

Un'introduzione alla meccanica quantistica per le secondarie

Camillo Imbimbo

Genova, Gen-Feb, 2016

Progetto Lauree Scientifiche
Dipartimento di Fisica dell'Università di Genova
<https://www.ge.infn.it/imbimbo/PLS2016/>

- **Lezione 1:** La crisi della fisica classica
 - La stabilità dell'atomo
 - L'effetto fotoelettrico
 - L'effetto Compton
 - Gli spettri atomici
- **Lezione 2:** Il dualismo onda-particella
 - L'atomo di Bohr
 - La lunghezza d'onda di De Broglie
 - La diffrazione delle particelle
 - La regola di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld
- **Lezione 3:** La Meccanica Statistica
 - La distribuzione di Boltzmann
 - Il teorema di equipartizione e i calori specifici
 - La meccanica statistica quantistica
 - Il corpo nero e la catastrofe ultravioletta
 - La distribuzione di Planck

- **Lezione 4:**
 - Il principio di indeterminazione
 - La funzione d'onda
 - L'equazione di Schrödinger

Quarta lezione

Una teoria di successo ma insoddisfacente

- Nonostante il successo della teoria di Bohr-Sommerfeld nello spiegare un gran numero di fatti sperimentali, la teoria non sembra completamente soddisfacente sul piano logico.
- Quello che abbiamo visto nelle sezioni precedenti è che ci sono alcune situazioni fisiche in cui le onde elettromagnetiche manifestano un comportamento **corpuscolare** (effetto fotoelettrico, effetto Compton) ed altre situazioni fisiche in cui le particelle come gli elettroni esibiscono una natura **ondulatoria** (esperimento di Davisson e Germer).

Il dualismo onda-corpuscolo

- Ma i due concetti fisici — quello di onda e quello di particella — sembrano, a prima vista, essere non soltanto molto diversi tra loro, ma per certi versi, **incompatibili**.
- Vogliamo approfondire questo apparente conflitto fra comportamento ondulatorio e comportamento corpuscolare per capire in che modo la meccanica quantistica evita una potenziale contraddizione logica ¹.

¹La discussione che segue è largamente ispirata da quella in *La Fisica di Feynman*, Vol. 3, di R. P. Feynman, R. B. Leighton e M. Sands,(1975) Inter European Editions, B.V.

L'esperimento delle due fenditure

- Il fenomeno caratteristico delle onde, che più chiaramente evidenzia la differenza con le particelle, è quello della **diffrazione**.
- Consideriamo pertanto uno schermo con due fenditure A e B ed una sorgente posta da un lato dello schermo ed un rivelatore costituito da un piano posto ad una distanza L dall'altro lato dello schermo con le due fenditure.

L'esperimento con le due fenditure per palline classiche

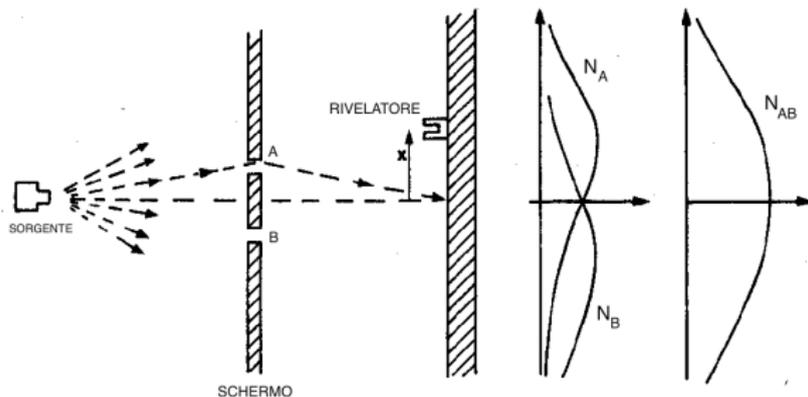


Figura 1: Un esperimento con palline classiche.

L'esperimento con le due fenditure per delle onde classiche

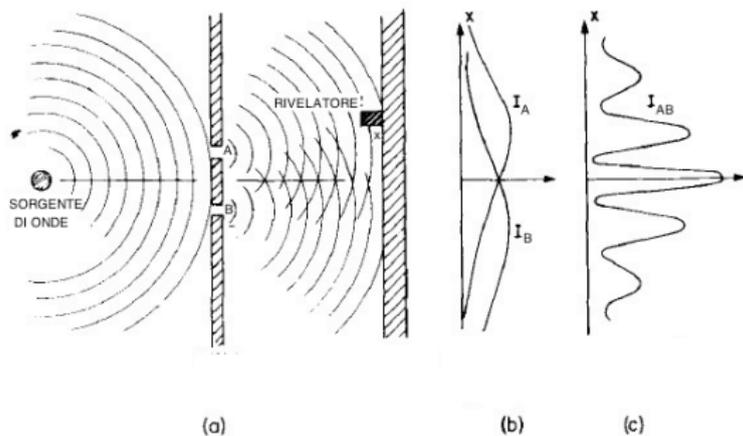


Figura 2: Un esperimento con onde.

