

# Appunti di Elettromagnetismo ed Ottica

*Anni accademici 2007-11*

Camillo Imbimbo

*Dipartimento di Fisica dell'Università di Genova  
Via Dodecaneso, I-16136, Genova, Italia*

## Riferimenti bibliografici

- The Feynman lectures on physics: R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M. Sands, Vol. II (Addison-Wesley, Reading MA, 1964). (Traduzione italiana: La fisica di Feynman, Inter European Edition, 1975).
- Fisica 2: D. Halliday, R. Resnick, K.S. Krane (Casa Editrice Ambrosiana, 2004).
- La fisica di Berkeley, Vol. 2, “Elettricità e Magnetismo” (Zanichelli, Bologna, 1971).
- Corrado Mencuccini, Vittorio Silvestrini, Fisica II, Elettromagnetismo - Ottica Corso di fisica per le facolt scientifiche corredato di esempi ed esercizi (Liguori, 2010).
- Classical Electromagnetism, Richard Fitzpatrick:  
<http://farside.ph.utexas.edu/teaching/em/lectures/lectures.html>

Più avanzati:

- Classical Electrodynamics, D. Jackson, (Wiley & Sons, 1962).

## Avvertenza

Queste note sono indirizzate agli studenti del corso di “Elettromagnetismo ed Ottica” del secondo anno della Laurea in Matematica dell’Università di Genova. Questi appunti *non* costituiscono delle dispense e *non intendono sostituire in alcun modo* i testi di riferimento indicati o qualunque altro dei numerosi, e talvolta eccellenti, libri esistenti che coprono il materiale discusso nel corso (e molto altro). Lo scopo di queste note è piuttosto quello di discutere alcune applicazioni fisiche ed esempi che: a) non sono discussi nei testi di riferimento indicati nella bibliografia; b) sono discussi in quei testi, ma in maniera meno approfondita e soltanto parziale; c) sono trattati in quei testi, ma con metodi matematici diversi; d) sono presentati in modo sostanzialmente analogo a quello che ho scelto per queste note, ma senza fornire dei dettagli e delle spiegazioni che ho ritenuto possano essere utili ad uno studente del biennio di matematica. Questi appunti sono sostanzialmente

una raccolta di problemi le cui soluzioni illustrano e, quando ho ritenuto opportuno, richiamano gli aspetti della teoria generale che sono stati esaminati durante il corso (ed altri che, per ragioni di tempo, non sono stati affrontati durante le lezioni).

La gran parte dei libri introduttivi all'elettromagnetismo, fra cui quelli indicati nei riferimenti bibliografici, sono indirizzati agli studenti dei primi due anni del corso di laurea in fisica: conseguentemente il loro obiettivo è generalmente quello di illustrare un vasto numero di fenomeni fisici considerando situazioni la cui analisi necessita un minimo di conoscenze e di metodi matematici avanzati. Ho pensato che un corso rivolto a degli studenti di matematica potesse essere impostato diversamente: pur non presupponendo niente di più che la padronanza dell'analisi e della geometria del biennio, ho provato a dare un'idea di come i fisici usino e "costruiscano" la matematica di cui hanno bisogno per la risoluzione dei problemi che emergono dalla realtà fisica. L'enfasi è stata posta quindi da una parte sullo studio delle condizioni al bordo fisicamente rilevanti delle equazioni di Maxwell e sullo sviluppo di metodi per la soluzione delle equazioni differenziali della fisica classica, da quella di Laplace all'equazione delle onde; dall'altra sulla traduzione di approssimazioni fisicamente motivate in condizioni matematiche precisamente formulate. Argomenti che usualmente farebbero parte di corsi di fisica-matematica più avanzati, come le funzioni speciali o le funzioni di Green, sono stati introdotti in maniera auto-contenuta limitatamente a quanto necessario per risolvere un determinato problema. La scelta di approfondire la trattazione ad un livello matematico leggermente più avanzato di quello di un usuale corso introduttivo di elettromagnetismo, ha comportato per ragioni di tempo la necessità di trascurare alcuni argomenti (fra questi, l'ottica geometrica, i circuiti elettrici, gli apparecchi elettrici etc.) che in verità farebbero parte naturale di un corso di questo tipo.

# Indice

<b>1</b>	<b>Elettrostatica</b>	<b>6</b>
1.1	Le equazioni di Maxwell . . . . .	6
1.1.1	Le unità di misura . . . . .	6
1.2	Il metodo delle immagini . . . . .	8
1.2.1	Carica vicino a piano conduttore . . . . .	8
1.2.2	Carica vicino a sfera conduttrice . . . . .	10
1.2.3	Sfera conduttrice in campo elettrico uniforme . . . . .	13
1.2.4	Campo prodotto da una sfera con densità di carica $\propto \cos \theta$ . . . . .	14
1.2.5	Il campo elettrico di una sfera uniformemente polarizzata	16
1.3	Il metodo delle funzioni analitiche . . . . .	17
1.3.1	$f(\zeta) = \zeta^2$ . . . . .	17
1.3.2	$f(\zeta) = \sqrt{\zeta}$ . . . . .	18
1.3.3	$f(\zeta) = \zeta^{\frac{3}{2}}$ . . . . .	19
1.3.4	$f(\zeta) = \zeta^\alpha$ . . . . .	20
1.4	Il campo elettrostatico in situazioni varie . . . . .	21
1.4.1	L'equazione di Poisson in una dimensione . . . . .	21
1.4.2	$\epsilon \ll 1$ . . . . .	25
1.4.3	$\epsilon \rightarrow 1^-$ . . . . .	28
1.4.4	Il campo elettrico di dipolo e di quadrupolo . . . . .	30
1.4.5	Il campo elettrostatico di una catena di ioni . . . . .	32
1.4.6	Il campo di una catena di dipoli elettrici . . . . .	37
1.4.7	Il campo di un filo carico tra due piani conduttori . . . . .	39
1.4.8	Il campo elettrostatico di una griglia . . . . .	42
1.4.9	Effetto punta . . . . .	45
1.4.10	Alcune identità per serie e prodotti . . . . .	54
1.4.11	Un problema di Laplace con condizioni al bordo di Neumann . . . . .	56
1.4.12	Plasmi . . . . .	58
1.5	Energia elettrostatica . . . . .	60
1.5.1	Energia di cristallo ionico . . . . .	60
<b>2</b>	<b>I dielettrici</b>	<b>61</b>
2.1	Le equazioni dell'elettrostatica nei dielettrici . . . . .	61
2.2	Le condizioni al contorno per $E$ e $D$ . . . . .	63
2.2.1	Esempio: carica in presenza di un dielettrico . . . . .	63

2.2.2	Esempio: la sfera uniformemente polarizzata . . . . .	65
2.3	Equazione di Clausius-Mossotti per dielettrici . . . . .	66
2.4	Legge di Curie-Weiss . . . . .	68
2.5	Un modello classico per la polarizzabilità atomica . . . . .	68
2.6	Un modello per gli anti-ferroelettrici . . . . .	69
<b>3</b>	<b>Magnetostatica</b>	<b>71</b>
3.1	Il potenziale vettore di un filo rettilineo . . . . .	71
3.2	Il potenziale vettore di un solenoide infinito . . . . .	71
3.3	Il campo di dipolo magnetico . . . . .	74
3.4	Una digressione sull'invarianza relativistica . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Magnetismo nella materia</b>	<b>80</b>
4.1	Magnetizzazione . . . . .	80
4.2	Condizioni al contorno per $B$ ed $H$ . . . . .	84
4.3	Sfera uniformemente magnetizzata . . . . .	85
4.4	Magnetizzazione spontanea . . . . .	86
<b>5</b>	<b>La legge del flusso</b>	<b>89</b>
<b>6</b>	<b>Onde</b>	<b>92</b>
6.1	Equazioni di Maxwell nei dielettrici . . . . .	92
6.2	Onde nei dielettrici . . . . .	93
6.2.1	Coefficiente di assorbimento . . . . .	94
6.2.2	Indice di rifrazione di una miscela . . . . .	95
6.3	Onde nei metalli . . . . .	95
6.3.1	Limite di bassa frequenza . . . . .	96
6.3.2	Limite di alta frequenza . . . . .	100
6.4	Energia ed impulso del campo elettromagnetico . . . . .	100
6.5	Riflessione e rifrazione . . . . .	103
6.5.1	Riflessione sui metalli . . . . .	109
6.5.2	Riflessione totale interna . . . . .	110
6.6	Diffrazione . . . . .	110
6.7	Diffrazione di Fraunhofer . . . . .	113
6.7.1	Fenditura verticale . . . . .	116
6.7.2	Diffrazione da una grata . . . . .	117
6.8	Diffrazione di Fresnel . . . . .	118

6.9	Apertura circolare: confronto tra approssimazioni di Fraunhofer e Fresnel . . . . .	121
<b>7</b>	<b>Cavità e guide d'onda</b>	<b>124</b>
7.1	Condizioni al contorno in presenza di conduttori . . . . .	124
7.2	Cavità e guide d'onda cilindriche . . . . .	125
7.3	Cavità risonanti . . . . .	128
7.3.1	Sezione circolare . . . . .	128
7.4	Guide d'onda . . . . .	130
7.4.1	Sezione circolare . . . . .	130
7.4.2	Sezione rettangolare . . . . .	133

# 1 Elettrostatica

## 1.1 Le equazioni di Maxwell

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\epsilon_0 c^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

La densità di forza esercitata dal campo elettromagnetico è data dalla legge di Lorentz

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (1.2)$$

Nel sistema di misura internazionale

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} &\equiv 10^{-7} c^2 \frac{\text{newton} \times \text{metro}^2}{\text{coulomb}^2} \approx \\ &\approx 9.0 \cdot 10^9 \frac{\text{newton} \times \text{metro}^2}{\text{coulomb}^2} = 9.0 \cdot 10^9 \frac{\text{volt} \times \text{metro}}{\text{coulomb}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

### 1.1.1 Le unità di misura

Denotiamo con  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{j}$ ,  $\tilde{E}$  e  $\tilde{B}$  le grandezze fisiche che compaiono nelle equazioni di Maxwell in un sistema di misura generico. Conveniamo che nel sistema di misura in questione la definizione di forza e delle altre grandezze fisiche non elettriche coincida con quella del sistema internazionale:

$$\vec{f} = \tilde{\rho} \tilde{E} + c_L \tilde{j} \wedge \tilde{B} = \vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (1.4)$$

Abbiamo introdotto una costante  $c_L$  (presa uguale ad 1 nel sistema internazionale) nell'espressione per la forza magnetica di Lorentz su una carica in movimento. Deve essere

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} &= \lambda \rho & \vec{\tilde{j}} &= \lambda \vec{j} \\ \vec{\tilde{E}} &= \frac{1}{\lambda} \vec{E} & \vec{\tilde{B}} &= \frac{1}{c_L \lambda} \vec{B}\end{aligned}\quad (1.5)$$

Le equazioni di Maxwell nel sistema di misura generico si scriveranno

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{E}} &= \frac{\rho}{\epsilon_0 \lambda^2} \equiv c_G \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{B}} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{\tilde{E}} &= -c_L \frac{\partial \vec{\tilde{B}}}{\partial t} \equiv c_F \frac{\partial \vec{\tilde{B}}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{\tilde{B}} &= \frac{1}{c^2 c_L} \frac{\partial \vec{\tilde{E}}}{\partial t} + \frac{\vec{\tilde{j}}}{\epsilon_0 \lambda^2 c^2 c_L} = c_M \frac{\partial \vec{\tilde{E}}}{\partial t} + c_M c_G \vec{\tilde{j}}\end{aligned}\quad (1.6)$$

Pertanto:

a) La scelta della costante  $c_G$  che appare nella legge di Gauss è equivalente alla scelta dell'unità di misura per la carica (ed il campo elettrico). È possibile porre  $c_G$  uguale ad 1 (come nel sistema di Gauss razionalizzato), oppure, (sistema di Gauss) uguale a  $4\pi$

$$c_G = \frac{1}{\epsilon_0 \lambda^2} = 4\pi \quad (1.7)$$

così che la legge di Coulomb diventi

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2 \hat{r}}{r^2} \quad (1.8)$$

Notiamo però che il *segno* di  $c_G$  non dipende dalla scelta dell'unità di misura della carica. Questo corrisponde al fatto, *fisico* ed indipendente dalle scelte convenzionali, che cariche uguali (opposte) si respingono (attragono).

b) Nel sistema internazionale la costante  $c_F$  che moltiplica la derivata temporale di  $\vec{B}$  nel secondo membro della legge di Faraday è posta uguale a  $-1$ , e la costante  $c_L$  che appare nella formula per la componente magnetica della

forza di Lorentz è posta uguale a 1.  $c_F$ ,  $c_M$  e  $c_L$  in un sistema di misura arbitrario devono soddisfare le relazioni

$$\begin{aligned} c_L &= -c_F \\ c_F \times c_M &= (-1) \times \frac{1}{c^2} = c_F \times \frac{1}{c^2 c_L} = -\frac{1}{c^2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

In particolare, è possibile cambiare il *segno* di  $c_F$  se si fa altrettanto con  $c_M$  e  $c_L$ . Pertanto il fatto che due correnti parallele (antiparallele) si attraggono (respingono) è un fatto *fisico*, indipendente dalla scelta del sistema di misura.

Nel sistema di Gauss (razionalizzato) si prende

$$c_L = \frac{1}{c} \quad c_F = -\frac{1}{c} \quad c_M = \frac{1}{c} \quad (1.10)$$

c) In definitiva l'unica costante *fisica*, cioè indipendente dal sistema di misura elettromagnetico, che compare nelle equazioni di Maxwell è la costante  $\frac{1}{c^2}$ . Il fatto che questa costante sia positiva corrisponde al fatto — fisico — che l'invarianza delle equazioni di Maxwell è quella di Lorentz e la segnatura dello spazio tempo è quella Minkowskiana.

## 1.2 Il metodo delle immagini

### 1.2.1 Carica vicino a piano conduttore

*La densità di carica indotta*

Sia  $z$  l'asse ortogonale al piano che passa per la carica  $q$ ,  $a$  la distanza di questa dal piano. Usiamo un sistema di coordinate cilindriche con centro sul piano. La carica immagine  $-q$  ha coordinate  $(0, 0, -a)$ . Il potenziale è

$$\phi(\rho, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z+a)^2}} \right] \quad (1.11)$$

La densità di carica sul conduttore è

$$\sigma(\rho) = \epsilon_0 E_z|_{z=0} = \frac{q}{4\pi} \left[ \frac{z-a}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{z+a}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \right]_{z=0} = -\frac{q a}{2\pi} \frac{1}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.12)$$

Verifichiamo che la carica totale indotta è  $-q$ :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\rho 2\pi\rho\sigma(\rho) &= -q a \int_0^\infty \frac{d\rho\rho}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{q a}{2} \int_{a^2}^\infty \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} = \\ &= -q a \frac{1}{a} = -q \end{aligned} \quad (1.13)$$

Il campo creato dalla carica indotta deve annullare il campo per  $z < 0$ .  
Quindi *deve* essere, per  $z > 0$

$$\begin{aligned} \frac{q}{\sqrt{\rho_0^2 + (z+a)^2}} &= - \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\theta \sigma(\rho)}{\sqrt{z^2 + (\rho \cos \theta - \rho_0)^2 + \rho^2 \sin^2 \theta}} = \\ &= \frac{aq}{2\pi} \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\theta}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{z^2 + \rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0 \rho \cos \theta}} \end{aligned}$$

od, equivalentemente

$$\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + (|z|+1)^2}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{z^2 + \rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0 \rho \cos \theta}} \quad (1.14)$$

È relativamente agevole verificare quest'identità agli ordini più bassi nello sviluppo in potenze di  $\rho_0^2$

$$\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + (z+1)^2}} = \frac{1}{|z|+1} - \frac{1}{2} \frac{\rho_0^2}{(|z|+1)^3} + \dots \quad (1.15)$$

Mentre

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{\rho}{(\rho^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{z^2 + \rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0 \rho \cos \theta}} &= \frac{\rho}{2\pi (\rho^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{z^2 + \rho^2}} + \\ &- \frac{\rho^2 \rho_0 \cos \theta}{2\pi (1 + \rho^2)^{\frac{3}{2}} (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \rho_0^2 \frac{\rho (\rho^2 - 2z^2 + 3\rho^2 \cos 2\theta)}{8\pi (1 + \rho^2)^{\frac{3}{2}} (\rho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \dots \quad (1.16) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{z^2 + \rho^2}} &= \frac{1}{(z^2 - 1)} \left[ -\frac{\sqrt{\rho^2 + z^2}}{\sqrt{1 + \rho^2}} \right]_0^\infty = \frac{|z| - 1}{z^2 - 1} = \\ &= \frac{1}{1 + |z|} \\ &- \int_0^\infty \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\rho^2 \cos \theta}{2\pi (1 + \rho^2)^{\frac{3}{2}} (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \\ &\int_0^\infty \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\rho (\rho^2 - 2z^2 + 3\rho^2 \cos 2\theta)}{8\pi (1 + \rho^2)^{\frac{3}{2}} (\rho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1}{2(1 + |z|)^3} \end{aligned}$$

Sembra difficile calcolare direttamente l'integrale in (1.14) per  $\rho_0^2$  arbitrario con metodi elementari.

### 1.2.2 Carica vicino a sfera conduttrice

Sia  $a$  il raggio della sfera conduttrice e  $b$  la distanza di una carica  $q$  dal centro della sfera. Vogliamo determinare la distanza  $\bar{x}$  lungo l'asse tra il centro della sfera e la carica dove collocare una carica immagine  $q'$ . Supponiamo dapprima che la sfera si trovi ad un *potenziale costante*  $V_0 = 0$ . Scegliamo il centro degli assi cartesiani nel centro della sfera, l'asse  $x$  lungo l'asse tra il centro della sfera e la carica  $q$ . Sia  $P$  un punto di coordinate  $\vec{r} = (x, y, z)$ . Siano  $r_1$  ed  $r_2$  le distanze di  $P$  rispettivamente dalla carica  $q$  nella posizione  $(b, 0, 0)$  e dalla carica immagine  $q'$  nella posizione  $(\bar{x}, 0, 0)$ :

$$r_1 = \sqrt{(b-x)^2 + y^2 + z^2} \quad r_2 = \sqrt{(x-\bar{x})^2 + y^2 + z^2} \quad (1.17)$$

Per  $P$  sulla sfera deve essere

$$\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} = 0 \quad (1.18)$$

In particolare quando  $r_1 = b - a$  allora  $r_2 = a - \bar{x}$ :

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{a - \bar{x}}{b - a} = -\frac{q'}{q} \quad (1.19)$$

e quando  $r_1 = a + b$ ,  $r_2 = a + \bar{x}$

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{a + \bar{x}}{b + a} = -\frac{q'}{q} \quad (1.20)$$

Pertanto

$$\bar{x} = \frac{a^2}{b} \quad q' = -\frac{a}{b}q \quad (1.21)$$

Dunque

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{a}{b} \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{a^2}{b})^2 + y^2 + z^2}} \right] = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|\vec{r} - b\hat{x}|} - \frac{a}{b} \frac{1}{|\vec{r} - \frac{a^2}{b}\hat{x}|} \right] \end{aligned} \quad (1.22)$$

dove  $\hat{x}$  è il versore lungo l'asse delle  $x$ . Se  $P$  è sulla sfera  $\vec{r} = a\hat{n}$

$$\phi(a\vec{n}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|a\hat{n} - b\hat{x}|} - \frac{1}{|b\hat{n} - a\hat{x}|} \right] = 0 \quad (1.23)$$

poiché

$$\begin{aligned} |a \hat{n} - b \hat{x}|^2 &= a^2 + b^2 - 2 a b \cos \theta \\ |b \hat{n} - a \hat{x}|^2 &= a^2 + b^2 - 2 a b \cos \theta \end{aligned} \quad (1.24)$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra  $\vec{r}$  e  $\hat{x}$ .

Se la sfera è ad un potenziale  $V_0 \neq 0$  possiamo aggiungere una carica

$$q'' = 4 \pi \epsilon_0 V_0 a \quad (1.25)$$

al centro della sfera. Il potenziale diventa

$$\phi_{V_0}(\vec{r}) = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \left[ \frac{1}{|\vec{r} - b \hat{x}|} - \frac{a}{b} \frac{1}{|\vec{r} - \frac{a^2}{b} \hat{x}|} + \frac{4 \pi \epsilon_0 a V_0}{q |\vec{r}|} \right] \quad (1.26)$$

Se la sfera ha una carica fissata  $Q$  dobbiamo aggiungere, invece della carica  $q''$ , una carica

$$q''' = -q' + Q = \frac{a}{b} q + Q \quad (1.27)$$

al centro della sfera. Il potenziale diventa

$$\phi_Q(\vec{r}) = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \left[ \frac{1}{|\vec{r} - b \hat{x}|} - \frac{a}{b} \frac{1}{|\vec{r} - \frac{a^2}{b} \hat{x}|} \right] + \frac{(Q + \frac{a}{b} q)}{4 \pi \epsilon_0 |\vec{r}|} \quad (1.28)$$

**Esercizio:** determinare la densità superficiale di carica indotta per  $V_0 = 0$ .

Calcoliamo la densità di carica sulla sfera nel caso  $V_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{V_0=0}(\theta) &= -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{|\vec{r}|=a} = \frac{q}{4 \pi} \left[ \frac{a}{|a \hat{n} - b \hat{x}|^3} - \frac{a}{b} \frac{a}{|a \hat{n} - \frac{a^2}{b} \hat{x}|^3} \right] = \\ &= \frac{q a}{4 \pi |a \hat{n} - b \hat{x}|^3} \left[ 1 - \frac{b^2}{a^2} \right] = \\ &= \frac{q}{4 \pi a^2} \frac{[1 - \frac{b^2}{a^2}]}{|1 + \frac{b^2}{a^2} - 2 \frac{b}{a} \cos \theta|^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Il rapporto tra le densità superficiali di carica nel punto più vicino e più lontano dalla carica  $q$  è

$$\frac{\sigma(\theta = 0)}{\sigma(\theta = \pi)} = \left( \frac{a + b}{a - b} \right)^3 \quad (1.30)$$

**Esercizio:** si calcoli il momento di dipolo indotto per  $Q = 0$ .

Consideriamo il caso di una sfera metallica neutra isolata, con carica fissata  $Q = 0$ :

$$\phi_{Q=0}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|\vec{r} - b\hat{x}|} - \frac{a}{b} \frac{1}{|\vec{r} - \frac{a^2}{b}\hat{x}|} + \frac{a}{b} \frac{1}{|\vec{r}|} \right] \quad (1.31)$$

Il momento di dipolo indotto sulla sfera è quello delle due cariche immagine

$$\vec{p} = -\frac{a}{b} q \frac{a^2}{b} \hat{x} = -\frac{a^3 q}{b^2} \hat{x} \quad (1.32)$$

Verifichiamo questo risultato a partire dalla densità di carica superficiale:

$$\begin{aligned} \sigma_{Q=0}(\theta) &= -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi_{Q=0}(r)}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{q}{4\pi} \left[ \frac{a}{|a\hat{r} - b\hat{x}|^3} - \frac{b^2}{a^2} \frac{a}{|b\hat{r} - a\hat{x}|^3} + \frac{1}{ab} \right] = \\ &= \frac{qa}{4\pi} \left[ \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \frac{1}{|a\hat{r} - b\hat{x}|^3} + \frac{1}{a^2 b} \right] = \\ &= \frac{q}{4\pi a^2} \left[ \frac{(1 - \frac{b^2}{a^2})}{[1 + \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{b}{a} \cos \theta]^{\frac{3}{2}}} + \frac{a}{b} \right] \end{aligned}$$

Il momento di dipolo di questa distribuzione di carica è diretto lungo  $\hat{x}$ , quindi

$$\begin{aligned} p &= 2\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta a^2 \sigma_{Q=0}(\theta) a \cos \theta = \\ &= \frac{qa}{2} \int_{-1}^1 dt t \left[ \frac{(1 - \frac{b^2}{a^2})}{[1 + \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{b}{a} t]^{\frac{3}{2}}} + \frac{a}{b} \right] = \\ &= \frac{qa}{2} \left( -\frac{2a^2}{b^2} \right) = -\frac{qa^3}{b^2} \quad (1.33) \end{aligned}$$

**Esercizio:** determinare la forza esercitata dalla carica indotta sulla carica  $q$ .

Nel caso di potenziale fissato:

$$F_q = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{ab}{|b^2 - a^2|^2} + \frac{4\pi\epsilon_0 a V_0}{q b^2} \right] = \begin{cases} -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{b^3} + \frac{q a V_0}{b^2} & \text{per } \frac{b}{a} \gg 1 \\ -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \frac{1}{(b-a)^2} & \text{per } \frac{b}{a} \approx 1 \end{cases}$$

Nel caso di carica fissata  $Q$ :

$$\begin{aligned}
 F_q &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{ab}{|b^2 - a^2|^2} + \frac{a}{b^3} \right] + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 b^2} = \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b^2} \left[ Q - \frac{qab^3}{|b^2 - a^2|^2} + \frac{aq}{b} \right]
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

Per  $b \gg a$  otteniamo naturalmente

$$F_q \approx \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 b^2} \quad \text{per } \frac{b}{a} \gg 1 \tag{1.35}$$

Per  $b \approx a$

$$F_q \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b^2} \left[ Q - q \frac{a^2}{4|b - a|^2} \right] \tag{1.36}$$

Notiamo che anche quando il segno di  $Q$  e  $q$  è lo stesso, per posizioni della carica sufficientemente vicine alla sfera, la forza diventa *attrattiva*. Questa distanza critica è data da

$$b - a \sim \frac{a}{2} \sqrt{\frac{q}{Q}} \tag{1.37}$$

Nel caso di elettroni nei metalli, questo effetto spiega la resistenza ad rimuovere un elettrone dalla superficie, nonostante la repulsione delle altre cariche.

### 1.2.3 Sfera conduttrice in campo elettrico uniforme

Consideriamo prima una sfera conduttrice (posta a potenziale nullo) il cui centro coincide con l'origine del sistema di coordinate posta nel campo di due cariche opposte  $\pm Q$  poste lungo l'asse delle  $x$  nelle posizioni  $\mp R$ . Le due cariche immagine  $\mp Q \frac{a}{R}$  saranno poste lungo l'asse delle  $x$  nelle posizioni  $\mp \frac{a^2}{R}$ . Il potenziale è

$$\begin{aligned}
 \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q}{|\vec{r} + R\hat{x}|} - \frac{Q}{|\vec{r} - R\hat{x}|} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a}{R} \frac{Q}{|\vec{r} - \frac{a^2}{R}\hat{x}|} - \frac{a}{R} \frac{Q}{|\vec{r} + \frac{a^2}{R}\hat{x}|} \right]
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

Consideriamo ora il limite

$$R \gg a \quad (1.39)$$

Il campo delle cariche  $Q$  diventa quasi uniforme sulla sfera, lungo  $x$  e di intensità

$$E_0 \approx \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (1.40)$$

e

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{2\vec{r} \cdot \hat{x}}{R^2} + \frac{a}{R} \frac{2\vec{r} \cdot \hat{x}}{r^3} \frac{a^2}{R} \right] = \\ &= -E_0 \vec{r} \cdot \hat{x} + E_0 a^3 \frac{\vec{r} \cdot \hat{x}}{r^3} = -E_0 r \cos\theta + \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} \end{aligned} \quad (1.41)$$

cioè il campo indotto è quello di un dipolo  $\vec{p} = p \hat{x}$ , con

$$p = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_0 \quad (1.42)$$

In effetti, per  $R \gg a$ , le due cariche immagini formano un dipolo lungo l'asse delle  $x$  di momento

$$\frac{aQ}{R} \times \frac{2a^2}{R} = a^3 4\pi\epsilon_0 E_0 \quad (1.43)$$

**Esercizio:** determinare la densità di carica indotta.

$$\sigma(\theta) = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = \epsilon_0 E_0 \left( \cos\theta + \frac{2a^3 \cos\theta}{a^3} \right) = 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta \quad (1.44)$$

Poiché la carica immagine totale è nulla non c'è differenza in questo problema tra il caso in cui la sfera conduttrice sia a potenziale fissato nullo o a carica fissata nulla.

#### 1.2.4 Campo prodotto da una sfera con densità di carica $\propto \cos\theta$

Poiché il campo prodotto dalla densità di carica indotta del problema precedente deve annullare esattamente il campo all'interno del conduttore, il campo elettrico prodotto da una densità di carica sferica

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta = \sigma_0 \hat{r} \cdot \hat{x} \quad (1.45)$$

è costante all'interno della stessa

$$\vec{E}_\sigma = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \hat{x} \quad (1.46)$$

Riotteniamo questo risultato (in maniera molto più laboriosa) utilizzando la formula di Coulomb. Sia  $\vec{x}_P$  il punto interno ad una sfera di raggio  $a$  nel quale vogliamo calcolare il potenziale. Scegliamo il sistema di coordinate in maniera tale che

$$\vec{x}_P = (0, 0, z_P) \quad 0 \leq z_P \leq a \quad (1.47)$$

Sia  $\vec{x}_N$  il punto sulla superficie della sfera che è il “polo nord” della densità di carica (1.45): se

$$\vec{x}' = a (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (1.48)$$

è un punto generico sulla sfera, la densità di carica in  $\vec{x}'$  è

$$\sigma(\vec{x}') = \sigma_0 \frac{\vec{x}_N \cdot \vec{x}'}{a^2} \quad (1.49)$$

Attraverso una rotazione dell'asse delle  $z$  che preserva le coordinate  $\vec{x}_P$  possiamo prendere  $\vec{x}_N$  nella forma

$$\vec{x}_N = a (\sin \alpha, 0, \cos \alpha) \quad (1.50)$$

dove  $\alpha$  è l'angolo tra  $\vec{x}_P$  e  $\vec{x}_N$ . Pertanto

$$\sigma(\vec{x}') = \sigma_0 (\sin \alpha \sin \theta \cos \phi + \cos \alpha \cos \theta) \quad (1.51)$$

La distanza tra  $\vec{x}_P$  e  $\vec{x}'$  si scrive

$$|\vec{x}_P - \vec{x}'| = a \sqrt{\sin^2 \theta + (\cos \theta - \frac{z_P}{a})^2} = a \sqrt{1 + \frac{z_P^2}{a^2} - 2 \frac{z_P}{a} \cos \theta} \quad (1.52)$$

Dunque

$$\begin{aligned} \frac{4 \pi \epsilon_0 \phi(\vec{x}_P)}{a \sigma_0} &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{d\theta \sin \theta (\sin \alpha \sin \theta \cos \phi + \cos \alpha \cos \theta)}{\sqrt{1 + \frac{z_P^2}{a^2} - 2 \frac{z_P}{a} \cos \theta}} = \\ &= 2 \pi \cos \alpha \int_0^\pi \frac{d\theta \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1 + \frac{z_P^2}{a^2} - 2 \frac{z_P}{a} \cos \theta}} = \\ &= 2 \pi \cos \alpha \int_{-1}^1 \frac{dt t}{\sqrt{1 + \frac{z_P^2}{a^2} - 2 \frac{z_P}{a} t}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \pi \cos \alpha \frac{-(1 + \frac{z_P^2}{a^2} + \frac{z_P}{a} t) \sqrt{1 + \frac{z_P^2}{a^2} - 2 \frac{z_P}{a} t}}{3 \frac{z_P^2}{a^2}} \Big|_{-1}^1 = \\
&= -\frac{2 \pi a^2 \cos \alpha}{3 z_P^2} \left[ \left(1 + \frac{z_P^2}{a^2} + \frac{z_P}{a}\right) \left(1 - \frac{z_P}{a}\right) + \right. \\
&\quad \left. - \left(1 + \frac{z_P^2}{a^2} - \frac{z_P}{a}\right) \left(1 + \frac{z_P}{a}\right) \right] = \\
&= -\frac{2 \pi a^2 \cos \alpha}{3 z_P^2} \left[ \frac{2 z_P}{a} - \frac{2 z_P}{a} - \frac{2 z_P^3}{a^3} \right] = \frac{4 \pi z_P \cos \alpha}{3 a}
\end{aligned} \tag{1.53}$$

In definitiva

$$\phi(\vec{x}_P) = \frac{z_P \sigma_0 \cos \alpha}{3 \epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{3 \epsilon_0} \vec{x}_P \cdot \hat{x}_N \tag{1.54}$$

e

$$\vec{E}(\vec{x}_P) = -\frac{\sigma_0}{3 \epsilon_0} \hat{x}_N \tag{1.55}$$

in accordo con (1.46).

### 1.2.5 Il campo elettrico di una sfera uniformemente polarizzata

Il campo di una sfera di raggio  $a$  uniformemente polarizzata può essere pensato come la sovrapposizione dei campi di due sfere uniformemente cariche, di segno opposto, spostate di una grandezza  $d \ll a$  lungo l'asse  $z$ . La densità di polarizzazione uniforme è

$$\vec{P} = \frac{3Q}{4\pi a^3} \vec{d} \tag{1.56}$$

Il potenziale di una sfera uniformemente carica è

$$\phi_Q(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r} & \text{per } r > a \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{3a^2 - r^2}{2a^3} & \text{per } r < a \end{cases} \tag{1.57}$$

Il campo della sfera uniformemente polarizzata è dunque

$$\phi_P(r) = -\vec{d} \cdot \vec{\nabla} \phi_Q(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{a^3}{3\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} & \text{per } r > a \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{a^3} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{3\epsilon_0} & \text{per } r < a \end{cases} \tag{1.58}$$

Il campo elettrico esterno è quello di un dipolo con

$$\vec{p} = Q \vec{d} = \frac{4 \pi a^3 \vec{P}}{3} \quad (1.59)$$

Il campo elettrico interno è costante

$$\vec{E}_P = -\frac{\vec{P}}{3 \epsilon_0} \quad (1.60)$$

Questa formula coincide con la formula (1.46) ottenuta attraverso un altro procedimento: infatti la densità di carica superficiale di polarizzazione è, secondo la regola generale,

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} = P \cos \theta \quad (1.61)$$

### 1.3 Il metodo delle funzioni analitiche

Ricordiamo che, se

$$\zeta = x + i y \quad (1.62)$$

abbiamo

$$\partial_x = (\partial_\zeta + \partial_{\bar{\zeta}}) \quad \partial_y = i (\partial_\zeta - \partial_{\bar{\zeta}}) \quad (1.63)$$

e

$$\partial_\zeta = \frac{1}{2}(\partial_x - i \partial_y) \quad \partial_{\bar{\zeta}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i \partial_y) \quad (1.64)$$

#### 1.3.1 $f(\zeta) = \zeta^2$

$$\zeta^2 = x^2 - y^2 + 2 i x y \quad (1.65)$$

Descrive la soluzione del problema di un conduttore formato da piani ad angolo retto a potenziale nullo:

$$\phi(x, y) = x^2 - y^2 \quad (1.66)$$

Il campo elettrico è

$$\vec{E} = (-2 x, +2 y) \quad (1.67)$$

La densità di carica superficiale indotta è

$$\sigma(x) = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n}|_{\phi=0} = \begin{cases} -\frac{\epsilon_0}{\sqrt{2}} (2 x, 2 x) \cdot (1, 1) = -2 \sqrt{2} \epsilon_0 x & x < 0 \\ \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2}} (-2 x, 2 x) \cdot (-1, 1) = 2 \sqrt{2} \epsilon_0 x & x > 0 \end{cases} \quad (1.68)$$

**1.3.2**  $f(\zeta) = \sqrt{\zeta}$

$$\sqrt{\zeta} = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}} \quad (1.69)$$

Prendiamo la parte reale

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2} = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} = \\ &= (x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1 + \frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}} \end{aligned} \quad (1.70)$$

Il campo elettrico è

$$\begin{aligned} E_x(x, y) &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ E_y(x, y) &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \end{aligned} \quad (1.71)$$

Possiamo pensarlo come il campo di un conduttore con forma parabolica lungo l'asse negativo delle  $x$ , la cui superficie è descritta dall'equazione

$$\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x} = \sqrt{2} \phi_0 \quad (1.72)$$

con  $\phi_0 > 0$ . Allora

$$x^2 + y^2 = (2\phi_0^2 - x)^2 = 4\phi_0^4 - 4\phi_0^2 x + x^2 \quad (1.73)$$

cioè

$$x = \phi_0^2 - \frac{y^2}{4\phi_0^2} \quad (1.74)$$

Il conduttore interseca l'asse delle  $x$  in  $x_0 = \phi_0^2$ . Calcoliamo la densità di carica per  $\phi_0 \rightarrow 0$ . Il campo elettrico sul conduttore è

$$\begin{aligned} E_x(x, y)|_{con} &= -\frac{1}{2} \frac{\phi_0}{|2\phi_0^2 - x|} \\ E_y(x, y)|_{con} &= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\phi_0^2 - x^2}}{|2\phi_0^2 - x|} \end{aligned} \quad (1.75)$$

La densità di carica è pertanto

$$\sigma(x) = \epsilon_0 E|_{cond} = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{1}{\sqrt{|2\phi_0^2 - x|}} \quad (1.76)$$

La densità di carica è dunque massima alla punta del conduttore

$$\sigma(x = \phi_0^2) = \frac{\epsilon_0}{2\phi_0} \quad (1.77)$$

e diverge come  $\frac{1}{\phi_0}$ .

