

Corso di Fisica Teorica — I Modulo
 Prof. Camillo Imbimbo, Prof. Stefano Giusto
 Prova Scritta 15/02/2002

Un sistema di N elettroni in una scatola cubica di volume V è descritto dall'Hamiltoniana

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \quad (1)$$

H_0 è l'Hamiltoniana libera

$$\hat{H}_0 = \sum_{\vec{k}, \sigma} \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} a_{\vec{k}, \sigma}^\dagger a_{\vec{k}, \sigma} \quad (2)$$

dove $\sigma = \pm$ è lo spin e \vec{k} il vettore d'onda. H_1 descrive l'interazione repulsiva coulombiana che sarà trattata come una perturbazione di H_0 :

$$\hat{H}_1 = \frac{e^2}{2V} \sum_{\vec{p}, \vec{k}; \vec{q} \neq 0} ' \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \frac{4\pi}{q^2} a_{\vec{k}+\vec{q}, \sigma_1}^\dagger a_{\vec{p}-\vec{q}, \sigma_2}^\dagger a_{\vec{p}, \sigma_2} a_{\vec{k}, \sigma_1} \quad (3)$$

la somma sui vettori d'onda $\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}$ *esclude* il valore $\vec{q} = 0$. Sia E_F l'energia dello stato fondamentale del sistema. Si denoti con $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$ il raggio di Bohr, con r_0 la distanza (essenzialmente la distanza media tra le particelle) definita dall'equazione $\frac{V}{N} = \frac{4}{3}\pi r_0^3$, e con $r_s \equiv \frac{r_0}{a_0}$ il rapporto adimensionale che misura la distanza media tra particelle in unità a_0 .

Domanda 1

Si calcoli il rapporto adimensionale $\epsilon(r_s) \equiv \frac{(E_F/N)}{(e^2/2a_0)}$ al primo ordine in teoria delle perturbazioni e lo si esprima in funzione del parametro adimensionale r_s . (Si sostituiscano le somme sui momenti con gli integrali corrispondenti). Per quali valori del parametro r_s il risultato perturbativo è affidabile?

Domanda 2 (Facoltativa)

Si supponga che il modello in questione descriva un gas di elettroni in un metallo. Si provi a stimare l'energia di estrazione di un elettrone (in eV) a partire dall'espressione $\epsilon(r_s)$ ottenuta nel punto precedente.

Domanda 3 (Facoltativa)

Si scriva (senza calcolare esplicitamente gli integrali relativi) la correzione ad $\epsilon(r_s)$ del secondo ordine in teoria delle perturbazioni.

Corso di Fisica Teorica — I Modulo
Prof. Camillo Imbimbo, Prof. Stefano Giusto

Prova Scritta 14/03/2002

Problema 1

Si consideri un sistema di elettroni interagenti con un potenziale attrattivo. Si indichino con $a_{\vec{p},\sigma}$ gli operatori di distruzione relativi agli elettroni con vettore d'onda \vec{p} e spin σ . Si supponga (come nel caso del modello BCS) che lo stato fondamentale del sistema sia approssimato dallo stato di vuoto $|\mathbf{O}\rangle$ relativo ad operatori di distruzione $b_{\vec{p},\sigma}$ legati agli $a_{\vec{p},\sigma}$ e $a_{\vec{p},\sigma}^\dagger$ da una trasformazione canonica

$$a_{\vec{p},\sigma} = u_p b_{\vec{p},\sigma} + \frac{\sigma}{|\sigma|} v_p b_{-\vec{p},-\sigma}^\dagger \quad (4)$$

dove $u_p^2 + v_p^2 = 1$.

(Nel modello BCS $u_p^2 \equiv \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\epsilon(p)}{\sqrt{\epsilon(p)^2 + \Delta_p^2}} \right]$, $\epsilon(p) \equiv \frac{\hbar^2 p^2}{2m} - \mu$, μ è il potenziale chimico e Δ_p è il gap nello spettro delle eccitazioni intorno allo stato $|\mathbf{O}\rangle$. Per questo problema basterà esprimere le grandezze fisiche in termini di $u_{\vec{p}}$ e $v_{\vec{p}}$.)

