

Esercizi di Meccanica Analitica e Relativistica

Marco Bonvini

28 novembre 2022

1 Dimostrazione trasformazioni fibrato

Dimostrare che per una trasformazione fibrato

$$\begin{aligned}\bar{t} &= t \\ \bar{q}^k &= \bar{q}^k(q^1, \dots, q^n, t) \\ \dot{\bar{q}}^k &= \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^h} \dot{q}^h + \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial t}\end{aligned}$$

si ha la trasformazione

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^k} - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}^k} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^h} - \frac{\partial L}{\partial q^h} \right) \frac{\partial \bar{q}^h}{\partial \bar{q}^k}. \quad (1)$$

Soluzione: Basta fare i conti:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^k} - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}^k} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^h} \frac{\partial \dot{\bar{q}}^h}{\partial \dot{\bar{q}}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}^h} \frac{\partial \bar{q}^h}{\partial \bar{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^h} \frac{\partial \dot{\bar{q}}^h}{\partial \bar{q}^k} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^h} \frac{\partial \bar{q}^h}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}^h} \frac{\partial \bar{q}^h}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^h} \frac{\partial \dot{\bar{q}}^h}{\partial \dot{q}^k} \\ &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^h} - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}^h} \right) \frac{\partial \bar{q}^h}{\partial \dot{q}^k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^h} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{q}^h}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \dot{\bar{q}}^h}{\partial \dot{q}^k} \right).\end{aligned}$$

L'ultimo termine fa zero perché

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{q}^h}{\partial \dot{q}^k} &= \frac{\partial^2 \bar{q}^h}{\partial q^r \partial \dot{q}^k} \dot{q}^r + \frac{\partial^2 \bar{q}^h}{\partial t \partial \dot{q}^k} \\ \frac{\partial \dot{\bar{q}}^h}{\partial \dot{q}^k} &= \frac{\partial^2 \bar{q}^h}{\partial q^k \partial q^r} \dot{q}^r + \frac{\partial^2 \bar{q}^h}{\partial q^k \partial t}\end{aligned}$$

sono uguali.

2 Esercizio su periodo di pendolo semplice

Si consideri un pendolo semplice descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m\ell^2} + mg\ell(1 - \cos \theta) \quad (2)$$

E si calcoli il periodo T dell'oscillazione tra θ_{\max} e $\theta_{\min} = -\theta_{\max}$.

Soluzione: Definita l'energia $E = mg\ell(1 - \cos \theta_{\max})$, che si conserva, si trova

$$\tau = 2 \int_{-\theta_{\max}}^{\theta_{\max}} d\theta \frac{\ell}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - mg\ell(1 - \cos \theta)]}}.$$

3 Identità di Jacobi

Dimostrare l'identità di Jacobi

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0 \quad (3)$$

usando la definizione di parentesi di Poisson

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q^k}. \quad (4)$$

Soluzione: Tanti conti...