### 1.3.3 $f(\zeta) = \zeta^{\frac{3}{2}}$

$$\zeta^{\frac{3}{2}} = \rho^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3\theta}{2}} \quad (1.78)$$

Se scegliamo  $\theta \in (-\pi, \pi)$  questa funzione è analitica eccetto che per un taglio lungo l'asse delle  $x$  negativo. Consideriamo la parte reale

$$\phi(x, y) = \rho^{\frac{3}{2}} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (1.79)$$

Sulle rette che partono dall'origine

$$\theta = \frac{\pi}{3}, 0, -\frac{\pi}{3} \quad (1.80)$$

il potenziale si annulla:  $\phi = 0$ . Possiamo quindi pensare  $\phi(x, y)$  come il potenziale all'interno di un conduttore posto a potenziale nullo formato da due piani che formano un angolo di  $\frac{2\pi}{3}$  (una regione che fa parte del dominio di analiticità di  $f(\zeta)$ ). Calcoliamo il campo elettrico nel settore  $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ :

$$\begin{aligned} E_x &= -\partial_x \phi = -(\partial_\zeta + \partial_{\bar{\zeta}}) \Re(f(\zeta)) = -\frac{1}{2}(f'(\zeta) + f'(\bar{\zeta})) = \\ &= -\frac{3}{4}(\zeta^{\frac{1}{2}} + \bar{\zeta}^{\frac{1}{2}}) = -\frac{3}{2}\rho^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \\ E_y &= -\partial_y \phi = -i(\partial_\zeta - \partial_{\bar{\zeta}}) \Re(f(\zeta)) = -\frac{i}{2}(f'(\zeta) - f'(\bar{\zeta})) = \\ &= -\frac{3i}{4}(\zeta^{\frac{1}{2}} - \bar{\zeta}^{\frac{1}{2}}) = \frac{3}{2}\rho^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (1.81)$$

La densità di carica sulla superficie del conduttore,  $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$ , è

$$\begin{aligned}\frac{\sigma^\pm(\rho)}{\epsilon_0} &= E_x(\theta = \pm\frac{\pi}{3}) \sin\frac{\pi}{3} \mp E_y(\theta = \pm\frac{\pi}{3}) \cos\frac{\pi}{3} = \\ &= \rho^{\frac{3}{2}} \left[-\frac{3}{4} \mp \left(\pm\frac{1}{4}\right)\right] = \\ &= -\frac{3}{2} \sqrt{\rho}\end{aligned}\quad (1.82)$$

**1.3.4**  $f(\zeta) = \zeta^\alpha$

$$\zeta^\alpha = \rho^\alpha e^{i\alpha\theta} \quad (1.83)$$

con

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1 \quad (1.84)$$

Scegliamo l'angolo nell'intervallo

$$-\pi \leq \theta \leq \pi \quad (1.85)$$

Prendiamo la parte reale

$$\phi(x, y) = \rho^\alpha \cos \alpha\theta \quad (1.86)$$

Le rette che partono dall'origine

$$\theta = \pm\frac{\pi}{2\alpha} \quad (1.87)$$

hanno  $\phi = 0$  e formano un angolo "a punta"

$$0 < \chi = 2\pi \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) < \pi \quad (1.88)$$

Possiamo quindi pensare  $\phi(x, y)$  come il potenziale all'esterno di un conduttore, posto a potenziale nullo, formato da questi due piani. Il campo elettrico è

$$\begin{aligned}E_x &= -\frac{1}{2}(\partial_\zeta + \partial_{\bar{\zeta}})(f(\zeta) + \bar{f}(\bar{\zeta})) = -\frac{1}{2}(f'(\zeta) + \bar{f}'(\bar{\zeta})) = \\ &= -\frac{\alpha}{2}(\zeta^{\alpha-1} + \bar{\zeta}^{\alpha-1}) \\ E_y &= -\frac{i}{2}(\partial_\zeta - \partial_{\bar{\zeta}})(f(\zeta) + \bar{f}(\bar{\zeta})) = -\frac{i}{2}(f'(\zeta) - \bar{f}'(\bar{\zeta})) = \\ &= -\frac{i\alpha}{2}(\zeta^{\alpha-1} - \bar{\zeta}^{\alpha-1})\end{aligned}\quad (1.89)$$

Il modulo del campo elettrico è

$$|E|^2 = \frac{\alpha^2}{4} 4 (\zeta \bar{\zeta})^{\alpha-1} = \frac{\alpha^2}{\rho^{2-2\alpha}}$$

e la densità superficiale di carica sui conduttori

$$\sigma = \epsilon_0 |E| = \frac{\epsilon_0 \alpha}{\rho^{1-\alpha}} \quad (1.90)$$

che mostra come la densità di carica e campo divergono in prossimità della punta ( $\alpha < 1$ ).

## 1.4 Il campo elettrostatico in situazioni varie

### 1.4.1 L'equazione di Poisson in una dimensione

L'equazione di Poisson in 1 dimensione diventa

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0} \quad (1.91)$$

Vogliamo descrivere la situazione in cui degli elettroni vengono emessi in  $x = 0$  con *velocità nulla* da un elettrodo (catodo) posto ad un potenziale fissato

$$\phi(0) = 0 \quad (1.92)$$

Gli elettroni si muovono lungo  $x$  fino a  $x = L$  dove vengono raccolti da un altro elettrodo (anodo) posto ad un potenziale fissato

$$\phi(d) = V \quad (1.93)$$

La velocità degli elettroni nel punto  $x$  è determinata dalla conservazione dell'energia

$$0 = \frac{1}{2} m_e v^2(x) - e \phi(x) \quad (1.94)$$

cioè

$$v(x) = \sqrt{\frac{2e}{m_e} \phi(x)} \quad (1.95)$$

La corrente tra anodo e catodo è

$$I = -A \rho(x) v(x) \quad (1.96)$$

(gli elettroni hanno carica negativa e  $I$  è positiva) dove  $A$  è la sezione del fascio e  $\rho(x)$  è la densità di carica degli elettroni. In condizioni stazionarie  $I$  è costante e

$$\rho(x) = -\frac{I}{A \sqrt{\frac{2e}{m_e} \phi(x)}} \quad (1.97)$$

In definitiva

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = \frac{I \sqrt{\frac{m_e}{2e}}}{A \epsilon_0 \sqrt{\phi(x)}} \quad (1.98)$$

Per studiare quest'equazione differenziale converrà usare delle variabili adimensionate. Introduciamo quindi

$$\varphi(\xi) \equiv \frac{\phi(x)}{V} \quad \xi \equiv \frac{x}{d} \quad (1.99)$$

Le condizioni agli estremi (1.92) e (1.93) diventano per la funzione adimensionata  $\varphi(\xi)$

$$\varphi(0) = 0 \quad \varphi(1) = 1 \quad (1.100)$$

L'equazione (1.98) si riscrive come

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = \frac{I d^2 \sqrt{\frac{m_e}{2e}}}{A \epsilon_0 V^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \quad (1.101)$$

L'equazione dipende esclusivamente dalla costante moltiplicativa, adimensionata, che appare nel membro di destra è, che denoteremo come

$$R \equiv \frac{4 I d^2}{A \epsilon_0 V^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{m_e}{2e}} \quad (1.102)$$

così che l'equazione differenziale diventa

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = \frac{R}{4} \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \quad (1.103)$$

Per risolvere quest'equazione riscriviamola come

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = -\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( -\frac{R}{2} \varphi^{\frac{1}{2}} \right) \quad (1.104)$$

che sono le equazioni del moto classiche di una particella di coordinata  $\varphi$  e di massa 1, che si muove in un potenziale unidimensionale

$$V(\varphi) = -\frac{R}{2} \varphi^{\frac{1}{2}} \quad (1.105)$$

con  $\xi$  che svolge il ruolo del tempo. Poiché l'energia di questo sistema si conserva, otteniamo l'equazione del primo ordine

$$\frac{1}{2} \varphi'^2 - \frac{R}{2} \varphi^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \epsilon^2 \quad (1.106)$$

dove  $\epsilon^2$  è una costante indipendente da  $\xi$ . Poiché  $\varphi(0) = 0$ ,  $\epsilon^2$  deve essere positivo

$$\epsilon^2 = \varphi'^2(0) \quad (1.107)$$

$\epsilon$  è quindi il modulo della derivata della funzione  $\varphi(\xi)$  nel punto  $\xi = 0$ . Fissato  $\epsilon$  quindi, la soluzione  $\varphi(\xi)$ , con  $\varphi(0) = 0$  è univocamente determinata. Dalle definizioni (1.99), risulta che

$$\epsilon = \frac{d\phi'(0)}{V} = \frac{E_0 d}{V} \quad (1.108)$$

dove  $E_0$  è il modulo del campo elettrico al catodo

L'equazione (1.106) è a variabili separabili:

$$\varphi' = \sqrt{\epsilon^2 + R \varphi^{\frac{1}{2}}} \quad (1.109)$$

da cui

$$\int_0^\varphi \frac{dz}{\sqrt{\epsilon^2 + R z^{\frac{1}{2}}}} = \xi \quad (1.110)$$

dove abbiamo imposto la condizione  $\varphi(0) = 0$ . Risolvendo

$$\begin{aligned} \sqrt{R} \xi &= \int_0^\varphi \frac{dz}{\sqrt{\frac{\epsilon^2}{R} + z^{\frac{1}{2}}}} = \int_{\frac{\epsilon^2}{R}}^{\frac{\epsilon^2}{R} + \sqrt{\varphi}} \frac{2 dy (y - \frac{\epsilon^2}{R})}{\sqrt{y}} = \\ &= \left[ \frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{4\epsilon^2}{R} y^{\frac{1}{2}} \right]_{\frac{\epsilon^2}{R}}^{\frac{\epsilon^2}{R} + \sqrt{\varphi}} = \\ &= \frac{4}{3} \left[ \left( \frac{\epsilon^2}{R} + \sqrt{\varphi} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3\epsilon^2}{R} \left( \frac{\epsilon^2}{R} + \sqrt{\varphi} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2\epsilon^3}{R^{\frac{3}{2}}} \right] \end{aligned} \quad (1.111)$$

Calcoliamo anche la carica totale compresa nel diodo:

$$\begin{aligned}
Q &= A \int_0^d dx \rho(x) = -\epsilon_0 A \int_0^d dx \phi''(x) = -\epsilon_0 A (\phi'(d) - \phi'(0)) = \\
&= -\frac{\epsilon_0 A V}{d} (\varphi'(1) - \varphi'(0)) = -\frac{\epsilon_0 A V}{d} (\sqrt{\epsilon^2 + R} - \epsilon) = \\
&= -\frac{\epsilon_0 A V \sqrt{R}}{d} \left( \sqrt{1 + \frac{\epsilon^2}{R}} - \frac{\epsilon}{\sqrt{R}} \right) \tag{1.112}
\end{aligned}$$

La capacità del sistema relativa a quella di un condensatore con armature di superficie  $A$  separate da una distanza  $d$  è quindi

$$c(\mu) \equiv \frac{|Q|}{V} \frac{d}{\epsilon_0 A} = \sqrt{R} \left( \sqrt{1 + \frac{\epsilon^2}{R}} - \frac{\epsilon}{\sqrt{R}} \right) \tag{1.113}$$

L'equazione (1.111) determina  $\xi$  in funzione di  $\varphi$ , e quindi, in modo implicito,  $\varphi(\xi)$ . Poiché per ottenere la funzione inversa  $\varphi(\xi)$  bisognerebbe risolvere un'equazione di terzo grado, studieremo le proprietà di  $\varphi(\xi)$  in modo implicito. La condizione  $\varphi(1) = 1$  fornisce la relazione tra  $R$  e  $\epsilon$ :

$$\frac{3\sqrt{R}}{4} = \left(\frac{\epsilon^2}{R} + 1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3\epsilon^2}{R} \left(\frac{\epsilon^2}{R} + 1\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2\epsilon^3}{R^{\frac{3}{2}}} \tag{1.114}$$

Il coefficiente  $R(\epsilon)$  determina il rapporto  $\frac{I}{V^{\frac{3}{2}}}$

$$I = R(\epsilon) \frac{A \epsilon_0}{4 d^2} \sqrt{\frac{2e}{m_e}} V^{\frac{3}{2}} \tag{1.115}$$

Cominciamo col notare che se  $\epsilon = 0$ , cioè per campo elettrico nullo al catodo, allora

$$\frac{3\sqrt{R}}{4} = 1 \Rightarrow I = \frac{4}{9} \frac{A \epsilon_0}{d^2} \sqrt{\frac{2e}{m_e}} V^{\frac{3}{2}} \quad \text{per } \epsilon = 0 \tag{1.116}$$

che è la famosa relazione di *Child-Langmuir* tra tensione e corrente, valida quando il campo elettrico è nullo al catodo. Per  $\epsilon = 0$  la relazione tra  $\xi$  e  $\varphi$  si semplifica

$$\xi = \varphi^{\frac{3}{4}} \quad \text{per } \epsilon = 0 \tag{1.117}$$

e può essere invertita agevolmente

$$\varphi(\xi) = \xi^{\frac{4}{3}} \quad \text{per } \epsilon = 0 \quad (1.118)$$

Per studiare la relazione  $R = R(\epsilon)$  definita dalla (1.114) nel caso generale è conveniente introdurre la variabile ausiliaria

$$\mu = \frac{\epsilon}{\sqrt{R}} \quad (1.119)$$

La (1.114) si riscrive in termini di  $\mu$

$$\sqrt{R} = \frac{4}{3} [(\mu^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 3\mu^2 (\mu^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + 2\mu^3] \quad (1.120)$$

Questa relazione e la definizione di  $\mu$

$$\epsilon = \sqrt{R} \mu = \frac{4\mu}{3} [(\mu^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 3\mu^2 (\mu^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + 2\mu^3] \quad (1.121)$$

definiscono due funzioni  $R(\mu)$  e  $\epsilon(\mu)$  e quindi, parametricamente, la relazione tra  $\epsilon$  ed  $R$ . La capacità relativa del diodo in funzione di  $\mu$  è:

$$c(\mu) = \frac{4}{3} [(\mu^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 3\mu^2 (\mu^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + 2\mu^3] (\sqrt{1 + \mu^2} - \mu) \quad (1.122)$$

La funzione  $\epsilon(\mu)$  è graficata in Fig.1. Da questo grafico si evince che esiste un'unico valore di  $\epsilon$  compreso in  $[0, 1]$  per ogni  $\mu$  positivo. Il valore  $\epsilon \rightarrow 0$  corrisponde a  $\mu \rightarrow 0$ , mentre  $\epsilon \rightarrow 1^-$  per  $\mu \rightarrow +\infty$ . Quindi le relazioni (1.120) e (1.121) sono invertibili e definiscono effettivamente una funzione univoca  $R(\epsilon)$ . Il grafico della  $\sqrt{R(\mu)}$  è mostrato in Fig. 2. Vediamo che  $R(\mu)$  è massimo e pari a  $\frac{4}{9}$  per  $\mu = 0$  ovvero per  $\epsilon = 0$ . Per  $\mu \rightarrow +\infty$ , ovvero per  $\epsilon \rightarrow 1^-$ ,  $R(\mu)$  va a zero. In Fig. 3 è graficata la capacità del diodo in funzione di  $\mu$ . Nel seguito consideriamo separatamente i casi  $\mu \ll 1$  e  $\mu \gg 1$ , per determinare il comportamento analitico di  $R$  in termini di  $\epsilon$  nei due limiti  $\epsilon \rightarrow 0+$  e  $\epsilon \rightarrow 1^-$ .

#### 1.4.2 $\epsilon \ll 1$

Per  $\mu \ll 1$

$$f(\mu) \equiv 1 + \frac{3}{2} \mu^2 - 3\mu^2 + O(\mu^3) = 1 - \frac{3}{2} \mu^2 + O(\mu^3) \quad (1.123)$$

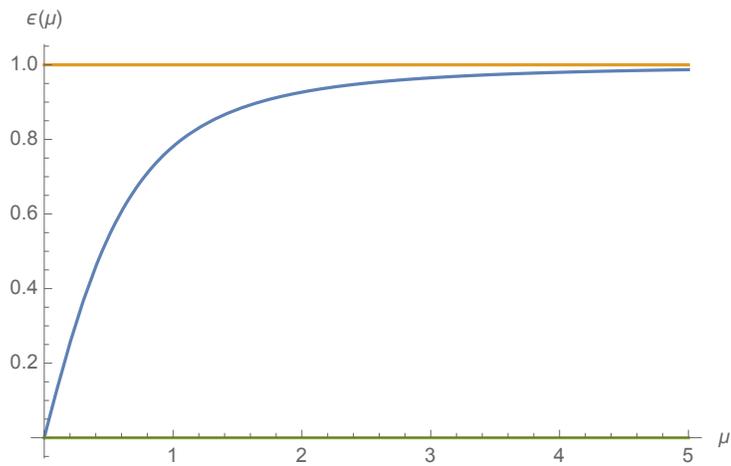


Figura 1: *La funzione  $\epsilon(\mu)$ .*

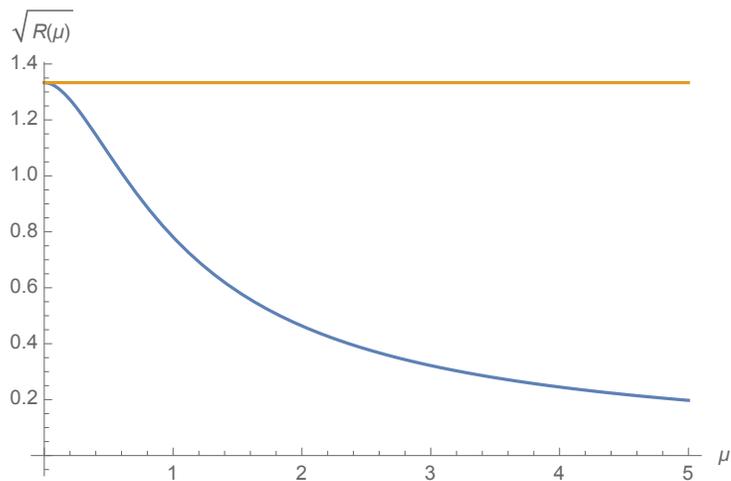


Figura 2: *La funzione  $\sqrt{R(\mu)}$ .*

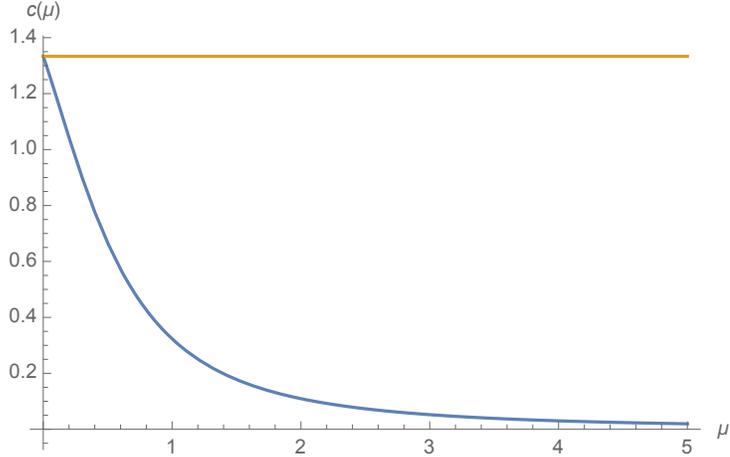


Figura 3: La funzione  $c(\mu)$ .

Quindi

$$\epsilon = \frac{4\mu}{3} \left(1 - \frac{3}{2}\mu^2 + O(\mu^3)\right) \quad (1.124)$$

Pertanto quando  $\mu \rightarrow 0$ , il campo elettrico al catodo  $\epsilon \rightarrow 0$  si annulla. Sostituendo nell'espressione per  $R$  otteniamo

$$\sqrt{R} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{3}{2}\mu^2 + O(\mu^3)\right) = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{9}{16} \epsilon^2 + O(\epsilon^3)\right) \quad (1.125)$$

Quindi

$$R(\epsilon) = \frac{4 I d^2}{A \epsilon_0 V^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{m_e}{2e}} = \frac{16}{9} \left(1 - \frac{27}{16} \epsilon^2 + O(\epsilon^3)\right) \quad (1.126)$$

è la correzione alla relazione tra corrente e potenziale nel caso di  $\epsilon$  piccolo ma non nullo. Vediamo che per  $\epsilon > 0$  la corrente diminuisce a parità di voltaggio.

Per quanto riguarda il potenziale  $\varphi(\xi)$ , dobbiamo distinguere due regimi. Quello in cui  $\xi \rightarrow 0$  e tale che  $\sqrt{\varphi(\xi)} \ll \mu^2$ . In questo regime

$$\sqrt{R} \xi = \frac{\varphi}{\mu} \left(1 + O\left(\frac{\sqrt{\varphi}}{\mu^2}\right)\right) \quad (1.127)$$

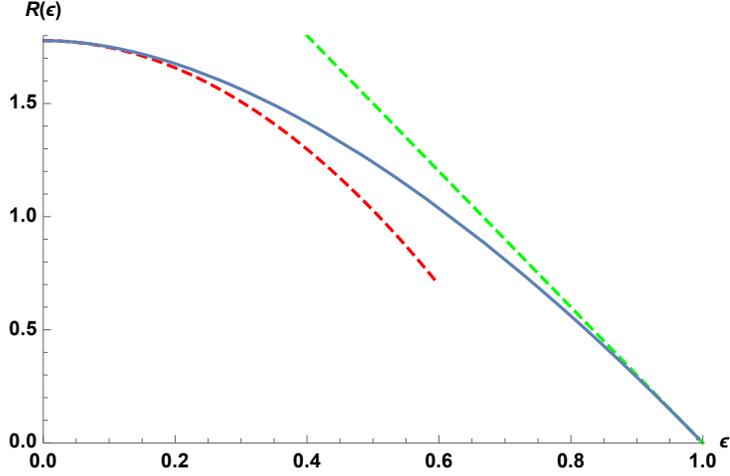


Figura 4: La funzione  $R(\epsilon)$ .

ovvero

$$\varphi(\xi) = \mu \sqrt{R} \xi \left(1 + O\left(\frac{\sqrt{\varphi}}{\mu^2}\right)\right) = \epsilon \xi \left(1 + O\left(\frac{\sqrt{\varphi}}{\mu^2}\right)\right) \quad (1.128)$$

come doveva essere, visto che  $\varphi'(0) = \epsilon$ . Quando invece  $\xi$  è abbastanza grande che  $\sqrt{\varphi(\xi)} \gg \mu^2$ ,

$$\frac{4}{3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{9}{16} \epsilon^2 + O(\epsilon^3)\right) \xi = \frac{4}{3} \varphi^{\frac{3}{4}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\mu^2}{\sqrt{\varphi}} + O\left(\frac{\varphi}{\mu^4}\right)\right) \quad (1.129)$$

ovvero

$$\varphi(\xi) = \xi^{\frac{4}{3}} \left(1 - \frac{9}{8} \epsilon^2 \left(1 - \frac{1}{\xi^{\frac{2}{3}}}\right) + O(\epsilon^3)\right) \quad (1.130)$$

Vediamo quindi che un piccolo campo al catodo  $\epsilon > 0$  ha l'effetto di rimuovere la singolarità nell'intorno di  $\xi = 0$  della derivata seconda della soluzione  $\xi^{\frac{4}{3}}$  ad  $\epsilon = 0$ , ritornando per  $\xi$  sufficientemente grandi al comportamento  $\propto \xi^{\frac{4}{3}}$ .

### 1.4.3 $\epsilon \rightarrow 1^-$

Nel limite  $\mu \gg 1$ :

$$f(\mu) = \mu^3 \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{8} \frac{1}{\mu^4} + O\left(\frac{1}{\mu^6}\right) \right]^2 \times$$

$$\begin{aligned}
& \times [3 + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu^2} + O(\frac{1}{\mu^4})] = \frac{3}{4\mu} [1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\mu^2} + O(\frac{1}{\mu^4})] \times \\
& \times [1 + \frac{1}{6} \frac{1}{\mu^2} + O(\frac{1}{\mu^4})] = \frac{3}{4\mu} [1 - \frac{1}{3} \frac{1}{\mu^2} + O(\frac{1}{\mu^4})] \quad (1.131)
\end{aligned}$$

Quindi

$$\epsilon(\mu) = [1 - \frac{1}{3} \frac{1}{\mu^2} + O(\frac{1}{\mu^4})] \quad (1.132)$$

Pertanto quando  $\mu \rightarrow +\infty$  il campo al catodo  $\epsilon$  tende a 1 (da sinistra). Passando alle variabili dimensionate, vediamo che il valore limite del campo elettrico al catodo è

$$\phi'(0) = \frac{V}{d} \varphi'(0) \rightarrow \frac{V}{d} \quad (1.133)$$

Nel limite di grandi  $\mu$ ,  $R$  tende a zero

$$\begin{aligned}
R(\epsilon) &= \frac{1}{\mu^2} [1 - \frac{1}{3} \frac{1}{\mu^2} + O(\frac{1}{\mu^4})]^2 = \frac{1}{\mu^2} [1 - \frac{2}{3} \frac{1}{\mu^2} + O(\frac{1}{\mu^4})] = \\
&= 3(1 - \epsilon) [1 + O((1 - \epsilon)^2)] \quad (1.134)
\end{aligned}$$

Quindi nel limite  $\epsilon \rightarrow 1^-$  la corrente va a zero come

$$I = \frac{A \epsilon_0 V^{\frac{3}{2}}}{4d^2} \sqrt{\frac{m_e}{2e}} 3(1 - \epsilon) [1 + O((1 - \epsilon)^2)] \quad (1.135)$$

Per quanto riguarda il potenziale, abbiamo

$$\varphi(\xi) = \xi [1 + (\sqrt{\xi} - 1)(1 - \epsilon) + O((1 - \epsilon)^2)] \quad (1.136)$$

Il campo è quindi una piccola perturbazione del campo elettrico costante che sarebbe la soluzione nel vuoto in assenza di correnti.

Il grafico di  $R$  in funzione di  $\epsilon$ , insieme alle approssimazioni (1.126) e (1.134) per  $\epsilon \rightarrow 0$  e  $\epsilon \rightarrow 1$  è mostrato in Fig. 4. Il meccanismo fisico che spiega questo comportamento è il seguente. Supponiamo di partire da una situazione in cui il potenziale iniziale tra le due piastre è quello lineare  $\phi(x) = -\frac{V}{d}x$ , corrispondente ad un campo elettrico costante  $E_{max} = \frac{V}{d}$ , ovvero  $\epsilon = 1$ . Questa è una soluzione dell'equazione di Poisson solo se  $I = 0$ , cioè se non passa corrente tra le piastre. Supponiamo ora di aumentare la

temperatura del catodo in modo che diventi possibile per il campo  $E_{max} = \frac{V}{d}$  riuscire ad strappare degli elettroni di conduzione dal catodo, così che una corrente  $I$  cominci a fluire tra le piastre. La nuvola di elettroni che si formerà al catodo creerà un campo elettrico diretto in senso *opposto* a quello originale. Quindi il campo al catodo tenderà a diminuire:  $\epsilon < 1$ . Fin tanto che il campo al catodo è ancora sufficientemente intenso da riuscire a estrarre gli elettroni dal metallo la densità di carica al catodo continuerà ad aumentare, e, di conseguenza, il campo  $\epsilon$  a diminuire. La situazione di equilibrio sarà raggiunta quando il campo  $\epsilon$  è diventato così piccolo da non essere più sufficiente per estrarre elettroni. Questo valore minimo di  $\epsilon$  dipende dal catodo, dalla sua temperatura per esempio: se la temperatura del catodo è sufficientemente alta,  $\epsilon$  sarà molto piccolo. Al limite per  $\epsilon = 0$  la corrente e la densità di carica non possono più aumentare, avendo raggiunto il valore di Child-Langmuir (1.116).

#### 1.4.4 Il campo elettrico di dipolo e di quadrupolo

Il potenziale elettrostatico di una distribuzione di cariche è

$$4, \pi \epsilon_0 \phi(\vec{R}) = \sum_i \frac{q_i}{\sqrt{\vec{R}^2 + \vec{d}_i^2 - 2 \vec{R} \cdot \vec{d}_i}} = \frac{1}{|\vec{R}|} \sum_i \frac{q_i}{\sqrt{1 - 2 \frac{\vec{R} \cdot \vec{d}_i}{R^2} + \frac{\vec{d}_i^2}{R^2}}} \quad (1.137)$$

Useremo lo sviluppo di Taylor

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8} x^2 + \dots \quad (1.138)$$

con

$$x = -2 \frac{\vec{R} \cdot \vec{d}_i}{R^2} + \frac{\vec{d}_i^2}{R^2} \quad (1.139)$$

Dunque

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{\vec{R} \cdot \vec{d}_i}{R^2} + \frac{\vec{d}_i^2}{R^2}}} = 1 + \frac{\vec{R} \cdot \vec{d}_i}{R^2} - \frac{1}{2} \frac{\vec{d}_i^2}{R^2} + \frac{3}{2} \frac{(\vec{R} \cdot \vec{d}_i)^2}{R^4} + \dots \quad (1.140)$$

e

$$4 \pi \epsilon_0 \phi(\vec{R}) = \frac{\sum_i q_i}{|\vec{R}|} + \frac{\vec{R} \cdot \sum_i q_i \vec{d}_i}{|\vec{R}|^3} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left[ \frac{3 \sum_i q_i (\vec{R} \cdot \vec{d}_i)^2}{|\vec{R}|^5} - \frac{\sum_i q_i \vec{d}_i^2}{|\vec{R}|^3} \right] + \dots \\
= & \frac{Q}{|\vec{R}|} + \frac{\vec{R} \cdot \vec{p}}{|\vec{R}|^3} + \\
& + \frac{1}{2} \left[ \frac{3 \sum_i q_i (\vec{R})_a (\vec{R})_b (\vec{d}_i)^a (\vec{d}_i)^b}{|\vec{R}|^5} - \frac{\sum_i q_i \delta^{ab} \vec{d}_i \cdot \vec{d}_i}{|\vec{R}|^3} \right] + \dots
\end{aligned}$$

dove  $(\vec{d}_i)^a$ , con  $a = 1, 2, 3$  sono le componenti cartesiane del vettore  $\vec{d}_i$ . Il potenziale di dipolo è quindi

$$\phi_{dipolo}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R} \cdot \vec{p}}{|\vec{R}|^3} \quad (1.141)$$

dove

$$\vec{p} \equiv \sum_i q_i \vec{d}_i \quad (1.142)$$

è il vettore che descrive il momento di dipolo. Il campo elettrico corrispondente è

$$\vec{E}_{dipolo} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{p} \cdot \hat{r} \hat{r} - \vec{p}}{r^3} \quad (1.143)$$

Il potenziale di quadrupolo si scrive invece

$$\phi_{quadrupolo}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{R})_a (\vec{R})_b M^{ab}}{|\vec{R}|^5} \quad (1.144)$$

dove  $M^{ab}$ , con  $a, b = 1, 2, 3$  è il tensore dei momenti di quadrupolo

$$M^{ab} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \left[ 3 (\vec{d}_i)^a (\vec{d}_i)^b - \delta^{ab} \vec{d}_i \cdot \vec{d}_i \right] \quad (1.145)$$

Si noti che  $M^{ab}$  è simmetrico ed ha traccia nulla:

$$\sum_a M_a^a = \frac{1}{2} \sum_i q_i \left[ 3 \vec{d}_i^2 - 3 \vec{d}_i \cdot \vec{d}_i \right] = 0 \quad (1.146)$$

**Esercizio:** calcolare i campi elettrici di quadrupolo.

**Esercizio:** calcolare i momenti di quadrupolo per una distribuzione di carica data da due dipoli paralleli orientati in senso opposto

### 1.4.5 Il campo elettrostatico di una catena di ioni

Consideriamo una catena di cariche di segno alterno poste a distanza  $a$ . Prendiamo l'asse  $z$  lungo la catena, e scegliamo l'origine del sistema di coordinate cilindrico in un sito della catena di carica positiva. Sia  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  la coordinata radiale cilindrica. Data la simmetria rispetto alle rotazioni intorno a  $z$  il potenziale  $\phi(z, \rho)$  non dipende dall'angolo  $\phi = \arctan \frac{y}{x}$ .  $\phi(z, \rho)$  ha le seguenti proprietà

$$\begin{aligned} (a) \quad & \phi(z + 2a, \rho) = \phi(z, \rho) \\ (b) \quad & \phi(-z, \rho) = \phi(z, \rho) \\ (c) \quad & \phi(z + a, \rho) = -\phi(z, \rho) \end{aligned} \quad (1.147)$$

(a) discende dalla simmetria del problema per traslazioni lungo l'asse  $z$  di  $2a$ . (b) deriva dalla simmetria per una rotazione di  $\pi$  attorno ad una asse nel piano  $(x, y)$ , (c) riflette il fatto che la traslazione del sistema di  $a$  lungo  $z$  porta ad un problema identico in cui tutte le cariche cambiano di segno. (Ovviamente (c) implica (a).)

Il potenziale è rappresentabile come la somma dei potenziali coulombiani delle singole cariche della catena

$$\phi(z, \rho) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(z - na)^2 + \rho^2}} \quad (1.148)$$

che soddisfa in effetti alle (a) – (c). Questa rappresentazione è conveniente per calcolare il potenziale per  $\rho \ll a$ . In questo caso la serie è dominata dal termine corrispondente allo ione più vicino al punto  $(z, \rho)$ . Quando però  $\rho \gg a$  un numero di termini *crescente* con l'aumentare di  $\rho$  (dell'ordine di  $\sim \frac{\rho}{a}$ ) è richiesto per valutare  $\phi(z, \rho)$  con una precisione data. Il nostro scopo è dunque determinare una nuova rappresentazione per  $\phi(z, \rho)$  che sia conveniente per  $\rho \gg a$ .

$\phi(z, \rho)$  soddisfa l'equazione di Laplace in coordinate cilindriche:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) = 0 \quad (1.149)$$

Essendo una funzione periodica in  $z$  di periodo  $2a$  e con le proprietà (a) – (c) possiamo scriverla come somma di coseni

$$\phi(z, \rho) = \sum_{k=1,3,5,\dots} C_k R_k(\rho) \cos \frac{\pi k z}{a} \quad (1.150)$$

L'equazione di Laplace porta all'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine per la parte radiale

$$R_k''(\rho) + \frac{1}{\rho} R_k'(\rho) - \left(\frac{\pi k}{a}\right)^2 R_k(\rho) = 0 \quad (1.151)$$

Ponendo

$$x = \frac{k \pi \rho}{a} \quad (1.152)$$

questa diventa

$$R_k''(x) + \frac{1}{x} R_k'(x) - R_k(x) = 0 \quad (1.153)$$

che non dipende da  $k$ . Indichiamo due soluzioni linearmente indipendenti con  $I_0(x)$  e  $K_0(x)$ :

$$R_k(\rho) = A I_0(x) + B K_0(x) \quad (1.154)$$

Per  $\rho \gg a$  cioè per

$$x \gg 1 \quad (1.155)$$

la soluzione deve annullarsi, in quanto la carica totale della catena è nulla. Determiniamo i possibili comportamenti delle soluzioni dell'equazione (1.153) per  $x \gg 1$ . Posto

$$R(x) = e^{\pm x} \phi(x) \quad (1.156)$$

otteniamo

$$\phi'' + (\mp 2 + \frac{1}{x}) \phi' \mp \frac{1}{x} \phi(x) = 0 \quad (1.157)$$

Cerchiamo una soluzione monomiale  $\phi(x) = x^\alpha$ . Il membro di sinistra diventa

$$\mp(2\alpha + 1)x^{\alpha-1} + \alpha^2 x^{\alpha-2} \quad (1.158)$$

Per  $x \gg 1$  il secondo termine è trascurabile rispetto al primo e quindi se scegliamo

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad (1.159)$$

otteniamo due possibili comportamenti per le soluzioni di (1.153) a grandi  $x$

$$R_{\pm}(x) = \frac{e^{\pm x}}{\sqrt{x}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \quad x \gg 1 \quad (1.160)$$

Scegliamo per  $I_0(x)$  e  $K_0(x)$  le due soluzioni definite dalla (1.160). Per determinarle univocamente rimane da fissare i loro fattori di normalizzazione. Tradizionalmente questi sono presi come segue

$$\begin{aligned} I_0(x) &= \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ K_0(x) &= \frac{e^{-x}\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \end{aligned} \quad (1.161)$$

Le  $I_0$  e  $K_0$  così definite sono chiamate funzioni di Bessel speciali di indice nullo. In definitiva

$$R_k(\rho) = K_0\left(\frac{k\pi\rho}{a}\right) \quad (1.162)$$

e

$$\phi(z, \rho) = \sum_{k=1,3,5,\dots} C_k K_0\left(\frac{k\pi\rho}{a}\right) \cos \frac{\pi k z}{a} \quad (1.163)$$

Questa espansione è valida per qualunque funzione armonica in  $R^3$  indipendente dall'angolo azimutale che si annulla all'infinito e che soddisfa le condizioni (a) – (c). Notiamo che, in generale, la struttura periodica produce un potenziale che è esponenzialmente piccolo a grandi  $\rho$ . Il termine dominante a grandi distanze è

$$\phi(z, \rho) \propto e^{-\frac{2\pi\rho}{2a}} \quad \rho \gg a \quad (1.164)$$

dove  $2a$  è il periodo del sistema.