Sia $\hat{N} = \sum_{\vec{p},\sigma} a_{\vec{p},\sigma}^\dagger a_{\vec{p},\sigma}$ l'operatore corrispondente al numero di elettroni. Si calcoli la fluttuazione di questo operatore sullo stato $|\mathbf{O}\rangle$:

$$\frac{(\Delta N)^2}{\langle \hat{N} \rangle^2} \equiv \frac{\langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2}{\langle \hat{N} \rangle^2} \quad (5)$$

Problema 2

Una particella scalare ϕ di massa M decade in due particelle vettoriali A e B di massa M_A ed M_B tramite la densità lagrangiana di interazione:

$$\mathcal{L}_I = g\phi A_\mu B^\mu \quad (6)$$

Si calcoli la probabilità di decadimento per unità di tempo.

Corso di Fisica Teorica — Sessione Autunnale (I modulo)

Prof. Camillo Imbimbo, Prof. Stefano Giusto

Prova Scritta 07/10/2002

Problema

Si consideri un sistema composto da due specie di bosoni identici quantizzati in una scatola di lato L e descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \sum_{\vec{p}} \frac{\vec{p}^2}{2m_1} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + \frac{\vec{p}^2}{2m_2} b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}} + \epsilon(p)(a_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}} + b_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}) \quad (7)$$

dove $a_{\vec{p}}$ e $b_{\vec{p}}$ sono gli operatori di distruzione associati a ciascuna delle due specie di bosoni. Gli stati del sistema non-relativistico sono quelli con $N = N_a + N_b$ determinato, dove N_a ed N_b sono, rispettivamente, il numero di particelle di tipo a e di tipo b .

Domanda 1

Quali degli operatori N_a , N_b ed N sono conservati?

Domanda 2

Si consideri il termine proporzionale ad $\epsilon(p)$ come una perturbazione dell'Hamiltoniana libera per le due specie di particelle. Si supponga $\epsilon(0) = 0$. Si calcoli al secondo ordine in $\epsilon(p)$ la correzione indotta da questo termine sull'energia degli stati $a_{\vec{p}}^\dagger (a_0^\dagger)^{N-1} |0\rangle$ e $b_{\vec{p}}^\dagger (b_0^\dagger)^{N-1} |0\rangle$.

Domanda 3

Si determinino autovettori ed autovalori esatti dell'Hamiltoniana completa. Si confronti il risultato con la risposta alla domanda precedente.

Corso di Fisica Teorica — Sessione Invernale (I modulo)

Prof. Camillo Imbimbo, Prof. Stefano Giusto

Prova Scritta 18/02/2003

Si consideri un sistema di N bosoni identici descritti da operatori di creazione e distruzione $a_\alpha, a_\alpha^\dagger$ con $\alpha = 0, 1$. Sia

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \quad (8)$$

l'Hamiltoniana del sistema. \hat{H}_0 è l'Hamiltoniana delle particelle non-interagenti

$$\hat{H}_0 = \epsilon_1 a_1^\dagger a_1 \quad (9)$$

con $\epsilon_1 > 0$ energia di una particella nello stato “eccitato” con $\alpha = 1$. \hat{V} descrive un'interazione a due corpi

$$\hat{V} = g_1 \left[(a_1^\dagger)^2 (a_0)^2 + (a_0^\dagger)^2 (a_1)^2 \right] + g_2 \left[a_1^\dagger a_0^\dagger a_0 a_1 \right] + g_3 \left[(a_0^\dagger)^2 (a_0)^2 \right] \quad (10)$$

Domanda 1

Determinare lo stato fondamentale e la corrispondente energia del sistema libero (quello cioè descritto da \hat{H}_0). Determinare per questo stato il numero medio di particelle nello stato eccitato, cioè il valor medio di $\hat{N}_1 \equiv a_1^\dagger a_1$

Domanda 2

Determinare al secondo ordine in teoria delle perturbazioni l'energia dello stato fondamentale.

Domanda 3

Determinare il valor medio di \hat{N}_1 sullo stato fondamentale al secondo ordine in teoria delle perturbazioni.

Domanda 4

Si supponga che N sia molto grande e che $\hat{N}_0 = a_0^\dagger a_0$ sia macroscopico rispetto ad \hat{N}_1 nello stato fondamentale ($\langle \hat{N}_1 \rangle \ll \langle \hat{N}_0 \rangle \sim N$). In questa situazione è giustificata un'approssimazione à la Bogolioubov: nelle (??-??) si effettuino le sostituzioni $a_0 \rightarrow \sqrt{N_0}$ ed $a_0^\dagger \rightarrow \sqrt{N_0}$, con N_0 numero reale, e ci si restringa ai termini di ordine N^2 ed N , trascurando quelli di ordine inferiore in N .

