

La legge dell'inverso del quadrato della distanza:
dalla fisica classica alla meccanica quantistica

*Un ciclo di seminari per le Scuole
27-30 Gennaio 2014-15*

Camillo Imbimbo

*Dipartimento di Fisica dell'Università di Genova
Via Dodecaneso, I-16136, Genova, Italia*

Indice

1	Le leggi di Keplero	4
2	La legge della dinamica di Newton	5
3	La legge della gravitazione universale	5
4	La legge dell'area di Keplero è deducibile dal fatto che la forza è centrale	6
5	Una legge di conservazione: il momento angolare	7
6	La legge dei periodi di Keplero e quella del quadrato dell'inverso della distanza	9
7	Le orbite ellittiche: integrazione delle equazioni del moto	11
8	Una nuova legge di conservazione: il vettore di Laplace-Runge-Lenz	14
9	L'eccentricità dell'orbita terrestre	19
10	Alcune applicazioni della legge di gravitazione universale	21
11	La curva di rotazione delle galassie e la materia oscura	24
12	L'orbita di Mercurio	26
13	Azione a distanza: il concetto di campo	27
14	La legge di Coulomb	32
15	Le orbite degli elettroni	33
A	Raccolta dei problemi inseriti nel testo	39

Introduzione

Che cosa fanno i fisici teorici? Come si scopre una legge della Natura? Come nasce l'idea per una nuova formula di fisica? Come ci si convince che è giusta? Che cosa è una predizione fisica? Perché, ed in che modo, i fisici usano la matematica? Che cosa succede quando le cose non “tornano”, quando l'esperienza non sembra andare d'accordo con la teoria? Queste domande sono state poste e discusse infinite volte con passione da scienziati e filosofi, arrivando a conclusioni non sempre concordanti¹.

Ma uno studente del liceo che accarezza l'idea di studiare Fisica all'Università, piuttosto che affrontare complessi dibattiti epistemologici di carattere generale, potrebbe forse più utilmente cercare delle risposte a queste domande approfondendo la sua comprensione di un qualche esempio concreto di legge fisica. Per questa ragione, in queste brevi note relative ad un ciclo di tre seminari svolti presso il Dipartimento di Fisica dell'Università di Genova, dedicati agli studenti delle scuole superiori in procinto di avviarsi verso gli studi universitari, si è scelto di concentrarsi su una legge specifica e celebre nella storia della fisica — quella dell'inverso del quadrato della distanza. Si è cercato di spiegarne la genesi, *immaginando*, senza alcuna pretesa di accuratezza storica, il tipo di considerazioni, di ragionamenti e di conoscenze empiriche che hanno potuto suggerire a Newton la formula della gravitazione universale. E partendo da qui, si è provato a discutere, attraverso calcoli elementari ma espliciti, alcune predizioni fisiche derivabili da questa formula, con lo scopo di esemplificare l'importanza degli strumenti matematici per catturare in maniera precisa il contenuto e le implicazioni di una legge fisica.

La speranza è stata quella di riuscire a fare apprezzare agli studenti la quantità enorme di fatti apparentemente diversi che una legge come questa è in grado di spiegare, ed anche richiamare la loro attenzione sul carattere complesso ed incerto del confronto tra le previsioni di una teoria ed i fatti sperimentali: mettendo in evidenza, nei limiti del possibile, l'importanza della precisione delle osservazioni e dell'accuratezza dei calcoli matematici necessari ad estrarre delle predizioni da una teoria. Ma soprattutto si è cercato di mettere in luce, attraverso la discussione quantitativa di una serie di esempi

¹La letteratura sulla natura della conoscenza scientifica e fisica è naturalmente sterminata. Il libro che ha fortemente ispirato l'autore nella preparazione di queste lezioni e che, a suo avviso, è una lettura estremamente affascinante per chiunque sia interessato a capire in che cosa consista l'essenza dell'attività del fisico è quello di R. Feynman, *La Legge Fisica*, Boringhieri 1971, (titolo originale, *The character of physical law*, 1965).

concreti, che quando confrontato con una discrepanza tra esperienza e teoria, il corso di azione di un fisico non è mai ovvio *a priori*: in alcuni casi è possibile superare la difficoltà raffinando l'analisi matematica delle implicazioni della teoria, in altri casi, mantenendo la fede in questa, inferire l'esistenza di nuovi fatti o leggi fisiche. In altri ancora è richiesta una modifica profonda della teoria stessa.

Nel corso delle lezioni si è messo in evidenza come arrivare a formulazioni diverse di una stessa teoria — una delle attività del fisico teorico — spesso produca una comprensione più profonda di questa: e questo a volte si rivela essere di grande aiuto per compiere il salto di immaginazione richiesto per costruire una nuova teoria. Si è anche enfatizzato, a questo riguardo, che un aspetto essenziale e caratteristico della conoscenza fisica è che la nascita di una nuova teoria deve sempre essere pensato come un raffinamento e mai come il ribaltamento della conoscenza incorporata nella vecchia teoria.

Lo scopo principale delle note è in fondo quello di illustrare agli studenti, attraverso degli esempi espliciti, l'incertezza inerente nella decisione del fisico su quale sia la strada giusta da seguire per superare le difficoltà — concettuali ed empiriche — che incontra nel suo lavoro: un'incertezza che forse è tra gli aspetti più affascinanti e più indecifrabili della sua attività.

1 Le leggi di Keplero

Keplero (1571-1630) formulò le sue leggi basandosi sulle accurate (per gli standard del tempo) osservazioni di Tycho Brahe (1546-1601) ottenute nel suo osservatorio nell'isola di Hven, vicino a Copenhagen. Studiando le voluminose tabelle di Brahe, il suo assistente Keplero si rese conto che l'enorme numero di dati era condensabile nelle celebri tre leggi:

- La prima legge stabilisce che i pianeti ruotano intorno al Sole in orbite *ellittiche* di cui il Sole occupa uno dei fuochi.
- La seconda legge stabilisce che la velocità areolare con cui il pianeta si muove lungo l'orbita è costante.
- La terza legge si riferisce non ad una singola orbita ma ad orbite diverse: i quadrati dei periodi di ogni coppia di pianeti sono proporzionali ai cubi degli assi maggiori delle loro orbite rispettive: $T \propto a^{\frac{3}{2}}$

2 La legge della dinamica di Newton

Mentre Keplero formulava le sue leggi sul moto dei pianeti, Galileo (1564-1642) studiando le leggi del moto, arrivò alla formulazione del principio di *inerzia*:

- Un corpo non sottoposto a forze di alcun tipo si muove a velocità *costante*, con moto rettilineo uniforme.

Newton (1642-1727) generalizza questo principio, specificando che cosa succede quando un corpo è invece sottoposto a delle forze: la sua legge della dinamica stabilisce che *la variazione della velocità* per unità di tempo — ovvero l'*accelerazione* — è proporzionale alla forza che agisce sul corpo. La costante di proporzionalità è detta *massa inerziale* del corpo:

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \equiv m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.1)$$

3 La legge della gravitazione universale

Una conseguenza interessante della legge della dinamica è che la forza cui è sottoposto un pianeta che orbita intorno al sole non può essere puramente tangenziale: in effetti se il pianeta ad un dato istante smettesse di essere sottoposto a qualunque forza, per il principio di inerzia proseguirebbe il suo moto lungo la tangente all'orbita. Keplero aveva invece spiegato che il pianeta segue un moto ellittico, lungo il quale il vettore velocità cambia costantemente direzione. La legge della dinamica di Newton richiede pertanto che una forza *trasversale* al moto venga esercitata sul pianeta. Ragionando in questo modo Newton arrivò alla conclusione che il pianeta, per poter muoversi in un'orbita intorno al Sole, deve essere sottoposto ad una forza diretta *verso il Sole*: una forza di questo tipo è detta *centrale*.

Per poter riprodurre la terza legge di Keplero, Newton capì inoltre che l'intensità di questa forza deve diminuire con il quadrato della distanza dal Sole, arrivando in questo modo alla sua famosa formula

$$F = G \frac{M m}{r^2} \quad (3.2)$$

dove, M è la massa del sole, m quella del pianeta, r la loro distanza e G è la cosiddetta costante di gravitazione universale. Questa costante fu misurata in seguito da Cavendish (1731-1810) che ottenne il valore

$$G = 6.67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} sec^{-2} \quad (3.3)$$

4 La legge dell'area di Keplero è deducibile dal fatto che la forza è centrale

- *Una dimostrazione algebrica*

Sia $\vec{r}(t)$ il vettore che misura la distanza del pianeta dal sole al tempo t . L'area ΔA spazzata da questo vettore in un tempo Δt è

$$\Delta A = \frac{1}{2} |\vec{r}| |\Delta \vec{r}| \sin \theta \quad (4.4)$$

dove $\Delta \vec{r}$ è la variazione del vettore \vec{r} in un tempo Δt e θ è l'angolo tra \vec{r} e $\Delta \vec{r}$. È conveniente introdurre un vettore $\Delta \vec{A}$ il cui modulo è pari all'area ΔA e la cui direzione è ortogonale al piano definito dai vettori \vec{r} e $\Delta \vec{r}$. Il verso di $\Delta \vec{A}$ è scelto (arbitrariamente) secondo la cosiddetta regola della mano destra: è diretto nella direzione del pollice della mano destra se \vec{r} è diretto lungo l'indice e $\Delta \vec{r}$ è diretto lungo il medio. Un vettore così definito si scrive

$$\Delta \vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \Delta \vec{r} \quad (4.5)$$

dove il segno di \wedge denota il cosiddetto *prodotto vettore* fra due vettori. Dunque²

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} \\ \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} &= \frac{1}{2} \dot{\vec{r}} \wedge \dot{\vec{r}} + \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \frac{\vec{F}}{m} \end{aligned} \quad (4.6)$$

dove abbiamo tenuto conto che

$$\vec{a} \wedge \vec{a} = 0 \quad (4.7)$$

per qualunque vettore \vec{a} e dove abbiamo utilizzato la legge della dinamica (2.1). Se la forza è centrale, \vec{F} è diretto lungo \vec{r}

$$\vec{F} \propto \vec{r} \Rightarrow \vec{r} \wedge \vec{F} \propto \vec{r} \wedge \vec{r} = 0 \quad (4.8)$$

Dunque in questo caso

$$\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = 0 \quad (4.9)$$

²Il punto indica derivazione rispetto al tempo: $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

- Una dimostrazione geometrica

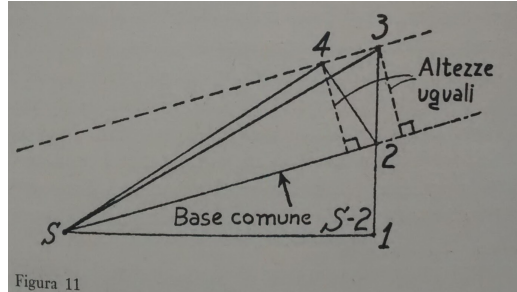


Figura 1: La legge delle aree.

