

Esercizi di Meccanica Analitica e Relativistica

Marco Bonvini

28 novembre 2022

1 Esercizio su sistema scleronomo

Si consideri un sistema scleronomo di propria scelta, e si inventi una parametrizzazione dipendente dal tempo in un sistema di riferimento di quiete dei vincoli.

Soluzione: Lo scopo di questo esercizio è ragionare, e capire che non è obbligatorio l'uso di coordinate adattate.

2 Esercizio su coordinate adattate

Si consideri un punto materiale vincolato a muoversi sul piano xy . In un dato sistema di riferimento \mathcal{F} si scriva l'energia cinetica T del punto in termini delle coordinate Lagrangiane adattate x e y . Si consideri adesso un sistema \mathcal{F}' in moto rispetto a \mathcal{F} con velocità V costante nella direzione x . Scrivere l'energia cinetica T' del punto nel nuovo sistema di riferimento. Il sistema di riferimento \mathcal{F}' è un sistema di quiete dei vincoli? Se sì, come si spiega la dipendenza dal tempo in T' ?

Soluzione: L'energia cinetica in \mathcal{F} è $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$, mentre in \mathcal{F}' è $T' = \frac{1}{2}m((\dot{x} - V)^2 + \dot{y}^2)$. Il sistema \mathcal{F}' è anch'esso di quiete dei vincoli. Non c'è dipendenza dal tempo in T' .

3 Potenziale generalizzato per la forza di Lorentz

Si consideri la forza di Lorentz

$$\underline{f} = e \left[\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \wedge \underline{B} \right] \quad (1)$$

che esprime la forza esercitata su una particella di carica elettrica e che si muove con velocità \underline{v} sotto l'effetto di un campo elettrico \underline{E} e di un campo magnetico \underline{B} (c è una costante, la velocità della luce nel vuoto). Scrivendo i campi in termini del potenziale elettrostatico ϕ e del cosiddetto potenziale vettore \underline{A} come

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}, \quad \underline{B} = \underline{\nabla} \wedge \underline{A}, \quad (2)$$

verificare che la forza di Lorentz si può riscrivere come

$$\underline{f} = -e \left[\underline{\nabla} \left(\phi - \frac{1}{c} \underline{v} \cdot \underline{A} \right) + \frac{1}{c} \frac{d\underline{A}}{dt} \right]. \quad (3)$$

Verificare che tale espressione può essere ricavata dal potenziale generalizzato

$$U = e \left[\phi - \frac{1}{c} \underline{v} \cdot \underline{A} \right]. \quad (4)$$

Soluzione: Si usino come coordinate lagrangiane le coordinate cartesiane, e si facciano i conti.

4 Potenziale generalizzato per la forza di attrito viscoso

Si consideri la forza di attrito viscoso della forma $f = -\alpha v$. È possibile scrivere tale forza in termini di un potenziale generalizzato? In caso affermativo, si ricavi tale potenziale.

Soluzione: Anche in questo caso, usando come coordinate lagrangiane le coordinate cartesiane, si può scrivere $Q_k = -\alpha\delta_{kh}\dot{q}^h$, che essendo lineare nelle \dot{q} ha buone possibilità di essere ricavabile da un potenziale generalizzato come

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial U}{\partial q^k} = -\alpha\delta_{kh}\dot{q}^h.$$

Scrivendo in generale $U = d_r(q|t)\dot{q}^r + e(q|t)$, si ottiene per il primo membro

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial U}{\partial q^k} &= \frac{d}{dt} d_k - \frac{\partial d_r}{\partial q^k} \dot{q}^r - \frac{\partial e}{\partial q^k} \\ &= \frac{\partial d_k}{\partial q^r} \dot{q}^r + \frac{\partial d_k}{\partial t} - \frac{\partial d_r}{\partial q^k} \dot{q}^r - \frac{\partial e}{\partial q^k} \\ &= \left(\frac{\partial d_k}{\partial q^r} - \frac{\partial d_r}{\partial q^k} \right) \dot{q}^r + \frac{\partial d_k}{\partial t} - \frac{\partial e}{\partial q^k}. \end{aligned}$$

Per confronto otteniamo $e = 0$ e

$$\frac{\partial d_k}{\partial q^r} - \frac{\partial d_r}{\partial q^k} = -\alpha\delta_{kr}$$

Essendo il membro di sinistra antisimmetrico e quello di destra simmetrico negli indici k e r , l'equazione non ha soluzione. Quindi la forza di attrito viscoso non è esprimibile tramite un potenziale generalizzato.

5 Invarianza di gauge

Dimostrare che una funzione g su \mathcal{A}_{2n+1} data da

$$g(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t) = \frac{d}{dt} f(q^1, \dots, q^n, t) \quad (5)$$

soddisfa le equazioni

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial g}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial g}{\partial q^k} = 0 \quad (6)$$

e pertanto la trasformazione $L \rightarrow L + g$ non cambia le equazioni del moto. I più temerari possono provare a dimostrare che la più generale funzione g che soddisfa la seconda equazione è scrivibile come nella prima equazione.

Soluzione: Per ipotesi si ha

$$g(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t) = \frac{\partial f}{\partial q^h} \dot{q}^h + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (7)$$

quindi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial g}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial g}{\partial q^k} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q^k} - \frac{\partial^2 f}{\partial q^k \partial \dot{q}^h} \dot{q}^h - \frac{\partial^2 f}{\partial q^k \partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial q^k} \frac{df}{dt} - \frac{\partial^2 f}{\partial q^k \partial \dot{q}^h} \dot{q}^h - \frac{\partial^2 f}{\partial q^k \partial t} = 0 \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che d/dt e $\partial/\partial q^k$ commutano su una funzione in \mathcal{V}_{n+1} .