Si calcoli in questo schema di approssimazione l'energia dello stato fondamentale, lo spettro del sistema, e il valor medio di \hat{N}_1 sullo stato fondamentale.

Domanda 5

Si confrontino i risultati ottenuti al punto 4 con quelli derivati in teoria delle perturbazioni.

Corso di Fisica Teorica — Sessione Invernale (I modulo)

Prof. Camillo Imbimbo, Prof. Stefano Giusto

Prova Scritta 18/02/2003 — Soluzione

Domanda 1

Lo stato fondamentale di \hat{H}_0 è $\frac{(a_0^\dagger)^N}{\sqrt{N!}}|0\rangle = |\{N, 0\}\rangle$. La sua energia è $E_0^{(0)} = 0$. Il valor medio di \hat{N}_1 su questo stato è

$$\langle \{N, 0\} | \hat{N}_1 | \{N, 0\} \rangle = 0$$

Domanda 2

Calcoliamo

$$\hat{V}|\{N, 0\}\rangle = g_1 \sqrt{2N(N-1)}|\{N-2, 2\}\rangle + g_3(N^2 - N)|\{N, 0\}\rangle \quad (11)$$

Dunque la correzione al primo ordine all'energia dello stato fondamentale è

$$E_0^{(1)} = \langle \{N, 0\} | \hat{V} | \{N, 0\} \rangle = g_3(N^2 - N) \quad (12)$$

e quella del secondo ordine è

$$E_0^{(2)} = -\frac{|\langle \{N-2, 2\} | \hat{V} | \{N, 0\} \rangle|^2}{2\epsilon_1} = -\frac{g_1^2(N^2 - N)}{\epsilon_1} \quad (13)$$

Domanda 3

Al primo ordine in teoria delle perturbazioni lo stato fondamentale è

$$|\psi_0\rangle = |\{N, 0\}\rangle - \frac{g_1 \sqrt{2N(N-1)}}{2\epsilon_1} |\{N-2, 2\}\rangle \quad (14)$$

Dunque il valor medio di \hat{N}_1 al secondo ordine è

$$\langle \psi_0 | \hat{N}_1 | \psi_0 \rangle = -\frac{g_1 \sqrt{2N(N-1)}}{2\epsilon_1} 2 \langle \psi_0 | \{N-2, 2\} \rangle = \frac{g_1^2 N(N-1)}{\epsilon_1^2} \quad (15)$$

Domanda 4

Operando la sostituzione $a_0 \rightarrow \sqrt{N_0}$ ed $a_0^\dagger \rightarrow \sqrt{N_0}$, otteniamo

$$\hat{H} = g_3 N_0^2 + \epsilon_1 a_1^\dagger a_1 + g_1 N_0 [(a_1^\dagger)^2 + (a_1)^2] + g_2 N_0 [a_1^\dagger a_1] \quad (16)$$

Poiché $N_0 = N - a_1^\dagger a_1$, otteniamo, trascurando i termini di ordine $O(N^0)$

$$\hat{H} = g_3 N^2 + (\epsilon_1 + g_2' N) a_1^\dagger a_1 + g_1 N [(a_1^\dagger)^2 + (a_1)^2] \quad (17)$$

dove $g'_2 \equiv (g_2 - 2g_3)$. Definiamo la trasformazione canonica

$$b = \cosh(\chi) a_1 + \sinh(\chi) a_1^\dagger \quad (18)$$

poniamo

$$\begin{aligned} E b^\dagger b &= E[\cosh^2(\chi) + \sinh^2(\chi)] a_1^\dagger a_1 + E \sinh^2(\chi) \\ &\quad + E \sinh(\chi) \cosh(\chi) [(a_1^\dagger)^2 + (a_1)^2] \\ &= (\epsilon_1 + g'_2 N) a_1^\dagger a_1 + g_1 N [(a_1^\dagger)^2 + (a_1)^2] + E \sinh^2(\chi) \end{aligned} \quad (19)$$

Dunque

$$\begin{aligned} E [\cosh^2(\chi) + \sinh^2(\chi)] &= \epsilon_1 + g'_2 N \\ E \sinh(\chi) \cosh(\chi) &= g_1 N \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{E}{2} [e^{2\chi} + e^{-2\chi}] &= \epsilon_1 + g'_2 N \\ \frac{E}{2} [e^{2\chi} - e^{-2\chi}] &= 2 g_1 N \end{aligned}$$