5 Una legge di conservazione: il momento angolare

Dato un corpo di massa m definiamo il vettore

$$\vec{L} = m \vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{r} \wedge \vec{p} \quad (5.10)$$

dove

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad (5.11)$$

è l'*impulso* o quantità di moto del corpo. La grandezza \vec{L} è chiamata il *momento angolare* del corpo (rispetto ad un punto che è l'origine delle coordinate).

Confrontando (5.10) con (4.6), deduciamo

$$\vec{L} = 2m \frac{d\vec{A}}{dt} \quad (5.12)$$

Possiamo quindi riscrivere l'equazione (4.6) in termini del momento angolare

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (5.13)$$

La legge delle aree, che si ottiene nel caso di forza centrale $\vec{F} \propto \vec{r}$ si può quindi rifrappare come legge di *conservazione* del momento angolare del corpo

di massa m

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad (5.14)$$

Questa nuova equazione è perfettamente equivalente alla (4.9) e non aggiunge nulla a questa. Consideriamo però il caso di un insieme di corpi di masse m_1, m_2, \dots, m_N e consideriamo la somma dei momenti angolari di ciascuno, ovvero *il momento angolare totale* del sistema di corpi:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \dots + \vec{L}_N = \vec{r}_1 \wedge \vec{p}_1 + \dots + \vec{r}_N \wedge \vec{p}_N \quad (5.15)$$

Dalla equazione (5.13) otteniamo

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \dots + \vec{r}_N \wedge \vec{F}_N \quad (5.16)$$

dove \vec{F}_i con $i = 1, \dots, N$ è la forza che agisce sul i -esimo corpo. Il vettore

$$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i \quad (5.17)$$

si chiama il momento della forza che agisce sull' i -esimo corpo, e

$$\vec{\tau} = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \dots + \vec{r}_N \wedge \vec{F}_N \quad (5.18)$$

il momento totale della forza che agisce sul sistema. Otteniamo in definitiva che la velocità di variazione del momento angolare totale è data dal momento della forza totale

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \quad (5.19)$$

Si consideri ora un sistema in cui tutte le forze tra i corpi siano forze *interne*: per esempio quelle dell'interazione gravitazionale.

- **Problema:** Si dimostri che nel caso di forze interne il momento totale della forza $\vec{\tau}$ è nullo.

Otteniamo quindi il risultato che per un sistema sul quale non agiscono forze esterne (un sistema del genere si dice *isolato*) il momento angolare totale non cambia nel tempo.

Abbiamo visto che nel caso particolare di un pianeta che ruota intorno al sole, la conservazione del momento angolare è equivalente alla legge delle aree. Ma vediamo che il principio della conservazione del momento angolare è molto più generale ed è valido per un sistema arbitrario di corpi tra loro interagenti — come una galassia per esempio, purché isolato.

- **Problema:** Si cerchi di capire in che modo la conservazione del momento angolare spieghi la forma a spirale di molte galassie.

6 La legge dei periodi di Keplero e quella del quadrato dell'inverso della distanza

Abbiamo visto la legge delle aree è una conseguenza del carattere centrale dell'attrazione gravitazionale: essa vale anche per forze che non decrescono come l'inverso del quadrato della distanza. La legge dei periodi è invece conseguenza diretta della dipendenza della forza gravitazionale dalla distanza.

Per conviccersene, si consideri il caso particolare di un'orbita circolare. In questo caso gli assi dell'ellisse, a e b coincidono $a = b = r$.

Dimostriamo innanzitutto che un corpo che si muove lungo una circonferenza di raggio r con velocità costante v ha una accelerazione diretta verso il centro della circonferenza — per questa ragione detta *centripeta* — il cui modulo è $\frac{v^2}{r}$

$$\vec{a}_c = -\frac{\vec{r}}{r} \frac{v^2}{r} \quad (6.20)$$

Anche di questo fatto, possiamo dare sia una dimostrazione geometrica che una algebrica.

- La dimostrazione geometrica è illustrata in Fig. 2:

$$|\Delta\vec{v}| = v \Delta\theta = v \frac{v \Delta t}{r} \quad (6.21)$$

da cui

$$|\vec{a}| = \left| \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \right| = v \frac{v}{r} = \frac{v^2}{r} \quad (6.22)$$

- La dimostrazione algebrica

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= r (\vec{e}_x \cos \omega t + \vec{e}_y \sin \omega t) \\ \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \omega r (-\vec{e}_x \sin \omega t + \vec{e}_y \cos \omega t) \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -\omega^2 r (\vec{e}_x \cos \omega t + \vec{e}_y \sin \omega t) = \\ &= -\frac{v^2}{r} \frac{\vec{r}(t)}{r} \end{aligned} \quad (6.23)$$

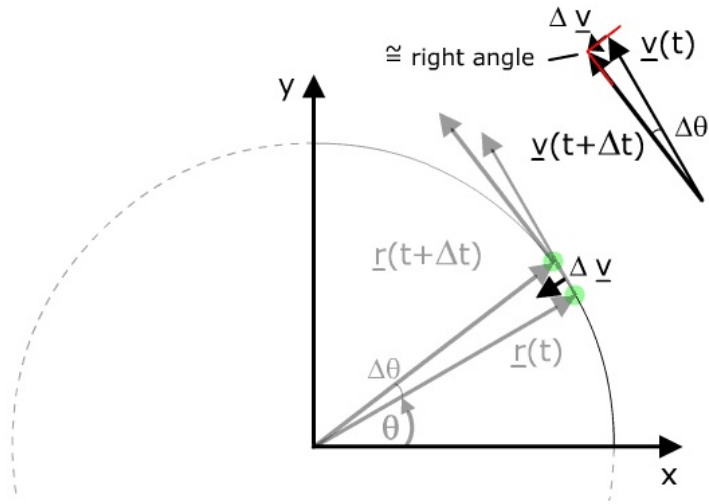


Figura 2: Accelerazione centripeta

dove

$$\omega = \frac{v}{r} \quad (6.24)$$

è la velocità angolare.

In ogni caso, la legge di Newton implica quindi che, per un'orbita circolare di raggio r , vale

$$G \frac{M m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (6.25)$$

Otteniamo dunque la seguente relazione tra velocità e raggio dell'orbita di un corpo che si muove lungo una orbita *circolare* soggetto alla forza gravitazionale del sole

$$v = \sqrt{\frac{G M}{r}} \quad (6.26)$$

Da questa relazione deduciamo la legge di Keplero per il periodo T di rotazione

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\sqrt{G M}} r^{\frac{3}{2}} \quad (6.27)$$

- **Problema:** A che altezza deve essere posto un satellite terrestre geostazionario su un'orbita circolare?

Soluzione: $T = 24 \times 3600 \text{ sec} = 86400 \text{ sec}$, dunque $a = \left(\frac{GM_t T^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 4.2 \times 10^7 \text{ m}$, ovvero ad una altezza di 36 km dalla superficie terrestre.

7 Le orbite ellittiche: integrazione delle equazioni del moto

L'equazione del moto di Newton per un pianeta sotto l'influenza del sole (di massa M) è³

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r \quad (7.28)$$

dove \vec{e}_r è il vettore di lunghezza unitaria che ha la direzione sole-pianeta. Consideriamo un sistema di coordinate con centro nel sole (Fig. 3). La posizione del pianeta più vicina al Sole definisce l'asse delle x e corrisponde alla coordinata angolare $\theta = 0$. Sia $r(\theta)$ la distanza del pianeta dal sole per una coordinata angolare del pianeta θ . Sia $r_{min} = r(0)$ la distanza del pianeta dal sole quando $\theta = 0$ e v_0 il modulo della velocità in quel punto.

La conservazione del momento angolare, o equivalentemente, a legge delle aree, implica che

$$\frac{1}{2} r^2(\theta) \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r_{min}^2 v_0^2 \Rightarrow \frac{1}{r^2(\theta)} = \frac{\frac{d\theta}{dt}}{r_{min} v_0} \quad (7.29)$$

Dunque

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GM}{r_{min} v_0} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_r \quad (7.30)$$

ovvero

$$\frac{d\vec{v}}{d\theta} = -\frac{GM}{r_{min} v_0} \vec{e}_r \quad (7.31)$$

³Questa sezione fa un uso più esteso del calcolo differenziale delle altre sezioni. In particolare la sua comprensione richiede la padronanza degli integrali definiti di funzioni di variabile reale: una padronanza che, di solito, si acquisisce solamente alla fine del quinto anno del liceo. Poiché nulla di quello che segue dipende da quanto discusso in questa sezione, è possibile saltarne la lettura in un primo momento, senza che venga compromessa la possibilità di comprendere il resto di queste note.

