

Meccanica Analitica e Relativistica. 17.9.2009

1

In un piano verticale π e' scelto un sistema di assi cartesiani di origine O ed assi x, z con z lungo la verticale discendente. In tale piano si muove un corpo omogeneo pesante di massa M di forma quadrata A, B, C, D , di lato L ; in tale corpo i vertici A, C sono vincolati a scorrere senza attrito lungo l'asse delle z , i punti A, B hanno quota z maggiore di quella dei punti C, D (cioe' $z_A < z_C$) ed inoltre A e D sono gli estremi di una diagonale del quadrato (vedi figura). Nel piano π si muove anche un'asta di estremi DP , omogenea, pesante e di massa M e lunghezza L . Il sistema e' soggetto alla forza attiva del peso ed a due forze elastiche: $\underline{F}_1 = -10kOA, k > 0$ e $\underline{F}_2 = -kHP, k > 0$ ove H e' la proiezione ortogonale di P sull'asse x .

Scegliamo come coordinate lagrangiane atte ad individuare la generica posizione del sistema la quota z del punto A e l'angolo θ che l'asta DP forma con l'asse z .

- 1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
- 2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero e la stabilita' al variare di $\lambda = \frac{Mg}{kL}$.
- 3) In questa domanda poniamo $L = 1, M = 1, k = 1, g = 1$ e, scelta una posizione di equilibrio stabile, determinare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B. Osservare che il coefficiente elastico della forza applicata in A e' 10 volte superiore a quello della forza applicata in P .

2

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relativita' ristretta.

Due astronavi si muovono lungo l'asse x . Ambedue partono contemporaneamente dall'origine. La prima si muove con velocita' $\frac{c}{4}$ per un tempo $2T$, poi inverte il moto e torna nell'origine con velocita' $-\frac{c}{4}$ ed ivi si ferma. La seconda si muove con velocita' $\frac{c}{2}$ per un tempo T , poi inverte il moto e torna nell'origine con velocita' $-\frac{c}{2}$ ed ivi si ferma. I due astronauti avevano portato a bordo un orologio ciascuno. Una volta ambedue nell'origine li confrontano: chi ha segnato meno tempo e di quanto?