Da questo deduciamo

$$\frac{e^{4\chi} + 1}{e^{4\chi} - 1} = \frac{\epsilon_1 + g'_2 N}{2 g_1 N} \quad (20)$$

e quindi

$$e^{4\chi} = \frac{\frac{\epsilon_1 + g'_2 N}{2 g_1 N} + 1}{\frac{\epsilon_1 + g'_2 N}{2 g_1 N} - 1} = \frac{\epsilon_1 + N g_+}{\epsilon_1 + N g_-} \quad (21)$$

dove

$$g_\pm = g'_2 \pm 2g_1 \quad (22)$$

Inoltre

$$E e^{\pm 2\chi} = \epsilon_1 + N g_\pm \quad (23)$$

da cui

$$E = \sqrt{(\epsilon_1 + N g_+)(\epsilon_1 + N g_-)} \quad (24)$$

In conclusione

$$\hat{H} = E_0 + E b^\dagger b \quad (25)$$

dove E_0 è l'energia dello stato fondamentale ψ_0 definito da $b|\psi_0\rangle = 0$:

$$E_0 = g_3 N^2 - E \sinh^2(\chi) \quad (26)$$

$$= g_3 N^2 - \frac{1}{4} \left[E e^{2\chi} + E e^{-2\chi} - 2E \right]$$

$$= g_3 N^2 - \frac{1}{4} \left[\sqrt{\epsilon_1 + N g_+} - \sqrt{\epsilon_1 + N g_-} \right]^2 \quad (27)$$

Il valor medio di \hat{N}_1 sullo stato fondamentale è

$$\langle \psi_0 | \hat{N}_1 | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | (\cosh(\chi) b^\dagger - \sinh(\chi) b) (\cosh(\chi) b - \sinh(\chi) b^\dagger) | \psi_0 \rangle$$

$$= \sinh^2(\chi) = \frac{1}{4} \left[\sqrt{\frac{\epsilon_1 + N g_+}{\epsilon_1 + N g_-}} + \sqrt{\frac{\epsilon_1 + N g_-}{\epsilon_1 + N g_+}} - 2 \right] \quad (28)$$

Osservazione: Si noti che la soluzione trovata (??-??) è valida (assumendo $g_i \geq 0$ per $i = 1, 2, 3$) solo se

$$\epsilon_1 + N g_- \geq 0 \Leftrightarrow 2 g_1 \leq \epsilon_1 + N g'_2 = \epsilon_1 + N (g_2 - 2 g_3) \quad (29)$$

Domanda 5

Sviluppiamo la (??) al secondo ordine nelle costanti di accoppiamento:

$$E_0 = g_3 N^2 - \frac{\epsilon_1}{4} \left[\frac{1}{2} \frac{N (g_+ - g_-)}{\epsilon_1} \right]^2 + O(g^3) = g_3 N^2 - N^2 \frac{g_1^2}{\epsilon_1} + O(g^3) \quad (30)$$

Questo risultato coincide con il risultato ottenuto in teoria delle perturbazioni a meno di termini di ordine relativo $\frac{1}{N}$: questo riflette il fatto che l'approssimazione di Bogoliubov trascura termini dell'ordine di 1 rispetto a quelli di ordine N (pur conservando termini di ordine arbitrario nelle costanti di accoppiamento).

Sviluppiamo il valor medio nell' Eq. (??)

$$\langle \psi_0 | \hat{N}_1 | \psi_0 \rangle = \frac{1}{4} \left[\sqrt{\frac{1+x_+}{1+x_-}} + \sqrt{\frac{1+x_-}{1+x_+}} - 2 \right] \quad (31)$$

dove $x_\pm \equiv \frac{N g_\pm}{\epsilon_1}$, al secondo ordine nelle costanti di accoppiamento:

$$\langle \psi_0 | \hat{N}_1 | \psi_0 \rangle = \frac{1}{4} \left[\sqrt{1 + (x_+ - x_-) + x_-^2} - x_- x_+ + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1 + (x_- - x_+) + x_+^2 - x_+ x_- - 2} + O(x_{\pm}^3) \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} (x_-^2 + x_+^2 - 2x_- x_+) - \frac{2}{8} (x_+ - x_-)^2 \right] + O(x_{\pm}^3) \\
&= \frac{1}{4} \frac{1}{4} (x_+ - x_-)^2 + O(x_{\pm}^3) \\
&= \frac{N^2 g_1^2}{\epsilon_1^2} + O(g^3) \tag{32}
\end{aligned}$$

in accordo con il risultato (??) a meno di termini di ordine relativo $O(1/N)$.