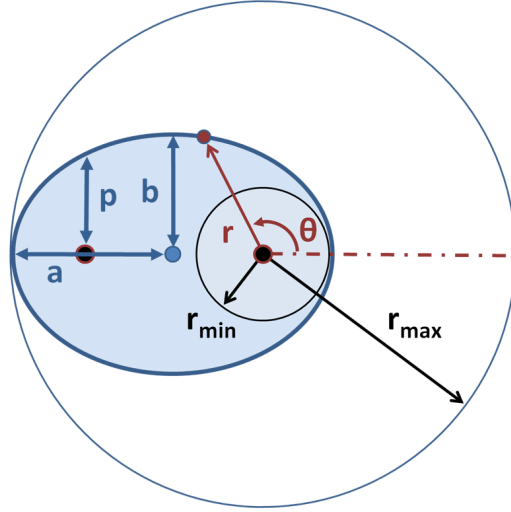


Figura 3: Sistema di coordinate polari (r, θ) con centro in un fuoco per una ellisse. a è il semi-asse maggiore, b il semi-asse minore, p il semi-lato retto. Il centro dell'ellisse ed i suoi due fuochi sono indicati con dei punti neri grandi. For $\theta = 0$, $r = r_{min}$ e per $\theta = \pi$, $r = r_{max}$.

Ora

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \quad (7.32)$$

dove \vec{e}_x e \vec{e}_y sono i vettori di lunghezza unitaria lungo gli assi x e y . Pertanto

$$\frac{d\vec{v}}{d\theta} = -\frac{GM}{r_{min} v_0} (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) \quad (7.33)$$

Integrando rispetto a θ otteniamo

$$\vec{v}(\theta) = -\frac{GM}{r_{min} v_0} (\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_y) + \vec{w} \quad (7.34)$$

dove \vec{w} è un vettore *costante*, ovvero indipendente da θ . Imponendo che

$$\vec{v}(0) = v_0 \vec{e}_y \quad (7.35)$$

concludiamo che

$$\vec{v}(\theta) = -\frac{GM}{r_{min} v_0} (\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_y) + \left(v_0 - \frac{GM}{r_{min} v_0}\right) \vec{e}_y \quad (7.36)$$

Questa equazione afferma che, mentre il pianeta si sposta lungo l'orbita, *il vettore delle velocità $\vec{v}(\theta)$ descrive un cerchio.*

Adesso vogliamo dimostrare che questo fatto è equivalente a dire che l'orbita è una ellissi.

Dalla (7.36) ricaviamo

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\theta} \frac{r_{min} v_0}{r^2(\theta)} = \\ &= -\frac{GM}{r_{min} v_0} (\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_y) + \left(v_0 - \frac{GM}{r_{min} v_0}\right) \vec{e}_y\end{aligned}\quad (7.37)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta} = -\frac{GM r^2}{r_{min}^2 v_0^2} (\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_y) + \left(\frac{r^2}{r_{min}} - \frac{GM r^2}{r_{min}^2 v_0^2}\right) \vec{e}_y\quad (7.38)$$

Moltiplicando ambo i membri di questa equazione per

$$\vec{r} = r \vec{e}_r = r (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)\quad (7.39)$$

otteniamo

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\theta} = r^3 \left(\frac{1}{r_{min}} - \frac{GM}{r_{min}^2 v_0^2}\right) \sin \theta\quad (7.40)$$

Ma

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{d\vec{r}^2}{d\theta} = r \frac{dr(\theta)}{d\theta}\quad (7.41)$$

Arriviamo quindi a

$$\frac{dr(\theta)}{d\theta} = \frac{r^2}{r_{min}} \left(1 - \frac{GM}{r_{min} v_0^2}\right) \sin \theta\quad (7.42)$$

La soluzione di quest'equazione si ottiene in modo semplice

$$r_{min} \frac{dr}{r^2} = \left(1 - \frac{GM}{r_{min} v_0^2}\right) \sin \theta d\theta\quad (7.43)$$

Integrando

$$1 - \frac{r_{min}}{r} = \left(1 - \frac{GM}{r_{min} v_0^2}\right) (1 - \cos \theta)\quad (7.44)$$

ovvero

$$r(\theta) = \frac{r_{min}}{1 + \left(\frac{GM}{r_{min} v_0^2} - 1\right) (1 - \cos \theta)} = r_{min} \frac{\frac{r_{min} v_0^2}{GM}}{1 + \left(\frac{r_{min} v_0^2}{GM} - 1\right) \cos \theta} \quad (7.45)$$

Se introduciamo il parametro *adimensionale*

$$\epsilon \equiv \frac{r_{min} v_0^2}{GM} - 1 \quad (7.46)$$

l'equazione dell'orbita si riscrive

$$r(\theta) = r_{min} \frac{1 + \epsilon}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (7.47)$$

- **Problema:** Si derivi la terza legge di Keplero per orbite ellittiche partendo dalla equazione per la traiettoria (7.47) e la conservazione del momento angolare (7.29)

8 Una nuova legge di conservazione: il vettore di Laplace-Runge-Lenz

Finora siamo riusciti a collegare solo una delle tre leggi Keplero, la legge delle aree, ad un principio di conservazione — quello del momento angolare. Abbiamo anche osservato che la legge delle aree, o, equivalentemente, la conservazione del momento angolare, valgono per tutte le forze centrali, e non soltanto per le forze che vanno come l'inverso del quadrato della distanza.

D'altro canto, sia la prima che la terza legge di Keplero *non* valgono per una forza centrale generica: esse valgono solamente per le forze di tipo newtoniano. Ci si può domandare se, corrispondentemente, esistono delle leggi di conservazioni che valgono specificamente per questo tipo di forze. In questa sezione daremo una risposta positiva a questa domanda, derivando una nuova legge di conservazione caratteristica delle forze che vanno come l'inverso del quadrato della distanza. Questa nuova legge di conservazione ci permetterà di dedurre la prima legge di Keplero, senza dover integrare le equazione del moto come abbiamo fatto nella sezione precedente.

Si consideri il vettore

$$\vec{\mathcal{A}} = \vec{p} \wedge \vec{L} - GMm^2 \frac{\vec{r}}{r} \quad (8.48)$$

dove M è la massa del sole e m la massa del pianeta. Proviamo a calcolare la variazione per unità di tempo di questo vettore, ovvero la sua derivata temporale⁴

$$\frac{d\vec{\mathcal{A}}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \wedge \vec{L} + \vec{p} \wedge \frac{d\vec{L}}{dt} - G M m^2 \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + G M \vec{r} \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r} \quad (8.49)$$

Sappiamo che

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= 0 \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= -\frac{G M m}{r^3} \vec{r} \end{aligned} \quad (8.50)$$

La prima di queste equazioni è la conservazione del momento angolare. La seconda è l'equazione della dinamica di Newton. Dunque

$$\frac{d\vec{\mathcal{A}}}{dt} = -\frac{G M m}{r^3} \vec{r} \wedge \vec{L} - G M m^2 \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + G M m^2 \vec{r} \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r^3} \quad (8.51)$$

Si consideri ora il

- **Problema:** Si dimostri la seguente identità, valida per tre vettori \vec{a} , \vec{b} and \vec{c} .

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \quad (8.52)$$

L'identità (8.52) nel caso in cui $\vec{a} = \vec{r} = \vec{b}$ e $\vec{c} = \vec{p} = m \dot{\vec{r}}$ diventa:

$$\vec{r} \wedge \vec{L} = \vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{p}) = (\vec{r} \cdot \vec{p}) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{p} = m(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{r} - m r^2 \dot{\vec{r}} \quad (8.53)$$

Sostituendo questa identità nella (8.51) otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\mathcal{A}}}{dt} &= -\frac{G M m}{r^3} (m(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{r} - m r^2 \dot{\vec{r}}) + \\ &\quad -G M m^2 \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + G M m^2 \vec{r} \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r^3} = 0 \end{aligned} \quad (8.54)$$

⁴Poiché $r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}$, abbiamo che $\frac{dr^2}{dt} = \frac{d(\vec{r} \cdot \vec{r})}{dt}$. Pertanto $2r \dot{r} = 2\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}$. In definitiva $\dot{r} = \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r}$.

Abbiamo quindi mostrato che il vettore $\vec{\mathcal{A}}$ è costante lungo una traiettoria. $\vec{\mathcal{A}}$ è noto come il vettore di *Laplace-Runge-Lenz*.

Vediamo ora come l'equazioni per le orbite in un campo gravitazionale si possono dedurre dalla conservazione di $\vec{\mathcal{A}}$, senza dover integrare le equazioni della dinamica come invece abbiamo fatto nella sezione precedente.⁵

Consideriamo, come nella sezione precedente, un sistema di coordinate con centro nel sole (Fig.3). La posizione del pianeta più vicina al Sole definisce l'asse delle x e corrisponde alla coordinata angolare $\theta = 0$. Sia $r(\theta)$ la distanza del pianeta dal sole per una coordinata angolare del pianeta θ . Sia $r_{min} = r(0)$ la distanza del pianeta dal sole quando $\theta = 0$ e v_0 il modulo della velocità in quel punto. Calcoliamo $\vec{\mathcal{A}}$ per $\theta = 0$ ovvero nel punto della traiettoria in cui il pianeta ha la distanza minima dal sole. In questo punto della traiettoria \vec{r} , \vec{p} e \vec{L} sono perpendicolari tra loro: il termine

$$\vec{p} \wedge \vec{L} \quad (8.55)$$

è quindi un vettore che punta nella direzione \vec{r} per $\theta = 0$ ovvero lungo l'asse delle x . $\vec{\mathcal{A}}$, per $\theta = 0$, è pertanto dato dalla differenza di due vettori ambedue diretti lungo l'asse delle x : ne consegue che anch'esso sarà diretto lungo x . Ma poiché $\vec{\mathcal{A}}$ è costante lungo la traiettoria, concludiamo che questo rimane vero per qualunque θ

$$\vec{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \vec{e}_x \quad (8.56)$$

dove \vec{e}_x è il vettore di lunghezza unitaria lungo l'asse x . Il modulo \mathcal{A} anche è costante lungo la traiettoria. Può essere valutato per $\theta = 0$

$$\mathcal{A} = m^2 (r_{min} v_0^2 - G M) = \frac{L^2}{r_{min}} - G M m^2 \quad (8.57)$$

Pertanto, per un punto generico della traiettoria

$$\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \vec{r} \cdot \vec{e}_x = r \mathcal{A} \cos \theta \quad (8.58)$$

D'altronde

$$\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{A}} = \vec{r} \cdot (\vec{p} \wedge \vec{L}) - G M m^2 r \quad (8.59)$$

⁵Per questo motivo le grandezze conservate come $\vec{\mathcal{A}}$ si chiamano anche *integrali* del moto.

