. Per i valori assegnati dalla traccia si ha $\lambda = 2$, per cui la posizione stabile è la 2. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{x}\dot{x}} = M = 1, \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \frac{1}{3}ML^2 = \frac{1}{3}, \qquad T_{\dot{x}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{x}} = -\frac{L}{2}M\sin\theta = \frac{1}{2}.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{xx} = 2K = 2, \qquad U_{\theta\theta} = KLs = 1, \qquad U_{x\theta} = U_{\theta x} = KL = 1.$$

L'equazione secolare $\det |U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$\left(2 - \omega^2\right) \left(1 - \frac{1}{3}\omega^2\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\,\omega^2\right)^2 = 0,$$

cioè

$$\omega^4 - 8\,\omega^2 + 12 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = 4 \pm 2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 = 6, \quad \omega_-^2 = 2.$$

Quindi, le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = \sqrt{6} \approx 2.45$ e $\omega_- = \sqrt{2} \approx 1.41$.