Dobbiamo determinare le costanti  $C_k$  associate al nostro problema specifico. Queste sono fissate dalla condizione che il potenziale si riduca a quello puro coulombiano per  $x \ll 1$  in prossimità delle cariche della catena. Le identità

$$\int_{-a}^a dz \cos \frac{\pi k z}{a} \cos \frac{\pi k' z}{a} = \delta_{k,k'} a \quad (1.165)$$

danno

$$\begin{aligned} a C_k K_0\left(\frac{k\pi\rho}{a}\right) &= \int_{-a}^a dz \phi(z, \rho) \cos \frac{\pi k z}{a} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-a}^a dz \frac{(-1)^n \cos \frac{\pi k z}{a}}{\sqrt{(z - na)^2 + \rho^2}} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-1}^1 dt \frac{(-1)^n \cos \pi k t}{\sqrt{(t - n)^2 + \frac{\rho^2}{a^2}}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-1-n}^{1-n} dt \frac{(-1)^{n(1+k)} \cos \pi k t}{\sqrt{t^2 + \frac{\rho^2}{a^2}}} = \\
&= \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\cos \pi k t}{\sqrt{t^2 + \frac{\rho^2}{a^2}}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\cos t}{\sqrt{t^2 + \frac{k^2 \pi^2 \rho^2}{a^2}}}
\end{aligned}$$

dove abbiamo fatto uso del fatto che  $k$  è *dispari*. In conclusione otteniamo la seguente rappresentazione integrale per la soluzione  $K_0(x)$  dell'equazione di Bessel

$$\frac{a 2\pi\epsilon_0}{q} C_k K_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\cos t}{\sqrt{t^2 + x^2}} \quad (1.166)$$

Poiché questa equazione deve valere per ogni  $k$ , ne deduciamo che i  $C_k$  sono indipendenti da  $k$  e che

$$\begin{aligned}
K_0(x) &= \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\cos t}{\sqrt{t^2 + x^2}} \\
C_k &= \frac{q}{\pi\epsilon_0 a \alpha}
\end{aligned} \quad (1.167)$$

per una certa costante  $\alpha$ . È immediato verificare per sostituzione diretta che la rappresentazione integrale di  $K_0(x)$  in (1.167) soddisfa in effetti l'equazione di Bessel (1.153). La costante  $\alpha$  è determinata valutando l'integrale per  $x \gg 1$  e confrontando con la definizione della normalizzazione di  $K_0(x)$  in (1.161). Risulta (vedi più sotto)

$$\alpha = 1 \quad (1.168)$$

In conclusione

$$C_k = \frac{q}{\pi\epsilon_0 a} \quad (1.169)$$

e

$$\phi(z, \rho) = \frac{q}{\pi\epsilon_0 a} \sum_{k=1,3,5,\dots} K_0\left(\frac{k\pi\rho}{a}\right) \cos \frac{\pi k z}{a} \quad (1.170)$$

Il comportamento dei potenziali a grandi distanze dalla catena,  $\rho \gg a$ , è

$$\phi(z, \rho) = \frac{q}{\pi\epsilon_0 a} \left[ e^{-\frac{\pi\rho}{a}} \sqrt{\frac{a}{2\rho}} \cos \frac{\pi z}{a} + e^{-\frac{3\pi\rho}{a}} \sqrt{\frac{a}{6\rho}} \cos \frac{3\pi z}{a} + \dots \right] \quad (1.171)$$

*Comportamenti asintotici delle funzioni di Bessel*

Determiniamo il comportamento per  $x \rightarrow 0$  della  $K_0(x)$  a partire dalla rappresentazione integrale (1.167). La regione dell'integrale che dà il contributo divergente per  $\rho \rightarrow 0$  è quella intorno a  $t = 0$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\cos t}{\sqrt{x^2 + t^2}} = -\log x^2 + \text{termini finiti per } x \rightarrow 0 \quad (1.172)$$

Pertanto

$$K_0(x) = -\alpha \log |x| + \text{termini finiti per } x \rightarrow 0 \quad (1.173)$$

Per determinare  $\alpha$  è necessario valutare la rappresentazione integrale (1.167) per  $x \gg 1$  e confrontare con (1.161). È più agevole studiare il comportamento dell'altra soluzione, la  $I_0(x)$ , nello stesso limite.

Notiamo che date due soluzioni  $R_1$  ed  $R_2$  dell'equazione (1.153) la combinazione

$$\langle R_1, R_2 \rangle \equiv x (R_1' R_2 - R_2' R_1) \quad (1.174)$$

è una costante indipendente da  $x$ . Per provarlo basta prendere la derivata del membro di sinistra dell'equazione ed utilizzare l'equazione di Bessel. Notiamo anche che

$$\langle R_1, R_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow R_1 \text{ e } R_2 \text{ linearmente dipendenti} \quad (1.175)$$

Poiché  $I_0$  e  $K_0$  soddisfano per definizione le condizioni (1.161), ne consegue che

$$\langle I_0, K_0 \rangle = 1 \quad (1.176)$$

È anche agevole constatare che i possibili comportamenti delle soluzioni dell'equazione di Bessel (1.153) per  $x \rightarrow 0$  sono

$$R_{reg}(x) = \beta + O(x) \quad R_{sing}(x) = -\alpha \log |x| + \dots \quad (1.177)$$

Dunque

$$\langle R_{reg}, R_{sing} \rangle = \alpha \beta \quad (1.178)$$

Concludiamo che il comportamento per  $x \rightarrow 0$  delle  $I_0$  e  $K_0$  sono correlati

$$I_0(x) = \frac{1}{\alpha} + O(x) \quad K_0(x) = -\alpha \log |x| + \text{termini finiti per } x \rightarrow 0 \quad (1.179)$$

Per determinare  $\alpha$  possiamo allora far ricorso ad una rappresentazione integrale per  $I_0(x)$

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cosh(x \cos \phi) d\phi = 1 + \frac{x^2}{4} + \dots \quad (1.180)$$

che soddisfa l'equazione di Bessel (1.153) come si può verificare direttamente. Inoltre per  $x \gg 1$  l'integrale riceve il contributo dominante dalle regioni intorno a  $\phi = 0$  e  $\phi = \pi$ :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cosh(x \cos \phi) \approx \frac{e^x}{\pi} \int_0^\pi e^{-\frac{x\phi^2}{2}} \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad (1.181)$$

e quindi verifica la condizione (1.161) che definisce  $I_0(x)$ . Dunque  $\alpha = 1$  e

$$K_0(x) = -\log|x| + \dots \quad (1.182)$$

#### 1.4.6 Il campo di una catena di dipoli elettrici

Consideriamo una catena di dipoli elettrici lungo l'asse delle  $z$  di momento  $\vec{p} = p \hat{z}$ , distanziati di  $a$ . Il campo elettrico di un dipolo è

$$4\pi\epsilon_0 \vec{E} = \frac{3\vec{p} \cdot \hat{r} \hat{r} - \vec{p}}{r^3} \quad (1.183)$$

Quindi il campo elettrico prodotto nell'origine da una coppia di dipoli in  $z = \pm n a$  è

$$4\pi\epsilon_0 \vec{E} = 2 \frac{2\vec{p}}{a^3} \frac{1}{n^3} \quad (1.184)$$

ed il campo elettrico totale

$$\vec{E} = \frac{\vec{p}}{\epsilon_0 \pi a^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{\vec{p}}{\epsilon_0 \pi a^3} \zeta(3) \approx \frac{\vec{p}}{\epsilon_0 a^3} 0.3826 \quad (1.185)$$

Vogliamo ora calcolare il campo prodotto da una catena di dipoli in punti lontani dall'asse su cui si trova la catena.

Consideriamo un problema *preliminare*: quello di una catena di cariche *uguali*  $q$  lungo l'asse delle  $z$  a distanza  $a$  una dall'altra. Scegliamo l'origine del sistema di coordinate cilindrico in un sito della catena di carica positiva. Sia  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  la coordinata radiale cilindrica. Data la simmetria rispetto alle rotazioni intorno a  $z$  il potenziale  $\phi(z, \rho)$  non dipende dall'angolo  $\phi = \arctan \frac{y}{x}$ .  $\phi(z, \rho)$  ha le seguenti proprietà

- (a)  $\phi(z + a, \rho) = \phi(z, \rho)$
- (b)  $\phi(-z, \rho) = \phi(z, \rho)$

Il potenziale è rappresentabile come la somma dei potenziali coulombiani delle singole cariche della catena

$$\begin{aligned}\phi(z, \rho) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(z-na)^2 + \rho^2}} = \\ &= -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 a} \log \rho + \sum_{k=1}^{\infty} C_k K_0\left(\frac{2\pi k \rho}{a}\right) \cos \frac{2\pi k z}{a} \quad (1.186)\end{aligned}$$

Questa serie è in realtà *divergente*. Siamo però interessati alla derivata di questa funzione rispetto a  $z$ , che è rappresentata invece da una serie convergente:

$$\begin{aligned}-\partial_z \phi(z, \rho) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-na)}{((z-na)^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi k C_k}{a} K_0\left(\frac{2\pi k \rho}{a}\right) \sin \frac{2\pi k z}{a} \quad (1.187)\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}\pi k C_k K_0\left(\frac{2\pi k \rho}{a}\right) &= -\int_0^a dz \sin \frac{2\pi k z}{a} \partial_z \phi(z, \rho) = \\ &= \frac{2\pi k}{a} \int_0^a dz \cos \frac{2\pi k z}{a} \phi(z, \rho) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi k}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^a dz \frac{\cos \frac{2\pi k z}{a}}{\sqrt{(z-na)^2 + \rho^2}} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi k}{a} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\cos \frac{2\pi k z}{a}}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi k}{a} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\cos z}{\sqrt{z^2 + \left(\frac{2\pi k \rho}{a}\right)^2}} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi k}{a} 2 K_0\left(\frac{2\pi k \rho}{a}\right) \quad (1.188)\end{aligned}$$

In conclusione

$$C_k = \frac{q}{\pi\epsilon_0 a} \quad (1.189)$$

ed il campo elettrico lungo  $z$  della catena infinita di cariche si scrive

$$E_z(\phi, \rho) = -\partial_z \phi(z, \rho) = \frac{2q}{\epsilon_0 a^2} \sum_{k=1}^{\infty} k K_0\left(\frac{2\pi k \rho}{a}\right) \sin \frac{2\pi k z}{a} \quad (1.190)$$

Il potenziale di una catena di dipoli  $\vec{p} = p \hat{z}$ , disposti lungo l'asse  $z$  a distanza  $a$  si ottiene come sovrapposizione di due catene di cariche di segno opposto, leggermente spostate lungo  $z$  di una distanza  $d = \frac{p}{q}$

$$\phi_{catena\ dip}(z, \rho) = -d \frac{\partial \phi(z, \rho)}{\partial z} = \frac{2p}{\epsilon_0 a^2} \sum_{k=1}^{\infty} k K_0\left(\frac{2\pi k \rho}{a}\right) \sin \frac{2\pi k z}{a} \quad (1.191)$$

Il campo elettrico in un punto con  $z = 0$  è diretto lungo l'asse delle  $z$

$$E_z^{(cat\ dip)}(0, \rho) = -\frac{4\pi p}{\epsilon_0 a^3} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 K_0\left(\frac{2\pi k \rho}{a}\right) \equiv -\frac{p}{\epsilon_0 a^3} f_{dip}\left(\frac{\rho}{a}\right) \quad (1.192)$$

dove abbiamo introdotto la funzione

$$f_{dip}(x) = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 K_0(2\pi k x) \quad (1.193)$$

$f_{dip}(x)$  decresce molto rapidamente per  $x > 1$ :

$$\begin{aligned} f(1) &= 0.0116 & f(2) &= 1.53 \cdot 10^{-5} \\ f(\sqrt{5}) &= 3.30 \cdot 10^{-6} & f(2\sqrt{2}) &= 7.10 \cdot 10^{-8} \end{aligned} \quad (1.194)$$

#### 1.4.7 Il campo di un filo carico tra due piani conduttori

Consideriamo un filo infinito carico, con densità di carica lineare  $\lambda$ , posto lungo l'asse delle  $y$  tra due piani conduttori paralleli al piano  $(x, y)$  posti a  $z = \pm \frac{d}{2}$ .

Il metodo delle immagini dà per il potenziale

$$\phi(x, z) = -\frac{\lambda}{4\pi \epsilon_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \log[x^2 + (z - kd)^2] \quad (1.195)$$

Benché quest'espressione sia divergente, la serie delle derivate, che definisce il campo elettrico è convergente puntualmente:

$$\begin{aligned} E_x(x, z) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{x}{x^2 + (z - kd)^2} \\ E_z(x, z) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{z - kd}{x^2 + (z - kd)^2} \end{aligned} \quad (1.196)$$

Usiamo il metodo della separazione delle variabile per ottenere un'espressione alternativa per i campi che sia utile a distanze dal filo carico grandi rispetto alla separazione dei piani conduttori:  $x \gg d$ . Ripetendo le considerazioni delle sottosezioni precedenti otteniamo l'espressione

$$\phi(x, z) = \sum_{m=1,3,5,\dots} C_m \cos \frac{\pi m z}{d} e^{-\frac{\pi m |x|}{d}} \quad (1.197)$$

ovvero

$$E_x(x, z) = \sum_{m=1,3,5,\dots} C_m \frac{\pi m}{d} \cos \frac{\pi m z}{d} e^{-\frac{\pi m |x|}{d}} \quad x > 0 \quad (1.198)$$

Pertanto

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} E_x(x, z) \cos \frac{\pi m z}{d} dz = C_m \frac{\pi m}{d} \frac{d}{2} e^{-\frac{\pi m |x|}{d}} \quad m = 1, 3, 5, \dots \quad (1.199)$$

Consideriamo il limite di questa equazione per  $x \rightarrow 0^+$ . In questo limite il termine dominante nell'integrale nel membro di sinistra della (1.199) è il campo generato dal filo:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} E_x(x, z) \cos \frac{\pi m z}{d} dz &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{x}{x^2 + z^2} \cos \frac{\pi m z}{d} dz + O(x) = \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{x}{x^2 + z^2} dz + O(x) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} 2 \arctan \frac{\epsilon}{x} + O(x) = \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \pi + O(x) \end{aligned} \quad (1.200)$$

Confrontando con il membro di destra dell'Eq. (1.199) deduciamo

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \pi = C_m \frac{\pi m}{d} \frac{d}{2} \quad (1.201)$$

ovvero

$$C_m = \frac{\lambda}{m \pi \epsilon_0} \quad m = 1, 3, 5, \dots \quad (1.202)$$

In definitiva

$$\phi(x, z) = \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m} \cos \frac{\pi m z}{d} e^{-\frac{\pi m |x|}{d}} \quad (1.203)$$

Pertanto a grandi distanze dal filo il potenziale decade esponenzialmente:

$$\phi(x, z) = \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0} \cos \frac{\pi z}{d} e^{-\frac{\pi |x|}{d}} + \dots \quad (1.204)$$

Possiamo risommare l'espressione ottenuta (1.203)

$$\begin{aligned} \phi(x, z) &= \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ \frac{e^{-\frac{\pi m (|x|+iz)}{d}}}{m} + \frac{e^{-\frac{\pi m (|x|-iz)}{d}}}{m} \right] = \\ &= \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0} \log \frac{1 + e^{-\frac{\pi (|x|+iz)}{d}}}{1 - e^{-\frac{\pi (|x|+iz)}{d}}} \frac{1 + e^{-\frac{\pi (|x|-iz)}{d}}}{1 - e^{-\frac{\pi (|x|-iz)}{d}}} \end{aligned}$$

Notiamo che dopo aver introdotto la variabile complessa

$$\zeta = \frac{|x| + iz}{d} \quad (1.205)$$

il potenziale si riscrive

$$\phi(x, z) = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0} \log \left| \frac{1 + e^{-\pi \zeta}}{1 - e^{-\pi \zeta}} \right|^2 \quad (1.206)$$

Calcoliamo la densità di carica superficiale indotta sui piani conduttori, per esempio sul piano a  $z = -\frac{d}{2}$ :

$$\begin{aligned} \sigma(x) = \epsilon_0 E_z(x, -\frac{d}{2}) &= -\frac{\lambda}{4d} \left[ \frac{e^{-\frac{\pi |x|}{d}}}{1 + i e^{-\frac{\pi |x|}{d}}} + \frac{e^{-\frac{\pi |x|}{d}}}{1 - i e^{-\frac{\pi |x|}{d}}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-\frac{\pi |x|}{d}}}{1 - i e^{-\frac{\pi |x|}{d}}} + \frac{e^{-\frac{\pi |x|}{d}}}{1 + i e^{-\frac{\pi |x|}{d}}} \right] = -\frac{\lambda}{d} \frac{e^{-\frac{\pi |x|}{d}}}{1 + e^{-\frac{2\pi |x|}{d}}} \end{aligned}$$

L'integrale della densità di carica superficiale lungo  $x$  dà

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \sigma(x) = -\frac{\lambda}{2} \quad (1.207)$$

come ci si aspetta.

### 1.4.8 Il campo elettrostatico di una griglia

Consideriamo una griglia di fili uniformemente carichi disposti parallelamente all'asse  $z$  a distanza  $a$  uno dall'altro in direzione  $y$ . Prendiamo l'asse  $z$  coincidente con uno dei fili della griglia. Il potenziale generato è una funzione armonica  $\phi(x, y)$  indipendente da  $z$ , periodica in  $y$  e simmetrica per  $x \rightarrow -x$  e per  $y \rightarrow -y$ :

$$\phi(x, y + a) = \phi(x, y) \quad \phi(x, y) = \phi(-x, y) \quad \phi(x, -y) = \phi(x, y) \quad (1.208)$$

e

$$[\partial_x^2 + \partial_y^2]\phi(x, y) = 0 \quad (1.209)$$

Dunque

$$\phi(x, y) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\pi|x|}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\frac{2\pi k|x|}{a}} \cos \frac{2\pi k y}{a} \right] \quad (1.210)$$

dove  $\lambda$  è la densità di corrente per unità di lunghezza dei fili. Il potenziale è rappresentabile come la somma dei potenziali generati dai singoli fili della griglia

$$\phi_{x_0, y_0}(x, y) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \log \frac{(y - na)^2 + x^2}{(y_0 - na)^2 + x_0^2} \quad (1.211)$$

dove  $(x_0, y_0)$  sono le coordinate di un punto arbitrariamente scelto. Si noti che per le distribuzioni lineari di carica infinitamente lunghe, benché il campo elettrico abbia valori finiti, il potenziale rispetto all'infinito non è ben definito. Per questa ragione nella (1.211) abbiamo definito la *differenza* di potenziale tra il punto  $(x, y)$  ed un punto al finito  $(x_0, y_0)$ . L'introduzione del punto  $(x_0, y_0)$  rompe però la periodicità in  $y$  del problema. Converrà pertanto considerare, invece che  $\phi(x, y)$ , la sua derivata  $\partial_x \phi(x, y) = -E_x$ , cioè il campo elettrico lungo  $x$ . Poiché  $\phi(x, y)$  non è derivabile rispetto ad  $x$  per  $x = 0$  prendiamo  $x > 0$ . Per ottenere  $\phi(x, y)$  per  $x < 0$  basterà tenere conto della simmetria  $\phi(-x, y) = \phi(x, y)$ .

In definitiva consideriamo le serie

$$\begin{aligned} E_x(x, y) &= -\partial_x \phi(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\pi}{a} - \frac{2\pi k}{a} \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\frac{2\pi k x}{a}} \cos \frac{2\pi k y}{a} \right] = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2x}{(y - na)^2 + x^2} \quad x > 0 \end{aligned}$$

Moltiplicando ambo i membri per  $\cos \frac{2\pi k y}{a}$  ed integrando in  $y$  ed usando la relazione

$$\int_0^a dy \cos \frac{2\pi k y}{a} \cos \frac{2\pi k' y}{a} = \frac{\delta_{k,k'} a}{2} \quad (1.212)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} C_k e^{-\frac{2\pi k x}{a}} 2\pi k &= x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^a dy \frac{\cos \frac{2\pi k y}{a}}{(y - n a)^2 + x^2} = \\ &= \frac{x}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 dy \frac{\cos 2\pi k y}{(y - n)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \\ &= \frac{x}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-n}^{-n+1} dy \frac{\cos 2\pi k y}{y^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{x}{a} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\cos 2\pi k y}{y^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \\ &= \frac{k x}{a} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\cos 2\pi y}{y^2 + \left(\frac{k x}{a}\right)^2} = \pi e^{-\frac{2\pi k x}{a}} \end{aligned} \quad (1.213)$$

dove abbiamo utilizzato il seguente risultato per l'integrale definito

$$I(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy \cos y}{y^2 + t^2} = \frac{\pi}{t} e^{-t} \quad (1.214)$$

derivabile, per esempio, col metodo dei residui. Una derivazione alternativa di (1.214) è la seguente. L' eq. (1.213) mostra che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy \cos y}{y^2 + t^2} = \frac{\alpha}{t} e^{-t} \quad (1.215)$$

dove  $\alpha$  è una costante indipendente da  $t$ . Pertanto per  $t \rightarrow 0$  l'integrale diverge come segue

$$I(t) = \frac{\alpha}{t} + \beta + O(t) \quad (1.216)$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dy \cos y}{y^2 + t^2} &= \int_0^{\infty} \frac{dy}{y^2 + t^2} + \int_0^{\infty} \frac{dy (\cos y - 1)}{y^2 + t^2} = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dy}{y^2 + t^2} + \gamma + O(t) \end{aligned} \quad (1.217)$$

in quanto il limite dell'integrale

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{dy (\cos y - 1)}{y^2 + t^2} = \gamma \quad (1.218)$$

esiste finito. Inoltre

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y^2 + t^2} = \frac{1}{t} \int_0^\infty \frac{dy}{y^2 + 1} = \frac{\pi}{2t} \quad (1.219)$$

In definitiva

$$\int_0^\infty \frac{dy \cos y}{y^2 + t^2} = \frac{\pi}{2t} + O(t^0) \quad (1.220)$$

da cui

$$\alpha = \pi \quad (1.221)$$

In conclusione otteniamo per i coefficienti  $C_k$  l'equazione

$$C_k = -\frac{1}{k} \quad (1.222)$$

e

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\pi|x|}{a} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2\pi k|x|}{a}}}{k} \cos \frac{2\pi k y}{a} \right] = \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\pi|x|}{a} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi k \frac{(|x|+iy)}{a}} + e^{-2\pi k \frac{(|x|-iy)}{a}}}{2k} \right] \end{aligned} \quad (1.223)$$

Introduciamo la variabile complessa

$$\zeta = \frac{|x| + iy}{a} \quad (1.224)$$

Allora

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \pi(\zeta + \bar{\zeta}) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi k \zeta} + e^{-2\pi k \bar{\zeta}}}{k} \right] = \\ &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \pi(\zeta + \bar{\zeta}) + \log|1 - e^{-2\pi\zeta}|^2 \right] = \\ &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ f(\zeta) + f(\bar{\zeta}) \right] \end{aligned} \quad (1.225)$$

dove  $f(\zeta)$  è la funzione analitica sul piano complesso

$$f(\zeta) = \pi\zeta + \log[1 - e^{-2\pi\zeta}] \quad (1.226)$$

### 1.4.9 Effetto punta

Consideriamo due semipiani conduttori, posti a potenziale nullo, aventi un bordo in comune e formanti un angolo  $2(\pi - \theta_0)$  tra di loro. Si vuole calcolare la carica superficiale indotta sui semipiani ed il campo elettrostatico in presenza di un filo carico uniformemente carico, con densità di carica lineare  $\lambda$ , parallelo al bordo comune dei semipiani, a distanza  $d$  da questo e giacente sul piano che biseca l'angolo formato dai due semipiani.

Facciamo uso di un sistema di coordinate cartesiane il cui asse  $z$  è parallelo al filo carico, posto in  $(x, y) = (d, 0)$ . Il bordo comune dei due semipiani è a  $x = y = 0$ . Le proiezioni dei due semipiani conduttori sul piano  $(x, y)$  sono le semirette

$$y = \pm \tan \theta_0 x \quad x < 0 \quad (1.227)$$

Introduciamo le coordinate polari

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

Prendiamo  $\theta$  nell'intervallo

$$-\pi < \theta \leq \pi \quad (1.228)$$

Le proiezioni dei due semipiani sul piano  $(x, y)$  sono delle semirette con origine in  $r = 0$  e  $\theta = \pm\theta_0$ . Pertanto

$$\phi(r, \pm\theta_0) = 0 \quad (1.229)$$

Il potenziale elettrostatico  $\phi(r, \theta)$  è armonico nel settore  $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$ :

$$\left[ (r\partial_r)^2 + \partial_\theta^2 \right] \phi(r, \theta) = 0 \quad -\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 \quad (1.230)$$

eccetto che nel punto  $(r, \theta) = (d, 0)$ , dove tende al potenziale del filo carico infinito:

$$\phi(r, \theta) \xrightarrow{(r, \theta) \rightarrow (d, 0)} \phi^{filo}(r, \theta) \equiv -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log(d^2 + r^2 - 2rd \cos \theta) \quad (1.231)$$

Il problema è simmetrico per riflessione rispetto al piano  $(z, x)$ . Pertanto deve essere

$$\phi(r, -\theta) = \phi(r, \theta) \quad (1.232)$$

Dimostriamo inoltre che il problema è anche invariante per

$$r \rightarrow \frac{d^2}{r} \quad (1.233)$$

A questo scopo introduciamo la variabile  $\eta$

$$r = r_0 e^\eta \quad (1.234)$$

dove  $r_0 > 0$  è un numero reale positivo arbitrario. L'equazione di Laplace sul piano si riscrive nelle coordinate  $(\eta, \theta)$

$$\left[ \partial_\eta^2 + \partial_\theta^2 \right] \phi_\eta(\eta, \theta) = 0 \quad (1.235)$$

dove  $\phi_\eta(\eta, \theta)$  è il potenziale nelle coordinate  $(\eta, \theta)$ :

$$\phi_\eta(\eta, \theta) = \phi(r_0 e^\eta, \theta)$$

Osserviamo che l'equazione (1.235) è invariante per

$$\eta \rightarrow -\eta \quad (1.236)$$

Questo vuol dire che se  $\phi_\eta(\eta, \theta)$  è una soluzione della (1.235), la funzione

$$\tilde{\phi}_\eta(\eta, \theta) = \phi_\eta(-\eta, \theta) \quad (1.237)$$

è pure soluzione della stessa equazione. Pertanto la funzione  $\tilde{\phi}(r, \theta)$ , che descrive in coordinate polari il potenziale associato alla  $\tilde{\phi}_\eta(\eta, \theta)$ ,

$$\tilde{\phi}(r_0 e^\eta, \theta) = \tilde{\phi}_\eta(\eta, \theta) \quad (1.238)$$

è armonica se  $\phi(r, \theta)$  è armonica, qualunque sia  $r_0$ .  $\tilde{\phi}(r, \theta)$  soddisfa

$$\tilde{\phi}(r_0 e^\eta, \theta) = \tilde{\phi}_\eta(\eta, \theta) = \phi_\eta(-\eta, \theta) = \phi(r_0 e^{-\eta}, \theta) \quad (1.239)$$

ovvero

$$\tilde{\phi}(r, \theta) = \phi\left(\frac{r_0^2}{r}, \theta\right) \quad (1.240)$$

Sia dunque  $\phi(r, \theta)$  la soluzione del problema posto. Prendendo  $r_0 = d$  nella (1.240) deduciamo che la funzione

$$\tilde{\phi}(r, \theta) = \phi\left(\frac{d^2}{r}, \theta\right) \quad (1.241)$$

è armonica. Inoltre  $\tilde{\phi}(r, \theta)$  soddisfa le *stesse* condizioni al contorno di  $\phi(r, \theta)$ , definite nelle Eqs. (1.229) e (1.231). L'unicità della soluzione dell'equazione di Laplace assicura che

$$\phi\left(\frac{d^2}{r}, \theta\right) = \phi(r, \theta) \quad (1.242)$$

Secondo la strategia del metodo della separazione delle variabili, cerchiamo dapprima le funzioni armoniche fattorizzate

$$\phi(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta) \quad (1.243)$$

Abbiamo dimostrato altrove che queste hanno la forma seguente

$$(A_k r^k + B_k r^{-k}) (C_k \cos k \theta + D_k \sin k \theta) \quad (1.244)$$

dove  $k$  è un numero reale<sup>1</sup>. La simmetria per riflessione (1.232) impone

$$D_k = 0 \quad (1.245)$$

La condizione al bordo (1.229) richiede

$$\cos k \theta_0 = 0 \quad (1.246)$$

ovvero<sup>2</sup>

$$k = \frac{m \pi}{2 \theta_0} \equiv m \alpha \quad m = 1, 3, 5, \dots \quad (1.247)$$

dove

$$\alpha \equiv \frac{\pi}{2 \theta_0} \quad (1.248)$$

Per  $r \rightarrow 0^+$  la  $\phi(r, \theta)$  deve annullarsi, in quanto  $r = 0$  appartiene al bordo del conduttore. Pertanto

$$\phi(r, \theta) = \sum_{m=1,3,\dots} A_m r^{\alpha m} \cos(m \alpha \theta) \quad r < r_0$$

in un certo intorno di  $r = 0$  di raggio  $r_0$ . Poiché la  $\phi(r, \theta)$  è perfettamente regolare nel dominio

$$D = \{(r, \theta) : 0 \leq r < d, \quad \theta \in [-\theta_0, \theta_0]\} \quad (1.249)$$

---

<sup>1</sup>Per  $k = 0$  possiamo considerare, a priori, anche la soluzione  $A_0 + B_0 \log r$ .

<sup>2</sup>Questa condizione esclude la soluzione con  $k = 0$  che abbiamo menzionato nella nota precedente.

possiamo prendere  $r_0 = d$ . La (1.242) implica allora che

$$\phi(r, \theta) = \sum_{m=1,3,\dots} A_m \frac{d^{2\alpha m}}{r^{\alpha m}} \cos(m \alpha \theta) \quad r > d$$

È conveniente ridefinire i coefficienti  $A_m$  secondo la relazione

$$\tilde{A}_m \equiv A_m d^{\alpha m} \quad (1.250)$$

e riscrivere le espressioni per  $\phi(r, \theta)$  ottenute come segue

$$\phi(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{m=1,3,\dots} \tilde{A}_m \left(\frac{r^\alpha}{d^\alpha}\right)^m \cos(m \alpha \theta) & r < d \\ \sum_{m=1,3,\dots} \tilde{A}_m \left(\frac{d^\alpha}{r^\alpha}\right)^m \cos(m \alpha \theta) & r > d \end{cases}$$

Da queste espressioni ricaviamo la componente radiale del campo elettrico

$$E_r(r, \theta) = -\partial_r \phi(r, \theta) = \begin{cases} - \sum_{m=1,3,\dots} \frac{\alpha m \tilde{A}_m}{r} \left(\frac{r^\alpha}{d^\alpha}\right)^m \cos(m \alpha \theta) & r < d \\ \sum_{m=1,3,\dots} \frac{\alpha m \tilde{A}_m}{r} \left(\frac{d^\alpha}{r^\alpha}\right)^m \cos(m \alpha \theta) & r > d \end{cases}$$

e la componente del campo elettrico ortogonale a quella radiale:

$$E_\theta(r, \theta) = -\frac{\partial_\theta \phi(r, \theta)}{r} = \begin{cases} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{\alpha m \tilde{A}_m}{r} \left(\frac{r^\alpha}{d^\alpha}\right)^m \sin(m \alpha \theta) & r < d \\ \sum_{m=1,3,\dots} \frac{\alpha m \tilde{A}_m}{r} \left(\frac{d^\alpha}{r^\alpha}\right)^m \sin(m \alpha \theta) & r > d \end{cases}$$

Ne consegue che la densità di carica sul conduttore è

$$\sigma_\pm(r) \equiv \mp \epsilon_0 E_\theta(r, \pm \theta_0) = \begin{cases} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{\alpha m \epsilon_0 \tilde{A}_m}{r} \left(\frac{r^\alpha}{d^\alpha}\right)^m (-1)^{\frac{m+1}{2}} & r < d \\ \sum_{m=1,3,\dots} \frac{\alpha m \epsilon_0 \tilde{A}_m}{r} \left(\frac{d^\alpha}{r^\alpha}\right)^m (-1)^{\frac{m+1}{2}} & r > d \end{cases}$$

Consistentemente con la simmetria del problema, le densità di carica sulle due facce del conduttore con  $\theta = \pm\theta_0$  coincidono

$$\sigma_+(r) = \sigma_-(r) \equiv \sigma(r) \quad (1.251)$$

Vogliamo ora determinare i coefficienti  $\tilde{A}_n$ . A questo scopo consideriamo il settore anulare definito come segue

$$D_\epsilon = \{(r, \theta, z) : r \in [d - \epsilon, d + \epsilon], \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]\} \quad (1.252)$$

con  $\epsilon > 0$  e  $h > 0$  e definiamo su  $D_\epsilon$  i campi vettoriali

$$\vec{V}_n \equiv \cos(n\alpha\theta) \vec{E}(r, \theta) \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (1.253)$$

Il teorema della divergenza sul volume  $D_\epsilon$  si scrive

$$\int_{D_\epsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_n = \int_{\partial D_\epsilon} \vec{n} \cdot \vec{V}_n \quad (1.254)$$

D'altra parte abbiamo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_n = (\vec{\nabla} \cos(n\alpha\theta)) \cdot \vec{E}(r, \theta) + \cos(n\alpha\theta) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \quad (1.255)$$

L'unica carica contenuta in  $D_\epsilon$  è il filo carico posto in  $(r, \theta) = (d, 0)$ . La legge di Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.256)$$

implica dunque che l'integrale della divergenza di  $\vec{V}_n$  è

$$\begin{aligned} \int_{D_\epsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_n &= \int_{D_\epsilon} (\vec{\nabla} \cos(n\alpha\theta)) \cdot \vec{E}(r, \theta) + \frac{\lambda h}{\epsilon_0} = \\ &= - \int_{D_\epsilon} \frac{n\alpha \sin(n\alpha\theta)}{r} E_\theta(r, \theta) + \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (1.257)$$

Il flusso di  $\vec{V}_n$  attraverso  $D_\epsilon$  riceve contributi non nulli dalle superfici con  $r = d \pm \epsilon$