Sfruttiamo ora la seguente l'identità, valida per tre vettori generici \vec{a}, \vec{b} and \vec{c} .

$$a \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = c \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) \quad (8.60)$$

• **Problema:** Si dimostri l'identità (8.60).

Applichiamo (8.60) al caso $\vec{a} = \vec{r}, \vec{b} = \vec{p}, \vec{c} = \vec{L}$:

$$\vec{r} \cdot (\vec{p} \wedge \vec{L}) = \vec{L} \cdot (\vec{r} \wedge \vec{p}) = \vec{L}^2 \quad (8.61)$$

In definitiva

$$\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{A}} = L^2 - G M m^2 r \quad (8.62)$$

Confrontando con (8.58) otteniamo

$$r \mathcal{A} \cos \theta = L^2 - G M m^2 r \quad (8.63)$$

Da qui deriviamo finalmente l'equazione per l'orbita

$$r(\theta) = \frac{L^2}{\mathcal{A} \cos \theta + G M m^2} = r_{min} \frac{\frac{L^2}{G M m^2 r_{min}}}{\frac{\mathcal{A}}{G M m^2} \cos \theta + 1} \quad (8.64)$$

Poiché

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}}{G M m^2} &= \frac{v_0^2 r_{min}}{G M} - 1 \\ \frac{L^2}{G M m^2 r_{min}} &= \frac{v_0^2 r_{min}}{G M} = \frac{\mathcal{A}}{G M m^2} + 1 \end{aligned} \quad (8.65)$$

concludiamo che l'equazione dell'orbita non dipende dalla massa m del pianeta⁶

$$r(\theta) = \frac{r_{min}}{1 + \left(\frac{G M}{r_{min} v_0^2} - 1\right) (1 - \cos \theta)} = r_{min} \frac{\frac{r_{min} v_0^2}{G M}}{1 + \left(\frac{r_{min} v_0^2}{G M} - 1\right) \cos \theta} \quad (8.66)$$

Introduciamo il parametro adimensionale ϵ

$$\epsilon = \frac{r_{min} v_0^2}{G M} - 1 \quad (8.67)$$

⁶L'equazione (8.66) coincide con la (7.45) ottenuta nella sezione precedente integrando le equazioni del moto.

Quando $\epsilon = 0$, ovvero per

$$v_0^2 = \frac{GM}{r_{min}} \quad (8.68)$$

l'equazione (8.66) diventa l'equazione di un cerchio $r(\theta) = r_{min}$. Riotteniamo il risultato ottenuto in (6.26).

Quando

$$0 < \epsilon < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{GM}{r_{min}} < v_0^2 < \frac{2GM}{r_{min}} \quad (8.69)$$

$r(\theta)$ raggiunge un massimo per $\theta = \pi$

$$r(\pi) = r_{max} = r_{min} \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} \quad (8.70)$$

per poi tornare a r_{min} per $\theta = 2\pi$.

- **Problema:** Dimostrare che l'equazione (8.66) definisce, nel caso (8.69), una ellisse, con un fuoco nell'origine delle coordinate e semi-assi maggiore e minore a e b dati da

$$a = r_{min} \frac{1}{1 - \epsilon} \quad b = r_{min} \frac{\sqrt{1 + \epsilon}}{\sqrt{1 - \epsilon}} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \epsilon^2} \quad (8.71)$$

ϵ è detta l'*eccentricità* dell'ellisse.

Per

$$\epsilon > 1 \quad \Leftrightarrow \quad v_0^2 > \frac{2GM}{r_{min}} \quad (8.72)$$

esiste un angolo θ_{max} per il quale

$$\cos \theta_{max} = -\frac{1}{\epsilon} \quad \text{con} \quad \frac{\pi}{2} < \theta_{max} < \pi \quad (8.73)$$

per il quale la distanza dal sole aumenta senza limiti: nell'intervallo $-\theta_{max} < \theta < \theta_{max}$ il pianeta percorre un'orbita infinita. Per velocità del pianeta maggiori di v_f

$$v_f^2 = \frac{2GM}{r_{min}} \quad (8.74)$$

il pianeta sfugge dunque all'attrazione gravitazionale del sole e si allontana indefinitamente da questo. La velocità v_f è detta velocità di fuga dall'attrazione gravitazionale del corpo di massa M .

- **Problema:** Dimostrare che per $\epsilon > 1$ l'orbita è un ramo di iperbole di cui il sole occupa un fuoco: quello situato all'interno della parte di piano convessa delimitata dal ramo di iperbole.
- **Problema:** Come è l'orbita del pianeta se $\epsilon < 0$?

9 L'eccentricità dell'orbita terrestre

L'asse di rotazione della Terra è inclinato (di circa 23 gradi) rispetto al piano dell'orbita terrestre intorno al sole (quest'ultimo si chiama il piano dell'*eclittica*). Il piano ortogonale all'asse di rotazione della Terra passante per il sole interseca il piano dell'eclittica lungo una retta. L'intersezione di questa retta con l'orbita terrestre determina due punti: questi punti corrispondono agli *equinozi*. La retta ortogonale a questa, giacente sul piano dell'eclittica e passante per il sole interseca l'orbita in altri due punti che corrispondono ai *solstizi*. (Fig. 4). Vogliamo capire perché l'eccentricità dell'orbita terrestre

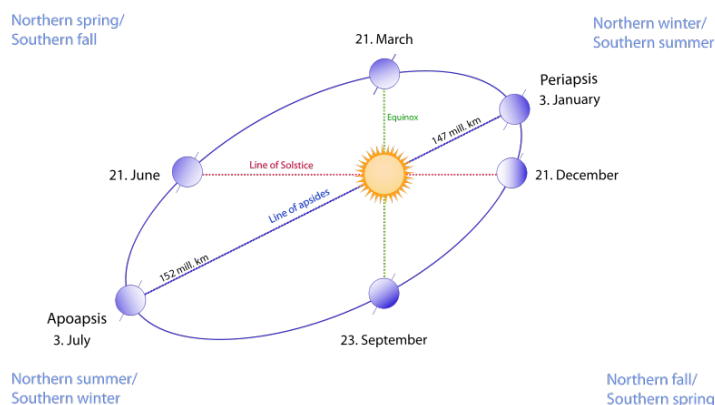


Figura 4: Equinozi e solstizi

rende il tempo tra l'equinozio di Marzo e quelli di Settembre più lungo del tempo tra l'equinozio di Settembre a quello di Marzo.

Si consideri il diametro passante per il sole la cui intersezione con l'orbita terrestre individua gli equinozi. Se l'orbita terrestre fosse circolare ogni diametro passante per il centro, dove si troverebbe il sole, dividerebbe il cerchio dell'orbita di due semi-cerchi di area uguale: per la legge delle aree, i tempi che la terra impiegherebbe a percorrere i due semi-cerchi sarebbero

identici. Se l'orbita ha eccentricità non nulla però, un diametro passante per uno dei fuochi non divide l'ellisse in due parti di uguale area, a meno che non si tratti del diametro che passa per l'altro fuoco.

Il diametro che definisce gli equinozi è quello ortogonale a quello che definisce i solstizi. Dalla figura 4 si nota che il diametro che definisce i solstizi è quasi coincidente con l'asse che passa per i due fuochi: in effetti il solstizio del 21 Dicembre non è molto lontano dal giorno in cui la terra è più vicino al sole, ovvero il 3 Gennaio.

- **Problema:** Si stimi l'eccentricità ϵ dell'orbita terrestre, nell'approssimazione che il perielio (il punto in cui la Terra è più vicina al sole) coincide con il solstizio del 21 Dicembre, sapendo che $0 < \epsilon \ll 1$.

Soluzione: Usiamo un sistema di assi cartesiani (x, y) , rispetto ai quali l'orbita terrestre è definita dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9.75)$$

dove a e b sono i semi-assi, maggiore e minore, dell'ellisse. Supponiamo che il sole si trovi nel punto

$$P_{sole} = (\epsilon a, 0) \quad (9.76)$$

così che la distanza minima della terra dal sole è $a - \epsilon a = r_{min}$ in accordo con la formula (8.71). Nella nostra approssimazione il solstizio corrisponde al punto $(a, 0)$. Pertanto gli equinozi di Marzo e Settembre corrispondono ai punti

$$P_{mar} = (\epsilon a, b\sqrt{1 - \epsilon^2}) \quad P_{sett} = (\epsilon a, -b\sqrt{1 - \epsilon^2}) \quad (9.77)$$

Secondo la legge delle aree, il tempo T_{MS} che la Terra impiega per andare dall'equinozio di Marzo a quello di Settembre è proporzionale all'area $A_<$ della superficie delimitata dall'ellisse con $x < \epsilon a$ mentre il tempo T_{SM} che la Terra impiega per andare dall'equinozio di Settembre a quello di Marzo è proporzionale all'area $A_>$ della superficie delimitata dall'ellisse con $x > \epsilon a$. Dunque

$$\frac{A_< - A_>}{A_< + A_>} = \frac{T_{MS} - T_{SM}}{T_{MS} + T_{SM}} \quad (9.78)$$

D'altro canto

$$A_{<} + A_{>} = \pi a b \quad (9.79)$$

mentre

$$A_{<} - A_{>} = 2 \int_{-\epsilon a}^{\epsilon a} dx b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (9.80)$$

Per $\epsilon \ll 1$, l'integrale è bene approssimato dall'area del rettangolo di lati $2\epsilon a$ e $2b$

$$A_{<} - A_{>} \approx 4\epsilon a b \quad (9.81)$$

Quindi

$$\frac{A_{<} - A_{>}}{A_{<} + A_{>}} \approx \frac{4}{\pi} \epsilon \quad (9.82)$$

In definitiva otteniamo la seguente stima per l'eccentricità dell'orbita terrestre

$$\epsilon \approx \frac{\pi}{4} \frac{T_{MS} - T_{SM}}{T_{MS} + T_{SM}} \quad (9.83)$$

Poiché

$$\begin{aligned} T_{MS} &= (10 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 23) \text{ giorni} = 186 \text{ giorni} \\ T_{SM} &= (7 + 31 + 30 + 31 + 31 + 28 + 21) \text{ giorni} = 179 \text{ giorni} \end{aligned} \quad (9.84)$$

deduciamo

$$\epsilon \approx \frac{\pi}{4} \frac{7}{365} = 0.015 \quad (9.85)$$

in buona approssimazione col valore effettivo $\epsilon = 0.0167$.

