Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 6 febbraio 2023
Proff. M. Bonvini, A. Crisanti, M. Papinutto

Esercizio 1 [6 punti]. Fissato un sistema di riferimento $Oxyz$, con l'asse z rivolto verso l'alto, una particella di massa m è vincolata a muoversi sulla superficie di equazione $z = 1/\sqrt{x^2+y^2}$. La particella è collegata all'asse z mediante una molla di costante elastica k, massa e lunghezza a riposo trascurabili. La molla può scorrere lungo l'asse z in modo tale che la molla sia sempre perpendicolare all'asse z. Oltre alla forza elastica sulla pallina agisce la forza peso.

Utilizzando coordinate cilindriche (r, θ, z) e scegliendo come coordinate generalizzate (r, θ):

1. Scrivere la Hamiltoniana del sistema e le relative equazioni di Hamilton.
2. Individuare due integrali primi non banali del sistema.

Esercizio 2 [8 punti]. Un sistema è descritto dalla seguente Hamiltoniana

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + 2p_y^2 - 2p_x p_y) + \frac{k}{2}(3x^2 - 2x\sin y + \cos^2 y - 2\lambda x),$$

dove m, k e λ sono parametri positivi. In funzione del parametro $\lambda > 0$, si chiede

1. I punti di equilibrio del sistema, e relativa stabilità.
2. Le frequenze delle piccole oscillazioni rispetto alle configurazioni di equilibrio stabile.

Esercizio 3 [8 punti]. Si consideri la seguente Hamiltoniana

$$H(q, p) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q} - q^4\right)^2 - \frac{1}{2}q^2.$$

con $q > 0$.

1. Scrivere e risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione $S(q, Q, t) = W(q, Q) - \frac{Q}{2}t$ che mappi la Hamiltoniana $H(q, p, t)$ in $K(Q, P, t) = 0$.
2. Determinare la trasformazione canonica da (q, p) a (Q, P) generata da $S(q, Q, t)$ e la sua inversa da (Q, P) a (p, q).
3. Usando il risultato del punto precedente scrivere la soluzione delle equazioni del moto per (q, p) per $t > 0$ con le condizioni iniziali $q(0) = 1$ e $p(0) = 2$.
4. (Facoltativo) Verificare che la soluzione trovata al punto precedente soddisfi le equazioni di Hamilton.

Esercizio 4 [8 punti]. Un'astronave si allontana dalla Terra con velocità costante $v = c/2$. Al momento della partenza gli orologi sulla Terra e sull'astronave segnano il tempo $t = \tau = 0$. Trascorso un tempo τ_1 misurato dall'orologio sull'astronave, essa manda un segnale luminoso verso la Terra. La Terra riceve il segnale al tempo $\bar{t}$ (misurato da un orologio sulla terra), e immediatamente una seconda astronave parte con velocità $u > v$ nella stessa direzione della prima astronave. La seconda astronave raggiunge quindi la prima, nell'istante in cui l'orologio della prima astronave segna il tempo $\tau_2 = 4\tau_1$.

1. Calcolare il tempo $\bar{t}$ in funzione di τ_1.
2. Calcolare la velocità u della seconda astronave.
3. A che velocità la prima astronave vede la seconda avvicinarsi?
4. Si denoti con E_1 l'evento in cui la seconda astronave parte dalla Terra, e con E_2 l'evento in cui le astronavi si incontrano. Esiste un sistema di riferimento in cui tali eventi siano simultanei? In caso affermativo, determinare la trasformazione di Lorentz tra il sistema di riferimento solidale alla Terra e questo nuovo sistema.

Soluzioni

Esercizio 1.

1. La Hamiltoniana del sistema è
$$H(r,p_r,p_\theta) = \frac{1}{2m}\left[\frac{p_r^2}{1+1/r^4} + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right] + \frac{k}{2}r^2 + \frac{mg}{r}.$$
   e le equazioni di Hamilton sono
$$\begin{cases} \dot r = \frac{p_r}{m(1+1/r^4)}, \\ \dot\theta = \frac{p_\theta}{mr^2}, \\ \dot{p_r} = \frac{1}{m}\left[-\frac{2r^3p_r^2}{(1+r^4)^2} + \frac{p_\theta^2}{r^3}\right] - kr + \frac{mg}{r^2}, \\ \dot{p_\theta} = 0. \end{cases}$$

2. La Hamiltoniana $H(r,p_r,p_\theta)$ e il momento coniugato p_θ.

Esercizio 2.

1.
   - $(x,y) = \big((\lambda+1)/3, \pi/2\big)$ stabile.
   - $(x,y) = \big((\lambda-1)/3, -\pi/2\big)$ stabile per $\lambda < 4$.
   - $(x,y) = \big(\lambda/4, -\arcsin\lambda/4\big)$ esiste per $\lambda \le 4$, instabile.
   - $(x,y) = \big(\lambda/4, -\pi + \arcsin\lambda/4\big)$ esiste per $\lambda \le 4$, instabile.
2.
$$\omega^2 = \frac{k}{2m}\left[3 + 2b \pm \sqrt{9+4b^2}\right]$$
   con
   - $b = \frac{4+\lambda}{3}$ per $(x,y) = \big((\lambda+1)/3, \pi/2\big)$
   - $b = \frac{4-\lambda}{3}$ per $(x,y) = \big((\lambda-1)/3, -\pi/2\big)$ con $\lambda < 4$.

Esercizio 3.

1. La funzione principale di Hamilton è
$$S(q,Q,t) = \frac{1}{6}q^6 \pm \frac{1}{3}\Big(Q+q^2\Big)^{3/2} - \frac{Q}{2}t.$$

2. La trasformazione canonica e la sua inversa sono
$$\begin{cases} q = \sqrt{(t-2P)^2 - Q} \\ p = \sqrt{(t-2P)^2 - Q}\left[\big[(t-2P)^2 - Q\big]^2 + t - 2P\right] \end{cases} \qquad \begin{cases} Q = \left(\frac{p}{q} - q^4\right)^2 - q^2 \\ P = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q} - q^4\right). \end{cases}$$

3. Con le date condizioni iniziali si trova $Q = 0$ e $P = -1/2$, quindi
$$\begin{cases} q(t) = t+1 \\ p(t) = (t+1)^2\left[(t+1)^3 + 1\right]. \end{cases}$$

4. Sostituendo si verifica che la soluzione appena trovata soddisfa le equazioni di Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{1}{q}\left(\frac{p}{q} - q^4\right) \\ \dot{p} = \left(\frac{p}{q} - q^4\right)\left(\frac{p}{q^2} + 4q^3\right) + q. \end{cases}$$

Esercizio 4.
Si trova $\bar{t} = \sqrt{3}\tau_1$, quindi $u = \frac{v}{1-(1+v/c)\tau_1/\tau_2} = \frac{4}{5}c$. La prima astronave vede la seconda avvicinarsi con velocità $u' = \frac{u-v}{1-uv/c^2} = \frac{c}{2}$. Non esiste alcun sistema di riferimento in cui E_1 ed E_2 siano simultanei.