- Confronteremo tra loro le due situazioni in Fig. 17 in cui la sorgente emette palline e quella in Fig. 18 in cui la sorgente emette onde.
- Il rivelatore misurerà il flusso il numero di particelle o l'intensità dell'onda in arrivo sullo schermo, come funzione della posizione x lungo il piano.

Energia ed impulso a blocchi

- Consideriamo dapprima il caso in cui la sorgente emette in tutte le direzioni, in modo **casuale**, ma ad un ritmo uniforme nel tempo, **particelle classiche** (proiettili di un fucile, per esempio) tutte uguali tra loro ed indistruttibili
- Parte di queste particelle passeranno attraverso le fenditure nello schermo per essere rivelate sul piano posto a distanza L dallo schermo con le due fenditure.
- Il rivelatore misurerà l'arrivo di particelle a **blocchi**, ovvero, o rivelerà ad un dato istante l'arrivo di una particella (sotto forma di **energia e impulso**) o non rivelerà nulla.

Il flusso di palline sullo schermo

- Indichiamo con $N_A(x)$ ($N_B(x)$) il numero di particelle che arrivano nel punto x in un certo intervallo di tempo, quando la fenditura A (rispettivamente B) è aperta mentre la fenditura B (rispettivamente, A) è chiusa.
- Indichiamo con $N_{AB}(x)$ il numero di particelle in arrivo nello stesso intervallo di tempo nella posizione x quando **ambidue** le fenditure sono aperte. Ci aspettiamo, per palline classiche del genere descritto, che

$$N_{AB}(x) = N_A(x) + N_B(x)$$

Le palline passano o da A o da B

- Infatti le $N_{AB}(x)$ particelle che arrivano in x quando ambedue le fenditure sono aperte possono essere divise tra le particelle che sono passate attraverso la fenditura A e quelle che sono passate attraverso B .
- Ma il numero di particelle che sono passate attraverso A è uguale (in media) al numero di palline che passano attraverso A quando la fenditura B è chiusa, che abbiamo denotato con $N_A(x)$.
- Analogamente il numero di particelle che arrivano in x essendo passate per B quando le due fenditure sono aperte è (in media) uguale a $N_B(x)$.

Le palline non interferiscono

- Da questo consegue che

$$N_{AB}(x) = N_A(x) + N_B(x)$$

- Un modo di esprimere questa relazione è di dire che il flusso di particelle classiche attraverso le due fenditure non mostra **interferenza**.
- Si noti che la possibilità di distinguere, in linea di principio, le palline passate da **A** e da **B** poggia sul fatto che le palline seguono delle **traiettorie** nello spazio, anche se non sempre siamo interessati o in grado di calcolarle.

Il flusso delle onde

- Consideriamo ora il caso in cui la sorgente emette delle onde, che supponiamo essere **monocromatiche** ovvero di lunghezza d'onda λ fissata.
- Il rivelatore misurerà in questo caso l'**intensità** del flusso ondoso in arrivo in x .
- Questa grandezza è una grandezza **continua** e non discreta, diversamente dal caso delle particelle.

Le onde interferiscono

- Indichiamo con $I_A(x)$ (rispettivamente $I_B(x)$) l'intensità del flusso ondoso in arrivo nel punto x , quando la fenditura A (rispettivamente B) è aperta mentre la fenditura B (A) è chiusa.
- Indichiamo con $I_{AB}(x)$ l'intensità del flusso ondoso in arrivo nel punto x quando **ambidue** le fenditure sono aperte.
- È caratteristico dei fenomeni ondosi che

$$I_{AB}(x) \neq I_A(x) + I_B(x)$$

- Benché il comportamento ondulatorio differisca marcatamente da quello corpuscolare la matematica che lo governa non è molto più complicata.
- La formula per $I_{AB}(x)$ è

$$I_{AB}(x) = I_A(x) + I_B(x) + 2 \sqrt{I_A(x) I_B(x)} \cos \delta_{AB}(x)$$

- L'angolo $\delta_{AB}(x)$ è determinato dalla differenza tra i percorsi delle onde emesse da A e da B per arrivare in x .
- Se chiamiamo $L_A(x)$ e $L_B(x)$ rispettivamente le lunghezze dei percorsi delle onde che partono da A e da B ed arrivano in x , allora

$$\delta_{AB}(x) = 2\pi \frac{(L_A(x) - L_B(x))}{\lambda}$$

Una formula complessa

- La formula per l'intensità $I_{AB}(x)$ può essere riscritta in un modo molto conveniente facendo uso dei numeri **complessi**.
- **Associamo** alle onde che passano rispettivamente per A e per B i due **numeri complessi**

$$\psi_A(x) = \sqrt{I_A(x)} e^{i\delta_A(x)} \quad \psi_B(x) = \sqrt{I_B(x)} e^{i\delta_B(x)}$$

dove

$$\delta_A(x) = 2\pi \frac{L_A(x)}{\lambda} \quad \delta_B(x) = 2\pi \frac{L_B(x)}{\lambda}$$