Corso di Fisica Teorica — I modulo
Prof. Camillo Imbimbo, Prof. S. Giusto

Prova Scritta 05/08/2003

Problema 1

Si consideri l'algebra di Fock degli operatori *fermionici* ψ_n e ψ_n^\dagger , con n intero relativo:

$$\{\psi_n, \psi_m^\dagger\} = \delta_{n,m} \quad \{\psi_n, \psi_m\} = \{\psi_n^\dagger, \psi_m^\dagger\} = 0 \quad (33)$$

Fissato q intero relativo, si definiscano, per ogni n , gli operatori

$$\alpha_n = \sum_{k>q} \psi_{k-n}^\dagger \psi_k - \sum_{k\leq q} \psi_k \psi_{k-n}^\dagger \quad (34)$$

Domanda 1

Si dimostri che:

$$\alpha_n^\dagger = \alpha_{-n} \quad (35)$$

Domanda 2

Si calcoli il commutatore

$$\hat{\Delta}_{n,k} \equiv [\alpha_n, \psi_k] \quad (36)$$

Domanda 3

Utilizzando la risposta della domanda precedente si dimostri che

$$[[\alpha_n, \alpha_m], \psi_k] = 0 \quad (37)$$

per ogni n, m e k . Assumendo provata l'irriducibilità della rappresentazione usuale dell'algebra di Fock (??), si utilizzi nel seguito (??) per concludere che, sullo spazio di Fock, il commutatore $[\alpha_n, \alpha_m]$ è proporzionale all'identità

$$\hat{A}(n, m) \equiv [\alpha_n, \alpha_m] = C(n, m) \cdot 1 \quad (38)$$

dove $C(n, m)$ sono numeri dipendenti da n ed m .

Domanda 4

Si introduca l'operatore momento

$$\hat{P} = \sum_k k \psi_k^\dagger \psi_k, \quad (39)$$

si calcolino i commutatori

$$[\hat{P}, \psi_k] \quad [\hat{P}, \psi_k^\dagger] \quad (40)$$

e si dimostri che

$$[\hat{P}, \alpha_k] = k \alpha_k \quad (41)$$

Si utilizzi (??) per dimostrare che

$$C(n, m) = \delta_{n+m, 0} f(n) \quad (42)$$

dove $f(-n) = -f(n)$.

Domanda 5

Si determini $f(n)$ calcolando l'azione di $\hat{A}(n, m)$ sul vuoto di Fermi $|0\rangle$ associato ad q , definito dalle equazioni

$$\psi_k |0\rangle = 0 \quad \text{per } k > q \quad \psi_n^\dagger |0\rangle = 0 \quad \text{per } k \leq q \quad (43)$$

(In altre parole, per $k > q$ si prenda $\psi_k = a_k$ e $\psi_k^\dagger = a_k^\dagger$, mentre per $k \leq q$ si prenda $\psi_k = b_k^\dagger$ e $\psi_k^\dagger = b_k$ con a_k e b_k distruttori e a_k^\dagger e b_k^\dagger creatori.)

Corso di “Sistemi a Molti Corpi” — Prova intermedia
Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta 10/04/2003

Problema 1

Si consideri un sistema di N bosoni identici non-relativistici di spin 1 quantizzati in una scatola di volume V che interagiscono attraverso il potenziale a due corpi

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = g \frac{e^{-\mu|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \quad (44)$$

Domanda 1

Scrivere l'Hamiltoniana del sistema in termini degli operatori di creazione e distruzione di stati di singola particella con momento e spin definiti.

Domanda 2

Si scriva l'operatore momento totale \hat{P} del sistema in termini degli operatori di creazione e distruzione. \hat{P} è conservato?

Domanda 3

Calcolare l'energia dello stato fondamentale del sistema al secondo ordine in g .

