

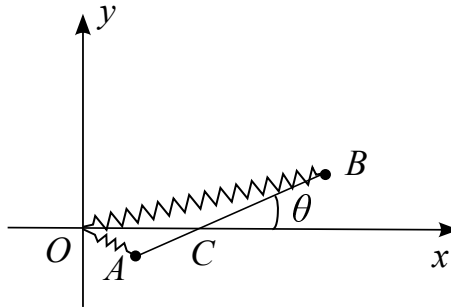
# Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 12 settembre 2022

Proff. M. Bonvini, A. Crisanti, L. Gualtieri

**1. Meccanica Lagrangiana.** Due masse  $m$  identiche e puntiformi sono fissate ai due estremi  $A$  e  $B$  di una sbarra rigida di massa trascurabile e lunghezza  $a$  posta nel piano. La sbarra può ruotare senza attrito intorno al punto  $C$ , posto ad  $1/3$  della lunghezza della sbarra dall'estremo  $A$ , vincolato a muoversi lungo l'asse  $x$  di un sistema di riferimento  $Oxy$ , nel piano, vedi figura. Ciascuna massa è soggetta ad una forza di richiamo elastica verso l'origine  $O$ , rispettivamente:  $\vec{F}_A = -k\vec{OA}$  e  $\vec{F}_B = -k\vec{OB}$ .

Utilizzando il formalismo Lagrangiano con coordinate Lagrangiane la coordinata  $x$  del punto  $C$  e l'angolo  $\theta$  che la sbarra forma con l'asse  $x$ , misurato in senso positivo antiorario, si chiede:

1. La Lagrangiana e le equazioni del moto del sistema;
2. Le posizioni di equilibrio del sistema, con relativa stabilità;
3. Scelta una posizione di equilibrio stabile, le frequenze delle piccole oscillazioni.



Es. 1

**2. Trasformazioni canoniche.** Si consideri la trasformazione

$$q = \left[ \frac{e^{Q/\beta} - 1}{\cos p} \right]^{1/\alpha},$$
$$P = 2e^Q q^\alpha \sin p,$$

dalle variabili canoniche  $q, p$  alle variabili  $Q, P$ , con  $\alpha, \beta$  parametri reali.

1. Determinare la coppia di valori di  $\alpha, \beta$  per cui la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza di tali valori, determinare una funzione generatrice  $F_3(p, Q)$  della trasformazione canonica.

**3. Cinematica relativistica.** Un'astronave parte dalla Terra con velocità  $v = \beta c$ . Raggiunta una stella distante 1 anno luce dalla terra, l'astronave torna indietro alla stessa velocità. Una volta tornata a terra, l'orologio dell'astronave mostra che sono passati  $2\sqrt{15}$  anni.

1. Qual è il valore di  $\beta$ .
2. Quanto tempo è trascorso sulla terra tra la partenza dell'astronave e il suo ritorno?

**4. Trasformazioni di Lorentz.** In un sistema di riferimento inerziale  $R$  di coordinate spazio-temporali  $(ct, x, y, z)$  sono dati due eventi

$$E_1 = (a, 0, 0, 1), \quad E_2 = (1, 0, b, 0)$$

in termini di due parametri  $a$  e  $b$ .

1. Posto  $b = 0$ , determinare per quali valori del parametro  $a$  gli eventi hanno separazione di tipo nullo.
2. Per ciascuno dei valori di  $a$  trovati al punto precedente, si ponga adesso  $b = a$  e si determini se esiste un sistema di riferimento  $R'$  in cui i due eventi sono simultanei, e in caso esista determinare una trasformazione di Lorentz tra  $R$  ed  $R'$ .

## Soluzioni

### 1. Meccanica lagrangiana.

La Lagrangiana del sistema è

$$L = \frac{m}{2} \left[ 2\dot{x}^2 + \frac{5}{9}a^2\dot{\theta}^2 - \frac{2}{3}a \sin \theta \dot{x}\dot{\theta} \right] - \frac{k}{2} \left[ 2x^2 + \frac{5}{9}a^2 + \frac{2}{3}a \cos \theta x \right],$$

da cui si ottengono le equazioni del moto:

$$m \left[ 2\ddot{x} - \frac{a}{3} \sin \theta \ddot{\theta} - \frac{a}{3} \cos \theta \dot{\theta}^2 \right] = -k \left[ 2x + \frac{a}{3} \cos \theta \right],$$

e

$$m \left[ \frac{5}{3}a\ddot{\theta} - \sin \theta \ddot{x} \right] = k \sin \theta x.$$

Le posizioni di equilibrio sono:

1.  $x = 0, \theta = \pi/2$ , Instabile.
2.  $x = 0, \theta = -\pi/2$ , Instabile.
3.  $x = -a/6, \theta = 0$ , Stabile.
4.  $x = a/6, \theta = \pm\pi$ , Stabile.

Le posizioni di equilibrio stabile 3. e 4. sono simmetriche per rotazione di  $\pi$  intorno al centro  $O$  della sbarra. In entrambi i casi otteniamo la frequenza delle piccole oscillazioni sono

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{10m}.$$

### 2. Trasformazioni canoniche.

1. La trasformazione è canonica per  $\alpha = 1/2, \beta = 1$ .
2. Una funzione generatrice è  $F_3(p, Q) = -(e^Q - 1)^2 \tan p + \text{const.}$ .

### 3. Cinematica relativistica.

Sia  $\bar{x} = 1$  anno luce la posizione della stella, che viene raggiunta (nel riferimento della terra) al tempo

$$\bar{t} = \frac{\bar{x}}{v} = \frac{1}{\beta} \text{ anni.}$$

Il tempo proprio dell'astronave quando raggiunge la stella, misurato in anni, è

$$\tau = \bar{t} \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta}$$

ed è pari alla metà del tempo misurato sull'astronave al ritorno,  $\tau = \sqrt{15}$ . Quindi

$$\frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} = \sqrt{15} \Rightarrow \beta = \frac{1}{4}$$

quindi

$$v = \frac{c}{4}, \quad \bar{t} = 4 \text{ anni}$$

e il tempo trascorso sulla terra al ritorno è  $t = 2\bar{t} = 8$  anni.

### 4. Trasformazioni di Lorentz.

La separazione tra i due eventi, nel riferimento  $(ct, x, y, z)$ , è  $E_2E_1 = (1 - a, 0, b, -1)$ , e quindi  $|E_2E_1|^2 = a^2 - 2a - b^2$ .

1. Ponendo  $b = 0$  e richiedendo  $|E_2E_1|^2 = 0$  si trovano i valori  $a = 0, a = 2$ .
2. Nel caso  $b = a = 0$  l'intervallo è di tipo nullo. Nel caso  $b = a = 2$  si ha  $|E_2E_1|^2 = -4$  e quindi l'intervallo è di tipo spazio. In questo secondo caso quindi esiste un sistema di riferimento in cui gli eventi appaiono simultanei, e una possibile trasformazione di Lorentz si ottiene con un boost lungo  $y$  di velocità  $\beta = -1/2$ .