Le ampiezze complesse

- $\psi_{A,B}(x)$ sono chiamate le **ampiezze** (complesse) delle onde passanti per A e per B rispettivamente.
- Le intensità corrispondenti si ottengono dalle ampiezze prendendo i **moduli quadri** delle ampiezze:

$$I_A(x) = |\psi_A(x)|^2 \quad I_B(x) = |\psi_B(x)|^2$$

- La relazione di interferenza si riscrive in modo semplice in termini delle ampiezze complesse

$$I_{AB}(x) = |\psi_A(x) + \psi_B(x)|^2$$

Le ampiezze delle onde si sommano

- Quindi, se $\psi_A(x)$ (rispettivamente $\psi_B(x)$) è l'ampiezza dell'onda che arriva in x quando solo la fenditura A (rispettivamente B) è aperta, l'ampiezza dell'onda che arriva in x quando **ambidue** le fenditure sono aperte è

$$\psi_{AB}(x) = \psi_A(x) + \psi_B(x)$$

- Possiamo sintetizzare questa discussione dicendo che, per le onde, non si sommano le intensità ma si **sommano le ampiezze** (complesse).

Una variante dell'esperimento di Davisson e Germer

- Discutiamo ora quello che succede quando nell'esperimento delle due fenditure descritto nella sottosezione precedente la sorgente emette **particelle quantistiche**: elettroni, protoni, neutroni, fotoni etc.

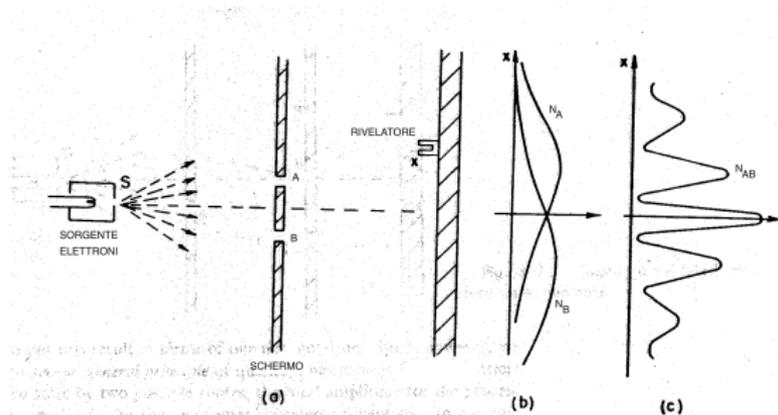


Figura 3: Un esperimento con particelle quantistiche.

- Da un lato risulta **sperimentalmente** che il rivelatore di particelle quantistiche misura l'arrivo di energia ed impulso a “blocchi”, come per le particelle classiche.
- Ogni particella risulterà uguale ad un'altra (rilascerà la stessa energia e lo stesso impulso) e il rivelatore non misurerà mai l'arrivo di una **frazione** o di un multiplo di particella.
- Da questo punto di vista le particelle quantistiche trasportano energia ed impulso in maniera **discreta**, in unità tutte identiche tra loro: sono corpuscoli, come le palline classiche considerate nella sottosezione precedente.

Le particelle quantistiche interferiscono

- D'altro lato, **sperimentalmente** (esperimento di Davisson e Germer e tutta una serie di esperimenti successivi simili a questo che stiamo descrivendo), risulta anche che la formula per il numero **medio** di particelle $N_{AB}(x)$ che arrivano in x quando ambedue le fenditure sono aperte **non** è la somma di $N_A(x)$ e $N_B(x)$.
- Piuttosto vale una relazione come la seguente

$$N_{AB}(x) = N_A(x) + N_B(x) + 2 \sqrt{N_A(x) N_B(x)} \cos \delta_{AB}(x)$$

Un paradosso

- Per esempio, ci sono punti x dello schermo — quelli per i quali $\delta_{AB}(x) = \pi$ — dove, quando **ambedue** le fenditure sono aperte, arrivano **meno** particelle di quando è aperta una sola fenditura!
- A prima vista questo fatto sperimentale sembra essere logicamente incoerente.

Per dove passano le particelle

- Visto che le particelle quantistiche sono, come abbiamo detto, **discrete** e che non si **dividono in due** sembra intuitivo pensare che le particelle che arrivano in x , quando sia A che B sono aperte, **passino o per A o per B** .
- Ma se così fosse, per lo stesso ragionamento che abbiamo fatto nel caso delle particelle classiche, dovrebbe necessariamente risultare che

$$N_{AB}(x) = N_A(x) + N_B(x)$$

Un flusso di particelle rarefatto

- Per esseri sicuri che il numero di particelle che arriva in x passando per A quando B è aperta è lo stesso (in media) di quello che arriva in x quando B è chiusa, possiamo usare un flusso di particelle molto rarefatto in modo che le particelle passino attraverso lo schermo, in media, **una alla volta**.
- Anche questa variante dell'esperimento è fisicamente realizzabile (ed è stata realizzata).
- Il risultato è che, se aspettiamo un tempo sufficientemente lungo, risulta che la formula valida, per le particelle quantistiche, è ancora quella che mostra interferenza.