10 Alcune applicazioni della legge di gravitazione universale

Abbiamo visto come la legge della gravitazione universale (3.2) spiega tutte e tre le leggi di Keplero. Ma il fatto importante è che questa legge non si

limita a spiegare questi fatti già noti, ma spiega allo stesso tempo fatti che, al tempo di Newton, sembravano completamente distinti.

Già dai tempi di Galileo era noto che un corpo alla superficie della terra cade secondo il moto accelerato uniforme

$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2 \quad (10.86)$$

dove g è l'accelerazione di gravità il cui valore, dalle misure di Galileo, risultava essere

$$g = 9.8 \frac{m}{sec^2} \quad (10.87)$$

D'altro canto, se la forza che agisce sul corpo si massa m che cade sulla superficie della terra è quella dell'attrazione gravitazionale terrestre, abbiamo

$$F = G \frac{M_t m}{R_t^2} = m g \quad (10.88)$$

dove R_t è il raggio della terra. Otteniamo dunque una formula che collega il prodotto della costante di gravitazione universale per la massa della terra con il raggio della terra e l'accelerazione di gravità:

$$G M_t = g R_t^2 \quad (10.89)$$

Naturalmente Newton non disponeva del valore della massa della Terra per poter verificare direttamente la validità di questa formula. Poteva però considerare il moto della luna intorno alla terra. Possiamo applicare la legge della gravitazione universale anche a questo sistema:

$$G \frac{M_t m_l}{r_l^2} = m_l \frac{v^2}{r_l} \quad (10.90)$$

dove adesso m_l è la massa della luna e r_l è il raggio dell'orbita lunare. Poiché

$$v = \frac{2 \pi r_l}{T_l} \quad (10.91)$$

dove T_l è il periodo lunare, otteniamo una

$$\frac{G M_t}{r_l^2} = \frac{4 \pi^2 r_l}{T_l^2} \Rightarrow G M_t = \frac{4 \pi^2 r_l^3}{T_l^2} \quad (10.92)$$

Confrontando (10.92) con (10.89) otteniamo

$$g = 4 \pi^2 \frac{r_l^2}{R_t^2} \frac{r_l}{T_l^2} \quad (10.93)$$

Ora il membro di destra di questa equazione contiene delle grandezze che possono essere misurate indipendentemente dall'accelerazione di gravità e che erano note ai tempi di Newton

$$\begin{aligned} R_t &= 6300 \text{ km} = 6.37 \times 10^6 \text{ m} & r_l &= 384000 \text{ km} = 3.84 \times 10^8 \text{ m} \\ T_l &= 27.3 \text{ giorni} = 2.36 \times 10^6 \text{ sec} \end{aligned} \quad (10.94)$$

Da questi valori otteniamo

$$4 \pi^2 \frac{r_l^2}{R_t^2} \frac{r_l}{T_l^2} = 9.9 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad (10.95)$$

in buon accordo con le misure di Galileo! Ecco quindi collegati tra loro delle misure completamente indipendenti: misure di tipo astronomico (R_t, r_l, T_l) con misure sulla caduta dei gravi sulla superficie terrestre (g)⁷

- **Problema:** Conoscendo il periodo di rotazione $T_t = 3.15581 \times 10^7 \text{ sec}$ della Terra intorno al sole, la sua distanza $r_t = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$ dal sole, con il periodo lunare T_l e la distanza luna-terra, r_l , determinare il rapporto tra la massa del sole M_s e quella della terra M_t .

*Soluzione*⁸:

$$\begin{aligned} G M_t &= \frac{4 \pi^2 r_l^3}{T_l^2} & G M_s &= \frac{4 \pi^2 r_t^3}{T_t^2} \\ \frac{M_s}{M_t} &= \frac{r_t^3}{r_l^3} \frac{T_l^2}{T_t^2} = 3.3 \times 10^5 \end{aligned} \quad (10.96)$$

⁷È interessante notare che Newton fece questo calcolo la prima volta, usando un valore per la distanza terra luna r_l notevolmente impreciso. Questa distanza si ottiene attraverso osservazioni delle eclissi di luna, ed era stata ottenuta per la prima volta da Aristarco di Samo (310 A.C. - 230 A.C). Per questa ragione Newton si convinse che la sua teoria era contraddetta dai fatti sperimentali e non pubblicò i suoi risultati. Quando anni dopo gli astronomi del tempo ottennero un nuovo valore, più preciso per questa distanza, Newton ripeté lo stesso calcolo trovando un ottimo accordo con i dati sperimentali.

⁸ $G M_t = 3.99 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ sec}^{-2}$, $G M_s = 1.33 \times 10^{20} \text{ m}^3 \text{ sec}^{-2}$

Questo problema rende evidente che con misurazioni di tipo puramente astronomico (ovvero misurazione di periodi e distanze) possiamo determinare i rapporti tra le masse dei pianeti, dei satelliti o delle stelle, ma non il valore delle masse di questi. Per poter per esempio misurare il valore della massa della Terra a partire da

$$G M_t = \frac{4 \pi^2 r_l^3}{T_l^2} = 3.99 \times 10^{14} m^3 sec^{-2} \quad (10.97)$$

dobbiamo determinare il valore di G . Per questo, quanto Cavendish realizzò la sua famosa esperienza che per la prima volta determinò il valore di G riportato in Eq. (3.3), affermò di aver “pesato la Terra”.

Una volta acquisita la convinzione della validità della legge di Newton, il risultato fu usato per determinare altre quantità fisiche e comprendere un gran numero di nuovi fenomeni. Fra questi citiamo soltanto:

- La determinazione della velocità della luce da parte di Roemer (1644-1710): l’osservazione delle discrepanze tra le apparizioni delle lune di Giove rispetto ai tempi previsti dalla legge di Newton a seconda della posizione della Terra rispetto a Giove, che fu attribuita, correttamente, da Roemer alla differenza tra i tempi che la luce impiega per raggiungere la Terra da Giove quando la Terra è in punti opposti della sua orbita rispetto a Giove. Questo fu il primo metodo corretto per determinare la velocità della luce.
- La discrepanza tra l’orbita osservata di Urano e quella prevista attraverso le leggi di Keplero fu attribuita correttamente all’esistenza di un nuovo pianeta, Nettuno, che la cui posizione fu prevista effettuando calcoli precisi (eseguiti indipendentemente da Le Verriers (1811-1877) e da Adams (1819-1892)) delle perturbazioni alle orbite ellittiche prodotti da altri pianeti. (Fig. 5).

11 La curva di rotazione delle galassie e la materia oscura

Le stelle ruotano intorno al centro delle galassie in maniera simile a come i pianeti ruotano intorno al sole. Consideriamo una stella ad una distanza

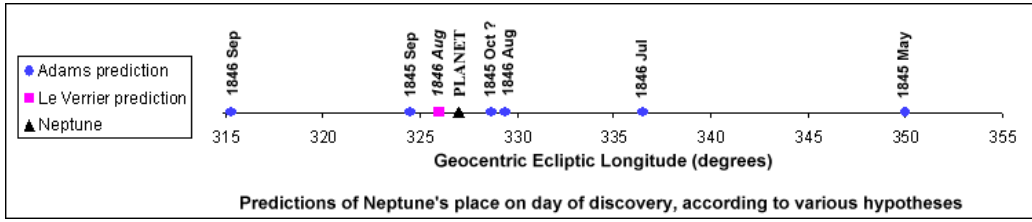


Figura 5: La scoperta di Nettuno

r dal centro della galassia, che orbita circolarmente intorno al centro con una velocità $v(r)$; sia $M(r)$ la massa della galassia all'interno di una sfera di raggio r . La legge di gravitazione universale implica che

$$G \frac{M(r)}{r^2} = \frac{v(r)^2}{r} \Rightarrow v(r) = \sqrt{\frac{G M(r)}{r}} \quad (11.98)$$

Possiamo immaginare che la funzione $M(r)$ abbia il seguente comportamento come funzione della distanza r dal centro

$$M(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} \rho_0 r^3 & \text{per } r \rightarrow 0 \text{ molto all'interno della galassia} \\ M_0 & \text{for } r \rightarrow \infty \text{ sufficientemente grande} \end{cases} \quad (11.99)$$

Conseguentemente la legge di gravitazione universale prevede

$$v(r) = \begin{cases} r \sqrt{\frac{4\pi G}{3} \rho_0} & \text{per } r \rightarrow 0, \text{ cioè molto all'interno della galassia} \\ \frac{\sqrt{G M_0}}{\sqrt{r}} & \text{per } r \rightarrow \infty, \text{ cioè sufficientemente grande} \end{cases} \quad (11.100)$$

Alla fine degli anni '60, Vera Rubin misurò in maniera sistematica le curve di rotazione $v(r)$ per un gran numero di galassie: i suoi risultati (confermati da numerosi studi successivi) sono riportati nel grafico sottostante, insieme alla predizione newtoniana. Le velocità delle stelle lontano dal centro delle galassie sono enormemente più grandi di quello che sarebbe previsto dalla legge di Newton se la massa della galassia fosse solo ed esclusivamente quella visibile.

- **Problema:** Quale deve essere la densità di massa $\rho(r)$ a grande distanza dal centro per conciliare l'osservazione sperimentale che le velocità delle stelle tendono ad una velocità costante v_0 e la legge di gravitazione universale?

