

# Esercizi di Meccanica Analitica e Relativistica

Marco Bonvini

16 dicembre 2022

## 1 Orbite del gruppo di Lorentz

Si definisce “orbita del gruppo passante per un punto  $E$ ” la curva che si ottiene (nello spazio in cui il gruppo agisce) agendo con tutti gli elementi del gruppo su  $E$ . Si consideri il sottogruppo speciale di Lorentz dei boost lungo  $x$ , e si consideri il sottospazio bidimensionale di  $M_4$  (ottenuto ignorando le coordinate  $y$  e  $z$ ) su cui questo sottogruppo agisce. Si calcolino e si disegnino le orbite del sottogruppo speciale, sia per eventi di tipo spazio che per eventi di tipo tempo. Si interpreti il risultato in considerazione dell’intervallo invariante.

## 2 Paradosso dei gemelli

Si consideri il setup del paradosso dei gemelli, e si assuma che ciascuno dei due abbia un orologio che invia segnali luminosi all’altro periodicamente, con periodo  $T$ , durante tutta la durata del viaggio. L’orologio del gemello sulla Terra emette  $n_1$  segnali che vengono ricevuti prima dell’inversione di rotta e  $n_2$  segnali che vengono ricevuti dopo, per un totale di  $n_1 + n_2$  segnali nel tempo  $\Delta t_{\text{Terra}} = (n_1 + n_2)T$ . L’orologio del gemello sull’astronave emette  $n$  segnali prima dell’inversione di rotta e  $n$  segnali dopo, per un totale di  $2n$  segnali nel tempo  $\Delta t_{\text{Nave}} = 2nT$ . Si dimostri che  $\Delta t_{\text{Terra}} > \Delta t_{\text{Nave}}$ , sfruttando solo informazioni su questi segnali e senza usare gli argomenti usati a lezione. Si consiglia vivamente di disegnare un diagramma di Minkowski.

## 3 Paradosso del box

Si supponga di possedere un’automobile lunga  $\ell$  e di un box lungo  $\ell/2$ . Determinare la velocità che l’auto deve avere affinché entri interamente nel box. E dal punto di vista dell’automobile, che succede?