Corso di “Sistemi a Molti Corpi” — Prova Scritta
Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta 03/06/2003

Problema 1

Un sistema di N fermioni identici è descritto dalla seguente Hamiltoniana

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\epsilon(n) a_n^\dagger a_n - N g(n) (a_n^\dagger a_n)^2 \right] \quad (45)$$

dove

$$\epsilon(n) = A n^2 \quad g(n) = B n \quad (46)$$

con A e B numeri reali *positivi*

Domanda 1

Determinare lo stato fondamentale $|F\rangle$ del sistema e la sua energia. (*Suggerimento*: distinguere i casi $B/A > 1$ e $B/A < 1$.)

Domanda 2

Determinare una trasformazione canonica degli operatori di creazione e distruzione della forma

$$a_n = u_n b_n + v_n b_n^\dagger \quad (47)$$

tale che lo stato fondamentale del sistema sia il vuoto relativo agli operatori b_n, b_n^\dagger :

$$b_n |F\rangle = 0 \quad (48)$$

Domanda 3

Scrivere l'Hamiltoniana H del sistema e l'operatore numero di particelle \hat{N} nelle nuove variabili

Corso di Fisica Teorica — I modulo
 Prof. Camillo Imbimbo, Prof. S. Giusto

Prova Scritta 29/09/2003

Si consideri un sistema di N particelle bosoniche non relativistiche non-interagenti che si muovono in 1 dimensione spaziale nel potenziale $V(x)$ dato da

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0; \\ V_0, & \text{se } 0 < x < a; \\ 0, & \text{se } x \geq a; \end{cases} \quad (49)$$

Domanda 1

Scrivere l'Hamiltoniana \hat{H} del sistema nel formalismo della seconda quantizzazione, in termini degli operatori di campo $\hat{\psi}(x)$ e $\hat{\psi}^\dagger(x)$

Domanda 2

Siano $\{\psi_k^{\text{in}}(x)\}$ e $\{\psi_k^{\text{out}}(x)\}$, con k reale due basi dello spazio degli stati di singola particella. $\{\psi_k^{\text{in}}(x)\}$ e $\{\psi_k^{\text{out}}(x)\}$ sono autofunzioni dell'energia con autovalore $E_k = \frac{k^2}{2m}$, definite come segue: per $k > 0$

$$\psi_k^{\text{in}}(x) = \begin{cases} e^{ikx} + A_k^{\text{in}} e^{-ikx}, & \text{se } x \rightarrow -\infty; \\ B_k^{\text{in}} e^{ikx}, & \text{se } x \rightarrow +\infty; \end{cases} \quad (50)$$

$$\psi_{-k}^{\text{in}}(x) = \begin{cases} C_k^{\text{in}} e^{-ikx}, & \text{se } x \rightarrow -\infty; \\ D_k^{\text{in}} e^{ikx} + e^{-ikx}, & \text{se } x \rightarrow +\infty; \end{cases} \quad (51)$$

$$\psi_{-k}^{\text{out}}(x) = \begin{cases} A_k^{\text{out}} e^{ikx} + e^{-ikx}, & \text{se } x \rightarrow -\infty; \\ B_k^{\text{out}} e^{-ikx}, & \text{se } x \rightarrow +\infty; \end{cases} \quad (52)$$

$$\psi_k^{\text{out}}(x) = \begin{cases} C_k^{\text{out}} e^{ikx}, & \text{se } x \rightarrow -\infty; \\ e^{ikx} + D_k^{\text{out}} e^{-ikx}, & \text{se } x \rightarrow +\infty; \end{cases} \quad (53)$$

Siano $a_k^{\text{in,out}}$ e $(a_k^{\text{in,out}})^\dagger$ gli operatori di creazione e di distruzione relativi, rispettivamente, a $\psi_k^{\text{in,out}}(x)$. Dimostrare che a_k^{in} e a_k^{out} sono collegati dalla relazione

$$a_k^{\text{out}} = \sum_{k'} S_{k',k}^* a_{k'}^{\text{in}} \quad (54)$$

dove $S_{k',k}$ è una matrice unitaria. Determinare la matrice $S_{k',k}$.

Domanda 3

Scrivere l'operatore $U(S)$ che implementa la trasformazione canonica (??) sullo spazio degli stati,

$$U(S) a_k^{\text{in}} U(S)^\dagger = \sum_{k'} S_{k',k}^* a_{k'}^{\text{in}} \quad (55)$$

come funzione degli operatori di creazione e distruzione a_k^{in} e $(a_k^{\text{in}})^\dagger$.