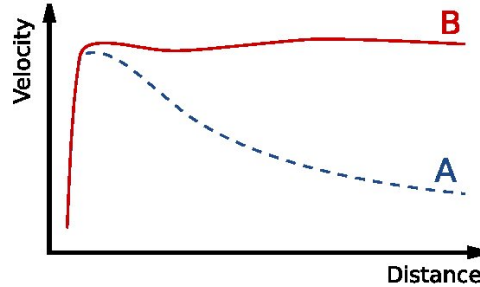


Figura 6: Le curve di rotazione di una galassia a spirale tipica: teorica (A) e osservata (B)

Soluzione:

$$\rho_{\text{materia oscura}}(r) = \frac{3}{4\pi G} \frac{v_0^2}{r^2} \quad (11.101)$$

L'ipotesi generalmente condivisa oggi dai fisici per spiegare i profili osservati delle velocità delle galassie è quella della *materia oscura*: ovvero l'ipotesi che esiste un alone di materia non osservata intorno alle galassie. La materia oscura non è ancora stata osservata direttamente. Alcuni (pochi) fisici ritengono invece più convincente l'ipotesi che la teoria della gravità vada modificata. La questione è uno dei problemi aperti della fisica contemporanea.

- **Problema:** Come potrebbe essere modificata la legge di gravitazione universale per spiegare i profili delle velocità delle galassie osservati senza introdurre l'ipotesi della materia oscura?

12 L'orbita di Mercurio

Nel 1858 Urbain Le Verrier osservò che la lenta precessione dell'orbita di Mercurio non può essere spiegata completamente dalla meccanica Newtoniana e dalle perturbazioni dei pianeti noti. Egli suggerì, tra le spiegazioni possibili, l'esistenza di altro pianeta con un'orbita ancora più prossima al sole. Questo ipotetico pianeta (chiamato Vulcano) non fu mai osservato.

La precessione del perielio di Mercurio è di 5600 arco-secondi⁹ (1.5556 gradi) per secolo relativamente alla Terra. La dinamica di Newton, tenendo conto degli effetti di tutti gli altri pianeti, predice una precessione di 5557 arco-secondi (1.5436 gradi) per secolo.

All'inizio del 20-esimo secolo la teoria della relatività di Einstein ha fornito una spiegazione della precessione osservata. È un effetto molto piccolo: 42.98 arco-secondi per secolo. Effetti simili ma più piccolo valgono per gli altri pianeti: 8.62 arco-secondi per secolo per Venere, 3.84 per la Terra, 1.35 per Marte. Nella sezione successiva discuteremo le ragioni fisiche della modifica einsteiniana alla legge della gravitazione universale e stimeremo gli effetti relativistici sulla precessione del perielio di Mercurio.

13 Azione a distanza: il concetto di campo

L'energia cinetica di un pianeta che si muove sotto l'azione del sole lungo un'orbita ellittica non è costante lungo l'orbita:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) &= m \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \vec{F} = - \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \frac{G m M}{r^2} = \\ &= - \frac{dr}{dt} \frac{G m M}{r^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{G m M}{r} \right) \end{aligned} \quad (13.102)$$

La grandezza

$$E = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - \frac{G m M}{r} \quad (13.103)$$

è dunque una costante del moto

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad (13.104)$$

E è detta l'energia *totale* del corpo: è la somma dell'energia cinetica e dell'energia *potenziale*

$$V(r) = - \frac{G m M}{r} \equiv m \Phi(r) \quad \Phi(r) = - \frac{G M}{r} \quad (13.105)$$

$\Phi(r)$ viene chiamato il *potenziale gravitazionale* generato dalla massa M (il sole) nel punto dello spazio di coordinate r .

⁹1 secondo d'arco od arco-secondo è $\frac{1}{3600}$ di grado.

- **Problema:** Si consideri un corpo sulla superficie terrestre. Qual'è la velocità minima necessaria affinché esso possa lasciare la Terra? Si utilizzi il principio di conservazione dell'energia totale. Si confronti il risultato col'equazione (8.74) ottenuta risolvendo le equazioni del moto.

Il concetto di energia potenziale permette di formulare la legge di gravitazione universale in un modo che non fa uso del concetto di *azione a distanza*. In questa formulazione alternativa, il potenziale $\Phi(r)$ è una funzione che assume un determinato valore in ogni punto dello spazio e la forza gravitazionale che è esercitata un corpo (un pianeta) di massa m che si trova in un punto r dello spazio, è proporzionale alla massa del corpo m e al gradiente del potenziale:

$$\vec{F}(r) = -m \vec{\nabla} \Phi(r) \quad (13.106)$$

Naturalmente se dichiarassimo semplicemente che il potenziale si ottiene dalla (13.105), avremmo di nuovo la legge della gravitazione universale nella sua formulazione originaria, ovvero saremmo ritornati al concetto di azione a distanza.

Ma invece di postulare la formula (13.105), possiamo piuttosto assumere la seguente equazione differenziale per $\Phi(r)$:

$$\Delta \Phi(r) = 4 \pi G \rho(r) \quad (13.107)$$

dove $\rho(r)$ è la densità di massa del corpo che genera il campo gravitazionale (il sole nell'esempio da cui siamo partiti) e Δ è il *laplaciano*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (13.108)$$

È possibile dimostrare che l'equazione (13.107) è perfettamente equivalente alla legge di gravitazione universale (13.105).

- **Problema:** Si dimostri che il laplaciano quando agisce sulle funzioni che dipendono dal raggio r diventa

$$\Delta \Phi(r) = \frac{d^2 \Phi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr} \quad (13.109)$$

Si verifichi anche che il potenziale di Newton soddisfa l'equazione (13.107).

Ora l'equazione (13.107) determina $\Phi(r)$ in un punto r dalla sua conoscenza in una regione di spazio infinitamente vicina a r : si tratta cioè di una equazione *locale*. In questa formulazione, dunque, la descrizione dell'interazione gravitazionale è puramente *locale*. Il sole genera un potenziale nello spazio circostante, e questo potenziale a sua volta determina, attraverso l'equazione (13.107), il potenziale in altri punti dello spazio infinitamente vicini, e così, continuando in tutto lo spazio, fino al punto in cui si trova il pianeta di massa m . In questo modo la forza sul pianeta è “trasmessa” attraverso lo spazio localmente, senza far uso del concetto di azione a distanza.

Benché le due formulazioni, quella basata sull'azione a distanza (13.105) e quella basata sull'equazione di Poisson (13.107), siano equivalenti nel contesto della meccanica classica, soltanto la seconda formulazione può essere estesa al caso relativistico. Il principio di relatività infatti asserisce che nessun segnale fisico può propagarsi a velocità maggiore della velocità della luce. Il concetto di azione a distanza, pertanto, è incompatibile col principio di relatività. In una teoria della gravitazione relativistica l'effetto di uno spostamento della massa che genera il campo gravitazionale non si propaga istantaneamente in un punto a distanza r ma viaggia alla velocità della luce.

Proviamo a stimare l'importanza degli effetti relativistici sulle orbite dei pianeti del sistema solare. La velocità di un pianeta che orbita (circolarmente) a distanza r dal sole è, come abbiamo visto più volte,

$$v^2 = \frac{G M_s}{r} \quad (13.110)$$

Gli effetti relativistici saranno proporzionali al fattore

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{G M_s}{c^2 r} \quad (13.111)$$

Abbiamo

$$\frac{G M_s}{c^2} = 1.4 \times 10^3 m \quad (13.112)$$

Dalla formula (13.111) risulta che gli effetti relativistici sono inversamente proporzionali al raggio dell'orbita del pianeta, e quindi massimi per Mercurio. Il raggio dell'orbita di Mercurio è ¹⁰

$$r_{mercurio} = 5.79 \times 10^{10} m \quad (13.113)$$

¹⁰Contrariamente agli altri pianeti, l'orbita di Mercurio è piuttosto ellittica: la sua eccentricità è $\epsilon = 0.205$. Il valore riportato corrisponde al semi-asse maggiore dell'orbita.

che corrisponde al rapporto

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{G M_s}{c^2 r_{mercurio}} \approx 0.255 \times 10^{-7} \quad (13.114)$$

Anche per Mercurio, pertanto, ci si aspetta che le correzioni previste dalla teoria di Einstein siano piccole. Proviamo a stimare, in maniera grossolana, la loro entità.

Sia $\Delta\theta_{periodo}$ l'angolo di cui si sposta il perielio dell'orbita dopo un periodo di rivoluzione. Questo angolo è nullo per la gravità newtoniana: per velocità del pianeta v piccole rispetto alla velocità della luce ci aspettiamo che le correzioni einsteiniane a questo valore siano proporzionali al rapporto (13.114) ovvero che

$$\Delta\theta_{periodo}^{einstein} \propto 2\pi \frac{v^2}{c^2} = 2\pi \frac{G M_s}{c^2 r} \quad (13.115)$$

se misuriamo l'angolo in radianti. Naturalmente, questa formula, è solo una *stima*: la formula esatta potrebbe contenere dei fattori moltiplicativi numerici che devono essere calcolati risolvendo le equazioni di Einstein. Ma se, come è ragionevole assumere, questi fattori numerici sono dell'ordine dell'unità, la (13.115) dovrebbe fornire l'ordine di grandezza delle correzioni relativistiche alla dinamica newtoniana. Inserendo il valore (13.113) per il raggio dell'orbita di Mercurio otteniamo dunque il seguente ordine di grandezza

$$\Delta\theta_{periodo}^{einstein} \sim 2\pi \frac{G M_s}{c^2 r} = 1.6 \times 10^{-7} \text{ radianti} \quad (13.116)$$

Confrontiamo questa stima con le osservazioni sperimentali. Abbiamo menzionato che la precessione anomala di Mercurio osservata (ovvero non spiegabile in termine delle influenze newtoniane degli altri pianeti) è di 42 arco-secondi per secolo. Poiché il periodo di Mercurio è

$$T_{mercurio} = 87.969 \text{ giorni} \quad (13.117)$$

la precessione del perielio dopo ogni periodo dell'orbita, espressa in radianti, è

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{periodo}^{osservata} &= 42 \times \frac{1}{3600} \times \frac{2\pi}{360} \times \frac{1}{100} \times \frac{87.969}{365} = \\ &= 4.91 \times 10^{-7} \text{ radianti} \end{aligned} \quad (13.118)$$

Vediamo dunque che l'entità correzioni relativistiche sono proprio dell'ordine di grandezza della precessione anomala osservata!