- La conclusione di questo è che, per le particelle quantistiche, **non può essere vero** che, quando ambedue le fenditure sono aperte, le particelle passino o per A o per B .

Quando ambedue le fenditure sono aperte non si può dire esattamente per dove le particelle passino.

Le ampiezze per particelle

- Possiamo però dire precisamente in **che modo** la “situazione fisica”² delle particelle che arrivano in x quando ambedue le fenditure sono aperte sia collegata alle “situazione fisiche” in cui solo una fenditura è aperta.
- Anche in questo caso possiamo introdurre dei numeri complessi **definiti** da

$$\begin{aligned}\psi_A(x) &= \sqrt{N_A(x)} e^{i\delta_A(x)} & \psi_B(x) &= \sqrt{N_B(x)} e^{i\delta_B(x)} \\ \delta_A(x) &= 2\pi \frac{L_A(x)}{\lambda} & \delta_B(x) &= 2\pi \frac{L_B(x)}{\lambda} \\ \lambda &= \frac{h}{p}\end{aligned}$$

che chiameremo **ampiezze**.

²In meccanica quantistica questa viene indicata col nome di *stato fisico* o semplicemente *stato*.

Ampiezze e flusso di particelle

- $\psi_A(x)$ e $\psi_B(x)$ sono le ampiezze che descrivono la situazione fisica in cui solo una delle fenditure è aperta.
- Le ampiezze sono collegate alle grandezze **misurabili**, i numeri di particelle $N_A(x)$, $N_B(x)$ e $N_{AB}(x)$, dalle relazioni analoghe a quelle valide per le onde

$$N_A(x) = |\psi_A(x)|^2 \quad N_B(x) = |\psi_B(x)|^2$$

Le ampiezze si sommano

- La “situazione fisica” — lo **stato** — delle particelle che arrivano in x quando **ambidue** le fenditure sono aperte è descritta dalla ampiezza data da

$$\psi_{AB}(x) = \psi_A(x) + \psi_B(x)$$

- Il flusso corrispondente è

$$N_{AB}(x) = |\psi_{AB}(x)|^2 = |\psi_A(x) + \psi_B(x)|^2$$

- Il fatto che le ampiezze della meccanica quantistica si sommino, cioè che le ampiezze siano elementi di uno spazio **lineare**, è la proprietà fondamentale sulla quale è costruito tutto l'edificio matematico della meccanica quantistica.

Un problema di principio o pratico?

- Siamo arrivati alla conclusione che nella situazione fisica (nello **stato**) in cui le due fenditure sono ambedue aperte **non possiamo dire che le particelle che arrivano in x passano o da A o da B .**
- Può sembrare però che questa impossibilità abbia a che fare con il modo in cui abbiamo costruito l'esperimento e possa essere facilmente superata.

Un esperimento modificato

- Supponiamo infatti di porre un rivelatore nelle vicinanze dello schermo forato, posto tra le due fenditure.
- Supponiamo che questo rivelatore sia una specie di macchina fotografica, in grado di stabilire attraverso un flash luminoso, al passaggio di una particella attraverso lo schermo, la fenditura attraverso la quale la particella è passata.
- Uno strumento di questo tipo è fisicamente realizzabile.

L'esperimento con particelle quantistiche e rivelatore

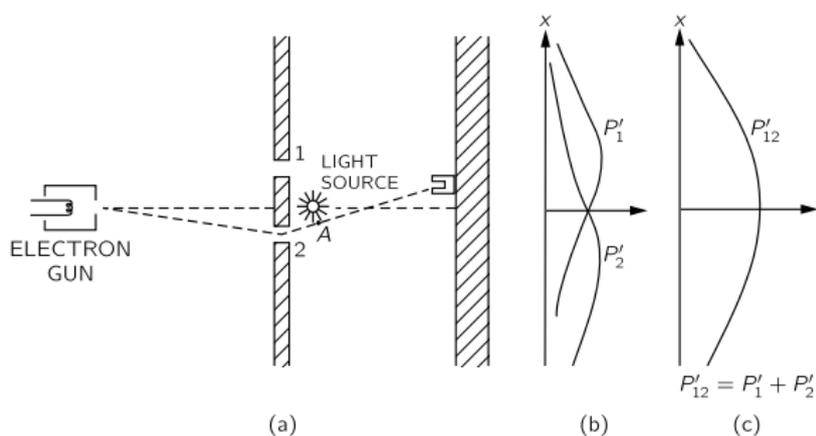


Figura 4: L'esperimento quantistico modificato.

L'interferenza sparisce

- Immaginando di **modificare** l'esperimento in questo modo, saremmo quindi in grado di stabilire, per ogni particella che arriva in x , per quale delle due fenditure essa sia passata.
- Come abbiamo già argomentato, ne consegue per mera **logica** che in questo esperimento modificato dovrà valere

$$N_{AB}(x) = N_A(x) + N_B(x)$$

- E questo è proprio quello che si verifica sperimentalmente: modificando nel modo descritto l'esperimento, non si osservano più frange di interferenza!

