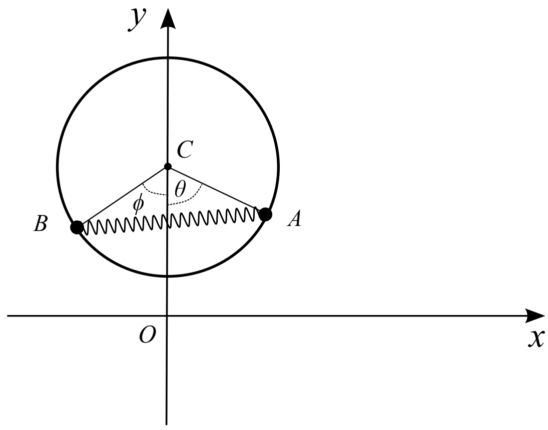
Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 24 gennaio 2023
Proff. M. Bonvini, A. Crisanti, M. Papinutto

Esercizio 1. In un piano orizzontale Oxy giace una guida circolare di raggio R e massa trascurabile il cui centro è vincolato a muoversi lungo l'asse y. Si denoti con ξ la coordinata y del centro C della guida. Lungo la guida possono scorrere senza attrito due palline A e B, entrambe di massa m, unite tra loro da una molla di costante elastica k e lunghezza di riposo nulla. Si denotino con θ e ϕ gli angoli dei raggi che congiungono le palline al centro della guida rispetto all'asse y, crescenti in senso antiorario, come mostrato in figura.



1. Si scriva la Lagrangiana L del sistema.
2. Si calcolino i tre momenti cinetici p_ξ, p_θ, p_ϕ.
3. Si identifichino due integrali primi.
4. Quali vincoli sul centro C della guida (ovvero sulla coordinata ξ) sono necessari affinché la funzione
$$f(\xi, \theta, \phi, \dot{\xi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = mR^2(\dot{\theta} + \dot{\phi})$$
sia integrale primo del moto?

Esercizio 2. Si consideri la seguente Lagrangiana
$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + x^2\dot{y}^2\right) - \frac{a}{2}x^2 + \ln x - bx\sin y,$$
con $x > 0$, ed m, a e b opportune costanti positive. Si chiede:

1. La Hamiltoniana e le relative equazioni di Hamilton.
2. I punti di equilibrio del sistema e la relativa stabilità.
3. Scelto un punto di equilibrio stabile le frequenze delle piccole oscillazioni.

Esercizio 3. Sia data l'Hamiltoniana:
$$H(q, p) = \frac{1}{2}e^{-2p} + \alpha q,$$
(con $\alpha \in \mathbb{R}$). Sia data inoltre una funzione generatrice del terzo tipo (con $P, Q > 0$):
$$F_3(p, Q) = -Qe^{-p} + \frac{Q^2}{2}.$$

1. Si scriva la trasformazione canonica $Q(q, p), P(q, p)$ da essa generata e la sua inversa $q(Q, P), p(Q, P)$;
2. Si calcoli la nuova Hamiltoniana $K(Q, P)$ e si determini il valore di α tale per cui $K(Q, P)$ non contenga alcun termine in Q^2.

Esercizio 4. Un'astronave si allontana dalla Terra con velocità costante v. Al momento della partenza gli orologi sulla Terra e sull'astronave segnano il tempo $t = 0$. Dopo un tempo t_1 la Terra invia un segnale luminoso all'astronave, che non appena lo riceve inverte la rotta e torna sulla Terra alla stessa velocità. Al suo arrivo, l'orologio sulla Terra segna un tempo $t^* = 10y$, mentre quello sull'astronave riporta il tempo $\tau^* = 8y$.

1. Qual è la velocità v dell'astronave?
2. Quanto vale t_1?
3. Esistono infiniti sistemi di riferimento in cui l'evento "il segnale luminoso parte dalla Terra", detto E_1, può essere simultaneo a eventi sull'astronave. Individuare l'intervallo temporale (misurato dall'orologio sull'astronave) entro il quale gli eventi sull'astronave possono essere simultanei a E_1.

Soluzioni

Esercizio 1.
La Lagrangiana del sistema è

$$L = \frac{m}{2}\left[2\dot{\xi}^2 + R^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) + 2R\dot{\xi}(\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\phi}\sin\phi)\right] - kR^2\left[1 - \cos(\theta - \phi)\right]$$

da cui si ottengono i momenti cinetici

$$\begin{aligned} p_\xi &= 2m\dot{\xi} + mR(\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\phi}\sin\phi) \\ p_\theta &= mR^2\dot{\theta} + mR\dot{\xi}\sin\theta \\ p_\phi &= mR^2\dot{\phi} + mR\dot{\xi}\sin\phi. \end{aligned}$$

La Lagrangiana non dipende da ξ e dal tempo t, quindi p_ξ e l'energia generalizzata

$$\mathcal{H}(\xi,\theta,\phi,\dot{\xi},\dot{\theta},\dot{\phi}) = \frac{m}{2}\left[2\dot{\xi}^2 + R^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) + 2R\dot{\xi}(\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\phi}\sin\phi)\right] + kR^2\left[1 - \cos(\theta - \phi)\right]$$

sono due integrali primi.
La funzione f è un integrale primo se

$$\frac{d}{dt}f(\xi,\theta,\phi,\dot{\xi},\dot{\theta},\dot{\phi}) = mR^2(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) = -mR\ddot{\xi}(\sin\theta + \sin\phi) = 0,$$

che si realizza se ξ è fissato o vincolato a muoversi di moto uniforme.

Esercizio 2.
La Hamiltoniana del sistema è

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + \frac{p_y^2}{x^2}\right) + \frac{a}{2}x^2 - \ln x + bx\sin y$$

e le equazioni di Hamilton sono

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_x}{m} \qquad \frac{dp_x}{dt} = \frac{p_y^2}{mx^3} - ax + \frac{1}{x} - b\sin y$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_y}{mx^2} \qquad \frac{dp_y}{dt} = -bx\cos y.$$

Le configurazioni di equilibrio sono due e sono date da $y_\pm = \pm\frac{\pi}{2}$, $x_\pm = \mp\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{1}{a}}$, solo la soluzione (x_-, y_-) è stabile.
Le pulsazioni sono

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{a + 1/x_-^2}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{b}{mx_-}}.$$

Esercizio 3.
La trasformazione è

$$Q = -qe^p \qquad q = -Q(P+Q)$$

$$P = e^{-p} + qe^p \qquad p = -\ln(P+Q)$$

Sostituendo $q(Q,P)$ e $p(Q,P)$ in $H(q,p)$ si ottiene

$$K(Q,P) = \frac{1}{2}(P+Q)^2 - \alpha Q(P+Q)$$

che non ha termini proporzionali a Q^2 se $\alpha = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4.
Si trova $\gamma = \frac{5}{4}$, quindi $v = \frac{3}{5}c$. Il segnale parte al tempo $t_1 = \frac{t^*}{2}\left(1 - \frac{v}{c}\right) = 2y$.
L'intervallo temporale richiesto è $\frac{1-v/c}{1+v/c}\frac{\tau^*}{2} < \tau < \frac{\tau^*}{2}$, ovvero $1y < \tau < 4y$.