Le equazioni della teoria della relatività generale di Einstein determinano il fattore numerico che va inserito nella (13.115). La formula esatta (che non è derivabile purtroppo con i metodi elementari che stiamo usando) risulta avere un fattore 3 rispetto alla stima che abbiamo derivato con semplici considerazioni dimensionali

$$\Delta\theta_{periodo}^{einstein} = 6\pi \frac{v^2}{c^2} = 6\pi \frac{GM_s}{c^2 r} = 4.8 \times 10^{-7} \text{ radianti} \quad (13.119)$$

un valore molto vicino a quello osservato.¹¹

Concludiamo con una ulteriore osservazione: abbiamo visto che la velocità di fuga nel campo gravitazionale di un corpo di massa M è definita dalla relazione

$$v_{fuga}^2 = \frac{2GM}{r} \quad (13.121)$$

dove r è la distanza dalla sorgente gravitazionale. Nella teoria della relatività di Einstein esiste una velocità massima c , quella della luce. Pertanto un corpo che si trova ad una distanza r dalla sorgente gravitazionale tale che

$$\frac{2GM}{r} \geq c^2 \quad (13.122)$$

non potrà allontanarsi all'infinito. Tutti gli oggetti fisici che si trovano dentro una sfera di raggio pari al valore

$$r_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (13.123)$$

saranno intrappolati nel campo gravitazionale generato dalla massa M . r_S è chiamato il raggio di Schwarzschild associato alla massa M .

- **Problema** Si calcolino i raggi di Schwarzschild per la terra ed il sole.

Soluzione: Per la terra $r_S = 8.9 \times 10^{-3} m$, per il sole $r_S = 2.9 \times 10^3 m$.

¹¹Poiché l'orbita di Mercurio è considerevolmente ellittica, la formula esatta che si ottiene dalle equazioni di Einstein è leggermente diversa dalla (13.119), e dipende anche dall'eccentricità dell'orbita

$$\Delta\theta_{periodo}^{rel} = 6\pi \frac{GM_s}{c^2 a} \frac{1}{1 - \epsilon^2} \quad (13.120)$$

dove a è il semi-asse maggiore e ϵ l'eccentricità dell'orbita. La previsione di Einstein per la precessione anomala di Mercurio è pertanto $\Delta\theta_{periodo} = 5.0 \times 10^{-7} \text{ radianti}$.

Naturalmente nelle situazioni fisiche reali la massa M , non sarà concentrata nell'origine bensì avrà una certa estensione spaziale. Gli oggetti la cui estensione spaziale R è minore del raggio di Schwarzschild associato sono chiamati *buchi neri*

$$R < \frac{2GM}{c^2} \quad (13.124)$$

La ragione di questo nome è che perfino la luce emessa dalla superficie di un oggetto di questo tipo non può, secondo la teoria di Einstein, sfuggire all'attrazione gravitazionale del corpo.

14 La legge di Coulomb

Anche la forza tra due cariche elettriche *statiche* segue la legge dell'inverso del quadrato della distanza:

$$F_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.0 \times 10^9 \text{ kg m}^3 \text{ sec}^{-2} \text{ C}^{-2} \quad (14.125)$$

Ci sono delle importanti differenze tra la legge di Coulomb (14.125) e quella della gravitazione universale:

- Per cominciare, poichè le cariche elettriche, al contrario delle masse, possono essere sia positive che negative, la forza elettrica può essere sia attrattiva che repulsiva.
- Inoltre risulta che tutte le cariche osservate sono un multiplo *intero*, positivo o negativo, di una carica fondamentale e

$$q_1 = n_1 e \quad q_2 = n_2 e \quad e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (14.126)$$

— e è la carica di un elettrone, ed e è la carica di un protone, e queste due cariche sono *esattamente* uguali — non semplicemente molto vicine tra loro.

- Ci si può domandare quanto sia intensa la forza elettrica rispetto alla forza di gravità tra due elettroni (o tra due protoni) posti ad una data distanza r tra loro.

$$\frac{F_g}{F_e} = \frac{G m_e^2}{e^2} 4\pi\epsilon_0 \quad (14.127)$$

dove $m_e = 0.9 \times 10^{-30} \text{ kg}$ è la massa dell'elettrone. Inserendo i valori numerici otteniamo

$$\frac{F_g}{F_e} = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 0.9^2 \times 10^{-60}}{1.6^2 \times 10^{-38}} \frac{1}{9.0 \times 10^9} = 2.3 \times 10^{-43} \quad (14.128)$$

che è un numero straordinariamente piccolo. Non abbiamo nessuna comprensione del *perché* questo numero sia così piccolo. Ma questo fatto numerico spiega perché nella stragrande maggioranza dei fenomeni atomici e microscopici la gravità sia una forza assolutamente trascurabile.

15 Le orbite degli elettroni

Il modello di Rutherford per gli atomi è un modello di tipo planetario, con il nucleo, carico positivamente, al posto del sole, e gli elettroni al posto dei pianeti. La massa di un protone è molto più grande di quella di un elettrone

$$m_p \approx 1836 m_e \quad (15.129)$$

e quindi, analogamente al nostro sistema solare, possiamo, con buona approssimazione, pensare che il nucleo rimanga fermo e gli elettroni gli ruotino intorno.

Consideriamo l'atomo più semplice: quello di idrogeno, con un solo elettrone che ruota intorno ad un nucleo composto da un singolo protone. Le equazioni del moto, per orbite circolari, sono analoghe a quelle per il sistema solare

$$\frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \quad (15.130)$$

da cui

$$v^2 = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 m_e} \frac{1}{r} \quad (15.131)$$

L'energia E dell'elettrone è

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r} = -\frac{1}{2} m_e v^2 = -\frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{2r} \quad (15.132)$$

o equivalentemente

$$r = \frac{e^2}{8 \pi \epsilon_0 |E|} \quad (15.133)$$

Il (modulo del) momento angolare L è

$$L = r m_e v = \sqrt{\frac{e^2 m_e r}{4 \pi \epsilon_0}} \quad (15.134)$$

Vediamo quindi che l'energia, il momento angolare, la velocità dell'elettrone sono determinati solo quando si assegna il raggio dell'orbita: un fatto che conosciamo bene dalla discussione del moto dei pianeti. Sappiamo che esistono un numero infinito di orbite (circolari) possibili, che sono determinate una volta assegnata l'energia, o il momento angolare.

Questo pone un problema molto serio per il modello di Rutherford. Dalla chimica si sa che tutti gli atomi di un certo tipo — diciamo tutti gli atomi di idrogeno — nelle stesse condizioni di temperatura, pressione etc, sono uguali tra loro. In particolare sembrano avere tutti la stessa dimensione. Nel modello planetario questo vorrebbe dire quindi che gli elettroni di tutti gli atomi di idrogeno ruotano intorno al nucleo con la stessa energia. Ma quale sarebbe questa energia “preferita”? L'esistenza di una energia preferita certamente sembra qualcosa che non ha nessun equivalente nel caso delle orbite dei pianeti. E perché gli elettroni non cascano nel nucleo? È il problema della “stabilità” delle dimensioni atomiche.

- **Problema:** Si dimostri che non è possibile costruire una lunghezza a partire da e and m_e .

La soluzione di questo problema non avvenne in un singolo passo: fu piuttosto il lento risultato di un processo tortuoso in cui una serie di idee proposte per spiegare un insieme di fenomeni apparentemente diversi tra loro, furono alla fine sintetizzate in un quadro concettuale coerente.

Un ingrediente essenziale in questo processo fu l'osservazione sperimentale degli spettri di emissione e di assorbimento degli atomi. Si constatò che gli atomi non emettono o assorbono luce di frequenza arbitraria, ma solo in corrispondenza a certe frequenze *discrete*. Nel caso dell'idrogeno, per esempio, diventò chiaro che le frequenze $\nu_{n,m}$ della luce assorbita o emessa erano organizzate in righe spettrali catturate da una formula del tipo

$$\nu_{n,m} = c R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad n, m = 1, 2, 3, \dots \quad (15.135)$$

dove R_H è una costante, detta costante di Rydberg per l'idrogeno, che fu possibile misurare con grandissima precisione

$$R_H = 1.0967760 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (15.136)$$

Formule analoghe alla (15.135) furono trovate per gli spettri di altri elementi chimici, anche se non erano così semplici e così accurate come quella per l'idrogeno.