Un esperimento troppo distruttivo

- La macchina fotografica che abbiamo utilizzato per osservare attraverso quale fenditura passano le particelle ha **disturbato**, con il suo flash, le particelle al punto da cambiare il risultato dell'esperimento.
- La domanda che si pone è se sia possibile, in linea di principio, utilizzando una macchina fotografica con un flash meno forte, osservare il passaggio delle particelle attraverso lo schermo in modo sufficientemente **delicato** da non distruggere le frange di interferenza.

Un rivelatore classico

- Se la luce necessaria per far funzionare la nostra macchina fotografica fosse una **onda elettromagnetica classica** questo sarebbe certamente possibile.
- Per poter osservare da quale apertura una particella passi abbiamo bisogno di una luce con lunghezza d'onda λ_{luce} **minore** della separazione d tra le due fenditure:

$$\lambda_{luce} \lesssim d$$

- Per una onda elettromagnetica classica è possibile ridurre l'**intensità**, ovvero l'**ampiezza** dell' onda, in modo arbitrario, mantenendo **fissa** λ_{luce} .

Anche i rivelatori sono quantistici

- Pertanto, se la luce fosse descritta dalla fisica classica, potremmo disturbare la particella in modo arbitrariamente piccolo, pur preservando la possibilità di determinare per quale fenditura essa passi.
- Se avessimo a nostra disposizione una onda elettromagnetica classica saremmo quindi in grado di osservare le frange di interferenza e, **allo stesso tempo**, determinare attraverso quale fenditura le particelle che arrivano in x sono passate, una cosa logicamente impossibile.
- Ma (fortunatamente per la coerenza della teoria quantistica) la luce **non** è una onda elettromagnetica classica.

Anche i rivelatori sono quantistici

- Abbiamo visto, nell'analisi dell'effetto fotoelettrico, che la luce è essa stessa composta da particelle quantistiche, i **fotoni**, il cui impulso è dato dalla formula di Einstein

$$p_{\text{fotone}} = \frac{h}{\lambda_{\text{luce}}}$$

- Pertanto se $\lambda_{\text{luce}} \lesssim d$, così da essere in grado di determinare la fenditura attraverso la quale è passata la particella, l'impulso del fotone **non può** essere arbitrariamente piccolo:

$$p_{\text{fotone}} \gtrsim \frac{h}{d}$$

Un impulso minimo

- Per poter osservare la particella con la nostra macchina fotografica è necessario che essa **diffonda** un fotone.
- Per la conservazione del momento, il momento della particella quantistica subirà una perturbazione $\Delta p_{particella}$ che sarà dello stesso ordine di grandezza dell'impulso del fotone diffuso:

$$\Delta p_{particella} \sim p_{fotone} \gtrsim \frac{h}{d}$$

Una perturbazione minima all'angolo

- Pertanto, affinché la nostra macchina fotografica sia in grado di determinare per quale fenditura passa la particella, essa dovrà perturbare la direzione di moto della particella di un angolo $\Delta\theta_{pert}$ che non può essere arbitrariamente piccolo

$$\Delta\theta_{pert} = \frac{\Delta p_{particella}}{p_{particella}} \gtrsim \frac{h}{d p_{particella}} = \frac{\lambda_{particella}}{d}$$

dove $\lambda_{particella}$ è la lunghezza d'onda di De Broglie della particella.

- Dimostreremo ora che questa perturbazione è esattamente quella sufficiente a distruggere le frange di interferenza.

Le frange di interferenza

- Determiniamo preliminarmente dove si troverebbero le frange di interferenza se l' esperimento fosse effettuato **senza** la macchina fotografica, ovvero **senza** poter osservare attraverso quale fenditura passa ciascuna particella. La situazione è descritta in Fig. 21.

Diffrazione attraverso due fenditure

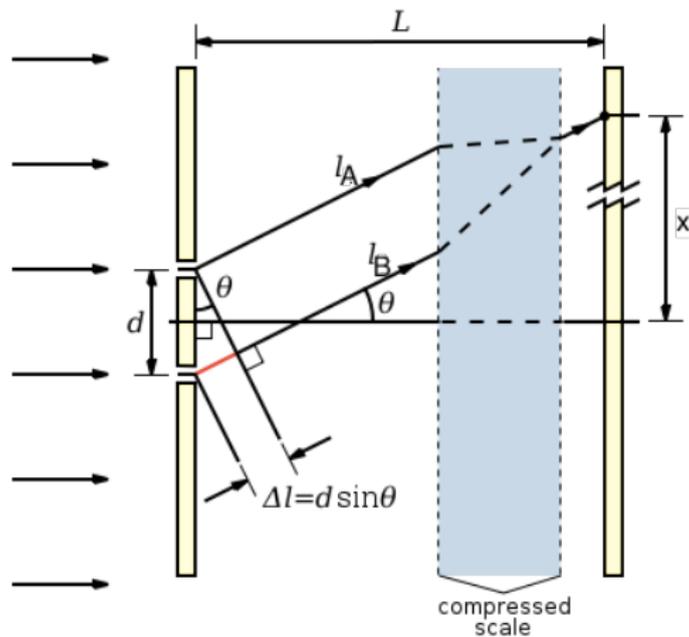


Figura 5: Diffrazione attraverso due fenditure.

