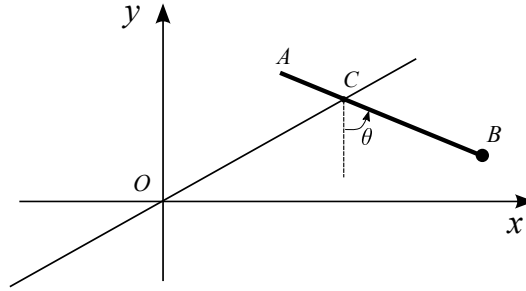


Compito straordinario di Meccanica Analitica e Relativistica del 9 maggio 2023
Proff. M. Bonvini, A. Crisanti, M. Papinutto



Esercizio 1 [7 punti]. Una sbarra omogenea AB di massa M e lunghezza $4a$ posta in un piano verticale può ruotare senza attrito intorno al punto C posto alla distanza a dall'estremo A . Il punto C è vincolato a muoversi sulla retta di equazione $y = \beta x$ di un sistema di riferimento Oxy con l'asse y orientato verso l'alto. All'estremo B è fissata una massa m .

Utilizzando come coordinate generalizzate l'ascissa x del punto C e l'angolo θ che la sbarra forma con la verticale [vedi figura], si chiede:

1. la Lagrangiana del sistema;
2. i momenti coniugati p_x e p_θ .

Esercizio 2 [8 punti]. Un sistema meccanico è descritto dalla Lagrangiana

$$L(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{m}{2} \left(\dot{x}^2 + \frac{r^2}{2} \dot{\theta}^2 + r \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta \right) - \frac{k_1}{2} \left[(x + r \cos \theta)^2 + (2r - r \sin \theta)^2 \right] - \frac{k_2}{2} (b - x)^2 + M\theta,$$

dove m, r, b, k_1 e k_2 sono parametri positivi di dimensioni opportune.

1. Determinare il valore di M per il quale $(x, \theta) = (x_0, \pi/2)$ sia una posizione di equilibrio del sistema, ed il corrispondente valore di x_0 .
2. Verificare che con il valore di M determinato al punto precedente la configurazione $(x, \theta) = (x_0, \pi/2)$ è una posizione di equilibrio stabile, e determinare le frequenze delle piccole oscillazioni intorno a tale posizione.

Esercizio 3 [7 punti]. Sia data la trasformazione

$$p = e^a Q^a,$$

$$P = -\frac{e^{bq}}{2Q^{1/2}}.$$

1. Determinare i valori dei parametri reali a e b tali che la trasformazione sia canonica.
2. In corrispondenza di tali valori determinare la funzione generatrice $F_4(p, Q)$.

Esercizio 4 [8 punti]. Due astronavi partono simultaneamente, all'istante $t = 0$, dalla Terra con velocità $v_1 = \frac{4}{5}c$ e $v_2 = \frac{3}{5}c$, rispettivamente, e dirette lungo l'asse x di un sistema di riferimento R solidale con la Terra. Trascorso un tempo $\tau_1 = T$ misurato rispetto all'orologio di bordo dell'astronave 1, essa inverte la sua velocità e torna indietro (evento E_1), mentre l'astronave 2 continua il suo viaggio. Si chiede:

1. Dopo quanto tempo t^* misurato rispetto alla Terra le due astronavi si incontrano (evento E_2), e a che distanza x^* misurata nel sistema di riferimento R della Terra avviene l'incontro.
2. Si consideri l'istante in cui l'orologio sull'astronave 2 segna un tempo $\tau_2 = T$ (evento E_3). Determinare se esiste un sistema di riferimento R' in cui l'evento E_1 e l'evento E_3 appaiono simultanei, e in caso affermativo determinare la velocità u del sistema R' rispetto ad R .
3. Se si è risposto affermativamente alla domanda precedente, quali sono le velocità v'_1 e v'_2 delle due astronavi rispetto al sistema di riferimento R' (prima dell'inversione di rotta).

Soluzioni

Esercizio 1.

1. La Lagrangiana del sistema è:

$$L(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{M+m}{2}(1+\beta^2)\dot{x}^2 + \frac{a^2}{2}\left(\frac{7}{3}M+9m\right)\dot{\theta}^2 + a(M+3m)(\cos\theta + \beta\sin\theta)\dot{x}\dot{\theta} \\ - (M+m)\beta gx + (M+3m)ag\cos\theta.$$

2. I momenti coniugati sono

$$p_x = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}L = (M+m)(1+\beta^2)\dot{x} + a(M+3m)(\cos\theta + \beta\sin\theta)\dot{\theta} \\ p_\theta = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}L = a^2\left(\frac{7}{3}M+9m\right)\dot{\theta} + a(M+3m)(\cos\theta + \beta\sin\theta)\dot{x}.$$

Esercizio 2.

1. $M = -k_1 r x_0$, con $x_0 = \frac{bk_2}{k_1+k_2}$, da cui $M = -\frac{bk_1 k_2 r}{k_1+k_2}$.

$$2. \omega_{\pm}^2 = \frac{1}{m} \left[7k_1 + k_2 \pm \sqrt{45k_1^2 + k_2^2 + 6k_1 k_2} \right].$$

Esercizio 3.

1. $a = 1/2, b = 1$.

2. $F_4(p, Q) = p(1 - \log p + \frac{1}{2} \log Q)$.

Esercizio 4.

1. $t^* = \frac{2v_1}{v_1+v_2}\gamma_1 T = \frac{40}{21}T$, $x^* = v_2 t^* = \frac{8}{7}cT$.

2. $|E_1 - E_3|^2 = -c^2 T^2 / 6 < 0$, quindi esiste R' in cui E_1 ed E_3 sono simultanei, con $u = \frac{ct_1 - ct_3}{x_1 - x_3} c = \frac{5}{7}c$.

3. $v'_1 = \frac{v_1 - u}{1 - v_1 u / c^2} = c/5$, $v'_2 = \frac{v_2 - u}{1 - v_2 u / c^2} = -c/5$.