Negli stessi anni, A. Einstein (1879-1955), per spiegare il fenomeno dell'effetto fotoelettrico, introdusse l'ipotesi che l'assorbimento e l'emissione di luce da parte degli elettroni avvenisse in "pacchetti", che furono chiamati *fotoni*. L'idea era che, fissata la frequenza ν della luce, lo scambio di energia tra questa ed un elettrone potesse avvenire in pacchetti, tutti della stessa energia proporzionali alla frequenza

$$E = h \nu \quad (15.137)$$

In altre parole, Einstein postulò che non fosse possibile per l'elettrone assorbire o emettere una quantità arbitraria di energia elettromagnetica di frequenza ν : questo scambio doveva avvenire necessariamente per multipli di $h \nu$. La costante di proporzionalità h ha le dimensioni di *massa* \times *lunghezza*² \times *tempo*⁻¹. Attraverso le misure dell'effetto fotoelettrico, il valore numerico di h risultò essere

$$h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg/sec} \quad (15.138)$$

N. Bohr (1885-1962) capì che l'ipotesi dei fotoni poteva spiegare il carattere discreto degli spettri di assorbimento ed emissioni atomici (15.135) se si fosse postulato che non tutte le orbite degli elettroni erano permesse, ma solo quelle con energie discrete

$$E_n = -\frac{h c R_H}{n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (15.139)$$

Il processo di assorbimento od emissione di energia elettromagnetica di elettrone dell'atomo di idrogeno orbita intorno al nucleo viene allora interpretato da Bohr come il passaggio da un'orbita di energia E_n ad un'altra di energia E_m : corrispondentemente l'energia elettromagnetica assorbita od emessa doveva corrispondere, per la relazione di Einstein, alle frequenze

$$\nu_{n,m} = \frac{E_m - E_n}{h} = c R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (15.140)$$

Questa ipotesi spiegava anche la stabilità delle dimensioni dell'atomo di idrogeno. In effetti la relazione (15.133) implica che anche i raggi delle orbite “permesse” sono discreti

$$r_n = \frac{e^2}{8 \pi \epsilon_0 h c R_H} n^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (15.141)$$

Esiste dunque un'orbita di energia più bassa, quella con $n = 1$ il cui raggio è il più piccolo possibile

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{2} \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 h c R_H} = \frac{1}{4 \pi} \frac{1}{137} \frac{1}{1.0967760 \times 10^7} m = \\ &= 0.53 \times 10^{-10} m \end{aligned} \quad (15.142)$$

Questo numero è dell'ordine di grandezza corretto per poter accordarsi con i risultati sulle dimensioni dell'atomo di idrogeno che si inferiscono dagli esperimenti di diffusione, di chimica etc.

L'ipotesi di Bohr sembrava dunque andare nella giusta direzione. Ma cosa c'era di così speciale nelle orbite con energie E_n in Eq. (15.139)? Perché queste erano permesse e non altre? Capire questo era essenziale per poter fare ulteriori progressi: la formula spettroscopica (15.135) era infatti valida solo per l'idrogeno, per atomi diversi si trovavano formule diverse e molto più complicate.

La scoperta della “regola” generale che individuava fra tutte le orbite classiche quelle “permesse” richiedeva un salto d'immaginazione. Bohr ebbe l'idea di calcolare il momento angolare L per le orbite permesse. Dalla Eq. (15.134) si ottiene

$$L_n = \sqrt{\frac{e^2 m_e r_n}{4 \pi \epsilon_0}} = n \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0} \sqrt{\frac{m_e}{2 h c R_H}} \quad (15.143)$$

Il momento angolare delle orbite permesse è dunque un multiplo intero di un momento angolare fondamentale: il fatto che la nuova costante fisica h (introdotta da Einstein e, prima ancora, da Planck) avesse proprio le dimensioni di un momento angolare, suggerì a Bohr l'idea che questo momento angolare fondamentale dovesse essere identificato precisamente con $\frac{h}{2\pi}$

$$\frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0} \sqrt{\frac{m_e}{2 h c R_H}} = \frac{h}{2 \pi} \equiv \hbar \quad (15.144)$$

Questa relazione permette di esprimere la costante di Rydberg in termini di costanti fisiche fondamentali:

$$R_H = \frac{e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{m_e}{4\pi^2 \hbar^3 c} \quad (15.145)$$

Inserendo i valori numerici di e, m, c, \hbar otteniamo

$$R_H^{teorico} = 1.0973700 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (15.146)$$

in stupefacente accordo col valore (15.136) ottenuto dalle osservazioni spettroscopiche. Le orbite “permesse” sembravano dunque essere caratterizzate da una condizione molto semplice

$$L_n = n \hbar \quad (15.147)$$

Quest'unica *regola di quantizzazione*, valida per tutti gli atomi, permetteva di esprimere lo spettro dell'idrogeno ed il raggio di un atomo di idrogeno in termini di costanti fondamentali

$$\begin{aligned} r_1 \equiv a_{Bohr} &= \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m e^2} \\ E_n &= -\frac{1}{2} \frac{1}{n^2} \frac{e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{m_e}{\hbar^2} \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (15.148)$$

Si trattava di capire, a questo punto, da dove discendesse la misteriosa regola di quantizzazione del momento angolare: se questa potesse a sua volta essere derivata da principi fisici più fondamentali.

- **Problema:** Si applichi la condizione di quantizzazione di Bohr (15.147) ad un satellite di massa $m = 1 \text{ kg}$ orbitante circolarmente intorno alla Terra. Si determinino i raggi permessi in termini della massa della terra M_t e G . Si supponga che il satellite si trovi su un'orbita circolare di raggio vicino a quello della Terra $R_t = 6400 \text{ km}$, con un dato numero intero \bar{n} . Di quanto varia il raggio dell'orbita se il satellite si sposta su una orbita con $n = \bar{n} + 1$?

Soluzione: Sappiamo che le equazioni di Newton danno

$$v^2 = \frac{GM}{r} \quad (15.149)$$

La condizione di quantizzazione di Bohr dà

$$m r v = m \sqrt{G M r} = n \hbar \quad (15.150)$$

ovvero

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{G M m^2} \quad (15.151)$$

Se n cambia da $n \rightarrow n + \Delta n = n + 1$, la variazione del raggio è

$$\Delta r_n = r_{n+1} - r_n \approx \frac{2 n \Delta n \hbar^2}{G M m^2} = \frac{2 \Delta n r_n}{n} = \frac{2 r_n}{n} \quad (15.152)$$

Pertanto

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{G M m^2} \approx R \Leftrightarrow n^2 \approx \frac{G M R m^2}{\hbar^2} = \frac{g m^2 R^3}{\hbar^2} \quad (15.153)$$

dove $g = \frac{G M}{R^2} \approx 9.8 \frac{m}{sec^2}$ è l'accelerazione di gravità. Quindi

$$n^2 \approx \frac{9.8 \times 1^2 \times 6.4^3 \times 10^{18}}{1.05^2 \times 10^{-68}} \approx 24 \times 10^{88} \Rightarrow n \approx 5 \times 10^{44} \quad (15.154)$$

e

$$\Delta r_n \approx \frac{2}{5 \times 10^{44}} \times 6.4 \times 10^6 m \approx 2.6 \times 10^{-38} m \quad (15.155)$$

In altre parole, per un oggetto macroscopico come un satellite, la condizione di quantizzazione di Bohr dà risultati indistinguibili da quelli della fisica classica: i raggi di orbite permesse successive differiscono tra loro per una quantità minuscola e quindi, in pratica, in questi contesti, il raggio può essere considerato come una variabile continua.

A Raccolta dei problemi inseriti nel testo

- **Problema:** Si dimostri che nel caso di forze interne il momento totale della forza è nullo.
- **Problema:** Si cerchi di capire in che modo la conservazione del momento angolare spieghi la forma a spirale di molte galassie.
- **Problema:** A che altezza deve essere posto un satellite terrestre geostazionario su un'orbita circolare?
- **Problema:** Si dimostri la seguente identità, valida per tre vettori \vec{a} , \vec{b} and \vec{c} .

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \quad (\text{A.156})$$

- **Problema:** Si dimostri l'identità

$$a \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = c \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) \quad (\text{A.157})$$

- **Problema:** Dimostrare che l'equazione

$$r(\theta) = r_{min} \frac{1 + \epsilon}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (\text{A.158})$$

definisce, per $0 < \epsilon < 1$, una ellisse, con un fuoco nell'origine delle coordinate e semi-assi maggiore e minore a e b dati da

$$a = r_{min} \frac{1}{1 - \epsilon} \quad b = r_{min} \frac{\sqrt{1 + \epsilon}}{\sqrt{1 - \epsilon}} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \epsilon^2} \quad (\text{A.159})$$

ϵ è detta l'*eccentricità* dell'ellisse

- **Problema:** Come è l'orbita del pianeta se $\epsilon < 0$?
- **Problema:** Si stimi l'eccentricità ϵ dell'orbita terrestre, nell'approssimazione che il perielio (il punto in cui la Terra è più vicina al sole) coincide con il solstizio del 21 Dicembre, sapendo che $0 < \epsilon \ll 1$.

- **Problema:** Si derivi la terza legge di Keplero per orbite ellittiche partendo dalla equazione per la traiettoria (7.47) e la conservazione del momento angolare (7.29)
- **Problema:** Conoscendo il periodo di rotazione $T_t = 3.15581 \times 10^7 \text{ sec}$ della Terra intorno al sole, la sua distanza $r_t = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$ dal sole, con il periodo lunare T_l e la distanza luna-terra, r_l , determinare il rapporto tra la massa del sole M_s e quella della terra M_t .
- **Problema:** Quale deve essere la densità di massa $\rho(r)$ a grande distanza dal centro per conciliare l'osservazione sperimentale che le velocità delle stelle tendono ad una velocità costante v_0 e la legge di gravitazione universale?
- **Problema:** Come potrebbe essere modificata la legge di gravitazione universale per spiegare i profili delle velocità delle galassie osservati senza introdurre l'ipotesi della materia oscura?
- **Problema:** Si consideri un corpo sulla superficie terrestre. Qual'è la velocità minima necessaria affinché esso possa lasciare la Terra? Si utilizzi il principio di conservazione dell'energia totale.
- **Problema:** Si dimostri che il laplaciano quando agisce sulle funzioni che dipendono dal raggio r diventa

$$\Delta\Phi(r) = \frac{d^2\Phi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr} \quad (\text{A.160})$$

- **Problema** Si calcolino i raggi di Schwarzschild per la terra ed il sole.
- **Problema:** Si dimostri che non è possibile costruire una lunghezza a partire da e and m_e .
- **Problema:** Si applichi la condizione di quantizzazione di Bohr (15.147) ad un satellite di massa $m = 1 \text{ kg}$ orbitante circolarmente intorno alla Terra. Si determinino i raggi permessi in termini della massa della terra M_t e G . Si supponga che il satellite si trovi su un'orbita circolare di raggio vicino a quello della Terra $R_t = 6400 \text{ km}$, con un dato numero intero \bar{n} . Di quanto varia il raggio dell'orbita se il satellite si sposta su una orbita con $n = \bar{n} + 1$?