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_\epsilon} \vec{n} \cdot \vec{V}_n &= h \int_{-\theta_0}^{\theta_0} d\theta \cos(n\alpha\theta) \left[ (d + \epsilon) E_r(\theta, d + \epsilon) + \right. \\ &\quad \left. - (d - \epsilon) E_r(\theta, d - \epsilon) \right] \end{aligned} \quad (1.258)$$

in quanto  $\vec{V}_n$  si annulla sulla parte del bordo di  $D_\epsilon$  delimitata dai piani  $\theta = \pm\theta_0$ . Sostituendo la (1.251) nel secondo membro di questa equazione otteniamo un'espressione che coinvolge gli integrali elementari seguenti

$$\begin{aligned} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} d\theta \cos(m\alpha\theta) \cos(n\alpha\theta) &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} d\theta [\cos((m+n)\alpha\theta) + \cos((m-n)\alpha\theta)] = \\ &= \begin{cases} \frac{\sin(m+n)\frac{\pi}{2}}{\alpha(m+n)} + \frac{\sin(m-n)\frac{\pi}{2}}{\alpha(m-n)} = 0 & m \neq n \\ \theta_0 & m = n \end{cases} = \\ &= \theta_0 \delta_{mn} \end{aligned}$$

valida per  $m$  ed  $n$  ambedue *dispari* (e quindi per  $m+n$  pari). Il flusso (1.258) è pertanto:

$$\int_{\partial D_\epsilon} \vec{n} \cdot \vec{V}_n = h\theta_0 \left[ \alpha n \tilde{A}_n \left( \frac{d}{d+\epsilon} \right)^{\alpha n} + \alpha n \tilde{A}_n \left( \frac{d-\epsilon}{d} \right)^{\alpha n} \right] \quad (1.259)$$

In definitiva la (1.254) si scrive

$$\begin{aligned} h\theta_0 \alpha n \tilde{A}_n \left[ \left( \frac{d}{d+\epsilon} \right)^{\alpha n} + \left( \frac{d-\epsilon}{d} \right)^{\alpha n} \right] &= \\ &= - \int_{D_\epsilon} \frac{n\alpha \sin(n\alpha\theta)}{r} E_\theta(r, \theta) + \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Consideriamo ora il limite di quest'equazione per  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . Ricordando che  $2\theta_0\alpha = \pi$ , otteniamo

$$\begin{aligned} h\pi n \tilde{A}_n &= \frac{\lambda h}{\epsilon_0} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{D_\epsilon} \frac{n\alpha \sin(n\alpha\theta)}{r} E_\theta(r, \theta) = \\ &= \frac{\lambda h}{\epsilon_0} - n\alpha h \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{d-\epsilon}^{d+\epsilon} dr \int_{-\theta_0}^{\theta_0} d\theta \sin(n\alpha\theta) E_\theta(r, \theta) \end{aligned}$$

ovvero

$$\tilde{A}_n = \frac{\lambda}{\epsilon_0 \pi n} - \frac{\alpha}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{d-\epsilon}^{d+\epsilon} dr \int_{-\theta_0}^{\theta_0} d\theta \sin(n\alpha\theta) E_\theta(r, \theta) \quad (1.260)$$

Dimostriamo che il limite dell'integrale al secondo membro

$$K_n \equiv \frac{\alpha}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{d-\epsilon}^{d+\epsilon} dr \int_{-\theta_0}^{\theta_0} d\theta \sin(n\alpha\theta) E_\theta(r, \theta) \quad (1.261)$$

si annulla. Se la  $E_\theta(r, \theta)$  si mantenesse limitata nella regione d'integrazione questo sarebbe evidente, in quanto la regione d'integrazione  $D_\epsilon$  ha volume nullo nel limite  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . D'altra parte il campo elettrico può scriversi come la somma di due contributi: il campo elettrico generato dal filo carico e quello generato dalla carica indotta sul conduttore

$$\vec{E}(r, \theta) = \vec{E}_{conduttore}(r, \theta) + \vec{E}_{filo}(r, \theta)$$

Il campo  $\vec{E}_{conduttore}(r, \theta)$  generato dalla carica indotta sul conduttore è limitato nella regione  $D_\epsilon$  intorno al filo carico: pertanto esso non contribuisce a  $K_n$ .  $\vec{E}_{filo}(r, \theta)$ , invece, diverge nel punto  $(r, \theta) \in (d, 0) \in D_\epsilon$  e quindi, a priori, potrebbe dare un contributo non nullo al limite dell'integrale:

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{\alpha}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{d-\epsilon}^{d+\epsilon} dr \int_{-\theta_0}^{\theta_0} d\theta \sin(n\alpha\theta) E_\theta^{filo}(r, \theta) = \\ &= \frac{\alpha \lambda}{2\pi^2 \epsilon_0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{d-\epsilon}^{d+\epsilon} dr \int_{-\theta_0}^{\theta_0} d\theta \sin(n\alpha\theta) \frac{d \sin \theta}{d^2 + r^2 - 2dr \cos \theta} = \\ &= \frac{d\alpha\lambda}{2\pi^2 \epsilon_0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{d-\epsilon}^{d+\epsilon} dr \int_{-\theta_0}^{\theta_0} d\theta \sin(n\alpha\theta) \frac{\sin \theta}{(d-r)^2 + 4dr \sin^2 \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

Osserviamo che benché  $E_\theta(r, \theta)$  diverga in corrispondenza del filo carico, l'integrando è una funzione che, grazie al fattore moltiplicativo  $\sin(n\alpha\theta)$ , si mantiene limitata anche nell'intorno del punto  $(r, \theta) = (d, 0)$ . Per verificarlo esplicitamente si sviluppi l'integrando in serie di Taylor intorno a questo punto. Posto

$$r \equiv d + x \tag{1.262}$$

otteniamo

$$\frac{\sin(n\alpha\theta) \sin \theta}{(d-r)^2 + 4dr \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{n\alpha\theta^2}{x^2 + \theta^2 d^2} \left(1 + O(x, \theta^2)\right) \tag{1.263}$$

dove i termini trascurati sono di ordine  $x$  o  $\theta^2$ . Poiché

$$\left| \frac{\theta^2}{x^2 + \theta^2 d^2} \right| \leq \frac{1}{d^2} \tag{1.264}$$

l'integrando si mantiene limitato nell'intorno del punto  $(r, \theta) = (d, 0)$ . Ne consegue che  $K_n$  si annulla:

$$K_n = 0 \quad \text{per } n = 1, 3, 5, \dots \tag{1.265}$$

I coefficienti  $\tilde{A}_n$  si ottengono quindi dalla relazione (1.260):

$$\tilde{A}_n = \frac{\lambda}{\epsilon_0 \pi n} \quad (1.266)$$

Il potenziale è pertanto

$$\phi(r, \theta) = \frac{\lambda}{\epsilon_0 \pi} \begin{cases} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{\left(\frac{r^\alpha}{d^\alpha}\right)^m \cos(m \alpha \theta)}{m} & r < d \\ \sum_{m=1,3,\dots} \frac{\left(\frac{d^\alpha}{r^\alpha}\right)^m \cos(m \alpha \theta)}{m} & r > d \end{cases}$$

Le serie che appaiono nel secondo membro della (1.267) sono dello stesso tipo di quelle già risommate nella risoluzione del campo di filo carico in presenza di due conduttori piani:

$$\phi(r, \theta) = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0} \log \frac{d^{2\alpha} + r^{2\alpha} + 2 r^\alpha d^\alpha \cos(\theta \alpha)}{d^{2\alpha} + r^{2\alpha} - 2 r^\alpha d^\alpha \cos(\theta \alpha)}$$

Posto

$$\zeta \equiv \left(\frac{r}{d}\right)^\alpha e^{i\alpha\theta} \quad (1.267)$$

possiamo riscrivere il potenziale in termini di una funzione analitica nel piano complesso

$$\phi(r, \theta) = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0} \log \left| \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \right|^2 \quad (1.268)$$

La densità di carica lungo i piani conduttori è

$$\sigma(r) = \begin{cases} \frac{\lambda \alpha}{\pi r} \sum_{m=1,3,\dots} \left(\frac{r^\alpha}{d^\alpha}\right)^m (-1)^{\frac{m+1}{2}} & r < d \\ \frac{\lambda \alpha}{\pi r} \sum_{m=1,3,\dots} \left(\frac{d^\alpha}{r^\alpha}\right)^m (-1)^{\frac{m+1}{2}} & r > d \end{cases}$$

Le serie che appaiono nel secondo membro possono essere ambedue ricondotte, con passaggi elementari, alla serie geometrica:

$$\sum_{m=1,3,\dots} \left(\frac{r^\alpha}{d^\alpha}\right)^m (-1)^{\frac{m+1}{2}} = \sum_{m=1,3,\dots} \left(\frac{d^\alpha}{r^\alpha}\right)^m (-1)^{\frac{m+1}{2}} = -\frac{r^\alpha}{d^\alpha} \frac{1}{1 + \frac{r^{2\alpha}}{d^{2\alpha}}} \quad (1.269)$$

per cui

$$\sigma(r) = -\frac{\lambda \alpha r^\alpha}{\pi r d^\alpha} \frac{1}{1 + \frac{r^{2\alpha}}{d^{2\alpha}}} \quad (1.270)$$

In prossimità della punta, ovvero per  $r \ll d$ , possiamo limitarci al primo termine della (1.267):

$$\sigma(r) = -\frac{\lambda \alpha r^{\alpha-1}}{\pi d^\alpha} + \dots \quad \text{per } r \ll d \quad (1.271)$$

Vediamo dunque che, se i semipiani conduttori formano una “punta”

$$\pi > \theta_0 > \frac{\pi}{2} \quad (1.272)$$

ovvero se

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1, \quad (1.273)$$

allora  $\sigma(r)$  *diverge* per  $r \rightarrow 0$ . Il campo elettrico in prossimità della punta

$$E_\theta(r) = -\frac{\lambda}{\pi \epsilon_0 d} \alpha \frac{r^{\alpha-1}}{d^{\alpha-1}} + \dots = -E_{filo}(O) 2 \alpha \left(\frac{d}{r}\right)^{1-\alpha} + \dots \quad r \ll d \quad (1.274)$$

è molto più grande — per un fattore  $2 \alpha \left(\frac{d}{r}\right)^{1-\alpha}$  — del campo elettrico  $E_{filo}(O)$  che sarebbe prodotto nell’origine  $O$ , in *assenza* di conduttore, dal filo carico posto in  $(r, \theta) = (d, 0)$ :

$$E_{filo}(O) = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 d} \quad (1.275)$$

Questo risultato per il comportamento della densità di carica su conduttori piani che formano un angolo a punta è valido anche in presenza di distribuzioni di cariche diverse (e più complicate) da quella considerata, purché rispettino la simmetria per traslazioni lungo  $z$ .

Infatti, nel caso di una generica distribuzione di carica all’esterno del conduttore, il potenziale in un intorno della punta  $r = 0$  sarà ancora descritto da un’espansione analoga<sup>3</sup> alla prima delle Eqs. (1.251) (quella per  $r < d$ ). Naturalmente i coefficienti  $\tilde{A}_m$  saranno, in generale, diversi da quelli riportati nella Eq. (1.266). Per  $\alpha < 1$ , la densità di carica in prossimità della punta a  $r = 0$

$$\sigma(r) = -\frac{\tilde{A}_1 \alpha \epsilon_0}{d^\alpha r^{1-\alpha}} + \dots \quad r \rightarrow 0 \quad (1.276)$$

diverge, con l’eccezione del caso in cui  $\tilde{A}_1 = 0$ .

<sup>3</sup>Quando la distribuzione di carica non è simmetrica per  $\theta \rightarrow -\theta$  l’espressione del potenziale contiene, in generale, anche termini della forma  $r^{m\alpha} \sin m\alpha\theta$ , con  $m$  *pari*.

### 1.4.10 Alcune identità per serie e prodotti

*Alcune identità tra serie di funzioni*

I risultati delle sezioni precedenti equivalgono alle seguenti identità tra serie di funzioni

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|\zeta - n|} &= 4 \sum_{k=1,3,5,\dots} K_0(k \pi \rho) \cos(k \pi z) \\
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\zeta - n}{|\zeta - n|^3} &= 8 \pi \sum_{k=1}^{\infty} K_0(2 k \pi \rho) \sin(2 k \pi z) \\
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\zeta - n} &= \frac{2 \pi i}{e^{i \pi \zeta} - e^{-i \pi \zeta}} \\
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\zeta - n} &= -2 \pi i \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2 \pi k \rho} e^{2 \pi i z} \right] = \\
 &= \pi i \frac{e^{2 \pi i \zeta} + 1}{e^{2 \pi i \zeta} - 1} \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.277)
 \end{aligned}$$

dove

$$\zeta = z + i \rho \quad (1.278)$$

è una coordinata sul piano complesso. Si noti che la prima e la terza serie nella (1.277) è periodica in  $z$  con periodo 2, mentre le altre due sono periodiche con periodo 1.

Mostriamo come ricavare dalla terza equazione in (1.277) i valori di alcune serie numeriche legate alla funzione zeta di Riemann:

$$(-)^k k! \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(\zeta - n)^{k+1}} = \partial_{\zeta}^k \left[ \pi i \frac{e^{2 \pi i \zeta} + 1}{e^{2 \pi i \zeta} - 1} - \frac{1}{\zeta} \right]$$

Prendiamo  $k$  dispari e valutiamo ambo i membri in  $\zeta = 0$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}} = \frac{1}{k!} \partial_{\zeta}^k \left[ \frac{1}{2 \zeta} - \frac{\pi i}{2} \frac{e^{2 \pi i \zeta} + 1}{e^{2 \pi i \zeta} - 1} \right]_{\zeta=0} \quad k \text{ dispari}$$

I coefficienti dello sviluppo in serie di potenze di  $\zeta$  intorno al punto  $\zeta = 0$  della funzione tra parentesi quadre nel secondo membro di questa equazione

sono pertanto le somme delle serie che appaiono nel primo membro:

$$Z(\zeta) \equiv \frac{1}{2\zeta} - \frac{\pi i}{2} \frac{e^{2\pi i \zeta} + 1}{e^{2\pi i \zeta} - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta(2k+2) \zeta^{2k+1} \quad (1.279)$$

dove

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

per  $s$  nel piano complesso, è nota come la funzione zeta di Riemann. Abbiamo

$$\begin{aligned} Z(\zeta) &= \frac{1}{2\zeta} - \frac{\pi i}{2} \frac{e^{2\pi i \zeta} + 1}{e^{2\pi i \zeta} - 1} = \\ &= \frac{1}{2\zeta} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi i \zeta}{e^{2\pi i \zeta} - 1} + \frac{-2\pi i \zeta}{e^{-2\pi i \zeta} - 1} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.280)$$

Lo sviluppo di Taylor della funzione

$$\begin{aligned} B(t) &\equiv \frac{t}{1 - e^t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k \\ B_0 &= 1 \quad B_1 = -\frac{1}{2} \quad B_2 = \frac{1}{6} \quad \dots \end{aligned} \quad (1.281)$$

definisce i *numeri di Bernoulli*  $B_k$ . Dunque

$$\begin{aligned} Z(\zeta) &= \frac{1}{2\zeta} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( B(2\pi i \zeta) + B(-2\pi i \zeta) \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{2\zeta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2\pi i \zeta)^{2k} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{B_{2k} 2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} \zeta^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) \zeta^{2k-1} = \\ &= \frac{\pi^2}{6} \zeta + \frac{\pi^4}{90} \zeta^3 + \frac{\pi^6}{945} \zeta^5 + \dots \\ \zeta(2) &= \frac{\pi^2}{6} \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} \dots \end{aligned}$$

*Un prodotto infinito*

Consideriamo il potenziale (1.225) per  $y = 0$  e  $a = 1$ . Uguagliando l'espressione coulombiana (1.211) per il potenziale con lo sviluppo (1.225) e trascurando il fatto che la serie in (1.211) è in effetti definita a meno di una costante divergente<sup>4</sup> otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \log(n^2 + x^2) &= \log \prod_{n=-\infty}^{+\infty} (n^2 + x^2) = \\ &= 2f(|x|) = 2\pi|x| + 2 \log[1 - e^{-2\pi|x|}] \end{aligned} \quad (1.282)$$

cioè

$$\prod_{n=-\infty}^{+\infty} (n^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\pi|x|}}{1 - e^{-2\pi|x|}} \quad (1.283)$$

#### 1.4.11 Un problema di Laplace con condizioni al bordo di Neumann

Dalla risoluzione del problema della carica in presenza di un piano conduttore infinito, abbiamo derivato che il potenziale creato dalla distribuzione di carica sul piano  $z = 0$ ,

$$\sigma(\rho') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(1 + (\rho')^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.284)$$

in un punto posto a distanza  $z$  dal piano e distanza  $\rho$  dall'asse ortogonale al piano e passante per il centro della distribuzione di carica, è

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0\phi(\rho, z) &= \int_0^{\infty} dx x \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2\pi(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\rho^2 + z^2 + x^2 - 2x\rho\cos\varphi}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (1+z)^2}} \end{aligned} \quad (1.285)$$

benché, a nostra conoscenza, l'integrale doppio che figura nella (1.285) non appaia calcolabile direttamente con metodi elementari.

Vogliamo derivare il campo (1.285) creato dalla distribuzione di carica (1.284) risolvendo il problema di Laplace corrispondente. Sia data dunque la distribuzione di carica (1.284) sul piano  $z = 0$ . Il potenziale  $\phi(\rho, z)$  sarà una funzione simmetrica per riflessioni rispetto al piano  $z = 0$

$$\phi(\rho, -z) = \phi(\rho, z) \quad (1.286)$$

---

<sup>4</sup>Abbiamo spiegato che questo implica che la relazione che segue vale in realtà per le derivate.

armonica per  $z \neq 0$ , che soddisfa delle condizioni al contorno di tipo *Neumann*

$$2 \epsilon_0 E_z(\rho, 0) = -2 \epsilon_0 \partial_z \phi(\rho, z) \Big|_{z=0} = \sigma(\rho) = \frac{1}{2 \pi} \frac{1}{(1 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.287)$$

Si noti la differenza rispetto ad un problema in presenza di conduttori: il campo è diverso da zero su *ambidue* i lati della superficie  $z = 0$ , e questo porta al fattore 2 nel membro di sinistra dell'equazione (1.287).

La soluzione generale dell'equazione di Laplace indipendente dalla coordinata angolare  $\varphi$ , nella regione di spazio con  $z > 0$  si scrive nella forma

$$4 \pi \epsilon_0 \phi(\rho, z) = \int dk C_k R_k(\rho) Z_k(z) \quad (1.288)$$

L'equazione di Laplace in coordinate cilindriche porta alle equazioni

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho \partial_\rho R_k(\rho)) &= -k^2 R_k(\rho) \\ \partial_z^2 Z_k(z) &= k^2 Z_k(z) \end{aligned}$$

La richiesta che  $R_k(\rho)$  sia regolare sul semiasse  $\rho \geq 0$  e che  $Z_k(z)$  si annulli per  $z \rightarrow \infty$  impone che  $k$  sia *reale*

$$k^2 \geq 0 \quad (1.289)$$

Dunque

$$4 \pi \epsilon_0 \phi(\rho, z) = \int_0^\infty dk C_k J_0(k\rho) e^{-kz} \quad (1.290)$$

dove

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho \partial_\rho J_0(k\rho)) &= -k^2 J_0(k\rho) \\ \partial_z^2 e^{-kz} &= k^2 e^{-kz} \\ J_0(\rho) &\equiv \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \cos(\rho \cos \phi) \quad \rho \geq 0 \end{aligned} \quad (1.291)$$

La condizione al contorno sul piano  $z = 0$  determina i coefficienti  $C_k$

$$-2 \epsilon_0 \partial_z \phi(\rho, z) \Big|_{z=0} = \frac{1}{2 \pi} \frac{1}{(1 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2 \pi} \int_0^\infty dk k C_k J_0(k\rho) \quad (1.292)$$

Usando le proprietà di ortonormalità delle funzioni di Bessel

$$\int_0^\infty d\rho \rho J_0(k\rho) J_0(k'\rho) = \frac{\delta(k-k')}{k} \quad (1.293)$$

otteniamo

$$C_k = \int_0^\infty d\rho \rho \frac{J_0(k\rho)}{(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} = e^{-k} \quad (1.294)$$

In conclusione

$$4\pi \epsilon_0 \phi(\rho, z) = \int_0^\infty dk J_0(k\rho) e^{-k(z+1)} \quad (1.295)$$

L'integrale nel secondo membro di questa equazione è calcolabile con metodi elementari

$$\begin{aligned} 4\pi \epsilon_0 \phi(\rho, z) &= \int_0^\infty dk J_0(k\rho) e^{-k(z+1)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4\pi} \times \\ &\times \int_0^\infty dk \left[ e^{-k(z+1-i\rho \cos \varphi)} + e^{-k(z+1+i\rho \cos \varphi)} \right] = \\ &= \int_0^{4\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \left[ \frac{1}{z+1-i\rho \cos \varphi} + \frac{1}{z+1+i\rho \cos \varphi} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1+z)^2 + \rho^2}} \end{aligned}$$

#### 1.4.12 Plasmi

Sia  $\rho_{el}(\vec{x}, t)$  la densità di un gas di elettroni immersi in una densità  $\rho_0$  di ioni positivi (pesanti e, quindi, approssimativamente immobili), uniforme ed indipendente dal tempo. Sia  $\vec{s}(\vec{x}, t)$  lo spostamento dalla posizione di equilibrio degli elettroni in  $\vec{x}$ . Sia  $V$  un certo volume contenente, all'equilibrio,  $N_0 = V \rho_0$  elettroni. In una configurazione in cui lo spostamento degli elettroni è caratterizzata da  $\vec{s}(\vec{x}, t)$ , lo stesso numero di elettroni  $N_0$  si trova in un volume

$$V[\vec{s}] = V + \int_{\partial V} \vec{s} \cdot \hat{n} d^2a = \int_V (1 + \vec{\nabla} \cdot \vec{s}) d^3V \quad (1.296)$$

Corrispondentemente la densità elettronica per la configurazione  $\vec{s}(\vec{x}, t)$  è

$$\rho_{el}[\vec{s}] = \frac{\rho_0}{1 + \vec{\nabla} \cdot \vec{s}} \quad (1.297)$$

dove  $\rho_0$  è la densità all'equilibrio. Pertanto l'equazione di Gauss diventa

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q_e \rho_0}{\epsilon_0} \left( 1 - \frac{1}{1 + \vec{\nabla} \cdot \vec{s}} \right) = \frac{q_e \rho_0}{\epsilon_0} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{s}}{1 + \vec{\nabla} \cdot \vec{s}} \quad (1.298)$$

dove si è tenuto conto che all'equilibrio la densità di carica elettronica e ionica si equivalgono. Per piccole perturbazioni dell'equilibrio

$$|\vec{\nabla} \cdot \vec{s}| \ll 1 \quad (1.299)$$

l'equazione di Gauss diventa

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q_e \rho_0}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{s} \quad (1.300)$$

e dunque

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ \vec{E} - \frac{q_e \rho_0}{\epsilon_0} \vec{s} \right] = 0 \quad (1.301)$$

Tenuto conto che per  $\vec{s} = 0$  il campo elettrico deve annullarsi, otteniamo

$$\vec{E} = \frac{q_e \rho_0}{\epsilon_0} \vec{s} \quad (1.302)$$

L'equazione del moto degli elettroni diventa

$$m \frac{d\vec{s}}{dt^2} = - \frac{q_e^2 \rho_0}{\epsilon_0} \vec{s} \quad (1.303)$$

Il moto degli elettroni è dunque un moto elastico caratterizzato dalla frequenza

$$\omega_{plasma}^2 = \frac{q_e^2 \rho_0}{m \epsilon_0} = \frac{4 \pi e^2 \rho_0}{m} \quad (1.304)$$

detta *frequenza di plasma* del metallo in questione. Possiamo riscrivere questa frequenza in termini di unità atomiche

$$\hbar \omega_{plasma} = 2 \sqrt{\pi} \frac{e^2}{a_{Bohr}} \sqrt{\rho_0 a_{Bohr}^3} \approx 96.42 \text{ ev} \times \sqrt{N_{Bohr}} \quad (1.305)$$

dove  $N_{Bohr}$  è il numero di elettroni in un volume  $a_{Bohr}^3 \approx 1.48 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^3$ . Nei metalli, per esempio, ci si aspetta che  $N_{Bohr}$  sia dell'ordine dell'unità.

## 1.5 Energia elettrostatica

### 1.5.1 Energia di cristallo ionico

Consideriamo un cristallo cubico, di passo  $a$ , sui cui siti sono posti cariche (ioni)  $\pm e$  positivi e negativi. Vogliamo calcolare l'energia elettrostatica di uno ione nel reticolo. L'esempio concreto è  $Na^+Cl^-$ . Sperimentalmente l'energia per molecola necessaria per separare  $NaCl$  in ioni (che è l'energia di vaporizzazione del cristallo più l'energia di ionizzazione) è

$$U_{sper} \approx 7.92 \frac{ev}{molecola} \quad (1.306)$$

(che è equivalente a  $183 kcal/mole$ ). Il passo reticolare per il  $NaCl$  è

$$a = 2.81 \cdot 10^{-8} cm \quad (1.307)$$

Calcoleremo l'energia  $U$  di uno ione nel campo creato da tutti gli altri ioni del reticolo. Questa energia è il doppio dell'energia da associare ad ogni singolo ione, in quanto l'energia è da assegnarsi alle coppie cariche. Quindi  $U$  è uguale all'energia per molecola:

$$U = \frac{e^2}{a} \sum_{\{n_1, n_2, n_3\} \neq \{0,0,0\}} \frac{(-1)^{(n_1+n_2+n_3)}}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \quad (1.308)$$

dove la somma su  $n_{1,2,3}$  è sugli interi relativi. Decomponiamo la tripla somma come segue

$$U = \frac{e^2}{a} \left[ U_0 + \sum_{\{n_1, n_2\} \neq \{0,0\}} U_{n_1, n_2} \right] \quad (1.309)$$

dove

$$U_0 = 2 \sum_{n_3=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n_3}}{n_3} = -2 \log 2 \approx -1.386 \quad (1.310)$$

e per  $\{n_1, n_2\} \neq \{0, 0\}$ ,

$$U_{n_1, n_2} = (-1)^{(n_1+n_2)} \sum_{n_3=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n_3}}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \quad (1.311)$$

Usiamo il risultato per il potenziale di una catena di ioni (1.170):

$$U_{n_1, n_2} = 4 (-1)^{(n_1+n_2)} \left[ K_0(\pi \sqrt{n_1^2 + n_2^2}) + K_0(3\pi \sqrt{n_1^2 + n_2^2}) + \dots \right] \quad (1.312)$$

I numeri  $U_{n_1, n_2}$  decrescono rapidamente all'aumentare di  $\sqrt{n_1^2 + n_2^2}$ :

$$\begin{aligned} U &= \frac{e^2}{a} \left[ U_0 + 4U_{1,0} + 4U_{1,1} + 4U_{2,0} + 8U_{2,1} + 4U_{2,2} + \dots \right] = \\ &\approx \frac{e^2}{a} \left[ -1.3863 - 0.47266 + 0.109088 + \right. \\ &\quad \left. + 0.0146654 - 0.0132376 + 0.0001837 + \dots \right] = \\ &= -\frac{e^2}{a} 1.7476 \end{aligned} \quad (1.313)$$

Per  $a = 2.81 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$

$$\frac{e^2}{a} \approx 27.2 \text{ ev} \times \frac{a_{Bohr}}{a} = 5.122 \text{ ev} \quad (1.314)$$

Dunque

$$U_{elettrostatico} \approx -8.95 \text{ ev} \quad (1.315)$$

La ragione principale della differenza tra il valore teorico e quello sperimentale è che non abbiamo tenuto conto dell'energia elettrostatica di repulsione degli ioni a distanza ravvicinate. Questo effetto abbassa il valore teorico a  $-7.99 \text{ ev}$ . Un altro effetto trascurato è l'energia associata alle vibrazioni del cristallo.

## 2 I dielettrici

### 2.1 Le equazioni dell'elettrostatica nei dielettrici

Supponiamo che una molecola neutra posta in un campo elettrico  $\vec{E}$  acquisti la polarizzazione  $\vec{p} = q\vec{r}$ , in quanto il centro di carica degli elettroni (di carica totale  $-q$ ) si sposta di una distanza  $-\vec{r}$  dal centro di carica dei nuclei atomici. Se ci sono  $N$  molecole per unità di volume, il vettore *densità di polarizzazione* è

$$\vec{P}(\vec{r}) = N \vec{p} \quad (2.1)$$

Consideriamo un mezzo dielettrico descritto da una densità di polarizzazione  $\vec{P}(\vec{x})$ . Il potenziale elettrostatico creato da  $\vec{P}$  ad una distanza  $\vec{x}$  grande rispetto alle dimensioni dei dipoli è

$$\begin{aligned} 4 \pi \epsilon_0 \phi_p(\vec{x}) &= \int d^3 \vec{x}' \frac{\vec{P}(\vec{x}') \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \\ &= \int d^3 \vec{x}' \vec{P}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = - \int d^3 \vec{x}' \frac{\vec{\nabla}_{\vec{x}'} \cdot \vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned} \quad (2.2)$$

La variazione di densità di polarizzazione dà quindi origine ad una *densità carica di polarizzazione*  $\rho_{pol}$

$$\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (2.3)$$

La densità di carica totale si scrive pertanto come

$$\rho = \rho_{lib} + \rho_{pol} \quad (2.4)$$

dove  $\rho_{lib}$  è la densità di carica dovuta alle cariche libere, che rappresenta un eccesso od un deficit di elettroni nel mezzo. L'equazione di Gauss si scrive

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{lib} + \rho_{pol}}{\epsilon_0} \quad (2.5)$$

Definendo

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.6)$$

l'equazione si riscrive in termini della densità di carica libera

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{lib} \quad (2.7)$$

o, in termini di flusso,

$$\Phi(\vec{D}; S) = Q_{lib}(V) \quad (2.8)$$

dove  $V$  è un volume il cui bordo è la superficie chiusa  $S$ .

La relazione tra  $\vec{P}$  e  $\vec{E}$  è *approssimativamente* lineare in molti materiali:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (2.9)$$

dove  $\chi_e$  è la *suscettibilità* elettrica. Dunque

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \equiv \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (2.10)$$

dove

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e \quad (2.11)$$

è la *costante dielettrica* o *permmissività relativa*.

Nel caso in cui  $\chi_e$  è costante al variare del punto, l'equazione di Gauss diventa

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{lib}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (2.12)$$

Quindi i campi elettrici prodotti da cariche libere in un mezzo dielettrico sono ridotti di un fattore  $\epsilon_r$  relativamente al vuoto. La polarizzazione delle molecole o degli atomi produce dei campi elettrici in opposizione a quelli prodotti dalle cariche libere. Quindi la capacità di un condensatore riempito di dielettrico è *aumentata* di un fattore  $\epsilon_r$  rispetto a quella dello stesso condensatore nel vuoto.

## 2.2 Le condizioni al contorno per $E$ e $D$

Consideriamo due dielettrici con costanti dielettriche  $\epsilon_1$  ed  $\epsilon_2$  separati da una superficie  $S$ . Vogliamo determinare le condizioni al contorno di  $\vec{E}$  e  $\vec{D}$  su  $S$ .

Prendiamo una scatola gaussiana tra i due mezzi, di altezza infinitesima, con le facce piane parallele a  $S$ . Siccome le cariche libere nella scatola tendono a zero se il volume tende a zero, abbiamo dal teorema di Gauss (2.8) per  $\vec{D}$

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{n}_{12} = \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_{12} \quad (2.13)$$

cioè la componente *normale* alla superficie  $S$  di  $\vec{D}$  è continua.

Applicando invece

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \quad (2.14)$$

ad un piccolo cammino  $\Gamma$  tra i due mezzi, con i lati lunghi paralleli ad  $S$  ed i lati ortogonali di lunghezza infinitesima, otteniamo

$$\vec{E}_1 \wedge \vec{n}_{12} = \vec{E}_2 \wedge \vec{n}_{12} \quad (2.15)$$

cioè la componente *tangente* di  $\vec{E}$  alla superficie è continua.

### 2.2.1 Esempio: carica in presenza di un dielettrico

Supponiamo che il piano  $(x, y)$  delimiti la superficie tra due dielettrici, con costanti dielettriche relative  $\epsilon_1$  ( $\epsilon_2$ ) per  $z > 0$  ( $z < 0$ ). Una carica  $q$  è posta

nel punto  $P = (0, 0, d)$ . Si vuole calcolare il campo elettrico risultante. Il metodo delle immagini suggerisce l'ansatz

$$4 \pi \epsilon_0 \phi(x, y, z) = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_1 r_1} + \frac{q'}{\epsilon_1 r_2} & z > 0 \\ \frac{q''}{\epsilon_2 r_1} & z < 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

dove

$$r_1^2 = x^2 + y^2 + (z - d)^2 \quad r_2^2 = x^2 + y^2 + (z + d)^2 \quad (2.17)$$

Vogliamo determinare  $q'$  e  $q''$  dalla richiesta che

$$\begin{aligned} E_x^{(1)}(x, y, 0) &= E_x^{(2)}(x, y, 0) \\ E_y^{(1)}(x, y, 0) &= E_y^{(2)}(x, y, 0) \\ \epsilon_1 E_z^{(1)}(x, y, 0) &= \epsilon_2 E_z^{(2)}(x, y, 0) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Le condizioni di continuità delle componenti tangenziali di  $\vec{E}$  danno

$$\frac{q + q'}{\epsilon_1} = \frac{q''}{\epsilon_2} \quad (2.19)$$

mentre la continuità della componente normale di  $\vec{D}$  impone

$$-q + q' = -q'' \quad (2.20)$$

Deduciamo

$$\begin{aligned} q'' &= \frac{2q}{1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = \frac{2\epsilon_2 q}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \\ q' &= \frac{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - 1}{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} + 1} q = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q \end{aligned} \quad (2.21)$$

La densità di carica sulla superficie  $z = 0$  è

$$\begin{aligned} \sigma_P &= \left[ \vec{P}_z^{(2)} - \vec{P}_z^{(1)} \right]_{z=0} = \left[ \epsilon_0 (\epsilon_2 - 1) \vec{E}^{(2)} - \epsilon_0 (\epsilon_1 - 1) \vec{E}^{(1)} \right]_{z=0} = \\ &= \epsilon_0 \left[ \vec{E}^{(1)} - \vec{E}^{(2)} \right]_{z=0} = \\ &= \frac{1}{4 \pi (\rho^2 + d^2)^{3/2}} \left[ d \frac{-q + q'}{\epsilon_1} - \frac{-d q''}{\epsilon_2} \right] = \\ &= -\frac{d q''}{4 \pi (\rho^2 + d^2)^{3/2}} \left[ \frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right] = -\frac{d q}{2 \pi (\rho^2 + d^2)^{3/2}} \frac{1}{\epsilon_1 (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \end{aligned}$$

### 2.2.2 Esempio: la sfera uniformemente polarizzata

Il campo elettrico esterno ad una sfera uniformemente polarizzata, con

$$\vec{P} = P \hat{z} \quad (2.22)$$

è quello di un dipolo di momento

$$\vec{p} = \frac{4 \pi a^3 P}{3} \hat{z} \quad (2.23)$$

dove  $a$  è il raggio della sfera:

$$\vec{E}_{est} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{3 \vec{p} \cdot \hat{r} \hat{r} - \vec{p}}{r^3} \quad (2.24)$$

La componente normale del campo elettrico esterno sulla superficie della sfera è

$$E_{est}^{(n)} = \frac{p}{2 \pi a^3 \epsilon_0} \cos \theta = \frac{2 P}{3 \epsilon_0} \cos \theta \quad (2.25)$$

dove  $\theta$  è l'angolo della normale rispetto all'asse  $z$ . La componente tangenziale del campo elettrico esterno è

$$\hat{r} \wedge \vec{E}_{est} = -\frac{\hat{r} \wedge \hat{z} p}{4 \pi a^3 \epsilon_0} = \frac{\sin \theta p}{4 \pi a^3 \epsilon_0} \hat{y} = \frac{\sin \theta P}{3 \epsilon_0} \hat{y} \quad (2.26)$$

Il vettore di spostamento  $\vec{D}$  interno alla sfera è

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_{int} + P \hat{z} \quad (2.27)$$

La componente normale di  $\vec{D}$  interno è

$$D_{int}^{(n)} = \epsilon_0 \sin \theta E_x^{(int)} + \cos \theta (\epsilon_0 E_z^{(int)} + P) \quad (2.28)$$

mentre la componente tangenziale del campo elettrico è

$$\hat{r} \wedge \vec{E}_{int} = (-\cos \theta E_y^{(int)}, -\cos \theta E_x^{(int)} + \sin \theta E_z^{(int)}, \sin \theta E_y^{(int)}) \quad (2.29)$$

Le condizioni di continuità danno

$$\begin{aligned} \frac{2 P}{3} \cos \theta &= \epsilon_0 \sin \theta E_x^{(int)} + \cos \theta (\epsilon_0 E_z^{(int)} + P) \\ \frac{\sin \theta P}{3 \epsilon_0} &= \cos \theta E_x^{(int)} - \sin \theta E_z^{(int)} \\ E_y^{(int)} &= 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

cioè

$$\begin{aligned} -\frac{P}{3\epsilon_0} \cos \theta &= \sin \theta E_x^{(int)} + \cos \theta E_z^{(int)} \\ \frac{P}{3\epsilon_0} \sin \theta &= \cos \theta E_x^{(int)} - \sin \theta E_z^{(int)} \\ E_y^{(int)} &= 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

la cui soluzione è

$$E_x^{(int)} = 0 \quad E_y^{(int)} = 0 \quad E_z^{(int)} = -\frac{P}{3\epsilon_0} \quad (2.32)$$

### 2.3 Equazione di Clausius-Mossotti per dielettrici

Consideriamo un dielettrico caratterizzato da una densità di polarizzazione  $\vec{P}$ , separato dal vuoto da una superficie  $S$ . Supponiamo dunque che  $\vec{P}$  sia discontinuo attraverso  $S$ , e si annulli bruscamente nel passaggio dal dielettrico al vuoto. Sia  $V$  un cilindro gaussiano infinitamente sottile che attraversa la superficie  $S$ : la carica di polarizzazione racchiusa in questo volume è

$$\Delta Q_p = \int_V \rho_{pol} = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = - \int_{\partial V} \vec{P} \cdot \hat{n} = \vec{P} \cdot \hat{n}_{12} \Delta A \quad (2.33)$$

dove  $\hat{n}_{12}$  è la normale alla superficie  $S$ , nella direzione dielettrico-vuoto, e  $\Delta A$  è l'area della base del cilindro  $V$ . Pertanto la densità di carica superficiale indotta dalla polarizzazione sulla superficie  $S$  è

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}_{12} \quad (2.34)$$

Consideriamo ora una *cavità* in un dielettrico. Sia  $\vec{E}$  il campo nel dielettrico,  $\vec{P}$  il vettore densità di polarizzazione e  $\vec{E}_0$  il campo nella cavità. Poiché  $\sigma_P$  tende a *ridurre* l'intensità del campo elettrico nel dielettrico, tenderà in generale ad *aumentare* quella nella cavità.

