

# Esercizi di Meccanica Analitica e Relativistica

Marco Bonvini

28 novembre 2022

## 1 Esercizio su equilibrio e piccole oscillazioni

Sia data la Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{3}{4}\dot{\theta}^2 + \dot{y}\dot{\theta}\sin\theta + \dot{y}\sin\theta + \dot{\theta}(y+5)\cos\theta - \frac{3}{8}y^2 - \frac{11}{4}y + y\cos\theta + \frac{11}{4}\cos\theta - \cos^2\theta \quad (1)$$

dove  $y$  e  $\theta$  sono due variabili Lagrangiane.

1. Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne valuti la stabilità.
2. Si scelga una posizione di equilibrio stabile. È possibile studiare le piccole oscillazioni attorno ad essa? Se sì, perché? In caso affermativo, determinare le pulsazioni proprie e scrivere la soluzione generale.

*Soluzione:* Le configurazioni di equilibrio sono

- $\theta = 0, y = -\frac{7}{3}$ , instabile;
- $\theta = \pi, y = -5$ , stabile.

Per studiare le piccole oscillazioni abbiamo sempre assunto che  $L_1 = 0$ . In questo caso non è così, e si ha  $L_1 = \dot{y}\sin\theta + \dot{\theta}(y+5)\cos\theta$ . Tuttavia, in questo caso questo non è un problema, come possiamo vedere in un paio di modi. Il primo è che il termine  $L_1$  è scrivibile come una derivata rispetto al tempo di una funzione delle  $q$ ,  $L_1 = \frac{d}{dt}[(y+5)\sin\theta]$ , e quindi può essere eliminato tramite una trasformazione di gauge. Il secondo è che in certi casi è possibile ricavare le stesse equazioni delle piccole oscillazioni anche in presenza di  $L_1$ , purché la sua forma soddisfi alcune condizioni. Infatti, attorno alla posizione di equilibrio, la lagrangiana può essere espansa come

$$L = \frac{1}{2}T_{kh}\dot{\eta}^k\dot{\eta}^h - \frac{1}{2}M_{kh}\eta^k\eta^h + A_{kh}\dot{\eta}^k\eta^h + B_k\dot{\eta}^k + \mathcal{O}(\lambda^3).$$

L'ultimo termine è addirittura un contributo di ordine  $\lambda$ , tuttavia esso non compare nelle equazioni del moto e quindi non ha alcun ruolo dinamico. Il penultimo termine è invece un termine nuovo, e le equazioni del moto diventano

$$T_{kh}\ddot{\eta}^h + (A_{kh} - A_{hk})\dot{\eta}^h + M_{kh}\eta^h = 0.$$

Quindi, se  $A_{kh}$  è una matrice simmetrica, le equazioni del moto tornano ad essere quelle delle piccole oscillazioni. In effetti, se  $A_{kh}$  è simmetrica, il termine  $L_1$  della Lagrangiana espansa può essere scritto come una derivata,

$$A_{kh}\dot{\eta}^k\eta^h + B_k\dot{\eta}^k = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}A_{kh}\eta^k\eta^h + B_k\eta^k\right],$$

e quindi eliminato con una trasformazione di gauge. Da notare che in questo caso si richiede che l'espansione di  $L_1$  attorno ad una posizione di equilibrio stabile sia scrivibile come derivata rispetto al tempo di una funzione in  $\mathcal{V}_{n+1}$ , che è una condizione meno stringente rispetto alla richiesta che lo sia la parte  $L_1$  della Lagrangiana completa. Attorno alla posizione di equilibrio, nel nostro caso, abbiamo  $y = -5 + \eta^1$  e  $\theta = \pi + \eta^2$ , da cui  $L_1 = -\dot{\eta}^1\eta^2 - \eta^1\dot{\eta}^2$ , ovvero  $A_{12} = A_{21} = -1$ , che quindi è simmetrica. Avendo capito che è possibile avere piccole oscillazioni, le pulsazioni proprie sono  $\omega_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}}$  e  $\omega_{(2)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

## 2 Esercizio sull'Hamiltoniana

Data la scrittura della Lagrangiana come

$$L(q|\dot{q}|t) = \frac{1}{2}a_{kh}(q|t)\dot{q}^k\dot{q}^h + \tilde{b}_k(q|t)\dot{q}^k + \tilde{c}(q|t) \quad (2)$$

e data la trasformazione di Legendre inversa

$$\dot{q}^k(q|p|t) = (a^{-1}(q|t))^{kh} \left[ p_h - \tilde{b}_h(q|t) \right], \quad (3)$$

scrivere esplicitamente l'Hamiltoniana in termini di questi ingredienti.

*Soluzione:* Dalla definizione dell'Hamiltoniana  $H = p_k\dot{q}^k - L$ , per sostituzione si trova

$$H = \frac{1}{2}(a^{-1})^{kh} (p_k - \tilde{b}_k) (p_h - \tilde{b}_h) - \tilde{c},$$

che è quadratico nelle  $p$ .