Esercizi di Meccanica Analitica e Relativistica

Marco Bonvini

11 ottobre 2022

1 Dimostrazione sugli spostamenti virtuali

Abbiamo visto che, usando le coordinate Lagrangiane q^k, gli spostamenti virtuali δP_i si possono scrivere

$$\delta P_i = \frac{\partial P_i}{\partial q^k} \delta q^k \tag{1}$$

con δq^k qualsiasi. Verificare che tale espressione soddisfa l'equazione

$$\sum_{i=1}^{N} (\underline{\nabla}_i \phi_\sigma) \cdot \delta P_i = 0 \qquad \sigma = 1, ..., r \tag{2}$$

che definisce gli spostamenti virtuali in termini delle equazioni di vincolo $\phi_\sigma(P_1, ..., P_N, t) = 0$, $\sigma = 1, ..., r$.

Soluzione: Semplicemente sostituendo la prima equazione nella seconda si ottiene

$$\sum_{i=1}^{N} (\underline{\nabla}_i \phi_\sigma) \cdot \delta P_i = \sum_{i=1}^{N} (\underline{\nabla}_i \phi_\sigma) \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q^k} \delta q^k = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \phi_\sigma}{\partial q^k} \delta q^k = 0$$

perché le direzioni q^k sono quelle lungo l'ipersuperficie identificata dal vincolo, ovvero sono direzioni lungo cui le ϕ_σ sono costanti.

2 Esercizio: due punti sul piano

Si consideri un sistema di $N = 2$ punti materiali vincolati a muoversi sul piano xy. Si assuma che il vincolo sia ideale. Cosa si può dedurre sulle reazioni vincolari?

Soluzione: Le equazioni di vincolo sono $\phi_1 = z_1 = 0$ e $\phi_2 = z_2 = 0$. Si ha quindi

$$\underline{\nabla}_1 \phi_1 = (0, 0, 1) \qquad \underline{\nabla}_2 \phi_1 = (0, 0, 0) \qquad \underline{\nabla}_1 \phi_2 = (0, 0, 0) \qquad \underline{\nabla}_2 \phi_2 = (0, 0, 1)$$

da cui si trova che gli spostamenti virtuali soddisfano le equazioni

$$\sum_{i=1}^{2} (\underline{\nabla}_i \phi_1) \cdot \delta P_i = \delta z_1 = 0 \qquad \sum_{i=1}^{2} (\underline{\nabla}_i \phi_2) \cdot \delta P_i = \delta z_2 = 0,$$

ovvero gli spostamenti virtuali sono della forma $\delta P_1 = (\delta x_1, \delta y_1, 0)$ e $\delta P_2 = (\delta x_2, \delta y_2, 0)$. Siccome il vincolo è ideale, le reazioni vincolari soddisfano $\sum_{i=1}^{2} \underline{r_i} \cdot \delta P_i = 0 \ \forall \delta P_i$ della forma appena trovata, da cui si vede immediatamente che le reazioni vincolari possono avere solo la terza componente non nulla.

3 Esercizio: due punti sul piano con vincolo di rigità

Si consideri un sistema di $N = 2$ punti materiali vincolati a muoversi sul piano xy, e vincolati a stare ad una distanza ℓ fissata.

1. Si ricavi il generico spostamento virtuale.
2. Si scelgano opportunamente delle coordinate Lagrangiane e si scrivano le rappresentazioni parametriche delle configurazioni, $P_i = P_i(q^1, ..., q^n, t)$.
3. Si assuma che il vincolo sia ideale, e si scriva la forma più generale delle reazioni vincolari. Cosa se ne deduce? Per caso in questo sistema è possibile descrivere l'attrito come vincolo ideale?

Soluzione: Le equazioni di vincolo sono $\phi_1 = z_1 = 0$, $\phi_2 = z_2 = 0$ e $\phi_3 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - \ell^2 = 0$. Si ha quindi

$$\begin{array}{llll} \underline{\nabla}_1\phi_1 = (0,0,1) & \underline{\nabla}_2\phi_1 = (0,0,0) & \underline{\nabla}_1\phi_2 = (0,0,0) & \underline{\nabla}_2\phi_2 = (0,0,1) \\ \underline{\nabla}_1\phi_3 = (2x_1 - 2x_2, 2y_1 - 2y_2, 0) & & \underline{\nabla}_2\phi_3 = (2x_2 - 2x_1, 2y_2 - 2y_1, 0) & \end{array}$$

da cui si trova che gli spostamenti virtuali soddisfano le equazioni

$$\sum_{i=1}^{2}(\underline{\nabla}_i\phi_1) \cdot \delta P_i = \delta z_1 = 0 \qquad \sum_{i=1}^{2}(\underline{\nabla}_i\phi_2) \cdot \delta P_i = \delta z_2 = 0$$
$$\sum_{i=1}^{2}(\underline{\nabla}_i\phi_3) \cdot \delta P_i = 2(x_1 - x_2)(\delta x_1 - \delta x_2) + 2(y_1 - y_2)(\delta y_1 - \delta y_2) = 0.$$

L'ultima equazione pone un'ulteriore restrizione rispetto all'esercizio precedente. Come coordinate Lagrangiane si possono scegliere le coordinate cartesiane del punto 1, e l'angolo θ rispetto all'asse x formato dalla congiungente tra punto 1 e punto 2. La rappresentazione parametrica è quindi

$$P_1 = (x_1, y_1, 0), \qquad P_2 = (x_1 + \ell\cos\theta, y_1 + \ell\sin\theta, 0).$$

È immediato verificare che questa parametrizzazione soddisfa le equazioni di vincolo. Per trovare le reazioni vincolari, usiamo l'equazione $\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial P_i}{\partial q^k} \cdot \underline{r}_i = 0$ per $k = 1, 2, 3$. Si ha

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial P_1}{\partial x_1} = (1,0,0) & \dfrac{\partial P_1}{\partial y_1} = (0,1,0) & \dfrac{\partial P_1}{\partial \theta} = (0,0,0) \\ \dfrac{\partial P_2}{\partial x_1} = (1,0,0) & \dfrac{\partial P_2}{\partial y_1} = (0,1,0) & \dfrac{\partial P_2}{\partial \theta} = (-\ell\sin\theta, \ell\cos\theta, 0) \end{array}$$

da cui si trovano le equazioni

$$r_1^x + r_2^x = 0 \qquad r_1^y + r_2^y = 0 \qquad r_2^y\cos\theta - r_2^x\sin\theta = 0.$$

Possiamo quindi dedurre che le reazioni vincolari hanno la forma

$$\underline{r}_1 = (\tilde{r}\cos\theta, \tilde{r}\sin\theta, r_1^z) \qquad \underline{r}_1 = (-\tilde{r}\cos\theta, -\tilde{r}\sin\theta, r_2^z).$$

Notiamo che sono presenti componenti della reazione lungo il piano, mentre nel caso precedente erano presenti solo quelle ortogonali. Questo non significa che stiamo descrivendo l'attrito (di cui infatti non vi è traccia nell'esercizio): le componenti sul piano sono dovute al vincolo di rigidità, e infatti sono uguali e opposte nei due punti.