Per una cavità stretta parallela al campo elettrico

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \quad (2.35)$$

Per una cavità piatta ortogonale al campo elettrico

$$\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} = \vec{E}_0 \quad (2.36)$$

Per una cavità sferica

$$\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = \vec{E}_0 \quad (2.37)$$

L'ultimo risultato discende dal fatto che il campo elettrico dentro una sfera uniformemente polarizzata è

$$\vec{E}_{sfera} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (2.38)$$

come dimostrato in (1.60). Nel modello di Clausius-Mossotti  $\vec{E}_0$  è identificato col campo locale sentito da una molecola di liquido dielettrico. Dunque

$$\vec{P} = \rho \alpha \epsilon_0 \left( \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right) \quad (2.39)$$

dove  $\rho$  è la densità e  $\alpha$  la polarizzabilità atomica. Pertanto

$$\vec{P} = \frac{\rho \alpha}{1 - \frac{\rho \alpha}{3}} \epsilon_0 \vec{E} \quad (2.40)$$

cioè la suscettibilità elettrica è

$$\chi_e = \epsilon_r - 1 = \frac{\rho \alpha}{1 - \frac{\rho \alpha}{3}} \quad (2.41)$$

( $\epsilon_r \equiv \kappa$  è la costante dielettrica, e  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  è la permittività).

Un esempio è il solfuro di carbonio,  $CS_2$ . Per il gas

$$\chi_{gas}^{sper} = 0.0029 = \rho_{gas} \alpha \quad (2.42)$$

Inoltre

$$\frac{\rho_{liquido}}{\rho_{gas}} = 381 \quad (2.43)$$

Quindi

$$\chi_{liquido}^{teorico} = \frac{381 \times 0.0029}{1 - \frac{381 \times 0.0029}{3}} = 1.75 \quad (2.44)$$

mentre

$$\chi_{liquido}^{sper} = 1.64 \quad (2.45)$$

Si noti che senza la correzione di Clausius-Mossotti il valore di  $\chi_{liquido}$  predetto sarebbe  $\chi_{liquido} = \rho_{liquido} \alpha = 381 \times 0.0029 \approx 1.10$ , molto più lontano dal valore sperimentale.

## 2.4 Legge di Curie-Weiss

Anche per i solidi rimane vero che  $\rho \alpha$  diminuisce con la temperatura, a causa della dilatazione termica. Supponiamo che

$$\rho \alpha = 3 - \beta (T - T_c) \quad (2.46)$$

dove  $\beta \approx (10^{-5} - 10^{-6})/C^o$  dipende dal coefficiente di dilatazione termica. Deduciamo dalla formula di Clausius-Mossotti che

$$\chi_e = \frac{\rho \alpha}{1 - \frac{\rho \alpha}{3}} \approx \frac{9}{\beta (T - T_c)} \quad (2.47)$$

## 2.5 Un modello classico per la polarizzabilità atomica

Schematizziamo gli elettroni negli atomi come degli oscillatori armonici. In presenza di campo elettrico

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + m \omega_0^2 \vec{x} = q_e \vec{E} \quad (2.48)$$

Per campi elettrici di frequenza  $\omega$

$$\vec{x}(\omega) = \frac{q_e \vec{E}_\omega}{m (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (2.49)$$

Per campi costanti

$$\vec{x}_0 = \frac{q_e \vec{E}_0}{m \omega_0^2} \quad (2.50)$$

ed il momento di dipolo indotto è

$$\vec{p} = \frac{q_e^2 \vec{E}_0}{m \omega_0^2} = \frac{4 \pi e^2}{m \omega_0^2} \epsilon_0 \vec{E}_0 \equiv \alpha \epsilon_0 \vec{E}_0 \quad (2.51)$$

con

$$\alpha = \frac{4 \pi e^2}{m \omega_0^2} \quad (2.52)$$

e

$$\chi_{gas} = \epsilon_r - 1 = \alpha \rho = \frac{4 \pi e^2 \rho}{m \omega_0^2} \quad (2.53)$$

Facciamo delle stime per l'idrogeno (trascuriamo la differenza tra polarizzabilità atomica e molecolare).

$$\begin{aligned}\omega_0^2 &= \frac{E_{Bohr}^2}{\hbar^2} = \frac{e^4}{4 \hbar^2 a_{Bohr}^2} \\ \alpha &= \frac{16 \pi \hbar^2 a_{Bohr}^2}{m e^2} = 16 \pi a_{Bohr}^3 \\ \rho &= \frac{N}{V} = \frac{P}{k T} \approx \frac{1.01 \cdot 10^5 \text{ newton}/m^2}{1.38 \cdot 10^{-23} \times 273 \text{ Joules}} = 0.268 \cdot 10^{20} \frac{1}{cm^3} \\ \chi_{H_2}^{teorico} &= \alpha \rho \approx 16 \cdot \pi \cdot 0.529^3 \cdot 10^{-24} \cdot 0.268 \cdot 10^{20} = 0.00020 \\ \chi_{H_2}^{sper} &= 0.00026\end{aligned}$$

Per l'elio

$$\begin{aligned}\omega_0^2(He) &\approx \frac{(24.5 \text{ ev})^2}{\hbar^2} \approx 1.801^2 \times \omega_0^2(H) \\ \chi_{He}^{teorico} &= \frac{\chi(H_2)^{teorico}}{1.801^2} \approx 0.000061 \\ \chi_{He}^{sper} &= 0.000068\end{aligned}$$

## 2.6 Un modello per gli anti-ferroelettrici

Supponiamo che i dipoli siano disposti in un reticolo cubico di passo  $a$ . Le catene di dipoli paralleli, disposte lungo l'asse delle  $z$ , sono a distanziate di multipli di  $2a$  in quanto nelle file intermedie si collocano altri ioni non (o poco) polarizzati. Abbiamo visto che il campo elettrico creato dai dipoli della catena che agisce su un dipolo appartenente alla stessa catena è

$$E_z = \frac{p}{\epsilon_0 \pi a^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{p}{\epsilon_0 \pi a^3} \zeta(3) \approx \frac{p}{\epsilon_0 a^3} 0.3826 \quad (2.54)$$

Il campo elettrico creato dai dipoli di una catena posta a distanza  $\rho$  dal dipolo considerato è, secondo la formula (1.192)

$$E_z^{(cat \ dip)}(0, \rho) = -\frac{p}{\epsilon_0 a^3} f_{dip}\left(\frac{\rho}{a}\right) \quad (2.55)$$

dove

$$f_{dip}(x) = 4 \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 K_0(2 \pi k x) \quad (2.56)$$

Le quattro catene più vicine si trovano a distanza  $2a$ . Il loro contributo a campo elettrico agente sul dipolo è pertanto

$$4 E_z^{(cat\ dip)}(0, 2a) = -\frac{p}{\epsilon_0 a^3} 4 f(2) \approx -\frac{p}{\epsilon_0 a^3} 6.14 \cdot 10^{-5} \quad (2.57)$$

che è quindi trascurabile rispetto a (2.54). Il contributo delle altre catene del reticolo è ancora più piccolo. Dunque, con ottima approssimazione,

$$\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E} = \frac{\alpha \vec{p}}{a^3} \frac{\zeta(3)}{\pi} \quad (2.58)$$

Esiste dunque un  $\alpha_{critico}$  al di sopra del quale il campo dei dipoli si autosostiene:

$$\alpha_{critico} = \frac{a^3 \pi}{\zeta(3)} \quad (2.59)$$

Per il titanato di bario  $BaTiO_3$ ,

$$a \approx 2 \cdot 10^{-8} \text{ cm} \quad (2.60)$$

per cui

$$\alpha_{critico} \approx 2.09 \cdot 10^{-23} \text{ cm}^3 \quad (2.61)$$

Le polarizzabilità dei singoli atomi sono

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 3.02 \cdot 10^{-23} \text{ cm}^3 & \alpha_{Ti} &\approx 2.4 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3 \\ \alpha_{medio} &\approx 1.63 \cdot 10^{-23} \text{ cm}^3 \end{aligned} \quad (2.62)$$

Poiché le catene del  $BaTiO_3$  sono composte da ioni alterni di  $O^{-2}$  e  $Ti^{+4}$ , in teoria dovremmo ricalcolare  $\alpha_{critico}$  nel caso di ioni alterni. (Le altre catene sono costituite da  $Ba^{+2}$  o  $O^{-2}$  ma sono scarsamente polarizzate). Per semplicità abbiamo invece usato la media delle polarizzabilità dei due ioni. Vediamo che  $\alpha_{medio}$  è un poco troppo piccolo per spiegare la ferroelettricità del  $BaTiO_3$ . Questa richiede l'esistenza di una polarizzabilità ionica del  $Ti$  di circa  $1.2 \cdot 10^{-23}$  (che però non è ben compresa).

Notiamo anche che il nostro risultato per le catene lontane (2.55) mostra che il campo di una catena tende a polarizzare la catena vicina in direzione opposta. Quindi questo modello predirebbe che il  $BaTiO_3$  sia un anti-ferroelettrico, mentre in realtà questo materiale è un ferroelettrico, cioè un materiale in cui le catene hanno polarizzazione parallela. Questo è dovuto alla presenza di catene intermedie che si polarizzano in direzione antiparallela, ma che sono poco polarizzabili così che l'effetto complessivo è una polarizzazione netta per unità di volume in una data direzione.

### 3 Magnetostatica

#### 3.1 Il potenziale vettore di un filo rettilineo

$$\vec{A}(1) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 c^2} \int \frac{\vec{j}(2) dV_2}{r_{12}} \quad (3.1)$$

La densità di corrente per un filo rettilineo di sezione  $\pi a^2$ , disposto lungo  $z$  e percorso da una corrente  $I$ , è

$$\vec{j} = j_z \hat{z} = \frac{I}{\pi a^2} \hat{z} \quad (3.2)$$

Dunque la componente del potenziale vettore non nulla è

$$A_z(1) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 \pi a^2 c^2} \int \frac{I dV_2}{r_{12}} \quad (3.3)$$

che coincide con l'espressione per il potenziale elettrostatico di una distribuzione di carica lineare infinita di densità di carica lineare  $\lambda$ , con

$$\lambda = \frac{I}{c^2} \quad (3.4)$$

Dunque

$$A_z = -\frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \log \rho = -\frac{I}{2 \pi \epsilon_0 c^2} \log \rho \quad (3.5)$$

Il campo magnetico è

$$\begin{aligned} B_z &= \partial_x A_y - \partial_y A_x = 0 \\ B_x &= \partial_y A_z - \partial_z A_y = -\frac{I y}{2 \pi \epsilon_0 c^2 \rho^2} \\ B_y &= \partial_z A_x - \partial_x A_z = \frac{I x}{2 \pi \epsilon_0 c^2 \rho^2} \end{aligned}$$

#### 3.2 Il potenziale vettore di un solenoide infinito

Sia  $z$  l'asse di simmetria del solenoide,  $a$  il suo raggio. La densità di corrente è

$$j_x = -j_0 \sin \phi \quad j_y = j_0 \cos \phi \quad j_z = 0 \quad (3.6)$$

dove

$$j_0 = \frac{nI}{d} \quad (3.7)$$

dove  $n$  è il numero di spire per unità di lunghezza e  $d$  è lo spessore radiale del solenoide.  $A_y$  è dunque identico al campo elettrostatico creato da un cilindro infinito con una distribuzione di carica superficiale

$$\sigma(\phi) = \sigma_0 \cos \phi = \frac{j_0 d}{c^2} \cos \phi = \frac{nI}{c^2} \cos \phi \quad (3.8)$$

(in quanto  $\frac{\sigma_0}{d} = \rho_0$  è la densità di carica di volume.). A sua volta questo potenziale elettrostatico si può ottenere per derivazione lungo  $x$  del potenziale elettrostatico creato da un cilindro infinito densità di carica uniforme  $\rho_0$ :

$$\phi_{cil. unif.}(\rho) = \begin{cases} -\frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0} \log \frac{\rho}{a} & \text{per } \rho > a \\ -\frac{\rho_0}{4\epsilon_0}(\rho^2 - a^2) & \text{per } \rho \leq a \end{cases} \quad (3.9)$$

Dunque il campo elettrostatico generato dal cilindro con carica superficiale

$$\sigma(\phi) = \sigma_0 \cos \phi = \rho_0 d \cos \phi \quad (3.10)$$

è

$$\phi_y(\rho) = -d \partial_x \phi_{cil. unif.}(\rho) = \begin{cases} \frac{\sigma_0 a^2 x}{2\epsilon_0 \rho^2} & \text{per } \rho > a \\ \frac{\sigma_0 x}{2\epsilon_0} & \text{per } \rho \leq a \end{cases} \quad (3.11)$$

Quindi per il potenziale vettore otteniamo

$$A_y(\rho) = \begin{cases} \frac{nI a^2 x}{2\epsilon_0 c^2 \rho^2} & \text{per } \rho > a \\ \frac{nIx}{2\epsilon_0 c^2} & \text{per } \rho \leq a \end{cases} \quad (3.12)$$

Analogamente

$$A_x(\rho) = \begin{cases} -\frac{nI a^2 y}{2\epsilon_0 c^2 \rho^2} & \text{per } \rho > a \\ -\frac{nIy}{2\epsilon_0 c^2} & \text{per } \rho \leq a \end{cases} \quad (3.13)$$

Calcoliamo quindi il campo magnetico

$$B_z(\rho) = \partial_x A_y - \partial_y A_x = \begin{cases} \frac{nI a^2}{2\epsilon_0 c^2} \left[ \frac{1}{\rho^2} - \frac{2x^2}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2} - \frac{2y^2}{\rho^4} \right] = 0 & \text{per } \rho > a \\ \frac{nI}{\epsilon_0 c^2} & \text{per } \rho \leq a \end{cases} \quad (3.14)$$

Per apprezzare l'utilità di pensare al cilindro con distribuzione di carica  $\sigma(\theta) \propto \cos \theta$  come due cilindri di carica uniforme e di segno opposto, spostati leggermente uno dall'altro, proviamo a calcolare il potenziale (3.11) direttamente attraverso la formula di Coulomb:

$$\begin{aligned}
\phi_y(\rho, \phi) &= \frac{a \sigma_0}{4 \pi \epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz \times \\
&\times \int_0^{2\pi} \frac{d\theta \cos \theta}{\sqrt{(\rho \cos \phi - a \cos \theta)^2 + (\rho \sin \phi - a \sin \theta)^2 + z^2}} = \\
&= -\frac{a \sigma_0}{4 \pi \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \cos \theta \log \left[ (\rho \cos \phi - a \cos \theta)^2 + \right. \\
&\quad \left. + (\rho \sin \phi - a \sin \theta)^2 \right] = \\
&= -\frac{a \sigma_0}{4 \pi \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \cos \theta \log \left[ \rho^2 + a^2 - 2 a \rho \cos(\theta - \phi) \right] = \\
&= -\frac{a \sigma_0}{4 \pi \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \cos \theta \cos \phi \log \left[ \rho^2 + a^2 - 2 a \rho \cos \theta \right] = \\
&= -\frac{a \sigma_0 \cos \phi}{4 \pi \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \cos \theta \log \left[ \rho^2 + a^2 - a \rho (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \right] = \\
&= -\frac{a \sigma_0 \cos \phi}{4 \pi \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i\theta} \log \left[ \frac{\rho^2}{a^2} + 1 - \frac{\rho}{a} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \right] = \\
&= \frac{a i \sigma_0 \cos \phi}{4 \pi \epsilon_0} \oint_{|\zeta|=1} d\zeta \log \left[ \left( \frac{\rho}{a} - \zeta \right) \left( \frac{\rho}{a} - \frac{1}{\zeta} \right) \right] = \\
&= \frac{a i \sigma_0 \cos \phi}{4 \pi \epsilon_0} \oint_{|\zeta|=1} d\zeta \log \left[ \frac{\left( \frac{\rho}{a} - \zeta \right) \left( \zeta - \frac{a}{\rho} \right)}{\zeta} \right] =
\end{aligned}$$

Se  $\rho < a$  la funzione

$$f(\zeta) = \log \left[ \frac{\left( \frac{\rho}{a} - \zeta \right) \left( \zeta - \frac{a}{\rho} \right)}{\zeta} \right] \quad (3.15)$$

ha un taglio tra  $\zeta = 0$  e  $\zeta = \frac{\rho}{a}$ , ed un altro taglio, fuori dal cerchio  $|\zeta| = 1$ , tra  $\zeta = \frac{a}{\rho}$  e  $\zeta = +\infty$ . Se invece  $\rho > a$  il taglio interno al cerchio è tra  $\zeta = 0$  e  $\zeta = \frac{a}{\rho}$  mentre quello esterno è tra  $\zeta = \frac{\rho}{a}$  e  $\zeta = +\infty$ . La discontinuità al taglio interno è quella del  $(-\log \zeta)$ , cioè  $-2\pi i$ . L'integrale in (3.15) è dato dall'integrale della discontinuità sul taglio interno:

$$\phi_y(\rho, \phi) = \frac{a \sigma_0 \cos \phi}{2 \epsilon_0} \begin{cases} \frac{\rho}{a} & \text{per } \rho < a \\ \frac{a}{\rho} & \text{per } \rho > a \end{cases}$$

in accordo con la (3.11).

### 3.3 Il campo di dipolo magnetico

Consideriamo una spira percorsa da corrente  $I$ . Possiamo decomporre la spira in spire infinitesime rettangolari, poste nel piano  $(x, y)$  di lati  $a$  e  $b$ . Il campo totale sarà la somma delle spire rettangolari infinitesime. Consideriamo il campo  $A_x$  prodotto da una spira rettangolare infinitesima. Questo campo è identico al campo scalare prodotto da due distribuzioni lineari di carica, di segno opposto, di lunghezza  $a$  poste a distanza  $b$  l'una dall'altra in direzione  $y$ , con densità lineare di carica

$$\lambda_x = \rho_x S = \frac{j_x}{c^2} S = \frac{I}{c^2} \quad (3.16)$$

dove  $S$  è la sezione del filo della spira. Il campo elettrostatico è quello di un dipolo di momento diretto lungo  $y$

$$p_y = -a \lambda_x b = \frac{a b I}{c^2} \quad (3.17)$$

Dunque  $A_x$  in un punto posto a distanza  $\vec{R} = (x, y, z)$  dalla spira è

$$A_x = -\frac{I a b}{4 \pi \epsilon_0 c^2} \frac{y}{R^3} \quad (3.18)$$

Analogamente

$$A_y = \frac{I a b}{4 \pi \epsilon_0 c^2} \frac{x}{R^3} \quad (3.19)$$

e naturalmente

$$A_z = 0 \quad (3.20)$$

Dunque introducendo

$$\vec{\mu} = I a b \hat{z} \quad (3.21)$$

abbiamo

$$\vec{A} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 c^2} \frac{\vec{\mu} \wedge \vec{R}}{R^3} \quad (3.22)$$

### 3.4 Una digressione sull'invarianza relativistica

Vogliamo considerare una situazione analizzabile con risultati elementari dell'elettrostatica e della magnetostatica che mostra come le leggi dell'elettromagnetismo — ovvero le equazioni di Maxwell (1.1) coniugate con l'espressione (1.2) per la forza elettromagnetica su una carica — non siano compatibili con la cosiddetta “invarianza galileiana”: cioè con le trasformazioni che in meccanica newtoniana descrivono il passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro.

Si consideri una distribuzione di carica lineare uniforme, disposta lungo l'asse delle  $x$ , che si muove, lungo quest'asse, con velocità  $v$ . Se  $\lambda$  è la densità di carica lineare, la corrente lungo l'asse delle  $x$  è:

$$I = \lambda v \quad (3.23)$$

Sia  $P$  un punto posto, per concretezza, sull'asse delle  $z$ , a distanza  $z$  dall'asse delle  $x$ .

Il campo elettrico creato in  $P$  dalla distribuzione di carica è

$$E_x(P) = E_y(P) = 0 \quad E_z(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z} \quad (3.24)$$

Il campo magnetico, nello stesso punto, è

$$B_x(P) = B_z(P) = 0 \quad B_y(P) = -\frac{\lambda v}{2\pi\epsilon_0 z c^2} \quad (3.25)$$

Consideriamo ora una carica  $q$  che si trova in  $P$  e si muove con velocità  $v$  nella direzione di  $x$  positiva:  $\vec{v} = (v, 0, 0)$ . La forza elettromagnetica  $\vec{F}$  su  $q$  è la somma del contributo elettrico e di quello magnetico:

$$F_x = F_y = 0 \quad F_z = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 d} - \frac{\lambda q v^2}{2\pi\epsilon_0 z c^2} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 z} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (3.26)$$

Analizziamo ora la *stessa* situazione fisica, come descritta da un osservatore che si trova in un sistema di riferimento che si muove con velocità  $v$  costante lungo l'asse delle  $x$ . In questo sistema di riferimento la distribuzione di carica lineare è immobile e disposta lungo l'asse delle  $x$ ; la carica  $q$  è pure immobile e posta a distanza  $z'$  dall'asse delle  $x$ . Pertanto in questo sistema

di riferimento i campi elettrici e magnetici nel punto  $P$  dove si trova la carica sono:

$$\begin{aligned} E'_x(P) = E'_y(P) = 0 \quad E'_z(P) &= \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 z'} \\ B'_x(P) = B'_y(P) = B'_z(P) &= 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

La forza elettromagnetica sulla carica  $q$  misurata in questo sistema di riferimento è quindi

$$F'_x = F'_y = 0 \quad F'_z = \frac{\lambda' q}{2\pi\epsilon_0 z'} \quad (3.28)$$

Abbiamo indicato con un apice le grandezze fisiche misurate dall'osservatore nel sistema di riferimento solidale con la distribuzione di carica lineare. In meccanica classica abbiamo ovviamente che

$$z = z' \quad (3.29)$$

Inoltre le leggi della dinamica newtoniana richiedono che

$$\vec{F} = \vec{F}' \quad (3.30)$$

Infatti, in meccanica classica la relazione tra le velocità  $\vec{V}(t)$  e  $\vec{V}'(t)$  di una particella misurate ad un tempo  $t$  da due osservatori inerziali che si muovono con velocità relativa  $\vec{v}$  costante è

$$\vec{V}(t) = \vec{V}'(t) + \vec{v} \quad (3.31)$$

Ne consegue che le accelerazioni sono le stesse nei due sistemi di riferimento

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d\vec{V}'(t)}{dt} \quad (3.32)$$

Dunque la forza, che è legata all'accelerazione dalla legge di Newton

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{V}(t)}{dt} \quad (3.33)$$

è pure invariante nel passaggio da un riferimento inerziale ad un altro.

Per quanto riguarda  $\lambda$  questa è una carica per unità di lunghezza:

$$\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta x} \quad (3.34)$$

La carica è indipendente dal sistema di riferimento scelto<sup>5</sup>. Nella meccanica newtoniana le distanze tra due punti sono pure identiche, quando misurate in due sistema di riferimento inerziali:

$$\Delta x = \Delta x' \quad (3.35)$$

Dunque, in meccanica classica vale la relazione

$$\lambda = \lambda' \quad (3.36)$$

Confrontando (3.26) con (3.28) deduciamo che *se* valgono le leggi di trasformazione newtoniane (3.30) e (3.36) per forze e distanze, le leggi di Maxwell *non possono* valere simultaneamente in tutti i sistemi inerziali.

Proviamo a dedurre, con l'aiuto di qualche assunzione aggiuntiva, le modifiche alle leggi di trasformazione (3.30) e (3.36) necessarie per assicurare la validità delle leggi di Maxwell in qualunque sistema inerziale: è questa la proprietà nota come “invarianza relativistica” delle equazioni di Maxwell.

Assumiamo dunque che la relazione newtoniana (3.30) sia modificata nel seguente modo

$$F_z = \alpha(v) F'_z \quad (3.37)$$

e analogamente che

$$\lambda = \beta(v) \lambda' \quad (3.38)$$

dove  $\alpha(v)$  e  $\beta(v)$  sono delle funzioni ignote della velocità relativa  $v$  lungo  $x$  tra i due sistemi inerziali. Per semplicità, facciamo anche l'ipotesi che la relazione newtoniana (3.29) tra le coordinate trasverse alla direzione del moto relativo tra i due sistemi di riferimento continui a valere

$$z = z' \quad (3.39)$$

Interpreteremo la (3.37), dicendo che se  $F'_z$  è la forza esercitata lungo  $z$  su una particella in stato di quiete,  $\alpha(v) F'_z$  è la forza che si esercita su questa particella che si muove con velocità  $v$  lungo  $x$ .

Se manteniamo l'assunzione che la carica elettrica sia indipendente dal sistema di riferimento inerziale, la (3.34) implica che la relazione (3.38) è equivalente alla

$$\Delta x = \frac{1}{\beta(v)} \Delta x' \quad (3.40)$$

---

<sup>5</sup>Abbiamo già usato questo fatto avendo preso lo stesso valore  $q$  per la carica nei due sistemi di riferimento.

dove  $\Delta x'$  e  $\Delta x$  sono le distanze lungo  $x$  tra due punti misurate rispettivamente nel sistema in cui questi punti sono in quiete ed in quello in cui questi punti si muovono con velocità  $v$  nella direzione  $x$ .

In definitiva otteniamo da (3.26) e (3.28) che

$$\frac{\beta(v) \lambda' q}{2 \pi \epsilon_0 z} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \alpha(v) \frac{\lambda' q}{2 \pi \epsilon_0 z} \quad (3.41)$$

ovvero

$$\frac{\alpha(v)}{\beta(v)} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (3.42)$$

Confrontiamo ora la descrizione da parte degli *stessi* due osservatori di una situazione *diversa*, nella quale la particella di carica  $q$  si trova in quiete nel punto  $P$  nel primo sistema di riferimento — quello nel quale la distribuzione dei carica lineare si muove con velocità  $v$  lungo  $x$ . In questo caso, poiché la carica è immobile, la forza  $F_z$  misurata nel primo sistema di riferimento è puramente elettrica:

$$F_z = \frac{\lambda q}{2 \pi \epsilon_0 z} = \beta(v) \frac{\lambda' q}{2 \pi \epsilon_0 z} \quad (3.43)$$

dove abbiamo fatto uso della (3.38).

Nel sistema solidale con la distribuzione lineare di carica, invece, la carica si muove con velocità  $-v$  lungo  $x$ . La forza su  $q$  è puramente elettrica anche in questo secondo sistema di riferimento in quanto il campo magnetico è nullo:

$$F'_z = \frac{\lambda' q}{2 \pi \epsilon_0 z} \quad (3.44)$$

È evidente, per ragioni di simmetria, che questa situazione è indistinguibile da quella in cui la carica  $q$  viaggia lungo la direzione positiva  $x$  con velocità  $v$ . Ora però la relazione tra  $F_z$  e  $F'_z$  è invertita rispetto alla (3.37). Infatti è nel primo sistema che la particella è in quiete, mentre è nel secondo sistema che essa si muove lungo  $x$  con velocità  $v$ . Dunque in questo caso l'assunzione (3.37) diventa:

$$F'_z = \alpha(v) F_z \quad (3.45)$$

Pertanto, confrontando (3.43) e (3.44) otteniamo

$$\frac{\lambda' q}{2 \pi \epsilon_0 z} = \alpha(v) \beta(v) \frac{\lambda' q}{2 \pi \epsilon_0 z} \quad (3.46)$$

ovvero

$$\beta(v) = \frac{1}{\alpha(v)} \quad (3.47)$$

Inserendo questa relazione nella (3.42) otteniamo

$$\alpha(v) = \frac{1}{\beta(v)} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.48)$$

Concludiamo che se le equazioni di Maxwell devono mantenersi valide in tutti i sistemi di riferimento inerziali, la distanza  $\Delta x'$  tra due punti in un sistema di riferimento in quiete rispetto ad essi e la loro distanza  $\Delta x$  misurata in un sistema di riferimento che si muove con velocità  $v$  nella direzione della retta congiungente i due punti è

$$\Delta x = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta x' \quad (3.49)$$

Questo è il fenomeno che viene detto della *contrazione* relativistica: regoli in movimento appaiono più corti che in quiete.

L'altra relazione

$$F_z = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} F'_z \quad (3.50)$$

può essere riformulata nel seguente modo. Ricordiamo la legge della dinamica newtoniana:

$$F_z = \frac{dp_z}{dt} \quad F'_z = \frac{dp'_z}{dt'} \quad (3.51)$$

In meccanica newtoniana, naturalmente,  $t' = t$ , ed anche

$$p_z = p'_z \quad (3.52)$$

per due sistemi di riferimento inerziali che si muovono con velocità relativa  $v$  lungo  $x$ .

Assumiamo che le equazioni della dinamica nella forma (3.51) e la relazione (3.52) continuino a valere in meccanica relativistica<sup>6</sup>: la (3.50) implica allora che

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.53)$$

---

<sup>6</sup>Un'assunzione che naturalmente si rivela corretta in meccanica relativistica. Si noti che l'ipotesi (3.52) è analoga alla (3.39).

Questa relazione descrive il fenomeno della *dilatazione* relativistica dei tempi: orologi in movimento appaiono più lenti che orologi in quiete.

Le relazioni (3.49) e (3.53) esprimono le trasformazioni di spazio e tempo nella meccanica relativistica e ne costituiscono il contenuto fondamentale.

## 4 Magnetismo nella materia

### 4.1 Magnetizzazione

Il potenziale vettore generato da una densità di carica  $\vec{j}(x)$  stazionaria è

$$4 \pi \epsilon_0 c^2 \vec{A}(x) = \int d^3 \vec{x}' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (4.1)$$

Se la distribuzione di carica è confinata in una regione limitata dello spazio, il potenziale a grande distanza è dato da

$$4 \pi \epsilon_0 c^2 \vec{A}(x) = \int d^3 \vec{x}' \vec{J}(\vec{x}') \left( \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{|\vec{x}|^3} + O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^3}\right) \right) \quad (4.2)$$

La densità di corrente soddisfa l'equazione di continuità nel caso stazionario

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(x) = 0 \quad (4.3)$$

Da questa equazione deduciamo che

$$\partial_j(x_i J_j(x)) = J_i(x) + x_i \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(x) = J_i(x) \quad (4.4)$$

e quindi

$$\int J_i(x') d^3 \vec{x}' = \int \partial_j(x_i J_j(x)) d^3 \vec{x}' = 0 \quad (4.5)$$

se la corrente è confinata in un volume finito. Analogamente, da

$$\partial_j(x_i x_k J_j(x)) = x_k J_i(x) + x_i J_k(x) \quad (4.6)$$

deriviamo

$$\int d^3 \vec{x}' (x'_k J_i(x') + x'_i J_k(x')) = 0 \quad (4.7)$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
4 \pi \epsilon_0 c^2 A_i(x) &= \frac{x_j}{|\vec{x}|^3} \int d^3 \vec{x}' x'_j J_i(x') + O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^3}\right) = \\
&= \frac{1}{2} \frac{x_j}{|\vec{x}|^3} \int d^3 \vec{x}' (x'_j J_i(x') - x'_i J_j(x')) + O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^3}\right) = \\
&= \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{jik} x_j}{|\vec{x}|^3} \int d^3 \vec{x}' (\vec{x}' \wedge \vec{J}(x'))_k + O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^3}\right) = \\
&= \frac{(\vec{m} \wedge \vec{x})_i}{|\vec{x}|^3} + O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^3}\right)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

dove abbiamo introdotto il *momento magnetico*  $\vec{m}$  della distribuzione di corrente data

$$\vec{m} = \int \vec{M}(x) d^3 \vec{x} = \frac{1}{2} \int \vec{x} \wedge \vec{J}(x) d^3 \vec{x} \tag{4.9}$$

e la corrispondente *densità di magnetizzazione* (o di momento magnetico)  $\vec{M}$

$$\vec{M}(x) = \frac{1}{2} \vec{x} \wedge \vec{J}(x) \tag{4.10}$$

Il campo magnetico corrispondente al potenziale vettore di dipolo magnetico (4.8) è

$$\vec{B}(x) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 c^2} \frac{3 \hat{x} (\hat{x} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{x}|^3} \tag{4.11}$$

Se la densità di corrente è confinata in un anello piano, nel quale passa la corrente  $I$ , l'espressione per il momento magnetico della distribuzione di carica diventa

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{x} \wedge \vec{J}(x) d^3 \vec{x} = \frac{I}{2} \oint \vec{x} \wedge d\vec{l} = (I \times \text{Area}) \vec{n} \tag{4.12}$$

dove *Area* è l'area dell'anello, e  $\vec{n}$  è la normale alla superficie piana il cui bordo è l'anello. Riotteniamo in questo modo il risultato (3.21).

Se la densità di corrente è formata da cariche  $q_\alpha$ , di massa  $M_\alpha$  che si muovono con velocità  $\vec{v}_\alpha$ , allora

$$\vec{J}(x) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_{\alpha}) \tag{4.13}$$

ed il momento magnetico si scrive

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{x}_{\alpha} \wedge \vec{v}_{\alpha} = \frac{1}{2} \sum \frac{q_{\alpha}}{M_{\alpha}} \vec{L}_{\alpha} = \frac{q}{2M} \vec{L} \quad (4.14)$$

se tutte le particelle hanno lo stesso rapporto  $\frac{q_{\alpha}}{M_{\alpha}}$  e  $\vec{L}$  è il momento angolare orbitale totale del sistema.

Supponiamo ora di avere un sistema localizzato caratterizzato da una densità di magnetizzazione  $\vec{M}(x)$ . Il potenziale vettore in un punto  $\vec{x}$  lontano dal sistema è

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 c^2 \vec{A}(x) &= \int d^3x' \frac{\vec{M}(x') \wedge (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \\ &= \int d^3x' \vec{M}(x') \wedge \vec{\nabla}_{x'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \int d^3x' \frac{\vec{\nabla}_{x'} \wedge \vec{M}(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned}$$

Pertanto la densità di magnetizzazione  $\vec{M}(x)$  è equivalente ad una densità di corrente

$$\vec{j}_{mag}(x) = \vec{\nabla} \wedge \vec{M} \quad (4.15)$$

È possibile riottenere lo stesso risultato in maniera più elementare ma più laboriosa partendo dall'espressione del momento di dipolo magnetico di un piccolo anello di corrente  $I$  di area  $A$ :

$$\vec{m} = I A \vec{n} \quad (4.16)$$

Consideriamo per semplicità una densità di magnetizzazione  $\vec{M}(x)$  diretta lungo l'asse delle  $z$ . Il momento di dipolo magnetico di un volume  $\Delta V_{\vec{x}}$  sarà dunque

$$\Delta m_z = \Delta V_{\vec{x}} M_z(\vec{x}) = I_{xy} \Delta x \Delta y \quad (4.17)$$

dove  $I_{xy}$  è la corrente che circola nel piano  $xy$  associata al volume  $\Delta V_{\vec{x}}$ . Quindi

$$\Delta z M_z(\vec{x}) = I_{xy}(\vec{x}) \quad (4.18)$$

Consideriamo ora il volume  $\Delta V_{\vec{x} + \Delta x \hat{x}}$  contiguo a  $\Delta V_{\vec{x}}$ , nella direzione  $x$ . La corrente associata a questo volume è

$$\Delta z M_z(\vec{x} + \Delta x \hat{x}) = I_{xy}(\vec{x} + \Delta x \hat{x}) \quad (4.19)$$

La corrente effettiva nella direzione  $y$  risultante dalla magnetizzazione dei due volumi è

$$\begin{aligned} j_y(\vec{x}) \Delta x \Delta z &= -I_{xy}(\vec{x} + \Delta x \hat{x}) + I_{xy}(\vec{x}) = \\ &= \Delta z (M_z(\vec{x}) - M_z(\vec{x} + \Delta x \hat{x})) \approx -\Delta z \Delta x \partial_x M_z(\vec{x}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Dunque

$$j_y(\vec{x}) = -\partial_x M_z(\vec{x}) \quad (4.21)$$

Analogamente considerando un volume  $\Delta V_{\vec{x}+\Delta y \hat{y}}$  contiguo al volume originale nella direzione  $y$  otteniamo

$$j_x(\vec{x}) = \partial_y M_z(\vec{x}) \quad (4.22)$$

in accordo con la (4.15), ristretta al caso di  $\vec{M} = M_z \hat{z}$ .