La differenza dei percorsi ottici

- L è la distanza tra lo schermo dove riveliamo le frange e lo schermo con le due fenditure. x è la posizione del punto dello schermo dove misuriamo l'interferenza.
- La differenza tra le lunghezze dei percorsi di due onde che arrivano nello stesso punto dello schermo passando attraverso due fenditure poste a distanza d è

$$\Delta L = d \sin \theta \quad \frac{x}{L} \equiv \tan \theta$$

La condizione di interferenza

- I massimi delle frange di interferenza sono determinati quindi dalla condizione che ΔL sia uguale ad un numero intero n di lunghezze d'onda:

$$d \sin \theta_n = n \lambda_{particella}$$

Un'approssimazione per schermi lontani

- Per L grande e θ piccolo otteniamo la seguente relazione approssimata per gli angoli corrispondenti ai massimi di interferenza

$$\theta_n \sim n \frac{\lambda_{particella}}{d}$$

- La differenza $\Delta\theta_{frange}$ tra gli angoli corrispondenti a due frange di interferenza contigue è pertanto pari a

$$\Delta\theta_{frange} \sim \frac{\lambda_{particella}}{d}$$

- Ricordando la perturbazione **minima** $\Delta\theta_{pert} \sim \frac{\lambda_{particella}}{d}$ necessaria per determinare per dove è passata la particella, notiamo che

$$\Delta\theta_{pert} \gtrsim \Delta\theta_{frange}$$

- Questo significa che per poter determinare da quale fenditura è passata una particella dobbiamo perturbare la sua direzione di un angolo $\Delta\theta_{pert}$ che è **almeno** dello stesso ordine di grandezza dell'angolo $\Delta\theta_{frange}$ che separa due frange di interferenza.

Il principio di indeterminazione

- Concludiamo che per poter osservare da che fenditura passa la particella dobbiamo **necessariamente** perturbarla in maniera tale da distruggere le frange di interferenza.
- La conclusione è che non è possibile osservare le frange di interferenza e, **allo stesso tempo**, determinare attraverso quale fenditura passano le particelle.
- Questa impossibilità è conosciuta come **principio di indeterminazione** di Heisenberg (1927).
- Come abbiamo visto essa è una conseguenza diretta del fatto che la luce che usiamo per determinare la posizione di una particella, è essa stessa composta da particelle quantistiche e soddisfa la relazione di Einstein.

Una formulazione diversa

- Il principio di indeterminazione è equivalentemente formulato come l'impossibilità di misurare simultaneamente **posizione** e **momento** di una particella con precisione arbitraria.
- Si consideri infatti di nuovo la relazione

$$\Delta p_{particella} \geq \frac{h}{d}$$

- In questa relazione d rappresenta la risoluzione Δx con cui misuriamo la posizione della particella.
- $\Delta p_{particella}$ è l'indeterminazione Δp_x nella conoscenza del momento della particella lungo la stessa direzione di Δx .

- Pertanto pertanto riscrivere la relazione precedente come

$$\Delta p_x \Delta x \gtrsim h$$

- Questa relazione dice che non possiamo misurare con precisione arbitraria la **coordinata** di una particella senza ridurre la precisione con cui possiamo misurare il **corrispondente momento**.
- E viceversa che non possiamo determinare il **momento** di una particella con precisione arbitraria senza perdere precisione nella determinazione della sua **posizione**.

Le orbite non esistono

- Si dice che momento e posizione sono **osservabili** non compatibili in meccanica quantistica.
- In meccanica quantistica quindi il concetto di traiettoria **perde senso**.
- Esso viene sostituito dal concetto di **ampiezza**, quei numeri complessi $\psi(x)$ che abbiamo introdotto nella discussione precedente.

- Un'altra implicazione del principio di indeterminazione è il carattere **inerentemente probabilistico** della descrizione dei fenomeni fisici della meccanica quantistica. Questa circostanza è uno dei punti di partenza per la formulazione della teoria quantistica “completa”.
- In definitiva il principio di indeterminazione è il fatto fisico che risolve la apparente contraddizione tra l'aspetto corpuscolare e quello ondulatorio delle particelle quantistiche, e che quindi, in definitiva, garantisce la coerenza logica della teoria quantistica.

La funzione d'onda

- Nella descrizione dell'esperimento delle due fenditure abbiamo visto che lo **stato** di una particella quantistica è descritto da una ampiezza complessa

$$\psi(x) = \sqrt{N(x)} e^{\frac{2\pi i L(x)}{\lambda}} = \sqrt{N(x)} e^{\frac{2\pi i L(x)p}{h}}$$

dove $L(x)$ era il cammino percorso dalla particella e λ è la lunghezza d'onda di De Broglie.

