Teorema di Dirichlet

Marco Bonvini

Appunti integrativi al corso Meccanica Analitica e Relativistica
Corso di laurea in Fisica, Sapienza Università di Roma, AA 2020/2021

Definizione 1. *Una configurazione $P_i(q^*, t)$ è di equilibrio stabile se $\forall$ intorno $\mathcal{E}$ in $\hat{\mathcal{A}}_{2n}$ dell'atto do moto nullo $\tilde{q} \equiv (q^*|0)$ $\exists$ un intorno $\Delta \ni \tilde{q}$ tale che l'evoluzione temporale di ogni atto di moto $(q|\dot{q}) \in \Delta$ resti in $\mathcal{E}$ $\forall t$.*

Un punto in Δ rappresenta un set di condizioni iniziali per il problema di Cauchy, e quindi determina un'unica soluzione del moto, ovvero una curva in $\hat{\mathcal{A}}_{2n}$. Tale curva può uscire da Δ ma deve stare interamente dentro $\mathcal{E}$ affinché la posizione sia di equilibrio stabile. È evidente che $\Delta \subseteq \mathcal{E}$.

Teorema 1 (di Dirichlet)**.** *Assumiamo un sistema lagrangiano scleronomo, in coordinate adatatte, con lagrangiana L indipendente dal tempo. Condizione sufficiente affinché una configurazione $P_i(q^*, t)$ sia di equilibrio stabile è che q^* sia un massimo locale di $L_0(q)$, ovvero $\exists$ un intorno $\tilde{\Delta} \ni q^*$ tale che $L_0(q) < L_0(q^*)$ $\forall q \in \tilde{\Delta}, q \neq q^*$.*

Dimostrazione. Siccome il potenziale è definito a meno di una costante, possiamo in tutta generalità scegliere $L_0(q^*) = 0$. Siccome $L_2 = T_2$ è definita positiva, e per ipotesi $L_0(q) < 0$ in tutti i punti di $\tilde{\Delta}$ eccetto q^*, si ha che l'energia generalizzata

$$\mathcal{H} = L_2 - L_0 > 0 \quad \text{in tutti i punti di } \tilde{\Delta} \text{ eccetto } q^*. \tag{1}$$

L'energia generalizzata $\mathcal{H}$ dipende però sia dalle q che dalle $\dot{q}$, ed è perciò conveniente spostare la nostra discussione nello spazio $\hat{\mathcal{A}}_{2n}$, anche per un confronto diretto con la definizione 1 di equilibrio stabile.

Dall'equazione (1) possiamo dedurre che in $\hat{\mathcal{A}}_{2n}$ $\exists$ un intorno $\mathcal{Z} \ni \tilde{q} \equiv (q^*|0)$ tale che $\mathcal{H} > 0$ $\forall (q|\dot{q}) \in \mathcal{Z}$ eccetto che in $\tilde{q}$, dove $\mathcal{H} = 0$. (In pratica è sufficiente che i valori delle componenti q dei punti in $\mathcal{Z}$ siano in $\tilde{\Delta}$.) Siccome lo scopo è dimostrare che sotto queste condizioni q^* è posizione di equilibrio stabile, prendiamo un qualunque intorno $\mathcal{E} \ni \tilde{q}$ e cerchiamo di trovare un opportuno Δ soddisfacente la definizione 1.

A tal fine, restringiamo la nostra attenzione all'intersezione (sicuramente non vuota) $\mathcal{E} \cap \mathcal{Z}$, che è a sua volta un intorno di $\tilde{q}$. Prendiamo al suo interno un intorno $K \ni \tilde{q}$ compatto, $K \subset (\mathcal{E} \cap \mathcal{Z})$. La frontiera di K, indicata con ∂K, è per costruzione contenuta in $\mathcal{Z}$. Perciò, su $\partial K \subset \mathcal{Z}$, si ha $\mathcal{H} > 0$ (strettamente, perché l'unico punto in cui $\mathcal{H} = 0$ è $\tilde{q}$ che sicuramente non è sulla frontiera di K, ma al suo interno). E siccome K è compatto, anche la sua frontiera ∂K è compatta. Quindi, per il teorema di Weierstrass, $\mathcal{H}$ (che è una funzione continua) ha un minimo $\mathcal{H}_{\min}$ su ∂K.

Possiamo ora costruire l'intorno $\Delta \ni \tilde{q}$ (candidato a soddisfare la definizione 1) come

$$\Delta = \{(q|\dot{q}) \quad | \quad (q|\dot{q}) \in K, \quad \mathcal{H}(q|\dot{q}) < \mathcal{H}_{\min}\}. \tag{2}$$

Si noti che la condizione richiede $\mathcal{H}(q|\dot{q})$ strettamente minore di $\mathcal{H}_{\min}$, per cui Δ è un aperto. Inoltre, per costruzione, $\Delta \subset K \subset (\mathcal{E} \cap \mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{E}$, e quindi $\Delta \subset \mathcal{E}$. Infine, contiene il punto $\tilde{q}$, ed è quindi un suo intorno.

Per verificare che Δ così definito soddisfi la definizione 1 notiamo che, siccome per ipotesi L è indipendente dal tempo, l'energia generalizzata $\mathcal{H}$ è costante sulle curve soluzioni del moto. Partendo da un atto di moto $(q(0)|\dot{q}(0)) \in \Delta$, il moto deve avvenire con $\mathcal{H} < \mathcal{H}_{\min}$ costante, e quindi $(q(t)|\dot{q}(t))$ deve rimanere all'interno di Δ per ogni tempo t. Siccome $\Delta \subset \mathcal{E}$ segue anche che il moto avviene dentro $\mathcal{E}$. $\square$