In presenza di una densità di magnetizzazione  $\vec{M}$  e di una densità di polarizzazione  $\vec{P}$ , le equazioni di Maxwell possono essere riscritte in termini dei nuovi campi:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{H} &= \vec{B} - \frac{\vec{M}}{c^2 \epsilon_0} \end{aligned} \quad (4.23)$$

come segue

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho_{lib} \\ \epsilon_0 c^2 \vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{con} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.24)$$

dove  $\vec{j}_{con}$  è la corrente delle cariche libere<sup>7</sup>

Notiamo che un'altra definizione di  $\vec{H}$  è spesso usata

$$\vec{H}' \equiv c^2 \epsilon_0 \vec{H} = c^2 \epsilon_0 \vec{B} - \vec{M} \quad (4.25)$$

$\vec{H}'$  ha le dimensioni della magnetizzazione invece che del campo  $\vec{B}$ .

---

<sup>7</sup>Una derivazione più dettagliata delle equazioni di Maxwell (4.24) è presentata nella Sezione 6.1

Per una grande classe di materiali la relazione tra  $\vec{M}$  e  $\vec{B}$  (o  $\vec{H}$ ) è approssimativamente lineare:

$$\vec{M} = c^2 \epsilon_0 \chi_m \vec{H} = \chi_m \vec{H}' \quad (4.26)$$

dove  $\chi_m$  è la *suscettibilità magnetica*. Abbiamo

$$\vec{B} = (1 + \chi_m) \vec{H} = \frac{1 + \chi_m}{\epsilon_0 c^2} \vec{H}' \equiv \epsilon_0 c^2 \mu \vec{H} = \mu \vec{H}' \quad (4.27)$$

La grandezza con le dimensioni di  $\frac{1}{\epsilon_0 c^2}$

$$\mu = \frac{1 + \chi_m}{\epsilon_0 c^2} \quad (4.28)$$

è detta la *permeabilità magnetica*. Se  $\chi_m$  è positivo (negativo) il materiale si chiama *paramagnetico* (*diamagnetico*). Per questi materiali  $\chi_m$  è un numero molto piccolo ( $< 10^{-5}$ ). Per i materiali *ferromagnetici*  $\chi_m$  può invece essere molto grande (fino a  $10^5$ ), anche se in questo caso la relazione tra  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$  non soltanto non è più lineare ma è anche a molti valori (fenomeno dell'isteresi magnetica).

Poiché

$$\vec{M} = \frac{\epsilon_0 c^2 \chi_m}{1 + \chi_m} \vec{B} \quad (4.29)$$

concludiamo che nei materiali diamagnetici la magnetizzazione ha direzione *opposta* al campo magnetico che la induce. Questo effetto è presente in tutti i materiali è sostanzialmente indipendente dalla temperatura: è dovuto alle extra-correnti atomiche indotte dal campo esterno. Nei materiali paramagnetici ed in quelli ferromagnetici la magnetizzazione indotta ha la *stessa* direzione del campo magnetico. Questo effetto è presente nei materiali costituiti da atomi o molecole con momenti magnetici intrinseci: è dovuto all'allineamento dei momenti magnetici intrinseci degli atomi e dipende quindi dalla temperatura.

## 4.2 Condizioni al contorno per $B$ ed $H$

Poiché  $\vec{B}$  ha divergenza nulla la componente di  $\vec{B}$  normale alla superficie che separa due materiali è continua.

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{n}_{21} = \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_{21} \quad (4.30)$$

Poiché  $\vec{H}$  soddisfa l'equazione di Ampère, la componente di  $\vec{H}$  tangente alla superficie che separa i due materiali è continua, assumendo che non ci siano correnti superficiali di conduzione tra i due materiali

$$\vec{H}_1 \wedge \vec{n}_{21} = \vec{H}_2 \wedge \vec{n}_{21} \quad (4.31)$$

### 4.3 Sfera uniformemente magnetizzata

Consideriamo una sfera di un materiale magnetico di suscettibilità magnetica  $\chi_m$  con  $\vec{M}$  costante. Vogliamo determinare  $\vec{H}$  e  $\vec{B}$ . Il problema è formalmente identico a quello della sfera dielettrica, di suscettibilità elettrica  $\chi_e$ , uniformemente polarizzata con

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (4.32)$$

Questa relazione va confrontata con l'analoga relazione magnetica

$$\vec{M} = \epsilon_0 c^2 \chi_m \vec{H} \quad (4.33)$$

Dunque

$$\begin{aligned} \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} &\leftrightarrow \frac{\vec{M}}{c^2 \epsilon_0} \\ \vec{E} &\leftrightarrow \vec{H} \\ \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} &\leftrightarrow \vec{B} \\ \chi_e &\leftrightarrow \chi_m \end{aligned} \quad (4.34)$$

In effetti i campi in corrispondenza soddisfano le stesse equazioni

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \right) = 0 &\leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{H} + \frac{\vec{M}}{c^2 \epsilon_0} \right) = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 &\leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = 0 \end{aligned}$$

Anche le condizioni al bordo corrispondono: attraverso la superficie della sfera, rimangono continue le componenti tangenziali di  $\vec{E}$  ed  $\vec{H}$  e le componenti normali di  $\frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$  e  $\vec{B} = \vec{H} + \frac{\vec{M}}{c^2 \epsilon_0}$ .

Nel caso della sfera dielettrica, il campo  $\vec{E}$  esterno alla sfera è quello di un dipolo elettrico con

$$\vec{p} = \frac{4\pi a^3}{3} \vec{P} \quad (4.35)$$

dove  $a$  è il raggio della sfera e  $\vec{P}$  la densità di polarizzazione elettrica. Pertanto il campo magnetico esterno alla sfera magnetizzata è quello di un dipolo magnetico  $\vec{m}$  con

$$\vec{m} = \frac{4\pi a^3}{3} \vec{M} \quad (4.36)$$

Il campo interno della sfera dielettrica è

$$\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (4.37)$$

Ne consegue il campo  $\vec{H}$  all'interno della sfera magnetizzata è

$$\vec{H} = -\frac{\vec{M}}{3c^2\epsilon_0} \quad (4.38)$$

e quindi

$$\vec{B} = \vec{H} + \frac{\vec{M}}{c^2\epsilon_0} = \frac{2\vec{M}}{3c^2\epsilon_0} = -2\vec{H} \quad (4.39)$$

#### 4.4 Magnetizzazione spontanea

In analogia al modello di Clausius-Mossotti per i dielettrici, consideriamo una cavità sferica all'interno di un materiale magnetico. Siano  $\vec{H}_{cav}$  e  $\vec{H}_{mat}$  i campi, rispettivamente, all'interno della cavità e nel materiale magnetico. Dal risultato (4.38) deduciamo

$$\vec{H}_{cav} - \frac{\vec{M}}{3c^2\epsilon_0} = \vec{H}_{mat} \quad (4.40)$$

Inoltre all'interno della cavità

$$\vec{B}_{cav} = \vec{H}_{cav} \quad (4.41)$$

Dunque

$$\begin{aligned} \vec{H}_{cav} &= \vec{H}_{mat} + \frac{\vec{M}}{3c^2\epsilon_0} = \\ &= \vec{B}_{cav} = \vec{B}_{mat} - \frac{2\vec{M}}{3c^2\epsilon_0} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Seguendo la stessa logica del modello di Clausius-Mossotti, vogliamo identificare il campo magnetico atomico con il campo nella cavità sferica. In vista di una generalizzazione del modello scriviamo la relazione (4.42) nella forma

$$\vec{B}_{atomico} = \vec{H} + \frac{\lambda \vec{M}}{c^2 \epsilon_0} \quad (4.43)$$

e nel caso della cavità sferica  $\lambda = \frac{1}{3}$ . Il campo  $\vec{B}_{atomico}$  è quello sentito da un atomo in un mezzo magnetico di magnetizzazione  $\vec{M}$  e valore dell'intensità magnetica media data da  $\vec{H}$ . Sia  $\mu$  il momento magnetico dell'atomo e  $N$  il numero di atomi per unità di volume. L'energia di un dipolo magnetico  $\vec{\mu}$  in un campo magnetico  $\vec{B}$  è

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (4.44)$$

Pertanto la magnetizzazione media alla temperatura  $T$  è data da

$$\begin{aligned} M &= N \mu \frac{e^{\frac{\mu B_{atomico}}{kT}} - e^{-\frac{\mu B_{atomico}}{kT}}}{e^{\frac{\mu B_{atomico}}{kT}} + e^{-\frac{\mu B_{atomico}}{kT}}} = N \mu \tanh \frac{\mu B_{atomico}}{kT} = \\ &= N \mu \tanh \frac{\mu (H + \frac{\lambda M}{c^2 \epsilon_0})}{kT} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Questa è un'equazione per  $M$  che possiamo riscrivere come un sistema

$$\begin{aligned} \frac{M}{M_{sat}} &= \tanh x \\ \frac{M}{M_{sat}} &= \frac{c^2 \epsilon_0 k T}{\lambda \mu M_{sat}} \left( x - \frac{\mu H}{k T} \right) \end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto la magnetizzazione di saturazione

$$M_{sat} \equiv \mu N \quad (4.46)$$

Discutiamo la soluzione di questo sistema in varie circostanze. Prendiamo il caso

$$H = 0 \quad (4.47)$$

Allora esiste una temperatura critica  $T_c$

$$\frac{c^2 \epsilon_0 k T_c}{\lambda \mu M_{sat}} = 1 \quad (4.48)$$

cioè

$$T_c = \frac{\lambda \mu^2 N}{c^2 \epsilon_0 k} \quad (4.49)$$

Per  $T > T_c$  l'unica soluzione del sistema (4.46) è  $x = 0$ . Per  $T < T_c$  esiste una soluzione con  $x$  non nullo, cioè una *magnetizzazione spontanea*.

Consideriamo ora  $H \neq 0$  ma piccolo. In questo caso l'unica soluzione è quella con  $x \neq 0$ . Se  $T$  è grande  $x$  sarà piccolo. Quindi in questo caso possiamo porre  $\tanh x \approx x$  ed ottenere

$$\frac{M}{M_{sat}} = \frac{T}{T_c} \left( \frac{M}{M_{sat}} - \frac{\mu H}{kT} \right) \quad (4.50)$$

ovvero

$$\frac{M}{M_{sat}} = \frac{\mu H}{k(T - T_c)} \quad (4.51)$$

I valori di  $T_c$  che si ottengono da questo modello, con  $\lambda = \frac{1}{3}$ , sono in disaccordo con i dati sperimentali per i materiali ferromagnetici come il nichel per un fattore  $\sim 3000$ . Il punto fondamentale è che il modello implica che il campo magnetico atomico è

$$B_{atomico} = H + \lambda \frac{M}{\epsilon_0 c^2} = B + \frac{(\lambda - 1) M}{\epsilon_0 c^2} \quad (4.52)$$

Dunque per  $\lambda = \frac{1}{3}$  il campo atomico è più piccolo del campo medio, la magnetizzazione *riduce* il campo effettivo. Invece il ferromagnetismo richiede che la magnetizzazione *aumenti* — di un fattore  $\sim 10^3$  — il campo effettivo.

La relazione

$$\frac{M}{M_{sat}} = m \left( \frac{T}{T_c} \right) \quad (4.53)$$

che si ottiene risolvendo (4.46) per  $H = 0$

$$\frac{M}{M_{sat}} = \tanh \frac{\frac{M}{M_{sat}}}{\frac{T}{T_c}} \quad (4.54)$$

è una curva universale che non dipende dal materiale magnetico ed è in buon accordo con i dati sperimentali. Deriviamo il comportamento della funzione  $m(t)$  nel limite di piccola magnetizzazione ( $t \rightarrow 1$ ) e di grande magnetizzazione ( $t \rightarrow 0$ ). Posto

$$m \equiv \frac{M}{M_{sat}} \quad t \equiv \frac{T}{T_c} \quad (4.55)$$

abbiamo

$$m \approx \frac{m}{t} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{m^2}{t^2}\right) \quad \text{per } t \approx 1 \quad (4.56)$$

da cui

$$m(t) \approx \sqrt{3}\sqrt{1-t} \quad \text{per } t \approx 1 \quad (4.57)$$

Invece

$$m(t) \approx 1 - 2e^{-\frac{2m}{t}} \approx 1 - 2e^{-\frac{2}{t}} \quad \text{per } t \rightarrow 0 \quad (4.58)$$

## 5 La legge del flusso

Consideriamo un cammino chiuso che si muove nello spazio. L'applicazione  $\Gamma_t$  che rappresenta il cammino dipende pertanto parametricamente dal tempo  $t$ :

$$\Gamma_t : \sigma \rightarrow \vec{x}(\sigma; t) \quad (5.1)$$

Abbiamo indicato con  $\sigma$  una variabile reale sull'intervallo  $\sigma \in [0, 1]$  che parametrizza, ad un istante dato  $t$ , il cammino  $\Gamma_t$  nello spazio. Se il cammino è chiuso varrà la relazione

$$\vec{x}(0, t) = \vec{x}(1, t) \quad (5.2)$$

Definiamo il flusso  $\Phi_B(t)$  del campo magnetico  $\vec{B}$  attraverso il cammino  $\Gamma_t$  ad un dato istante di tempo  $t$ :

$$\Phi_B(t) = \int_{S_t} d^2a \vec{B}(\vec{x}, t) \cdot \hat{n} \quad (5.3)$$

dove  $S_t$  è una superficie, dipendente dal tempo, il cui bordo coincide con  $\Gamma_t$

$$\partial S_t = \Gamma_t \quad (5.4)$$

$\Phi_B(t)$  dipende dal tempo sia attraverso la dipendenza temporale del campo magnetico  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  sia attraverso la dipendenza dal tempo della superficie  $S_t$ . Corrispondentemente la variazione di  $\Phi_B(t)$  in un intervallo di tempo  $\Delta t$  infinitesimo sarà data dalla somma di due contributi:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_B(t) = \Delta t \int_{S_t} d^2a \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} \cdot \hat{n} + \\ + \left[ \int_{S_{t+\Delta t}} d^2a \vec{B} \cdot \hat{n} - \int_{S_t} d^2a \vec{B} \cdot \hat{n} \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

Tenendo conto dell'equazione di Faraday-Maxwell, possiamo riscrivere il primo termine nel membro di destra di quest'equazione come la circuitazione del campo elettrico lungo  $\Gamma_t$ :

$$\Delta t \int_{S_t} d^2 a \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\Delta t \int_{\Gamma_t} d\vec{x} \cdot \vec{E} \quad (5.6)$$

Il termine tra parentesi quadre nel membro di destra dell'Eq. (5.5) rappresenta il contributo aggiuntivo alla variazione del flusso dovuta al movimento nello spazio del cammino. Sia  $C(t, \Delta t)$  la superficie a forma di cilindro che ha per basi le superfici  $S_t$  e  $S_{t+\Delta t}$  e come bordo laterale la superficie anulare  $A(t, \Delta t)$  spazzata dal cammino  $\Gamma(t)$  nell'intervallo di tempo  $[t, t + \Delta t]$ . Dall'equazione di Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.7)$$

consegue che il flusso totale attraverso  $C(t, \Delta t)$  si annulla. Pertanto

$$\int_{S_{t+\Delta t}} d^2 a \vec{B} \cdot \hat{n} - \int_{S_t} d^2 a \vec{B} \cdot \hat{n} = - \int_{A(t, \Delta t)} d^2 a \vec{B} \cdot \hat{n} \quad (5.8)$$

I vettori

$$\begin{aligned} \vec{e}_t &\equiv \frac{\partial \vec{x}(\sigma, t)}{\partial t} \\ \vec{e}_\sigma &\equiv \frac{\partial \vec{x}(\sigma, t)}{\partial \sigma} \end{aligned} \quad (5.9)$$

sono ambedue tangenti alla superficie anulare  $A(t, \Delta t)$ , uno nella direzione “parallela” e l'altro in quella “ortogonale” all'asse del cilindro  $C(t, \Delta t)$ . Pertanto l'elemento di area  $\hat{n} d^2 a$  normale alla superficie  $A(t, \Delta t)$  si scrive

$$\hat{n} d^2 a = \vec{e}_\sigma \wedge \vec{e}_t \Delta t \Delta \sigma \quad (5.10)$$

Tenendo conto che

$$\vec{e}_\sigma \Delta \sigma \quad (5.11)$$

è l'elemento di lunghezza infinitesimo lungo il cammino  $\Gamma_t$  mentre

$$\vec{e}_t = \vec{v}(\sigma, t) \quad (5.12)$$

è la velocità con cui si muove nello spazio un punto del cammino  $\Gamma_t$ , riscriviamo la (5.8) come segue

$$\begin{aligned} \int_{S_{t+\Delta t}} d^2a \vec{B} \cdot \hat{n} - \int_{S_t} d^2a \vec{B} \cdot \hat{n} &= - \int_{A(t,\Delta t)} \vec{B} \cdot (\vec{e}_\sigma \wedge \vec{e}_t) \Delta t \Delta \sigma = \\ &= - \int_{A(t,\Delta t)} \vec{e}_\sigma \cdot (\vec{e}_t \wedge \vec{B}) \Delta t \Delta \sigma = - \Delta t \int_{\Gamma_t} d\vec{x} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{B}) \end{aligned} \quad (5.13)$$

In definitiva la variazione del flusso  $\Phi_B(t)$  diventa

$$\Delta \Phi_B(t) = - \Delta t \int_{\Gamma_t} d\vec{x} \cdot \vec{E} - \Delta t \int_{\Gamma_t} d\vec{x} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (5.14)$$

ovvero

$$\frac{d\Phi_B(t)}{dt} = - \int_{\Gamma_t} d\vec{x} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (5.15)$$

L'espressione

$$\frac{\vec{F}}{q} = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (5.16)$$

è la forza di Lorentz che agisce su una carica unitaria posta in un punto del cammino  $\Gamma_t$ . La circuitazione di questa forza lungo il cammino  $\Gamma_t$  è chiamata la *forza elettromotrice* lungo il cammino in questione. Denotiamola con  $\mathcal{E}_{\Gamma_t}$ . La legge del flusso (di Faraday) è pertanto

$$\frac{d\Phi_B(t)}{dt} = - \mathcal{E}_{\Gamma_t} \quad (5.17)$$

Questa legge generalizza al caso di cammini in movimento la relazione, diretta conseguenza dell'equazione di Maxwell-Faraday, che si applica a cammini  $\Gamma$  *fermi*, cioè indipendenti dal tempo:

$$\frac{\partial \Phi_B(t)}{\partial t} = - \int_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{E} \quad (5.18)$$

La legge del flusso implica dunque che possiamo ottenere una forza elettromotrice in un circuito sia tendendo fermo il circuito e facendo variare il campo magnetico, sia tenendo costante il campo magnetico e muovendo il circuito in modo da far variare il flusso magnetico che lo attraversa.

## 6 Onde

### 6.1 Equazioni di Maxwell nei dielettrici

Ricordiamo che la densità di carica di polarizzazione  $\rho_{pol}$  è legata al vettore densità di polarizzazione  $\vec{P}$  dalla relazione

$$\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (6.1)$$

Nel caso dinamico abbiamo anche una corrente di polarizzazione

$$\vec{j}_{pol} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (6.2)$$

La densità di carica totale si scrive

$$\rho = \rho_{pol} + \rho_{lib} \quad (6.3)$$

mentre la densità di corrente

$$\vec{j} = \vec{j}_{pol} + \vec{j}' = \vec{j}_{pol} + \vec{j}_{mag} + \vec{j}_{con} \quad (6.4)$$

dove

$$\vec{j}_{mag} = \vec{\nabla} \wedge \vec{M} \quad (6.5)$$

è la densità di corrente dovuta alla densità di magnetizzazione  $\vec{M}$  e  $\vec{j}_{con}$  è la densità di corrente delle cariche libere. Posto

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{H} &= \vec{B} - \frac{\vec{M}}{c^2 \epsilon_0} \end{aligned} \quad (6.6)$$

le equazioni di Maxwell si riscrivono

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho_{lib} \\ \epsilon_0 c^2 \vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{con} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.7)$$

In alcune circostanze esistono delle relazioni *approssimate* tra  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  e  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad \vec{B} = (1 + \chi_m) \vec{H} = \epsilon_0 c^2 \mu \vec{H} \quad (6.8)$$

## 6.2 Onde nei dielettrici

Supponiamo

$$\rho_{lib} = \vec{j}' = \vec{j}_c = 0 \quad (6.9)$$

Allora

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) - \nabla^2 \vec{E} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -\frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Dunque

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) \quad (6.11)$$

Questa equazione ha come soluzioni delle onde se la relazione tra la densità di polarizzazione ed il campo elettrico è lineare. Cerchiamo una soluzione della forma

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0(\omega) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad (6.12)$$

L'equazione di Gauss impone

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad (6.13)$$

Prendiamo

$$\begin{aligned} \vec{P}(\vec{x}, t) &= \vec{P}(\omega) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \\ \vec{P}(\omega) &= \epsilon_0 \chi_e(\omega) \vec{E}_0(\omega) \end{aligned} \quad (6.14)$$

dove abbiamo tenuto conto che la suscettibilità dielettrica può dipendere dalla frequenza dell'onda. L'equazione d'onda diventa

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (6.15)$$

dove

$$n^2(\omega) = 1 + \chi_e(\omega) \quad (6.16)$$

Dunque

$$\frac{\omega^2 n^2}{c^2} = k^2 \quad (6.17)$$

Pertanto la velocità di fase dell'onda è

$$v_{fase} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(\omega)} \quad (6.18)$$

$n(\omega)$  è l'indice di rifrazione del mezzo.

Nel caso di materiali densi, abbiamo visto che il fatto che il campo locale è diverso da quello medio, porta alla relazione di Clausius-Mossotti

$$\chi_e(\omega) = \frac{N\alpha(\omega)}{1 - \frac{N\alpha(\omega)}{3}} \quad (6.19)$$

dove  $\alpha(\omega)$  è la polarizzabilità atomica, per la quale un modello microscopico che schematizza gli atomi come degli oscillatori dampati dà

$$N\alpha(\omega) = \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (6.20)$$

Abbiamo quindi per l'indice di rifrazione

$$n^2 - 1 = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3}} \quad (6.21)$$

ovvero

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = N\alpha = \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0} \sum_k \frac{1}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 + i\gamma_k\omega} \quad (6.22)$$

dove abbiamo tenuto conto della possibilità che diverse frequenze  $\omega_{0k}$  siano rilevanti nell'interazione degli atomi coll'onda elettromagnetica.

### 6.2.1 Coefficiente di assorbimento

Notiamo che l'indice di rifrazione (6.22) ha una parte immaginaria non nulla se  $\gamma \neq 0$ :

$$n = n_R - i n_I \quad (6.23)$$

$n_I$  è legato al coefficiente di assorbimento  $\beta$  dell'onda nel dielettrico

$$E^2 \propto e^{-\beta z} \quad (6.24)$$

con

$$\beta = \frac{2\omega n_I}{c} \quad (6.25)$$

### 6.2.2 Indice di rifrazione di una miscela

Nel caso di una miscela di atomi diversi la formula (6.22) diventa

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \sum_j N_j \alpha_j \quad (6.26)$$

Quindi l'indice di un miscela non è semplicemente la media degli indici delle componenti.

**Esercizio:** Si verifichi la validità di questa formula a partire dai valori misurati di  $n$  per una soluzione di acqua e saccarosio per diverse concentrazioni del saccarosio.

### 6.3 Onde nei metalli

Per i metalli possiamo modificare la teoria dell'indice di rifrazione per i materiali densi tenendo conto che in questo caso il campo locale può essere identificato col campo medio e che  $\omega_0 \approx 0$  per i metalli, in quanto gli elettroni di conduzione sono quasi liberi. Dunque

$$n^2 - 1 = N\alpha = \frac{N q_e^2}{m \epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + i \gamma \omega} \quad (6.27)$$

Troviamo la relazione tra  $\gamma$  e la conduttività  $\sigma$  del metallo. La forza che agisce sugli elettroni deve uguagliare la forza di resistenza quando la velocità degli elettroni è quella di deriva

$$\gamma m v_{deriva} = q_e E \quad (6.28)$$

La corrente prodotta dal campo elettrico è

$$j = q_e N v_{deriva} = \frac{q_e^2 N}{\gamma m} E = \sigma E \quad (6.29)$$

ovvero

$$\gamma = \frac{q_e^2 N}{\sigma m} \quad (6.30)$$

Dunque

$$\frac{1}{\tau} \equiv \gamma = \frac{q_e^2 N}{\sigma m} = \frac{\epsilon_0 \omega_{pl}^2}{\sigma} \quad (6.31)$$

dove

$$\omega_{pl}^2 = \frac{q_e^2 N}{\epsilon_0 m} \quad (6.32)$$

è la frequenza di plasma del metallo, introdotta nella sottosezione 1.4.12.  $\tau$  è una scala di tempi, e rappresenta il tempo medio tra un urto ed un altro degli elettroni che trasportano la corrente. Introduciamo anche la frequenza associata alla conduttività del metallo

$$\omega_\sigma \equiv \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (6.33)$$

per cui

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_\sigma} \quad (6.34)$$

L'indice di rifrazione dei metalli si scrive

$$\begin{aligned} n^2 &= 1 + \frac{N q_e^2}{m \epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + i \frac{q_e^2 N}{\sigma m} \omega} = 1 + \frac{\sigma}{i \omega \epsilon_0} \frac{1}{i \omega \tau + 1} = \\ &= 1 - i \frac{\omega_\sigma}{\omega} \frac{1}{i \omega \tau + 1} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Esistono dunque due regimi estremi per la propagazione di onde elettromagnetiche nei metalli.

### 6.3.1 Limite di bassa frequenza

Il regime di bassa frequenza è quello per cui

$$\omega \ll \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_\sigma} \quad (6.36)$$

In questo limite la formula (6.35) per l'indice di rifrazione è bene approssimata da:

$$n^2 = 1 - i \frac{\omega_\sigma}{\omega} \quad (6.37)$$

Possiamo distinguere due sotto-casi estremi, del regime di bassa frequenza.

- *Buon conduttore*

In questo caso  $\sigma$  è grande:

$$\omega \ll \omega_\sigma \quad (6.38)$$

per cui

$$n^2 \approx -i \frac{\omega_\sigma}{\omega} = -i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \quad (6.39)$$

e l'indice di rifrazione diventa

$$n \approx (1 - i) \sqrt{\frac{\sigma}{2 \epsilon_0 \omega}} \quad (6.40)$$

L'ampiezza dell'onda elettromagnetica decade con la distanza  $z$  di penetrazione dentro il metallo secondo la legge

$$E(z) \propto e^{-z \sqrt{\frac{\sigma \omega}{2 \epsilon_0 c^2}}} \equiv e^{-\frac{z}{\delta}} \quad (6.41)$$

La profondità di penetrazione  $\delta$  è

$$\delta = \sqrt{\frac{2 \epsilon_0 c^2}{\sigma \omega}} = \sqrt{\frac{2 c^2}{\omega_\sigma \omega}} = \lambda \sqrt{\frac{\omega}{2 \pi^2 \omega_\sigma}} \quad (6.42)$$

dove abbiamo introdotto la lunghezza d'onda dell'onda nel vuoto

$$\lambda = \frac{2 \pi c}{\omega} \quad (6.43)$$

Quindi per un buon conduttore la profondità di penetrazione nel mezzo  $\delta$  è *molto minore* — per un fattore  $\propto \sqrt{\frac{\omega}{\omega_\sigma}}$  — della lunghezza d'onda della radiazione nel vuoto.

- *Cattivo conduttore*

Questo è il limite di piccoli  $\sigma$

$$\omega_\sigma \ll \omega \quad (6.44)$$

per cui

$$n \approx 1 - i \frac{\omega_\sigma}{2 \omega} \quad (6.45)$$

La profondità di penetrazione  $\delta$  è quindi

$$\delta = \frac{2 \omega c}{\omega_\sigma \omega} = \frac{2 c}{\omega_\sigma} = \lambda \frac{\omega}{2 \pi \omega_\sigma} \quad (6.46)$$

Per un cattivo conduttore quindi la profondità di penetrazione è indipendente dalla frequenza ed è *molto maggiore* — per un fattore  $\frac{\omega}{\omega_\sigma}$  — della lunghezza d'onda della radiazione.

Consideriamo l'esempio di un tipico metallo buon conduttore, il rame.<sup>8</sup>

$$\begin{aligned}
\sigma &= 5.76 \cdot 10^7 \text{ (ohm} \times \text{metri)}^{-1} \\
\frac{1}{\epsilon_0} &\approx 4\pi \times 9.0 \cdot 10^9 \frac{\text{volt} \times \text{metro}}{\text{coulomb}} \\
\omega_\sigma &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 6.51 \cdot 10^{18} \text{ sec}^{-1} \\
\rho_{Cu} &= 8.9 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} \\
N &= \frac{\rho_{Cu}}{\text{peso atomico Cu}} N_{Avogadro} \approx \frac{8.9}{63.5} \times 6.02 \cdot 10^{23} \text{ cm}^{-3} \approx \\
&\approx 8.44 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3} \\
\omega_{Bohr} &\equiv \frac{e^2}{2 a_{Bohr} \hbar} = \frac{e^2}{2 a_{Bohr}} \frac{2\pi c}{h c} \approx \\
&\approx \frac{13.6 \text{ ev} \times 2\pi \times 3 \cdot 10^{10} \text{ cm} \times \text{sec}^{-1}}{12400 \cdot 10^{-8} \text{ ev} \times \text{cm}} \approx 2.067 \cdot 10^{16} \text{ sec}^{-1} \\
\omega_{pl} &= 4\sqrt{\pi} \omega_{Bohr} \sqrt{N a_{Bohr}^3} \approx \\
&\approx 4\sqrt{\pi} \times 2.067 \cdot 10^{16} \text{ sec}^{-1} \sqrt{8.44 \cdot 10^{22} \times (53 \cdot 10^{-8})^3} \approx \\
&\approx 1.643 \cdot 10^{16} \text{ sec}^{-1} \\
\frac{1}{\tau} &= \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_\sigma} \approx 4.14259 \cdot 10^{13} \text{ sec}^{-1} \tag{6.47}
\end{aligned}$$

Nel caso del rame, pertanto, il regime di bassa frequenza è quello per cui

$$\omega \ll 10^{13} \text{ sec}^{-1} \tag{6.48}$$

In questo regime  $\omega \ll \omega_\sigma$  e quindi il rame è sempre un buon conduttore. Per esempio per onde di frequenza

$$\omega \approx 10^{10} \text{ sec}^{-1} \tag{6.49}$$

---

<sup>8</sup>Ricordiamo che un numero di atomi di una sostanza eguale al numero di Avogadro  $N_A$  ha una massa in grammi numericamente uguale alla massa atomica. Quindi, poiché il peso atomico del rame è 63.5, un numero  $N_A$  di atomi di rame hanno una massa di 63.5 gr.

la profondità di penetrazione sarà

$$\delta \approx \sqrt{\frac{2 \times 9 \cdot 10^{20}}{6.51 \cdot 10^{28}}} \text{ cm} \approx 1.66 \cdot 10^{-4} \text{ cm} \quad (6.50)$$

Discutiamo ora la trasmissione della radiazione elettromagnetica in regime di bassa frequenza attraverso l'acqua *pura*, che ha  $\epsilon = 80.1 \epsilon_0$ ,  $\sigma = 5 \times 10^{-6} \text{ ohm} \times \text{metro}$ , e  $\tau = 1.01 \times 10^{-11} \text{ sec}$ .

La frequenza associata alla conducibilità dell'acqua pura è

$$\omega_\sigma \approx 5.65 \times 10^5 \text{ sec}^{-1} \quad (6.51)$$

Il regime di bassa frequenza è quello per cui

$$\omega \ll \frac{1}{\tau} \approx 10^{11} \text{ sec}^{-1} \quad (6.52)$$

Dunque per frequenze nell'intervallo

$$\omega_\sigma \approx 10^5 \text{ sec}^{-1} \ll \omega \ll 10^{11} \text{ sec}^{-1} \quad (6.53)$$

l'acqua pura va considerata un cattivo conduttore. La formula di bassa frequenza (6.37) va leggermente modificata per tenere conto che l'acqua è, in condizioni statiche, un dielettrico con una permissività  $\epsilon_r = 1 + \chi \neq 1$ :

$$n^2 = \epsilon_r - i \frac{\omega_\sigma}{\omega} \quad (6.54)$$

Per cattivi conduttori questa relazione dà

$$n \approx \sqrt{\epsilon_r} - i \frac{\omega_\sigma}{2 \sqrt{\epsilon_r} \omega} \quad (6.55)$$

Pertanto la profondità di penetrazione nell'acqua pura nel regime suddetto è:

$$\delta \approx \frac{2c \sqrt{\epsilon_r}}{\omega_\sigma} \approx 10 \text{ km} \quad (6.56)$$

*Problema.* Dedurre una formula per l'indice di rifrazione e la profondità di penetrazione per basse frequenze nel caso di conducibilità "intermedia".

### 6.3.2 Limite di alta frequenza

Nel limite in cui

$$\omega \gg \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_\sigma} \quad (6.57)$$

l'indice di rifrazione diventa

$$n^2 \approx 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2} \quad (6.58)$$

Vediamo dunque che, quando  $\omega \tau \gg 1$ ,  $\omega_{pl}$  funge da frequenza critica. Per  $\omega < \omega_{pl}$  l'indice ha una componente immaginaria e l'onda viene assorbita dal metallo. Mentre per  $\omega > \omega_{pl}$  l'indice è reale ed il metallo è “trasparente”. Le stesse equazioni si applicano nel caso della trasmissione di onde elettromagnetiche nella ionosfera. Spiegano perché le onde radio lunghe si trasmettono oltre l'orizzonte, in quanto riflesse dagli strati alti della ionosfera, mentre quelle corte non lo sono. Per comunicare con i satelliti bisogna quindi usare onde corte.

## 6.4 Energia ed impulso del campo elettromagnetico

Consideriamo un sistema di cariche  $\rho(\vec{x}, t)$  e correnti  $\vec{j}(\vec{x}, t)$ . Il lavoro per unità di tempo esercitato dal campo elettromagnetico sulle cariche è

$$W_{mat}(V) = \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} \quad (6.59)$$

dove  $V$  è il volume che racchiude il sistema di materia. Sostituendo in quest'espressione l'equazione di Maxwell per la corrente otteniamo

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{j} &= \epsilon_0 c^2 \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \\ &= \epsilon_0 c^2 \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) - \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t} = \\ &= \epsilon_0 c^2 \left[ \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B}) \right] - \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t} = \\ &= \epsilon_0 c^2 \left[ \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B}) \right] - \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t} = \\ &= -\vec{\nabla} \cdot \left( \epsilon_0 c^2 \vec{E} \wedge \vec{B} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \epsilon_0 \vec{E}^2 + c^2 \epsilon_0 \vec{B}^2 \right] = \end{aligned}$$

$$= -\vec{\nabla} \cdot \vec{S} - \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6.60)$$

dove

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \epsilon_0 c^2 \vec{E} \wedge \vec{B} \\ u &= \frac{\epsilon_0}{2} [\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2] \end{aligned} \quad (6.61)$$

Poniamo

$$\begin{aligned} U_{em}(V) &= \int_V u d^3V \\ \Phi_{em}(V) &= \int_{\partial V} \vec{S} \cdot \hat{n} d^2a \end{aligned} \quad (6.62)$$

La (6.60) si riscrive come

$$W_{mat}(V) + \frac{\partial U_{em}}{\partial t} + \Phi_{em}(V) = 0 \quad (6.63)$$

Le eqs. (6.60) ed (6.63) ammettono la seguente interpretazione:  $u$  è la *densità di energia* del campo elettromagnetico,  $U_{em}(V)$  è l'energia del campo elettromagnetico contenuta nel volume  $V$ ,  $\vec{S}$  il flusso di energia per unità di tempo e di superficie trasportato dal campo, e  $\Phi_{em}(V)$  l'energia che attraversa il bordo di  $V$  nell'unità di tempo. In questo modo (6.60) esprime una legge di conservazione *locale* dell'energia: cioè la somma del lavoro fatto sulle cariche nell'unità di tempo e nell'unità di volume, della velocità di variazione della densità di energia del campo elettromagnetico e del flusso di energia elettromagnetica è nulla. La (6.63) esprime la corrispondente legge di conservazione *integrata* dell'energia.

