

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 25 gennaio 2022

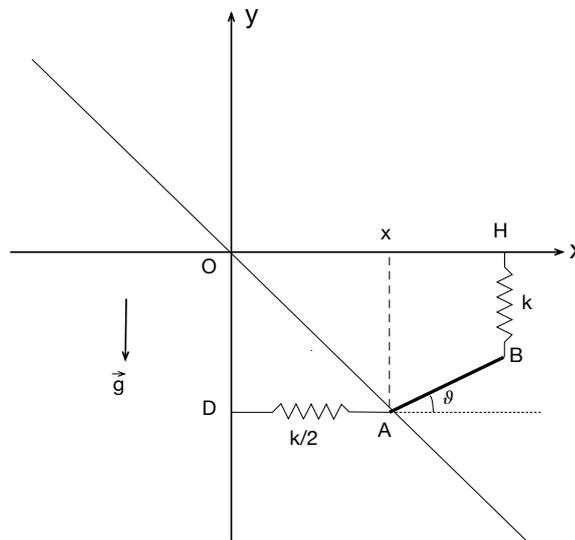
Proff. M. Bonvini, A. Crisanti, L. Gualtieri

1. Meccanica Lagrangiana [15 punti]. In un piano verticale è assegnato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy , con y verticale ascendente. In tale piano si muove un'asta omogenea AB di massa M e lunghezza ℓ , il cui estremo A è vincolato a muoversi lungo una guida rettilinea posta lungo la bisettrice del secondo e quarto quadrante (si veda la figura). L'asta è soggetta alle forze elastiche $\underline{F}_1 = -\frac{k}{2}\underline{DA}$, $\underline{F}_2 = -k\underline{HB}$, con $k > 0$, D proiezione di A sull'asse y ed H proiezione di B sull'asse x .

Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x dell'estremo A e l'angolo θ tra l'asta e la parallela all'asse x passante per A .

1. Si scriva la funzione di Lagrange del sistema.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità al variare del parametro adimensionale $\lambda \equiv \frac{Mg}{k\ell}$.
3. Ponendo ora, $g = 1$, $M = 3$, $k = 1$, $\ell = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia dell'asta rispetto al suo centro di massa G è $I_G = \frac{1}{12}M\ell^2$.



2. Trasformazioni canoniche [5 punti]. Si consideri la trasformazione

$$\begin{aligned} Q &= q^\alpha [p + \beta \cos(qt)], \\ p &= e^P + \cos(qt), \end{aligned}$$

dalle variabili canoniche q, p, t alle variabili Q, P, t , con α, β parametri reali.

1. Determinare la coppia di valori di α, β per cui la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_2(q, P, t)$ della trasformazione canonica.

3. Cinematica relativistica [5 punti]. Due astronavi A_1 e A_2 partono dalla Terra all'istante $t = 0$ muovendosi nella stessa direzione con versi opposti con velocità in modulo rispettivamente $v_1 = c/2$ e $v_2 = c/3$ in un sistema solidale alla Terra. Gli orologi delle due astronavi vengono sincronizzati con quello sulla Terra alla partenza. Quando l'orologio sull'astronave A_1 segna il tempo $\tau_B = 1y$, essa emette un segnale luminoso verso l'altra astronave (evento B). Si determini il tempo τ_D segnato dall'orologio di A_2 quando il segnale viene ricevuto (evento D).

4. Urto relativistici [5 punti]. Due particelle relativistiche di massa propria M si muovono lungo l'asse x di un sistema di riferimento $R = \{Oxyz\}$ con velocità, rispettivamente $\vec{v}_1 = (1/4, 0, 0)$ e $\vec{v}_2 = (-1/4, 0, 0)$, in unità $c = 1$. Dall'urto delle due particelle nascono due particelle, la prima con massa propria m e velocità $\vec{u}_1 = (1/\sqrt{3}, 0, 0)$, la seconda con massa propria $2m$ e velocità \vec{u}_2 . Determinare la velocità \vec{u}_2 della seconda particella e la massa m .

Soluzioni

1. Meccanica lagrangiana.

La lagrangiana del sistema è

$$L = \frac{M}{2} \left(2\dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{3} \dot{\theta}^2 - \ell(\sin \theta + \cos \theta) \dot{x} \dot{\theta} \right) - Mg \left(-x + \frac{\ell}{2} \sin \theta \right) - \frac{k}{2} \left(\frac{3}{2} x^2 + \ell^2 \sin^2 \theta - 2x\ell \sin \theta \right).$$

Le posizioni di equilibrio sono:

1. $\theta = \pi/2$, $x = \frac{2}{3}\ell(1 + \lambda)$, stabile per $\lambda > 2$.
2. $\theta = 3\pi/2$, $x = \frac{2}{3}\ell(-1 + \lambda)$, instabile.
3. $\theta = \pm \arcsin \frac{\lambda}{2}$, $x = \ell\lambda$, esiste ed è diversa dalle precedenti per $-2 < \lambda < 2$. Per questi valori di λ è sempre stabile.

La posizione di equilibrio stabile con i dati forniti è la prima, e le piccole oscillazioni attorno ad essa sono caratterizzati dalle pulsazioni proprie

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{10}}{15}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{10}}{15}}.$$

2. Trasformazioni canoniche.

1. La trasformazione è canonica per $\alpha = 1$, $\beta = -1$.
2. La funzione generatrice è $F_2(q, P, t) = qe^P + \frac{1}{t} \sin(qt) + g(t)$ con $g(t)$ funzione qualsiasi.

3. Cinematica relativistica.

Il tempo misurato dall'orologio di A_2 alla ricezione del segnale è

$$\tau_D = \frac{1}{\gamma_2} \frac{c + v_1}{c - v_2} \gamma_1 \tau_B = \sqrt{6}y.$$

4. Urti relativistici.

La velocità è

$$\vec{u}_2 = (-1/3, 0, 0),$$

e la massa è data da

$$m = \frac{2\gamma M}{\gamma_1 + 2\gamma_2} = \frac{8\sqrt{2}M}{3\sqrt{5}(1 + \sqrt{3})}.$$