Domanda 4

Siano

$$|\{x_k\}; \text{in}\rangle = e^{\sum_k x_k (a_k^{\text{in}})^\dagger} |0\rangle \quad |\{x_k\}; \text{out}\rangle = e^{\sum_k x_k (a_k^{\text{out}})^\dagger} |0\rangle \quad (56)$$

gli stati coerenti associati rispettivamente a a_k^{in} ed a_k^{out} . Calcolare

$$\langle \{x_k\}; \text{out} | \{x_k\}; \text{in} \rangle \quad (57)$$

Corso di Fisica Teorica — I modulo

Prof. Camillo Imbimbo, Prof. S. Giusto

Prova Scritta 29/09/2003; Soluzione

Domanda 1

$$\hat{H} = \int dx \hat{\psi}^\dagger(x) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \hat{\psi}(x) \quad (58)$$

Domanda 2

Determiniamo la matrice di trasmissione. Sia $\psi_k(x)$ un'autofunzione dell'energia tale che

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \alpha_k e^{ikx} + \beta_k e^{-ikx}, & \text{se } x \rightarrow -\infty; \\ \alpha'_k e^{ikx} + \beta'_k e^{-ikx}, & \text{se } x \rightarrow +\infty; \end{cases} \quad (59)$$

La matrice di trasmissione $T(k)$ è definita da

$$T(k) = \begin{pmatrix} F_k & G_k^* \\ G_k & F_k^* \end{pmatrix} \quad (60)$$

dove

$$\begin{aligned} \alpha'_k &= F_k \alpha_k + G_k^* \beta_k \\ \beta'_k &= G_k \alpha_k + F_k^* \beta_k \end{aligned} \quad (61)$$

Supponiamo $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} > V_0$. Sia $\frac{\hbar^2 \tilde{k}^2}{2m} = E_k - V_0$. Deve essere

$$\psi_k(x) = \alpha''_k e^{i\tilde{k}x} + \beta''_k e^{-i\tilde{k}x} \quad \text{se } 0 < x < a \quad (62)$$

Le condizioni di continuità ad $x = 0$ sono

$$\begin{aligned} \alpha_k + \beta_k &= \alpha''_k + \beta''_k \\ \frac{k}{\tilde{k}}(\alpha_k - \beta_k) &= (\alpha''_k - \beta''_k) \end{aligned} \quad (63)$$

cioè

$$\begin{aligned} \alpha''_k &= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{k}{\tilde{k}}\right) \alpha_k + \left(1 - \frac{k}{\tilde{k}}\right) \beta_k \right] \\ \beta''_k &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{k}{\tilde{k}}\right) \alpha_k + \left(1 + \frac{k}{\tilde{k}}\right) \beta_k \right] \end{aligned} \quad (64)$$

Le condizioni di continuità ad $x = a$ sono invece

$$\begin{aligned}\alpha_k'' e^{i\tilde{k}a} + \beta_k e^{-i\tilde{k}a} &= \alpha_k' e^{ika} + \beta_k' e^{-ika} \\ \frac{\tilde{k}}{k} (\alpha_k'' e^{i\tilde{k}a} - \beta_k e^{-i\tilde{k}a}) &= \alpha_k' e^{ika} - \beta_k' e^{-ika}\end{aligned}\quad (65)$$

cioè

$$\begin{aligned}\alpha_k' &= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\tilde{k}}{k}\right) e^{i(\tilde{k}-k)a} \alpha_k'' + \left(1 - \frac{\tilde{k}}{k}\right) e^{-i(\tilde{k}+k)a} \beta_k'' \right] \\ \beta_k' &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{\tilde{k}}{k}\right) e^{i(k+\tilde{k})a} \alpha_k'' + \left(1 + \frac{\tilde{k}}{k}\right) e^{-i(\tilde{k}-k)a} \beta_k'' \right]\end{aligned}\quad (66)$$

In conclusione

$$\begin{aligned}F_k &= \frac{(k + \tilde{k})^2 e^{i\tilde{k}a} - (k - \tilde{k})^2 e^{-i\tilde{k}a}}{4k\tilde{k}} = \cos \tilde{k}a + i \frac{k^2 + \tilde{k}^2}{2k\tilde{k}} \sin \tilde{k}a \\ G_k &= i e^{ika} \frac{(k^2 - \tilde{k}^2) \sin(a\tilde{k})}{2k\tilde{k}}\end{aligned}\quad (67)$$