Al campo elettromagnetico possiamo associare, seguendo un ragionamento analogo, la densità di impulso:

$$\vec{\mathcal{P}}_{em} = \epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B} \quad (6.64)$$

Ricaviamo la legge di conservazione cui soddisfa l'impulso così definito:

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{P}}_{em}}{\partial t} = \epsilon_0 \left( c^2 \vec{\nabla} \wedge B - \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} \right) \wedge \vec{B} - \epsilon_0 \vec{E} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\vec{j} \wedge \vec{B} + \epsilon_0 \left( c^2 (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - c^2 B_i \vec{\nabla} B_i + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} - E_i \vec{\nabla} E_i \right) = \\
&= -\vec{j} \wedge \vec{B} - \rho \vec{E} + \\
&+ \epsilon_0 \left( c^2 \partial_j (B_j B_i) - \frac{c^2}{2} \vec{\nabla} \vec{B}^2 + \partial_j (E_j E_i) - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \vec{E}^2 \right) \quad (6.65)
\end{aligned}$$

Poiché la densità di forza esercitata dal campo elettromagnetico sulla materia è

$$\vec{\mathcal{F}} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} = \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}_{mat}}{\partial t} \quad (6.66)$$

otteniamo

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{P}}_{em}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}_{mat}}{\partial t} = \epsilon_0 \left( c^2 \partial_j (B_j \vec{B}) - \frac{c^2}{2} \vec{\nabla} \vec{B}^2 + \partial_j (E_j \vec{E}) - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \vec{E}^2 \right)$$

Riscriviamo quest'equazione come

$$\frac{\partial \mathcal{P}_i^{(tot)}}{\partial t} = -\partial_j T_{ij} \quad (6.67)$$

dove

$$\vec{\mathcal{P}}^{(tot)} = \vec{\mathcal{P}}_{em} + \vec{\mathcal{P}}_{mat} \quad (6.68)$$

è l'impulso totale del campo e della materia, mentre

$$T_{ij} = \delta_{ij} u - \epsilon_0 (E_i E_j + c^2 B_i B_j) \quad (6.69)$$

è un tensore simmetrico a due indici. Se interpretiamo  $T_{ij}$  come il flusso della componente  $i$ -esima dell'impulso nella direzione  $j$ -esima, l'equazione (6.67) esprime la conservazione *locale* dell'impulso totale.

Verifichiamo la correttezza dell'interpretazione di  $S_i$  e  $T_{ij}$  rispettivamente come il flusso dell'energia e della componente  $j$ -esima dell'impulso nella direzione  $i$ -esima della radiazione elettromagnetica. Per la radiazione elettromagnetica valgono le relazioni

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \quad |\vec{E}| = c |\vec{B}| \quad (6.70)$$

Notiamo innanzitutto che l'equazione

$$\vec{S} = c^2 \vec{\mathcal{P}}_{em} \quad (6.71)$$

indica che il flusso di energia si propaga nella direzione dell'impulso. Le (6.70) implicano inoltre che

$$|\vec{S}| = c^2 |\vec{\mathcal{P}}_{em}| = c u \quad (6.72)$$

Questa equazione dice che il flusso di energia si propaga con velocità  $c$ . Ci aspettiamo quindi che il flusso della componente  $i$ -esima del momento in direzione  $j$  sia

$$T^{ij} = \frac{\mathcal{P}_{em}^i \mathcal{P}_{em}^j}{|\vec{\mathcal{P}}_{em}|} c = \frac{\mathcal{P}_{em}^i \mathcal{P}_{em}^j}{u} c^2 \quad (6.73)$$

In effetti

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{em}^i \mathcal{P}_{em}^j &= \epsilon_0^2 (\vec{E} \wedge \vec{B})_i (\vec{E} \wedge \vec{B})_j = \\ &= \epsilon_0^2 \left[ \delta_{ij} (E^2 B^2 - (\vec{E} \cdot \vec{B})^2) - E_i E_j B^2 - B_i B_j E^2 + \right. \\ &\quad \left. + (E_i B_j + E_j B_i) \vec{E} \cdot \vec{B} \right] \end{aligned} \quad (6.74)$$

Quindi, in virtù delle (6.70),

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{em}^i \mathcal{P}_{em}^j &= \epsilon_0^2 \left[ \delta_{ij} \frac{E^4}{c^2} - (E_i E_j + c^2 B_i B_j) B^2 \right] = \\ &= \delta_{ij} \frac{u^2}{c^2} - (E_i E_j + c^2 B_i B_j) \frac{\epsilon_0 u}{c^2} \end{aligned} \quad (6.75)$$

Pertanto

$$\frac{\mathcal{P}_{em}^i \mathcal{P}_{em}^j}{|\vec{\mathcal{P}}_{em}|} c = \delta_{ij} u - \epsilon_0 (E_i E_j + c^2 B_i B_j) \quad (6.76)$$

in accordo con (6.69).

## 6.5 Riflessione e rifrazione

I campi elettrici e magnetici di un'onda elettromagnetica piana, di frequenza  $\omega$ , che si propaga in un mezzo con indice di rifrazione  $n$  si scrivono

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ \vec{B} &= \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \end{aligned} \quad (6.77)$$

con

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \quad (6.78)$$

Consideriamo due mezzi con indici di rifrazione  $n_1$  ed  $n_2$  a contatto tra loro lungo un piano ortogonale all'asse  $x$ . Consideriamo un'onda e.m. incidente  $\vec{E}_i$ , di frequenza  $\omega$  e vettore d'onda  $\vec{k}$  che possiamo scegliere nel piano  $(x, y)$ . Siano  $\omega'$  e  $\omega''$  le frequenze, rispettivamente, dell'onda riflessa  $\vec{E}_r$  e dell'onda trasmessa  $\vec{E}_t$ ,  $\vec{k}'$  e  $\vec{k}''$  i rispettivi vettori d'onda. Abbiamo

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n_1} \quad \frac{\omega'}{k'} = \frac{c}{n_1} \quad \frac{\omega''}{k''} = \frac{c}{n_2}$$

Consideriamo le condizioni al bordo, sul piano  $(y, z)$  che separa i due dielettrici<sup>9</sup>.

L'equazione di Gauss

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (6.79)$$

quando integrata nella direzione  $x$ , in un intervallo infinitesimo a cavallo della superficie tra i due mezzi, porta alla condizione

$$D_x^{(1)} = \epsilon_0 E_x^{(1)} + P_x^{(1)} = D_x^{(2)} = \epsilon_0 E_x^{(2)} + P_x^{(2)} \quad (6.80)$$

Cioè la componente di  $\vec{D}$  normale al bordo deve essere continua.

Un modo "fisico" di interpretare questa condizione, come pure le altre che seguono, è il seguente. Nella realtà fisica il bordo non è una superficie di discontinuità ma una regione dove i campi variano fortemente, benché con continuità. In questa regione di bordo le equazioni differenziali continuano a valere. Pertanto i termini nell'equazione differenziale che contengono derivate normali rispetto al bordo (rispetto ad  $x$  nel nostro caso) devono compensarsi tra loro.

Consideriamo ora l'equazione di Faraday

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.81)$$

Integriamo ancora nella direzione  $x$ , lungo un intervallo infinitesimo a cavallo della superficie  $(y, z)$  tra i due mezzi. Otteniamo

$$E_y^{(1)} = E_y^{(2)} \quad E_z^{(1)} = E_z^{(2)} \quad (6.82)$$

---

<sup>9</sup>Abbiamo già dedotto queste condizioni, separatamente per  $E, D$  e  $B, H$ , nel caso elettrostatico in Sezione 2.2 e nel caso magnetostatico nella Sezione 4.2.

cioè la componente del campo elettrico parallela al bordo è continua.

L'equazione per la divergenza di  $\vec{B}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.83)$$

quando integrata nella direzione  $x$  porta alla condizione

$$B_x^{(1)} = B_x^{(2)} \quad (6.84)$$

cioè alla continuità della componente di  $\vec{B}$  normale al bordo.

Infine l'equazione di Maxwell-Ampère, assumendo che  $\vec{H} = \vec{B}$ ,

$$\epsilon_0 c^2 \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6.85)$$

porta a

$$B_y^{(1)} = B_y^{(2)} \quad B_z^{(1)} = B_z^{(2)} \quad (6.86)$$

IL vettore  $\vec{E}_i$  è normale a  $\vec{k}$  che giace nel piano  $(x, y)$ . Trattiamo separatamente i casi delle due polarizzazioni indipendenti:

a) *Polarizzazione incidente perpendicolare al piano di incidenza  $(x, y)$*

Le condizioni al bordo per  $\vec{E}$  sono

$$\begin{aligned} E_i e^{i(\omega t - k_y y)} + (E_r)_z e^{i(\omega' t - k'_y y - k'_z z)} &= (E_t)_z e^{i(\omega'' t - k''_y y - k''_z z)} \\ (E_r)_y e^{i(\omega' t - k'_y y - k'_z z)} &= (E_t)_y e^{i(\omega'' t - k''_y y - k''_z z)} \\ n_1^2 (E_r)_x e^{i(\omega' t - k'_y y - k'_z z)} &= n_2^2 (E_t)_x e^{i(\omega'' t - k''_y y - k''_z z)} \end{aligned}$$

Se prendiamo  $t = y = 0$  otteniamo in particolare che

$$k'_z = k''_z = 0 \quad (6.87)$$

Questo significa che i vettori d'onde delle onda riflesse e trasmesse giacciono nel piano di incidenza,  $(x, y)$ . Prendendo  $y = 0$  otteniamo anche

$$\omega = \omega' = \omega'' \quad (6.88)$$

da cui

$$\frac{k}{n_1} = \frac{k'}{n_1} = \frac{k''}{n_2} \quad (6.89)$$

Prendendo  $t = 0$  otteniamo

$$k_y = k'_y = k''_y \quad (6.90)$$

Combinando (6.89) e (6.90), concludiamo

$$k_x^2 = (k'_x)^2 \quad (6.91)$$

Poiché l'onda riflessa è diversa da quella incidente, dobbiamo prendere la soluzione

$$k_x = -k'_x \quad (6.92)$$

che esprime il fatto che *l'angolo di incidenza è eguale all'angolo di riflessione*.

Per quanto riguarda il numero d'onda dell'onda rifratta, le eqs. (6.89) e (6.90) danno

$$\frac{k_x^2 + k_y^2}{n_1^2} = \frac{(k''_x)^2 + k_y^2}{n_2^2} \quad (6.93)$$

cioè

$$(k''_x)^2 = \frac{n_2^2}{n_1^2} k^2 - k_y^2 \quad (6.94)$$

Inoltre sempre dalla (6.89) abbiamo

$$\left(\frac{k''_y}{k''}\right)^2 n_2^2 = \frac{k_y^2}{k^2} n_1^2 \quad (6.95)$$

Notiamo che, quando  $n_1$  e  $n_2$  sono *reali*, allora  $k$  e  $k''$  sono anche reali e possiamo definire gli angoli di incidenza  $\theta_i$  e di rifrazione  $\theta_t$  come reali:

$$\frac{k_y}{k} = \sin \theta_i \quad \frac{k''_y}{k''} = \sin \theta_t \quad (6.96)$$

La (6.95) diventa allora la *legge di Snell* della rifrazione

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (6.97)$$

Le condizioni al bordo per il campo elettrico si riducono in definitiva alle relazioni

$$\begin{aligned} E_i + (E_r)_z &= (E_t)_z \\ (E_r)_y &= (E_t)_y \\ n_1^2 (E_r)_x &= n_2^2 (E_t)_x \end{aligned} \quad (6.98)$$

Consideriamo le equazioni al bordo per il campo magnetico.

$$\vec{k} \wedge \vec{E}_i + \vec{k}' \wedge \vec{E}_r = \vec{k}'' \wedge \vec{E}_t \quad (6.99)$$

In componenti

$$\begin{aligned}
k_y E_i + k_y (E_r)_z &= k_y (E_t)_z \\
-k_x E_i + k_x (E_r)_z &= -k_x'' (E_t)_z \\
-k_x (E_r)_y - k_y (E_r)_x &= k_x'' (E_t)_y - k_y (E_t)_x
\end{aligned} \tag{6.100}$$

La terza equazione in (6.100) diventa, tenuto conto delle (6.98)

$$(k_x'' + k_x) (E_r)_y + k_y \left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\right) (E_r)_x = 0 \tag{6.101}$$

L'ortogonalità del campo elettrico e del vettore d'onda impone che

$$k_y (E_r)_y - k_x (E_r)_x = 0 \tag{6.102}$$

Queste due equazioni sono inconsistenti, a meno che  $(E_r)_y = (E_r)_x = (E_t)_y = (E_t)_x = 0$ . In effetti una soluzione non nulla per i campi richiede

$$\frac{n_2^2}{n_1^2} k_x'' k_x + \frac{n_2^2}{n_1^2} k^2 - k_y^2 = 0 \tag{6.103}$$

Sostituendo (6.94) in questa equazione otteniamo

$$\frac{n_2^2}{n_1^2} k_x + k_x'' = 0 \tag{6.104}$$

incompatibile con la (6.94). Concludiamo che

$$(E_r)_y = (E_r)_x = (E_t)_x = (E_t)_y = 0 \tag{6.105}$$

Le equazioni che determinano  $E_r$  e  $E_t$  sono in definitiva

$$\begin{aligned}
k_x E_r + k_x'' E_t &= k_x E_i \\
E_r - E_t &= -E_i
\end{aligned} \tag{6.106}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
E_r &= E_i \frac{k_x - k_x''}{k_x + k_x''} \\
E_t &= 2 E_i \frac{k_x}{k_x + k_x''}
\end{aligned} \tag{6.107}$$

Il coefficiente di riflessione per polarizzazione del campo elettrico normale al piano di incidenza è dunque

$$R_{\perp} = \frac{|E_r|^2}{|E_i|^2} = \left| \frac{k_x - k''_x}{k_x + k''_x} \right|^2 \quad (6.108)$$

Per indici di rifrazione reali possiamo esprimere questo coefficiente in termini degli angoli di incidenza e di rifrazione

$$\begin{aligned} R_{\perp} &= \left| \frac{k \cos \theta_i - k'' \cos \theta_t}{k \cos \theta_i + k'' \cos \theta_t} \right|^2 = \left| \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right|^2 = \\ &= \left| \frac{\sin \theta_t \cos \theta_i - \sin \theta_i \cos \theta_t}{\sin \theta_t \cos \theta_i + \sin \theta_i \cos \theta_t} \right|^2 = \left| \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \right|^2 \end{aligned} \quad (6.109)$$

b) *Polarizzazione incidente parallela al piano di incidenza (x, y)*

Poichè in questo caso  $\vec{B}_i$  è diretto lungo  $z$  converrà considerare prima le condizioni al bordo per il campo magnetico. Anche in questo caso le condizioni al bordo implicano che  $B_r$  e  $B_t$  sono diretti lungo l'asse delle  $z$ . In modo analogo al caso precedente si ottengono anche le identità delle frequenze delle onde incidente, riflessa e trasmessa, e le relazioni (6.89,6.90,6.92, 6.94) per i vettori d'onda delle onde riflesse e trasmesse. Le condizioni al bordo per i campi magnetici danno pertanto

$$B_r - B_t = -B_i \quad (6.110)$$

Il campo elettrico è dato da

$$\vec{E} = \frac{c}{\omega n^2} \vec{B} \wedge \vec{k} \quad (6.111)$$

Dunque le condizioni di continuità per il campo elettrico danno

$$\begin{aligned} -B_i k_y - B_r k_y &= -B_t k_y \\ \frac{B_i k_x - B_r k_x}{n_1^2} &= \frac{B_t k_x}{n_2^2} \end{aligned}$$

In definitiva

$$\begin{aligned} B_r - B_t &= -B_i \\ B_r k_x n_2^2 + B_t k_x n_1^2 &= B_i k_x n_2^2 \end{aligned}$$

la cui soluzione è

$$\begin{aligned} B_r &= B_i \frac{k_x n_2^2 - k_x'' n_1^2}{k_x n_2^2 + k_x'' n_1^2} \\ B_t &= 2 B_i \frac{k_x n_2^2}{k_x n_2^2 + k_x'' n_1^2} \end{aligned} \quad (6.112)$$

Il coefficiente di riflessione per polarizzazione del campo elettrico parallelo al piano di incidenza è dunque

$$R_{\parallel} = \frac{|B_r|^2}{|B_i|^2} = \left| \frac{k_x n_2^2 - k_x'' n_1^2}{k_x n_2^2 + k_x'' n_1^2} \right|^2 \quad (6.113)$$

Per indici di rifrazione reali possiamo esprimere questo coefficiente in termini degli angoli di incidenza e di rifrazione

$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= \left| \frac{k \cos \theta_i n_2^2 - k'' \cos \theta_t n_1^2}{k \cos \theta_i n_2^2 + k'' \cos \theta_t n_1^2} \right|^2 = \left| \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \right|^2 = \\ &= \left| \frac{\sin \theta_i \cos \theta_i - \sin \theta_t \cos \theta_t}{\sin \theta_i \cos \theta_i + \sin \theta_t \cos \theta_t} \right|^2 = \left| \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \right|^2 \end{aligned} \quad (6.114)$$

### 6.5.1 Riflessione sui metalli

Per frequenze sufficientemente basse l'indice di rifrazione dei metalli è immaginario

$$n_{metalli} = -i \frac{\omega_{\sigma}}{\omega} \equiv -i n_I \quad (6.115)$$

Il coefficiente di riflessione di luce proveniente da un mezzo con  $n = 1$  sul metallo è

$$\begin{aligned} R_{\perp} &= \left| \frac{\cos \theta_i + i n_I \cos \theta_t}{\cos \theta_i - i n_I \cos \theta_t} \right|^2 = \frac{\cos^2 \theta_i + n_I^2 \cos^2 \theta_t}{\cos^2 \theta_i + n_I^2 \cos^2 \theta_t} = 1 \\ R_{\parallel} &= \left| \frac{i n_I \cos \theta_i + \cos \theta_t}{-i n_I \cos \theta_i + \cos \theta_t} \right|^2 = 1 \end{aligned} \quad (6.116)$$

Questo spiega perchè i metalli luccicano.

### 6.5.2 Riflessione totale interna

Consideriamo la propagazione di luce da un mezzo con  $n > 1$  in un mezzo con  $n = 1$ . La (6.94) diventa

$$(k_x'')^2 = \frac{k^2}{n^2} - k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 - n^2 \sin^2 \theta_i) \quad (6.117)$$

Se

$$\theta_i > \theta_c \quad (6.118)$$

dove

$$\sin \theta_c = \frac{1}{n} \quad (6.119)$$

$k_x'' = \pm i k_I$  è immaginario e l'onda trasmessa ha la forma

$$\vec{E}_t = \vec{E}_0 e^{-x k_I} e^{i \omega t - k_y y} \quad (6.120)$$

Il campo trasmesso si estende per una profondità dell'ordine di  $\frac{c}{\omega}$ , che è la lunghezza d'onda della luce nel vuoto per la frequenza  $\omega$ .

## 6.6 Diffrazione

Ricordiamo il teorema di Green. Siano  $\phi(\vec{x})$  e  $\psi(\vec{x})$  due funzioni scalari. Dall'identità

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi) = \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi + \phi \vec{\nabla}^2 \psi \quad (6.121)$$

deriviamo

$$\int_V d^3 \vec{x} (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi + \phi \vec{\nabla}^2 \psi) = \int_{\partial V} \phi \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \psi \quad (6.122)$$

Analogamente

$$\int_V d^3 \vec{x} (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi + \psi \vec{\nabla}^2 \phi) = \int_{\partial V} \psi \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \phi \quad (6.123)$$

Sottraendo le due equazioni appena derivate, otteniamo

$$\int_V d^3 \vec{x} (\phi \vec{\nabla}^2 \psi - \psi \vec{\nabla}^2 \phi) = \int_{\partial V} (\phi \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \psi - \psi \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \phi) \quad (6.124)$$

L'onda monocromatica

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{-i \omega t} \psi(\vec{x}) \quad (6.125)$$

soddisfa l'equazione di Helmholtz

$$(\vec{\nabla}^2 + k^2) \psi(\vec{x}) = 0 \quad (6.126)$$

con  $k^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2}$ . L'equazione (6.126) ammette anche una soluzione a simmetria sferica

$$\phi_s(\vec{x}) = \frac{e^{ik|\vec{x}|}}{4\pi|\vec{x}|} \quad (6.127)$$

che soddisfa l'equazione d'onda in tutti i punti dello spazio *eccetto* che nel punto  $\vec{x} = 0$ , dove diverge. Più in generale, la soluzione

$$\phi_s(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (6.128)$$

è un'onda sferica che diverge nel punto  $\vec{x} = \vec{x}'$ .

Applichiamo il teorema di Green (6.124) a  $\psi(\vec{x})$  e  $\phi_s(\vec{x} - \vec{x}')$ . Come  $V$  dobbiamo prendere un volume spaziale che esclude il punto  $\vec{x} = \vec{x}'$ , in quanto in questo punto  $\phi_s(\vec{x} - \vec{x}')$  non è una soluzione dell'equazione. Introduciamo pertanto una palla sferica  $B(\vec{x}', \epsilon)$  di centro in  $\vec{x}'$  e raggio  $\epsilon > 0$ . Consideriamo il teorema di Green nel volume  $V/B(\vec{x}', \epsilon)$ , con  $V$  che include il punto  $\vec{x}'$ :

$$0 = \int_{\partial V} d^2a [\psi(\vec{x}) \hat{n} \cdot \vec{\nabla}_x \phi_s(\vec{x} - \vec{x}') - \phi_s(\vec{x} - \vec{x}') \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{x})] + \\ - \int_{\partial B(\vec{x}', \epsilon)} d^2a [\psi(\vec{x}) \hat{n} \cdot \vec{\nabla}_x \phi_s(\vec{x} - \vec{x}') - \phi_s(\vec{x} - \vec{x}') \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{x})]$$

Consideriamo il limite di quest'equazione per  $\epsilon \rightarrow 0$ . Nell'integrale sulla superficie della palla sferica il termine proporzionale a  $\phi_s(\vec{x} - \vec{x}')$  si annulla, in quanto  $\phi_s(\vec{x} - \vec{x}')$  diverge come  $\frac{1}{\epsilon}$  per  $\epsilon \rightarrow 0$ . Per la stessa ragione nel termine proporzionale a  $\vec{\nabla}_x \phi_s(\vec{x} - \vec{x}')$  possiamo limitarci ad includere il solo termine che diverge come  $\frac{1}{\epsilon^2}$ :

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla}_x \phi_s(\vec{x} - \vec{x}') = -\frac{e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|^2} + \dots \quad (6.129)$$

In definitiva, il limite  $\epsilon \rightarrow 0$  della (6.129) dà

$$\psi(\vec{x}') = \int_{\partial V} d^2a [\psi(\vec{x}) \hat{n} \cdot \vec{\nabla}_x \phi_s(\vec{x} - \vec{x}') + \\ - \phi_s(\vec{x} - \vec{x}') \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{x})] \quad (6.130)$$

Il contesto al quale vogliamo applicare (6.130) è il seguente. Supponiamo di avere un'onda monocromatica incidente su uno schermo opaco con un'apertura  $S$ . Siamo interessati a calcolare il campo diffratto attraverso  $S$  al di là dello schermo. Come volume  $V$  prendiamo allora la regione spazio dove si propaga la radiazione diffratta. Il bordo di  $V$  è rappresentato dallo schermo e la sua apertura  $S$  da una parte, e da una superficie all'infinito dall'altra. Se i campi in  $V$  decadono come  $1/r$  il contributo della superficie all'infinito nell'identità di Green è nullo.

L'approssimazione essenziale sarà quella di supporre che  $\psi(\vec{x})$  si annulli sullo schermo opaco, e sia non nulla, ma nota, in  $S$ . Dalla (6.130) deriva però che affinché questa approssimazione sia consistente è necessario che l'onda sferica  $\phi_s(\vec{x} - \vec{x}')$  si annulli per  $\vec{x}$  sullo schermo e sull'apertura  $S$ . Benché questo non sia vero in generale, l'argomento che ha portato all'equazione (6.130) rimane valido se sostituiamo  $\phi_s(\vec{x} - \vec{x}')$  con  $\tilde{\phi}_s(\vec{x}; \vec{x}')$ , tale che

$$\phi_s(\vec{x} - \vec{x}') \rightarrow \tilde{\phi}_s(\vec{x}; \vec{x}') = \phi_s(\vec{x} - \vec{x}') + \phi_0(\vec{x}; \vec{x}') \quad (6.131)$$

con  $\phi_0(\vec{x}; \vec{x}')$  soluzione di (6.126) regolare in  $\vec{x}'$ . Useremo pertanto la (6.130) con una  $\tilde{\phi}_s(\vec{x}; \vec{x}')$  che soddisfa le condizioni di Dirichlet

$$\tilde{\phi}_s(\vec{x}; \vec{x}') = 0 \quad (6.132)$$

per  $\vec{x}$  sullo schermo e su  $S$ . Il campo diffratto si scrive allora

$$\psi(\vec{x}') = \int_S d^2 a \psi(\vec{x}) \hat{n} \cdot \vec{\nabla}_x \tilde{\phi}_s(\vec{x}; \vec{x}') \quad (6.133)$$

Per il caso in cui lo schermo opaco coincida col piano  $z = 0$ , l'onda sferica che soddisfa la condizione di Dirichlet (6.132) è

$$\tilde{\phi}_s(\vec{x}; \vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}''|}}{|\vec{x}-\vec{x}''|} \right] \quad (6.134)$$

dove  $\vec{x}''$  è l'immagine di  $\vec{x}'$  rispetto al piano  $z = 0$ . Il campo diffratto (6.133) diventa (dopo aver scambiato  $\vec{x}$  con  $\vec{x}'$ )

$$\psi(\vec{x}) = \frac{k}{2\pi i} \int_S d^2 a' \frac{\hat{n} \cdot \vec{R}}{R} \left( 1 + \frac{i}{kR} \right) \frac{e^{ikR}}{R} \psi(\vec{x}') \quad (6.135)$$

dove

$$\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}' \quad R = |\vec{R}| \quad (6.136)$$

Se la distanza  $R$  è grande rispetto alla lunghezza d'onda della radiazione

$$k R \gg 1 \quad (6.137)$$

(6.135) diventa

$$\psi(\vec{x}) = \frac{k}{2\pi i} \int_S d^2 a' \frac{\hat{n} \cdot \vec{R}}{R} \frac{e^{ikR}}{R} \psi(\vec{x}') \quad (6.138)$$

Nel seguito ci limiteremo a questa approssimazione.

## 6.7 Diffrazione di Fraunhofer

Consideriamo il caso di radiazione incidente su uno schermo piano, ortogonale alla direzione del fascio incidente. Vogliamo determinare l'intensità della luce diffratta attraverso un'apertura nello schermo, a distanze grandi confrontate sia con la lunghezza d'onda della radiazione, sia con le dimensioni dell'apertura. Supponiamo inoltre che la radiazione incidente sia un'onda piana, cioè che la sorgente sia anch'essa distanze grandi dallo schermo.

Per  $|\vec{x}'|$  piccoli rispetto a  $|\vec{x}|$  abbiamo

$$R = |\vec{x} - \vec{x}'| = |\vec{x}| - \vec{x}' \cdot \hat{x} + \dots \quad (6.139)$$

Le condizioni di Fraunhofer sono quelle per cui è lecito trascurare i termini di ordine superiore nella (6.139) nel calcolo dell'integrale in (6.138). Sostituendo l'approssimazione (6.139) nella (6.138) deduciamo

$$\psi(\vec{x}) = \frac{k e^{ik|\vec{x}|}}{2\pi i |\vec{x}|} \int_S d^2 a' \hat{n} \cdot \hat{x} e^{-ik\vec{x}' \cdot \hat{x}} \psi(\vec{x}') \quad (6.140)$$

Supponiamo l'onda incidente sia piana

$$\psi(\vec{x}') = \psi_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}'} \quad (6.141)$$

L'onda diffratta diventa

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}) &= \frac{k e^{ik|\vec{x}|}}{2\pi i |\vec{x}|} \hat{n} \cdot \hat{x} \int_S d^2 a' e^{-i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{x}'} \psi_0 = \\ &= \frac{k e^{ik|\vec{x}|}}{2\pi i |\vec{x}|} \hat{n} \cdot \hat{x} \int_S d^2 a' e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}'} \psi_0 \end{aligned} \quad (6.142)$$

dove

$$\vec{k}' = k \hat{x} \quad (6.143)$$

è il vettore d'onda dell'onda diffratta e

$$\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k} \quad q = |\vec{q}| = 2k \sin \frac{\theta}{2} \quad (6.144)$$

la variazione del vettore d'onda,  $\theta$  l'angolo di diffrazione. Se prendiamo  $\vec{k} = k \hat{z}$  lungo l'asse delle  $z$  e lo schermo opaco nel piano  $(x, y)$ , l'elemento di angolo solido si scrive

$$d\Omega = \sin \theta d\phi d\theta = \frac{d\phi q dq}{k^2} \quad (6.145)$$

e l'onda diffratta

$$\psi(\vec{x}) = \frac{k}{2\pi i} \frac{e^{ik|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \cos \theta f_{\vec{q}} \quad (6.146)$$

dove

$$f_{\vec{q}} \equiv \int_S d^2a' e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}'} \psi_0 = \int_S dx dy e^{-i(q_x x + q_y y)} \psi_0 \quad (6.147)$$

Notiamo che

$$q_x = k \sin \theta \cos \phi \quad q_y = k \sin \theta \sin \phi \quad (6.148)$$

Pertanto

$$\frac{dq_x dq_y}{k^2} = \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = \cos \theta d\Omega \quad (6.149)$$

L'intensità della radiazione diffratta nella direzione definita da  $\vec{q}$  è pertanto

$$dI_{\vec{q}} = C |\psi(\vec{x})|^2 d\Omega |\vec{x}|^2 = C \cos^2 \theta |f_{\vec{q}}|^2 \frac{dq_x dq_y}{(2\pi)^2} \quad (6.150)$$

dove  $C$  è una costante di proporzionalità. Se  $\Phi_0$  è il flusso della radiazione incidente, l'intensità totale della luce incidente sull'apertura  $S$  di area  $A_S$  è

$$\Phi_0 A_S = C \int_S dx dy |\psi_0|^2 = C A_S |\psi_0|^2 \quad (6.151)$$

Dunque

$$\frac{dI_{\vec{q}}}{d\Omega} = \Phi_0 \frac{k^2}{(2\pi)^2} \cos^2 \theta \left| \frac{f_{\vec{q}}}{\psi_0} \right|^2 \quad (6.152)$$

oppure

$$\frac{d I_{\vec{q}}}{dq_x dq_y} = \frac{\Phi_0}{(2\pi)^2} \cos \theta \left| \frac{f_{\vec{q}}}{\psi_0} \right|^2 \quad (6.153)$$

Per angoli di diffrazione piccoli possiamo sostituire in queste equazioni

$$\hat{n} \cdot \hat{x} = \cos \theta \approx 1 \quad (6.154)$$

ottenendo

$$\begin{aligned} \frac{d I_{\vec{q}}}{d\Omega} &= \Phi_0 \frac{k^2}{(2\pi)^2} \left| \frac{f_{\vec{q}}}{\psi_0} \right|^2 \\ \frac{d I_{\vec{q}}}{dq_x dq_y} &= \frac{\Phi_0}{(2\pi)^2} \left| \frac{f_{\vec{q}}}{\psi_0} \right|^2 \end{aligned} \quad (6.155)$$

Discutiamo la validità dell'approssimazione di Fraunhofer. Sia  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  la lunghezza d'onda della radiazione incidente. Sia  $a$  la lunghezza caratteristica dell'apertura nello schermo,  $L$  la distanza dall'apertura alla quale si misura la radiazione diffratta.

Il primo termine trascurato nella espansione (6.139) per  $\vec{R} = |\vec{x} - \vec{x}'|$  è

$$\frac{\vec{x}'^2}{2\vec{x}} \quad (6.156)$$

Pertanto nella fase dell'esponenziale  $e^{ik|\vec{R}|}$  stiamo trascurando un termine dell'ordine di

$$\frac{k \vec{x}'^2}{2\vec{x}} \sim \frac{a^2}{\lambda L} \quad (6.157)$$

L'approssimazione di Fraunhofer richiede pertanto che

$$f \equiv \frac{a^2}{\lambda L} \ll 1 \quad (6.158)$$

$f$  è noto come numero di Fresnel. Ricordiamo che l'approssimazione (6.138) (di Huygens) richiede in ogni caso che

$$\lambda \ll L \quad (6.159)$$

### 6.7.1 Fenditura verticale

Sia  $2a$  la larghezza della fenditura nella direzione  $x$  e  $2b$  quella nella direzione  $y$ :

$$\frac{f_{\vec{q}}}{\psi_0} = \frac{2 \sin q_x a}{q_x} \frac{2 \sin q_y b}{q_y} \quad (6.160)$$

L'intensità della radiazione diffratta nella direzione definita da  $q_x$  e  $q_y$  è pertanto, per piccoli  $\theta$ :

$$\frac{d I_{\vec{q}}}{dq_x dq_y} = 4 \Phi_0 a b \frac{\sin^2 q_x a}{\pi a q_x^2} \frac{\sin^2 q_y b}{\pi b q_y^2} = I_0 \frac{\sin^2 q_x a}{\pi a q_x^2} \frac{\sin^2 q_y b}{\pi b q_y^2} \quad (6.161)$$

dove

$$I_0 = 4 \Phi_0 a b \quad (6.162)$$

è l'intensità totale della radiazione incidente sulla fenditura. Supponiamo in particolare che la fenditura sia infinitamente lunga nella direzione  $y$ , cioè  $b \gg a$ : in queste condizione non c'è praticamente diffrazione nella direzione  $y$ . Integrando su  $q_y$  e tenendo conto che

$$\int dq_y \frac{\sin^2 q_y b}{\pi q_y^2} = \frac{b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} = b \quad (6.163)$$

otteniamo

$$\frac{d I_{\vec{q}}}{dq_x} = I_0 \frac{\sin^2 q_x a}{a \pi q_x^2} \quad (6.164)$$

Per piccoli angoli  $\theta$  di diffrazione

$$q_x \approx k \theta \quad (6.165)$$

e quindi

$$\frac{d I(\theta)}{d\theta} = I_0 \frac{\sin^2 k a \theta}{\pi k a \theta^2} \quad (6.166)$$

Notiamo che il massimo della intensità diffratta è per  $\theta = 0$

$$\frac{d I(0)}{d\theta} = I_0 \frac{k a}{\pi} \equiv I_{max} \quad (6.167)$$

In termini di  $I_{max}$

$$\frac{d I(\theta)}{d\theta} = I_{max} \frac{\sin^2 k a \theta}{k^2 a^2 \theta^2} \quad (6.168)$$

La radiazione diffratta si annulla pertanto in corrispondenza degli angoli

$$k a \sin \theta_{min} = m \pi \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \quad (6.169)$$

Il fascio di radiazione diffratta forma un angolo che è dell'ordine di

$$\theta_{onda} \sim \frac{\lambda}{a} \quad (6.170)$$

Notiamo che l'angolo di diffrazione "geometrico", cioè predetto da una teoria corpuscolare della radiazione sarebbe piuttosto dell'ordine di

$$\theta_{corpuscolo} \sim \frac{a}{L} \quad (6.171)$$

Nelle condizioni di Fraunhofer (6.158) abbiamo dunque

$$\theta_{corpuscolo} \ll \theta_{onda} \quad (6.172)$$

Siamo pertanto in un regime nel quale gli effetti ondulatori della radiazione elettromagnetica sono dominanti.