- Questo numero complesso come funzione del punto x è chiamata la **funzione d'onda** della particella.
- Abbiamo visto che il modulo quadro della funzione d'onda

$$|\psi(x)|^2$$

ha il significato fisico di (densità) di probabilità che la particella si trovi in un dato punto x .

La funzione d'onda di una particella libera

- Possiamo riscrivere il fattore che compare nell'esponente della funzione d'onda in notazione vettoriale

$$pL(x) = \vec{p} \cdot \vec{x}$$

il vettore \vec{x} indica il punto nel spazio.

- Per una particella che si muove liberamente nello spazio, senza incontrare schermi o altro, ci aspettiamo che $N(x)$ sia una costante.
- In definitiva la funzione d'onda di una particella **libera** nello spazio che si muove con impulso \vec{p} è

$$\psi(\vec{x}) = \psi_0 e^{\frac{i\vec{p}\cdot\vec{x}}{\hbar}}$$

La dipendenza temporale della funzione d'onda

- La funzione $\psi(x)$ descrive quindi l'onda associata alla particella **ad un dato istante di tempo**.
- Ma la nostra esperienza con le onde è che queste si propagano nel tempo oltre che nello spazio: la dipendenza temporale dell'onda dal tempo è detta la **frequenza** dell'onda:

$$\psi(x, t) = \psi(x) e^{-i\omega t}$$

- Quale frequenza quindi dobbiamo associare ad una funzione d'onda, per descriverne la sua evoluzione temporale?

La frequenza di una particella

- Sappiamo la risposta a questa domanda nel caso dei fotoni: è contenuta nella relazione di Einstein

$$\omega = \frac{E}{\hbar}$$

- Abbiamo visto che fotoni e particelle come elettroni, protoni etc. si comportano nello stesso modo.
- Possiamo quindi supporre che questa relazione abbia validità generale e che in definitiva la funzione d'onda dipendente dal tempo di una particella che si muove con momento \vec{p} ed energia E sia

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi_0 e^{j \frac{(\vec{p} \cdot \vec{x} - E t)}{\hbar}}$$

Le derivate della funzione d'onda

- Confrontiamo le derivate della funzione d'onda appena scritta rispetto a \vec{x} e rispetto al temp

$$\vec{\nabla}^2 \psi(x, t) = -\frac{\vec{p}^2}{\hbar^2} e^{i \frac{(\vec{p} \cdot \vec{x} - E t)}{\hbar}} \psi_0$$
$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -i \frac{E}{\hbar} e^{i \frac{(\vec{p} \cdot \vec{x} - E t)}{\hbar}} \psi_0$$

- Per una particella **non-relativistica**

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

Un'equazione differenziale

- La funzione d'onda di una particella di momento \vec{p} ed energia E soddisfa pertanto l'equazione differenziale:

$$i \hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} \psi(\mathbf{x}, t)$$

- Questa equazione cattura in definitiva **sia** la relazione di De Broglie per la lunghezza d'onda associata ad una particella di momento \vec{p} **che** la relazione di Einstein tra frequenza e energia.

Una particella in un potenziale

- Come nel caso della regola di Bohr-Sommerfeld siamo interessati a generalizzare questa equazione al caso di una particella **non-libera**. Per esempio una particella che si muove in un potenziale $V(\vec{x})$.
- Per una particella libera il secondo membro dell'equazione ottenuta è uguale a

$$-\frac{\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} \psi(x, t) = \frac{\vec{p}^2}{2m} \psi(x, t)$$

L'equazione di Schrödinger

- Osserviamo che nel caso libero $\frac{\vec{p}^2}{2m} = E$, mentre nel caso non-libero

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$$

- Questa osservazione suggerisce quindi che l'equazione che determina la funzione d'onda nel caso di una particella che si muove in un potenziale sia

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} + V(\vec{x}) \right] \psi(\mathbf{x}, t)$$

Le funzioni d'onda con energia definita

- Abbiamo detto che la relazione di Einstein $\omega = \frac{E}{\hbar}$ dice che una particella di **energia** determinata E ha anche una **frequenza** determinata:

$$\psi_E(x, t) = e^{-i \frac{Et}{\hbar}} \psi_E(x)$$

dove $\psi_E(x)$ non è il semplice esponenziale di De Broglie quando la particella non è libera.

- Per questi stati quindi, l'equazione di Schrödinger diventa

$$E \psi_E(x) = \left[-\frac{\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} + V(\vec{x}) \right] \psi_E(x)$$

- L'equazione di Schrödinger per le funzioni d'onda di energia fissata è un'equazione differenziale per $\psi_E(x)$.
- Risulta che questa equazione non ha in generale soluzioni **fisicamente accettabili** per tutti i valori dell'energia E .
- Solo per dei valori **discreti** dell'energia E esistono effettivamente delle soluzioni accettabili.
- Questo è il modo in cui nella teoria quantistica “completa” emerge — **e viene corretta** — la condizione di quantizzazione dei livelli di Bohr-Sommerfeld.

Particella nella scatola

- Nel caso di una particella in una scatola uni-dimensionale l'equazione di Schrödinger per le funzioni d'onda con energia fissata diventa

$$\frac{\hbar^2 \psi_E''(x)}{2m} + E \psi_E(x) = 0$$

- La soluzione generale di questa equazione è

$$\psi_E(x) = A \sin \frac{p x}{\hbar} + B \cos \frac{p x}{\hbar}$$

dove

$$p = \sqrt{2 m E}$$

Le condizioni al contorno

- La particella è confinata nella scatola: la probabilità di trovarla fuori dalla scatola è **nulla**.
- La probabilità di trovare la particella è proporzionale al modulo quadro della funzione d'onda.
- Quindi la funzione d'onda si deve annullare sul bordo della scatola

$$\psi_E(0) = 0 \quad \psi_E(L) = 0$$

Le soluzioni accettabili

- La prima condizione dà

$$\psi_E(0) = B = 0$$

- La seconda quindi si riduce a

$$A \sin \frac{pL}{\hbar} = 0$$

- La soluzione di questa equazione è

$$p_n = \sqrt{2mE_n} = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, \dots$$

- Ritroviamo così i livelli della scatola che avevamo ottenuto dalla regola di BS

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2}{2 m L^2} \quad n = 1, 2, \dots$$

- Si noti che abbiamo anche determinato che n parte da 1, in quanto per $n = 0$ la funzione d'onda sarebbe identicamente nulla.
- Contrariamente al caso classico, lo stato di **energia minima** pertanto **non** ha energia nulla: questo è un risultato generale conseguenza del principio di indeterminazione. (Cfr. Problema di autovalutazione).

La distribuzione spaziale

- L'equazione di Schrödinger non si limita a darci i livelli energetici. Abbiamo visto che $|\psi(x)|^2$ è proporzionale alla **densità di probabilità spaziale**.
- Una particella con energia E_n , ha pertanto una probabilità $\Delta P_n(x)$ di trovarsi in un intervallo Δx intorno al punto x del segmento pari a

$$\Delta P_n(x) = \frac{2}{L} \sin^2 \frac{\pi n x}{L} \Delta x$$

- Il fattore di normalizzazione $\frac{2}{L}$ è fissato dalla richiesta che $\int_0^L \Delta x \frac{\Delta P_n(x)}{\Delta x} = 1$.

Gli stati di energia determinata in una scatola

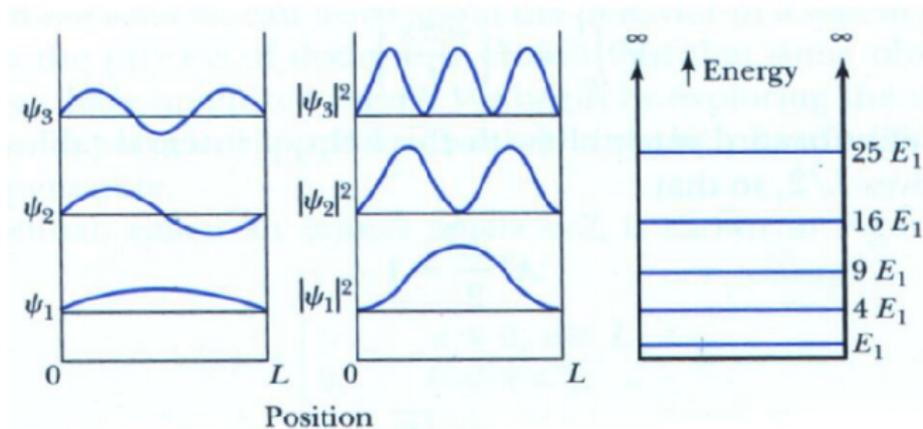


Figura 6: Le funzioni d'onda di energia determinata, le densità di probabilità spaziale ed i livelli energetici di una particella in una scatola.

- Interferenza.
- Numeri complessi: fase e modulo di un numero complesso.
- Equazioni differenziali di una funzione dipendente da 1 variabile a coefficienti costanti.

Problemi per l'autovalutazione

- Un fascio di elettroni di energia cinetica $E = 50\text{eV}$ viene diviso in due raggi paralleli posti a differenze altezze rispetto alla superficie della terra. Se la differenza tra le altezze è di $d = 1\text{m}$, e se si fanno interferire i due fasci dopo un percorso di lunghezza L , per quali valori di L ci sarà interferenza distruttiva?
- Si usi il principio di indeterminazione per avere una stima dello stato di energia minima per un potenziale $V(x) = \sigma |x|$.

- *La Fisica di Feynman*, Vol. 3, R. P. Feynman, R. B. Leighton e M. Sands, (1975) Inter European Editions, B.V.
- *Lezioni di Meccanica Quantistica*, L.E. Picasso, Edizioni ETS, (2000) Pisa.

Fine della quarta lezione