### 6.7.2 Diffrazione da una grata

Consideriamo uno schermo attraversato da  $N$  fenditure verticali di lunghezza  $2a$  nella direzione  $x$  e  $b \gg a$  nella direzione  $y$ , poste a distanza  $d$  una dall'altra. Abbiamo

$$\begin{aligned} f_{\vec{q}} &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-a+nd}^{a+nd} dx e^{-i q_x x} \psi_0 = \\ &= \psi_0 \frac{2 \sin q_x a}{q_x} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i q_x d n} = \psi_0 \frac{2 \sin q_x a}{q_x} \frac{1 - e^{-i q_x d N}}{1 - e^{-i q_x d}} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{d I_{\vec{q}}}{d q_x} &= \frac{I_0}{N} \frac{\sin^2 q_x a}{a \pi q_x^2} \left| \frac{1 - e^{-i q_x d N}}{1 - e^{-i q_x d}} \right|^2 = \\ &= \frac{I_0 a}{N \pi} \frac{\sin^2 q_x a}{q_x^2 a^2} \frac{\sin^2 \frac{q_x d N}{2}}{\sin^2 \frac{q_x d}{2}} \end{aligned} \quad (6.173)$$

## 6.8 Diffrazione di Fresnel

Consideriamo uno schermo opaco che occupa il semi-piano  $(x, y)$  con  $x < 0$ , della radiazione incidente nella direzione  $z$ , da  $z < 0$ . Siamo interessati a calcolare l'intensità della luce diffusa, per  $z > 0$ . Nell'integrale

$$\psi(\vec{x}) = \frac{k}{2\pi i} \int_S d^2 a' \frac{\hat{n} \cdot \vec{R}}{R} \frac{e^{ikR}}{R} \psi(\vec{x}') \quad (6.174)$$

l'integrazione è sui punti  $\vec{x}'$  con

$$\vec{x}' = (x', y', 0) \quad x' > 0 \quad (6.175)$$

Sia

$$\vec{x} = (x, y, z) \quad \vec{R} = (x - x', y - y', z) \quad \hat{n} = \hat{z} \quad (6.176)$$

L'approssimazione di Fresnel consiste nel sostituire  $|\vec{R}|$  nell'integrale (6.174) con l'espressione approssimata:

$$|\vec{R}| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2} \approx z + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z}$$

Nelle condizioni di Fresnel l'onda diffratta si scrive

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}) &= \frac{k e^{ikz}}{2\pi i z} \int_0^\infty dx' \int_{-\infty}^\infty dy' e^{ik \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z}} \psi(x', y', 0) = \\ &= \frac{k e^{ikz}}{2\pi i z} \int_{-x}^\infty d\eta \int_{-\infty}^\infty d\xi e^{ik \frac{\eta^2 + \xi^2}{2z}} \psi(\eta + x, \xi + y, 0) \end{aligned} \quad (6.177)$$

Se la radiazione incidente fosse un'onda piana, dovremmo porre nella (6.177)

$$\psi(\eta + x, \xi + y, 0) = \psi_0 \quad (6.178)$$

con  $\psi_0$  costante. In realtà, in una situazione fisica reale, l'onda incidente sarà approssimativamente piana in una regione grande ma finita di spazio. Prendiamo pertanto

$$\psi(\eta + x, \xi + y, 0) = \psi_0 e^{-\alpha(\eta^2 + \xi^2)} \quad (6.179)$$

con  $\alpha > 0$ , reale, positivo, piccolo ma non nullo. Questo renderà gli integrali convergenti: alla fine del calcolo prenderemo il limite  $\alpha \rightarrow 0$ . Pertanto

$$\psi(\vec{x}) = \frac{k e^{ikz} \psi_0}{2\pi i z} \int_{-x}^\infty d\eta e^{-(\alpha - \frac{ik}{2z})\eta^2} \int_{-\infty}^\infty d\xi e^{-(\alpha - \frac{ik}{2z})\xi^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k e^{ikz} \psi_0}{2\pi i z} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha - \frac{ik}{2z}}} \int_{-x}^{\infty} d\eta e^{-(\alpha - \frac{ik}{2z})\eta^2} = \\
&= \frac{k e^{ikz} \psi_0}{2\pi i z} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha - \frac{ik}{2z}}} \sqrt{\frac{2z}{k}} \int_{-x\sqrt{\frac{k}{2z}}}^{\infty} ds e^{-\frac{2z\alpha}{k}s^2} e^{is^2} = \\
&= \frac{e^{ikz} \psi_0}{\sqrt{2}i} \frac{1}{\sqrt{\frac{2z\alpha}{k} - i}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-x\sqrt{\frac{k}{2z}}}^{\infty} ds e^{-\frac{2z\alpha}{k}s^2} e^{is^2} =
\end{aligned} \tag{6.180}$$

dove abbiamo usato il risultato

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\beta t^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \tag{6.181}$$

valido per  $\beta = a + ib$  complesso, con parte reale  $a > 0$ .

Riscriviamo l'integrale che appare nella (6.180) nel modo seguente

$$\begin{aligned}
\int_{-x\sqrt{\frac{k}{2z}}}^{\infty} ds e^{-\frac{2z\alpha}{k}s^2} e^{is^2} &= \int_0^{\infty} ds e^{-\frac{2z\alpha}{k}s^2} e^{is^2} + \int_{-x\sqrt{\frac{k}{2z}}}^0 ds e^{-\frac{2z\alpha}{k}s^2} e^{is^2} = \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2z\alpha}{k} - i}} - \int_0^{-x\sqrt{\frac{k}{2z}}} ds e^{-\frac{2z\alpha}{k}s^2} e^{is^2}
\end{aligned} \tag{6.182}$$

Sostituendo nella (6.180)

$$\begin{aligned}
\psi(\vec{x}) &= \frac{e^{ikz} \psi_0}{\sqrt{\pi} i} \frac{1}{\sqrt{\frac{2z\alpha}{k} - i}} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2z\alpha}{k} - i}} - \int_0^{-x\sqrt{\frac{k}{2z}}} ds e^{-\frac{2z\alpha}{k}s^2} e^{is^2} \right] = \\
&= \frac{e^{ikz} \psi_0}{2i} \frac{1}{\frac{2z\alpha}{k} - i} \left[ 1 - \frac{2\sqrt{\frac{2z\alpha}{k} - i}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-x\sqrt{\frac{k}{2z}}} ds e^{-\frac{2z\alpha}{k}s^2} e^{is^2} \right]
\end{aligned}$$

In quest'espressione possiamo finalmente prendere il limite  $\alpha \rightarrow 0$  ed ottenere

$$\psi(\vec{x}) = \frac{e^{ikz} \psi_0}{2} \left[ 1 - \frac{2\sqrt{-i}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-x\sqrt{\frac{k}{2z}}} ds e^{is^2} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{ikz} \psi_0 \sqrt{-i}}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1+i}{2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{-x\sqrt{\frac{k}{2z}}} ds e^{is^2} \right] = \\
&= \frac{e^{ikz} \psi_0 \sqrt{-i}}{\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{1}{2} - C\left(-x\sqrt{\frac{k}{2z}}\right) \right) + i \left( \frac{1}{2} - S\left(-x\sqrt{\frac{k}{2z}}\right) \right) \right]
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
C(w) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^w \cos s^2 ds = -C(-w) \\
S(w) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^w \sin s^2 ds = -S(-w)
\end{aligned} \tag{6.183}$$

sono noti come gli *integrali di Fresnel*. L'intensità della radiazione diffratta è pertanto

$$I(\vec{x}) = \frac{I_0}{2} \left[ \left( \frac{1}{2} + C\left(x\sqrt{\frac{k}{2z}}\right) \right)^2 + \left( \frac{1}{2} + S\left(x\sqrt{\frac{k}{2z}}\right) \right)^2 \right]$$

dove  $I_0 = |\psi_0|^2$  è l'intensità della radiazione incidente.

Per discutere il comportamento qualitativo di  $I(x)$ , studiamo la funzione

$$F(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^w e^{is^2} ds = C(w) + iS(w) \tag{6.184}$$

Abbiamo già visto che

$$F(w) \rightarrow \frac{1+i}{2} \quad \text{per } w \rightarrow +\infty \tag{6.185}$$

Questo risultato si può ottenere attraverso la stessa procedura che abbiamo seguito nella derivazione di (6.183): si introduce un fattore esponenziale  $e^{-\alpha s^2}$  con  $\alpha > 0$  nell'integrale per renderlo assolutamente convergente, si prende prima il limite  $w \rightarrow \infty$ , e, successivamente, si passa al limite  $\alpha \rightarrow 0$ . Dunque

$$\lim_{w \rightarrow \pm\infty} C(w) = \lim_{w \rightarrow \pm\infty} S(w) = \pm \frac{1}{2} \tag{6.186}$$

Pertanto, come ci si aspetta,

$$\begin{aligned}
I(x) &\rightarrow I_0 & \text{per } x &\rightarrow +\infty \\
I(x) &\rightarrow 0 & \text{per } x &\rightarrow -\infty
\end{aligned}$$

Inoltre

$$I(0) = \frac{I_0}{4} \quad (6.187)$$

Deriviamo un'espressione asintotica per  $F(w)$ :

$$\begin{aligned} F(w) &= \frac{1+i}{2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_w^\infty \frac{d e^{i s^2}}{d s} \frac{d s}{2 i s} = \\ &= \frac{1+i}{2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ -\frac{e^{i w^2}}{2 i w} + \int_w^\infty \frac{d s}{2 i s^2} e^{i s^2} \right] = \\ &= \frac{1+i}{2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ -\frac{e^{i w^2}}{2 i w} - \frac{e^{i w^2}}{(2 i)^2 w^3} + \int_w^\infty \frac{3 d s}{(2 i)^2 s^4} e^{i s^2} \right] \end{aligned} \quad (6.188)$$

Iterando questa procedura arriviamo all'*espansione asintotica* per  $F(w)$  valida per  $w \rightarrow +\infty$

$$F(w) = \frac{1+i}{2} + \frac{e^{i w^2}}{\sqrt{2 \pi} i w} \left[ 1 + \frac{1}{2 i w^2} + O\left(\frac{1}{w^3}\right) \right] \quad w > 0 \quad (6.189)$$

e quindi

$$\begin{aligned} C(w) &= \frac{1}{2} + \frac{\sin w^2}{\sqrt{2 \pi} w} + O\left(\frac{1}{w^2}\right) \\ S(w) &= \frac{1}{2} - \frac{\cos w^2}{\sqrt{2 \pi} w} + O\left(\frac{1}{w^2}\right) \quad w > 0 \end{aligned} \quad (6.190)$$

Otteniamo in definitiva i seguenti comportamenti asintotici per l'intensità diffratta

$$\begin{aligned} I(\vec{x}) &= I_0 \left[ 1 + \frac{\sin \frac{x^2 k}{2 z} - \cos \frac{x^2 k}{2 z}}{\sqrt{2 \pi} x} + O\left(\frac{z}{k x^2}\right) \right] \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \\ I(\vec{x}) &= \frac{I_0 z}{2 \pi k x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \text{per } x \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (6.191)$$

## 6.9 Apertura circolare: confronto tra approssimazioni di Fraunhofer e Fresnel

Consideriamo la diffrazione di un'onda piana

$$\psi(\vec{x}) = \psi_0 e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (6.192)$$

di vettore d'onda

$$\vec{k} = k \hat{z} \quad (6.193)$$

incidente su un'apertura circolare di raggio  $a$  in uno schermo opaco posto nel piano  $z = 0$ . Sia  $O = (0, 0, 0)$  il centro dell'apertura circolare. Supponiamo che l'onda provenga dalla regione  $z < 0$  e calcoliamo l'onda diffratta in un punto  $P = (0, 0, z)$  con  $z > 0$  posto sull'asse ortogonale allo schermo passante per il centro dell'apertura circolare. La formula di Kirkhoff-Huygens (6.138) dà:

$$\begin{aligned} \frac{\psi(P)}{\psi_0} &= \frac{k}{2\pi i} \int_0^a 2\pi \rho d\rho \frac{e^{ik\sqrt{z^2+\rho^2}}}{\sqrt{z^2+\rho^2}} = \\ &= \frac{k}{i} \int_0^{\sqrt{a^2+z^2}} dt e^{ikt} = \\ &= e^{ikz} [1 - e^{ik(\sqrt{z^2+a^2}-z)}] \end{aligned} \quad (6.194)$$

dove nell'integrale abbiamo effettuato il cambio di variabili

$$t = \sqrt{z^2 + \rho^2} \quad (6.195)$$

L'intensità della radiazione nel punto  $P$  è pertanto

$$\Phi(P) = 4\Phi_0 \sin^2 \frac{k(\sqrt{z^2+a^2}-z)}{2} \quad (6.196)$$

dove  $\Phi_0$  è l'intensità della radiazione incidente.

L'approssimazione di Fraunhofer per lo stesso problema dà

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{Frau}(P)}{\psi_0} &= \frac{k}{2\pi i} \frac{e^{ikz}}{z} \int_0^a 2\pi \rho d\rho = \\ &= e^{ikz} \frac{k a^2}{2iz} \end{aligned} \quad (6.197)$$

L'intensità corrispondente è

$$\Phi_{Frau}(P) = \Phi_0 \frac{k^2 a^4}{4z^2} \quad (6.198)$$

L'approssimazione di Fresnel dà invece

$$\begin{aligned}\frac{\psi_{Fresnel}(P)}{\psi_0} &= \frac{k}{2\pi i} \frac{e^{ikz}}{z} \int_0^a 2\pi \rho d\rho e^{i\frac{k\rho^2}{2z}} = \\ &= \frac{k}{2i} \frac{e^{ikz}}{z} \int_0^{a^2} d\eta e^{i\frac{k\eta}{2z}} = e^{ikz} (1 - e^{i\frac{ka^2}{2z}})\end{aligned}\quad (6.199)$$

Pertanto l'intensità della radiazione nel punto  $P$  nell'approssimazione di Fresnel è

$$\Phi_{Fresnel}(P) = 4\Phi_0 \sin^2 \frac{ka^2}{4z} \quad (6.200)$$

Per facilitare il confronto tra le approssimazioni di Fraunhofer e Fresnel ed il risultato "esatto" (6.196) introduciamo il numero di Fresnel  $f$  associato al problema in questione

$$f \equiv \frac{a^2}{\lambda z} = \frac{ka^2}{2\pi z} \quad (6.201)$$

e la distanza del punto  $P$  dallo schermo misurata in termini di lunghezze d'onda:

$$l \equiv \frac{z}{\lambda} = \frac{kz}{2\pi} \quad (6.202)$$

Le intensità nel punto  $P$  si riscrivono in termini di  $l$  e  $f$  come segue

$$\begin{aligned}\Phi(P) &= 4\Phi_0 \sin^2[\pi l (\sqrt{1 + \frac{f}{l}} - 1)] \\ \Phi_{Fresnel}(P) &= 4\Phi_0 \sin^2 \frac{\pi f}{2} \\ \Phi_{Frau}(P) &= \Phi_0 \pi^2 f^2\end{aligned}\quad (6.203)$$

Ricordiamo che in realtà anche la formula "esatta" (6.196) è valida nell'ipotesi sottostante l'ottica geometrica, ovvero di piccole lunghezze d'onda

$$l \gg 1 \quad (6.204)$$

Dalle (6.203) vediamo che l'approssimazione di Fraunhofer richiede, oltre a questa ipotesi, anche che il numero di Fresnel sia molto minore di 1

$$f \ll 1 \ll l \quad (6.205)$$

come avevamo già dedotto in una sotto sezione precedente. Invece l'approssimazione di Fresnel vale per

$$f \ll l \quad (6.206)$$

anche se  $f$  non è piccolo rispetto all'unità. In altre parole nella situazione

$$1 < f \ll l \quad (6.207)$$

l'approssimazione di Fresnel è accurata mentre quella di Fraunhofer non lo è.

## 7 Cavità e guide d'onda

### 7.1 Condizioni al contorno in presenza di conduttori

Consideriamo la superficie  $S$  tra il vuoto ed il conduttore. La richiesta fisica è che i campi rimangono finiti sulla superficie anche se le derivate in direzione normale alla superficie possono divergere. Le equazioni

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

sono indipendenti dal mezzo e valgono in ambedue i lati di  $S$ . Introduciamo le componenti dei campi normali e parallele a  $S$ :

$$\vec{E} = \vec{E}_{||} + \vec{E}_n \quad \vec{B} = \vec{B}_{||} + \vec{B}_n \quad (7.1)$$

Considerando una regione infinitesima a cavallo di  $S$  (ed usando o un loop stretto con i lati lunghi paralleli a  $S$  o un corto cilindro gaussiano con le facce parallele a  $S$ ) deduciamo che

$$\vec{E}_{||}^{(c)} = \vec{E}_{||} \quad \vec{B}_n^{(c)} = \vec{B}_n \quad (7.2)$$

dove  $\vec{E}^{(c)}, \vec{B}^{(c)}$  e sono i campi nel conduttore;  $\vec{E}, \vec{B}$  sono quelli nelle cavità; In un conduttore perfetto

$$\vec{E}_{||}^{(c)} = 0 \quad \vec{B}_n^{(c)} = 0 \quad (7.3)$$

Pertanto le condizioni al contorno dei campi alla superficie del conduttore (perfetto) sono

$$\vec{E}_{||} = 0 \quad \vec{B}_n = 0 \quad \text{su } S \quad (7.4)$$

All'interno della cavità valgono anche le altre due equazioni

$$\begin{aligned} c^2 \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

Prendiamo, per fissare le idee, la normale alla superficie come asse delle  $x$ . Allora le (7.4) e (7.5) danno per i campi al bordo

$$\begin{aligned} \partial_z B_x - \partial_x B_z &= -\partial_x B_z = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} = 0 \\ \partial_x B_y - \partial_y B_x &= \partial_x B_y = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \\ \partial_x E_x &= 0 \end{aligned}$$

cioè

$$\partial_n B_{||} = 0 \quad \partial_n E_n = 0 \quad \text{su } S \quad (7.6)$$

## 7.2 Cavità e guide d'onda cilindriche

Consideriamo ora un problema con simmetria lungo un asse, che prendiamo come asse delle  $z$ . I campi possono essere presi della forma

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y) e^{i k_z z - i \omega t} \quad \vec{B}(x, y, z) = \vec{B}(x, y) e^{i k_z z - i \omega t} \quad (7.7)$$

e le equazioni d'onda diventano

$$\begin{aligned} \left[ \partial_x^2 + \partial_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \vec{E}(x, y) &= 0 \\ \left[ \partial_x^2 + \partial_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \vec{B}(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (7.8)$$

Le equazioni per i rotori danno

$$\begin{aligned} i \omega B_x &= \partial_y E_z - i k_z E_y \\ i \omega B_y &= i k_z E_x - \partial_x E_z \\ i \frac{\omega}{c^2} E_x &= -\partial_y B_z + i k_z B_y \\ i \frac{\omega}{c^2} E_y &= -i k_z B_x + \partial_x B_z \end{aligned}$$

Queste equazioni possono essere risolte per i campi trasversi:

$$\begin{aligned}
i \omega B_x &= \partial_y E_z - i k_z E_y \\
i \omega B_y &= i k_z E_x - \partial_x E_z \\
i \frac{\omega}{c^2} E_x &= -\partial_y B_z + i \frac{k_z^2}{\omega} E_x - \frac{k_z}{\omega} \partial_x E_z \\
i \frac{\omega}{c^2} E_y &= -\frac{k_z}{\omega} \partial_y E_z + i \frac{k_z^2}{\omega} E_y + \partial_x B_z
\end{aligned}$$

Cioè

$$\begin{aligned}
i \omega \left(1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2}\right) B_x &= \partial_y E_z - \frac{k_z c^2}{\omega^2} \partial_x B_z \\
i \omega \left(1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2}\right) B_y &= -\partial_x E_z - \frac{k_z c^2}{\omega} \partial_y B_z \\
i \frac{\omega}{c^2} \left(1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2}\right) E_x &= -\frac{k_z}{\omega} \partial_x E_z - \partial_y B_z \\
i \frac{\omega}{c^2} \left(1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2}\right) E_y &= -\frac{k_z}{\omega} \partial_y E_z + \partial_x B_z
\end{aligned}$$

Pertanto i campi longitudinali  $E_z$  e  $B_z$  determinano i campi trasversi. I campi longitudinali sono a loro volta determinanti dai seguenti problemi bi-dimensionali:

$$\begin{aligned}
\left[\partial_x^2 + \partial_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right] E_z(x, y) &= 0 & E_z = 0 \text{ su } S \\
\left[\partial_x^2 + \partial_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right] B_z(x, y) &= 0 & \partial_n B_z = 0 \text{ su } S
\end{aligned} \quad (7.9)$$

Una delle soluzioni delle equazioni del moto è pertanto un'onda "trasversa"

$$\begin{aligned}
E_z = B_z &= 0 \\
\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_{tr} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{tr} &= 0 & \vec{E}_{tr} \equiv E_x \hat{x} + E_y \hat{y} \\
k_z^2 &= \frac{\omega^2}{c^2}
\end{aligned} \quad (7.10)$$

In particolare per una cavità con un unico bordo, cioè per un conduttore cilindrico vuoto, queste equazioni danno la soluzione triviale, in quanto il campo elettrostatico è nullo dentro un conduttore.

La soluzione generale delle equazioni d'onda in una cavità cilindrica sarà data pertanto da una combinazione lineare di una soluzione “elettrica” (detta anche “magnetica trasversa” (TM))

$$\begin{aligned}
& \left[ \partial_x^2 + \partial_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] E_z(x, y) = 0 \quad E_z = 0 \text{ su } S \\
& B_z = 0 \\
& i \omega B_x = \frac{\partial_y E_z}{1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2}} \quad i \omega B_y = -\frac{\partial_x E_z}{1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2}} \\
& i E_x = -\frac{k_z c^2}{\omega^2} \frac{\partial_x E_z}{1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2}} \quad i E_y = -\frac{k_z c^2}{\omega^2} \frac{\partial_y E_z}{1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2}} \quad (7.11)
\end{aligned}$$

e di un'onda “magnetica” (detta anche “elettrica trasversa” (TE))

$$\begin{aligned}
& \left[ \partial_x^2 + \partial_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] B_z(x, y) = 0 \quad \partial_n B_z = 0 \text{ su } S \\
& E_z = 0 \\
& i \omega B_x = -\frac{k_z c^2}{\omega^2} \frac{\partial_x B_z}{1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2}} \quad i \omega B_y = -\frac{k_z c^2}{\omega} \frac{\partial_y B_z}{1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2}} \\
& i \frac{\omega}{c^2} E_x = -\frac{\partial_y B_z}{1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2}} \quad i \frac{\omega}{c^2} E_y = \frac{\partial_x B_z}{1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2}} \quad (7.12)
\end{aligned}$$

più eventualmente un'onda trasversa (7.10), nel caso la cavità cilindrica abbia bordi interni.

Scriviamo i campi trasversi per le onde “elettriche” e “magnetiche” in forma più condensata introducendo gli indici bi-dimensionali  $\alpha, \beta \dots$  per le coordinate sul piano trasverso  $(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
E_\alpha^{(tr)} &= \frac{i k_z c^2}{\omega^2 - c^2 k_z^2} \partial_\alpha E_z \\
B_\alpha^{(tr)} &= -\frac{i \omega}{\omega^2 - c^2 k_z^2} \epsilon_{\alpha\beta} \partial_\beta E_z \quad \text{onde TM} \\
E_\alpha^{(tr)} &= \frac{i \omega c^2}{\omega^2 - c^2 k_z^2} \epsilon_{\alpha\beta} \partial_\beta B_z \\
B_\alpha^{(tr)} &= -\frac{i k_z c^2}{\omega^2 - c^2 k_z^2} \partial_\alpha B_z \quad \text{onde TE}
\end{aligned}$$

Vale dunque la seguente relazione tra campo magnetico ed elettrico trasverso

$$\begin{aligned}\vec{B}_{tr} &= \frac{\omega}{c^2 k_z} \hat{z} \wedge \vec{E}_{tr} && \text{onde TM} \\ \vec{B}_{tr} &= -\frac{k_z}{\omega} \hat{z} \wedge \vec{E}_{tr} && \text{onde TE}\end{aligned}$$

### 7.3 Cavità risonanti

Supponiamo di collocare due pareti perfettamente conduttrici ortogonali all'asse di simmetria della cavità cilindrica nelle posizioni  $z = 0$  e  $z = d$ .

Per le onde elettriche siamo interessati alle condizioni al contorno per  $E_z$  nella direzione  $z$ :

$$\partial_z E_z = 0 \quad \text{per } z = 0, d \quad (7.13)$$

Quindi

$$E_z(x, y, z) = \psi(x, y) \cos \frac{p\pi z}{d} \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (7.14)$$

Per le onde magnetiche siamo interessati alle condizioni al contorno per  $B_z$  nella direzione  $z$ :

$$B_z = 0 \quad \text{per } z = 0, d \quad (7.15)$$

Quindi

$$B_z(x, y, z) = \psi(x, y) \sin \frac{p\pi z}{d} \quad p = 1, 2, \dots \quad (7.16)$$

#### 7.3.1 Sezione circolare

Se la sezione del cilindro è circolare l'equazione per  $\psi_p(x, y)$  in coordinate polari  $(\rho, \phi)$  diventa

$$\left[ \frac{1}{\rho} \partial_\rho \rho \partial_\rho + \frac{1}{\rho^2} \partial_\phi^2 - \frac{p^2 \pi^2}{d^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \psi_p = 0 \quad (7.17)$$

$\psi_p(\rho, \theta)$  è scrivibile come somma di onde di momento angolare definito lungo l'asse delle  $z$

$$\psi_{pm}(\rho, \phi) = \psi_{pm}(\rho) e^{im\phi} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (7.18)$$

Abbiamo

$$\rho^2 \psi_{pm}''(\rho) + \rho \psi_{pm}'(\rho) + \left[ \rho^2 \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p^2 \pi^2}{d^2} \right) - m^2 \right] \psi_{pm}(\rho) = 0 \quad (7.19)$$

Introducendo

$$\zeta \equiv \rho \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p^2 \pi^2}{d^2}} \quad (7.20)$$

l'equazione assume la forma dell'equazione di Bessel

$$\zeta^2 \psi_{pm}''(\zeta) + \zeta \psi_{pm}'(\zeta) + [\zeta^2 - m^2] \psi_{pm}(\rho) = 0 \quad (7.21)$$

La soluzione regolare in  $\zeta = 0$  è

$$\psi_{pm}(\rho) = C_0 J_m\left(\rho \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p^2 \pi^2}{d^2}}\right) \quad (7.22)$$

*Modi elettrici*

Nel caso di onde elettriche la condizione sul bordo del cilindro è

$$\psi_{pm}(R) = 0 \quad (7.23)$$

dunque

$$R \sqrt{\frac{\omega_{mnp}^2}{c^2} - \frac{p^2 \pi^2}{d^2}} = \zeta_{mn} \quad (7.24)$$

dove  $\zeta_{mn}$  è l' $n$ -esimo zero della funzione di Bessel  $J_m(\zeta)$ . Dunque per le onde elettriche

$$E_z^{(pmn)}(\rho) = E_0 J_m\left(\rho \sqrt{\frac{\omega_{mnp}^2}{c^2} - \frac{p^2 \pi^2}{d^2}}\right) \quad (7.25)$$

dove

$$\frac{\omega_{mnp}^2}{c^2} = \frac{\zeta_{mn}^2}{R^2} + \frac{p^2 \pi^2}{d^2} \quad (7.26)$$

Il modo più basso è quello con  $p = 0$ ,  $m = 0$ ,  $n = 1$

$$\omega_{010} = \frac{\zeta_{01} c}{R} \approx \frac{2.405 c}{R} \quad (7.27)$$

Si noti che questa frequenza *non* dipende dall'altezza  $d$  della cavità.

*Modi magnetici*

Nel caso di onde magnetiche la condizione sul bordo del cilindro è

$$\psi'_{pm}(R) = 0 \quad (7.28)$$

dunque

$$R \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p^2 \pi^2}{d^2}} = \zeta'_{mn} \quad (7.29)$$

dove  $\zeta'_{mn}$  è l'n-esimo zero della funzione di Bessel  $J'_m(\zeta)$ . Dunque per le onde magnetiche

$$B_z^{(pmn)}(\rho) = B_0 J_m\left(\rho \sqrt{\frac{(\omega'_{mnp})^2}{c^2} - \frac{p^2 \pi^2}{d^2}}\right) \quad (7.30)$$

dove

$$\frac{(\omega'_{mnp})^2}{c^2} = \frac{(\zeta'_{mn})^2}{R^2} + \frac{p^2 \pi^2}{d^2} \quad (7.31)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \zeta'_{0n} &= 3.832, \dots \\ \zeta'_{1n} &= 1.841, \dots \\ \zeta'_{2n} &= 3.054, \dots \\ \zeta'_{3n} &= 4.201, \dots \end{aligned}$$

Il modo più basso è quello con  $p = 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = 1$

$$\omega_{111} = \sqrt{\left(\frac{\zeta'_{11} c}{R}\right)^2 + \frac{\pi^2}{d^2}} \approx \frac{1.841 c}{R} \sqrt{1 + 2.912 \frac{R^2}{d^2}} \quad (7.32)$$

Questa frequenza dipende dall'altezza della cavità. Per  $d > d_c$ , dove

$$\zeta'_{11} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 R^2}{(\zeta'_{11})^2 d_c^2}} = \zeta_{10} \quad (7.33)$$

cioè per

$$\frac{d}{R} > \frac{d_c}{R} = \frac{\pi}{\sqrt{\zeta_{10}^2 - (\zeta'_{11})^2}} \approx 2.03 \quad (7.34)$$

la frequenza "fondamentale" magnetica è più bassa di quella elettrica.

## 7.4 Guide d'onda

### 7.4.1 Sezione circolare

Nelle guide d'onde non c'è la condizione di quantizzazione per  $k_z$ . Definiamo il campo bidimensionale  $\psi(x, y)$  attraverso le relazioni

$$E_z(x, y, z, t) = \psi(x, y) e^{-i\omega + i k_z z} \quad \text{per onde TM} \quad (7.35)$$

per le onde elettriche e,

$$B_z(x, y, z, t) = \psi(x, y) e^{-i\omega t + ik_z z} \quad \text{per onde TE} \quad (7.36)$$

per le onde magnetiche. Se la sezione del cilindro è circolare l'equazione per  $\psi(x, y)$  in coordinate polari  $(\rho, \phi)$  diventa

$$\left[ \frac{1}{\rho} \partial_\rho \rho \partial_\rho + \frac{1}{\rho^2} \partial_\phi^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right] \psi = 0 \quad (7.37)$$

$\psi(\rho, \theta)$  è scrivibile come somma di onde di momento angolare definito lungo l'asse delle  $z$

$$\psi_m(\rho, \phi) = \psi_m(\rho) e^{im\phi} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (7.38)$$

Abbiamo

$$\rho^2 \psi_m''(\rho) + \rho \psi_m'(\rho) + \left[ \rho^2 \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) - m^2 \right] \psi_m(\rho) = 0 \quad (7.39)$$

Introducendo

$$\zeta \equiv \rho \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2} \quad (7.40)$$

l'equazione assume la forma dell'equazione di Bessel

$$\zeta^2 \psi_m''(\zeta) + \zeta \psi_m'(\zeta) + \left[ \zeta^2 - m^2 \right] \psi_m(\rho) = 0 \quad (7.41)$$

La soluzione regolare in  $\zeta = 0$  è

$$\psi_m(\rho) = C_0 J_m \left( \rho \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2} \right) \quad (7.42)$$

*Onde elettriche*

Nel caso di onde elettriche la condizione sul bordo del cilindro è

$$\psi_m(R) = 0 \quad (7.43)$$

dunque

$$R \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2} = \zeta_{mn} \quad (7.44)$$

dove  $\zeta_{mn}$  è l'n-esimo zero della funzione di Bessel  $J_m(\zeta)$ . Dunque per le onde elettriche

$$E_z^{(mn)}(\rho, \phi, z, t) = E_0 J_m\left(\frac{\rho \zeta_{mn}}{R}\right) e^{i m \phi} e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (7.45)$$

dove

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\zeta_{mn}^2}{R^2}} \quad (7.46)$$

Esiste dunque una frequenza di *taglio*

$$\omega_{mn}^{(c)} = \frac{\zeta_{mn} c}{R} \quad (7.47)$$

tale che

$$k_z c = \sqrt{\omega^2 - (\omega_{mn}^{(c)})^2} \quad (7.48)$$

Per  $\omega < \omega_{mn}^{(c)}$  l'onda non si propaga lungo la guida: è descritta da un esponenziale decrescente reale e penetra solo per una lunghezza

$$\lambda_c = \frac{c}{\sqrt{(\omega_{mn}^{(c)})^2 - \omega^2}} \quad \text{per } \omega < \omega_{mn}^{(c)} \quad (7.49)$$

*Onde magnetiche*

Nel caso di onde magnetiche la condizione sul bordo del cilindro è

$$\psi'_{pm}(R) = 0 \quad (7.50)$$

dunque

$$R \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2} = \zeta'_{mn} \quad (7.51)$$

dove  $\zeta'_{mn}$  è l'n-esimo zero della funzione di Bessel  $J'_m(\zeta)$ . Dunque per le onde magnetiche

$$B_z^{(mn)}(\rho, \phi, z, t) = B_0 J_m\left(\frac{\rho \zeta'_{mn}}{R}\right) e^{i m \phi} e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (7.52)$$

e la frequenza di taglio, tale che

$$c k_z = \sqrt{\omega^2 - (\omega_{mn}^{(c)})^2} \quad (7.53)$$

è

$$\omega_{mn}^{(c)} = \frac{\zeta'_{mn} c}{R} \quad (7.54)$$

### 7.4.2 Sezione rettangolare

Prendiamo il caso in cui la sezione del cilindro è un rettangolo di lati  $a$  e  $b$  nelle direzioni  $x$  ed  $y$ . L'equazione per  $\psi(x, y)$  in coordinate cartesiane diventa

$$\left[ \partial_x^2 + \partial_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right] \psi = 0 \quad (7.55)$$

*Onde elettriche*

Nel caso di onde elettriche la condizione sul bordo del cilindro è

$$\psi(0, y) = \psi(a, y) = \psi(x, 0) = \psi(x, b) = 0 \quad (7.56)$$

Dunque una base di soluzioni per le onde elettriche è data da

$$E_z^{(mn)}(x, y, z, t) = E_0 \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} e^{i(k_z z - \omega t)} \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (7.57)$$

dove

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} \quad (7.58)$$

La frequenza di *taglio* definita da

$$k_z c = \sqrt{\omega^2 - (\omega_{mn}^{(c)})^2} \quad (7.59)$$

è

$$\frac{\omega_{mn}^{(c)}}{c} = \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} \quad (7.60)$$

*Onde magnetiche*

Nel caso di onde magnetiche la condizione sul bordo del cilindro è

$$\partial_x \psi(x, y)|_{x=0} = \partial_x \psi(x, y)|_{x=a} = \partial_y \psi(x, y)|_{y=0} = \partial_y \psi(x, y)|_{y=b} = 0 \quad (7.61)$$

Dunque per le onde magnetiche

$$B_z^{(mn)}(x, y, z, t) = B_0 \cos \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b} e^{i(k_z z - \omega t)} \\ m, n = 0, 1, 2, \dots; \quad \{m, n\} \neq \{0, 0\} \quad (7.62)$$

Si noti che se  $n$  ed  $m$  sono simultaneamente nulli, la soluzione delle equazioni di Maxwell diventa banale, cioè nulla. Le nostre formule per i campi trasversi

non sono direttamente applicabili, in questo caso, in quanto diventano singolari per  $m = n = 0$ ,  $\frac{\omega}{c} = k_z$ . Ma è immediato verificare direttamente, considerando per esempio l'equazione di Maxwell per la divergenza di  $\vec{B}$ , che se  $m = n = 0$  allora la soluzione che soddisfa le condizioni al contorno si annulla identicamente. Pertanto, la frequenza di taglio

$$\frac{\omega_{mn}^{(c)}}{c} = \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} \quad (7.63)$$

più bassa è o  $\omega_{10}^{(c)}$  o  $\omega_{01}^{(c)}$  a seconda del rapporto tra  $a$  e  $b$ . Si noti che questa frequenza è sempre più bassa di quella delle onde elettriche, e quindi questo è il modo più comunemente usato nelle guide d'onde rettangolari.