Pertanto

$$\psi_k^{\text{in}}(x) = \begin{cases} e^{ikx} - \frac{G_k}{F_k^*} e^{-ikx}, & \text{se } x \rightarrow -\infty; \\ \frac{1}{F_k} e^{ikx}, & \text{se } x \rightarrow +\infty; \end{cases}\quad (68)$$

$$\psi_{-k}^{\text{in}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{F_k^*} e^{-ikx}, & \text{se } x \rightarrow -\infty; \\ \frac{G_k^+}{F_k^*} e^{ikx} + e^{-ikx}, & \text{se } x \rightarrow +\infty; \end{cases}\quad (69)$$

$$\psi_{-k}^{\text{out}}(x) = \begin{cases} -\frac{G_k^*}{F_k} e^{ikx} + e^{-ikx}, & \text{se } x \rightarrow -\infty; \\ \frac{1}{F_k} e^{-ikx}, & \text{se } x \rightarrow +\infty; \end{cases}\quad (70)$$

$$\psi_k^{\text{out}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{F_k} e^{ikx}, & \text{se } x \rightarrow -\infty; \\ e^{ikx} + \frac{G_k}{F_k} e^{-ikx}, & \text{se } x \rightarrow +\infty; \end{cases}\quad (71)$$

Da cui

$$\begin{aligned}\psi_{-k}^{\text{out}}(x) &= \frac{1}{F_k} (\psi_{-k}^{\text{in}}(x) - G_k^* \psi_k^{\text{in}}(x)) \\ \psi_k^{\text{out}}(x) &= \frac{1}{F_k} (G_k \psi_{-k}^{\text{in}}(x) + \psi_k^{\text{in}}(x))\end{aligned}\quad (72)$$

Pertanto

$$(a_k^{\text{out}})^\dagger = \frac{1}{F_k} ((a_k^{\text{in}})^\dagger + G_k (a_{-k}^{\text{in}})^\dagger) \quad (73)$$

Domanda 3

Introduciamo la matrice

$$S_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{F_k} & -\frac{G_k^*}{F_k} \\ \frac{G_k}{F_k} & \frac{1}{F_k} \end{pmatrix} \quad (74)$$

Definiamo

$$F_k = |F_k| e^{i\alpha} \quad G_k = |G_k| e^{i\beta} \quad (75)$$

cioè

$$\begin{aligned} |G_k| &= \frac{k^2 - \tilde{k}^2}{2k\tilde{k}} & \beta_k &= ka + \frac{\pi}{2} & |F_k| &= \sqrt{(1 + |G_k|^2)} \\ \tan \alpha_k &= \frac{k^2 + \tilde{k}^2}{2k\tilde{k}} \tan(ka) \end{aligned} \quad (76)$$

Pertanto

$$S_k = e^{i\alpha_k} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(1+|G_k|^2)}} & -\frac{|G_k| e^{-i\beta_k}}{\sqrt{(1+|G_k|^2)}} \\ \frac{e^{i\beta_k} |G_k|}{\sqrt{(1+|G_k|^2)}} & \frac{1}{\sqrt{(1+|G_k|^2)}} \end{pmatrix} = e^{i\alpha_k} e^{i\theta_k \vec{n} \cdot \vec{\sigma}} \equiv e^{iR_k} \quad (77)$$

dove

$$\cos \theta_k = \frac{1}{\sqrt{(1 + |G_k|^2)}} \quad \vec{n} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & i e^{-i\beta_k} \\ -i e^{i\beta_k} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-ika} \\ e^{ika} & 0 \end{pmatrix} \quad (78)$$

Pertanto

$$R_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \theta_k e^{-ika} \\ \theta_k e^{ika} & \alpha_k \end{pmatrix} \quad (79)$$

Cerchiamo l'operatore $U(S) \equiv e^{i \sum_{k,k'} (a_k^{\text{in}})^\dagger H_{k,k'} a_{k'}^{\text{in}}}$ tale che

$$U(S) (a_k^{\text{in}})^\dagger U(S)^\dagger = (e^{iR} (a^{\text{in}})^\dagger)_k \quad (80)$$

cioè

$$\left[\sum_{k,k'} (a_k^{\text{in}})^\dagger H_{k,k'} a_{k'}^{\text{in}}, (a_p^{\text{in}})^\dagger \right] = \sum_q R_{p,q} (a_q^{\text{in}})^\dagger \quad (81)$$

Da cui

$$H_{k,k'} = R_{k',k} \quad (82)$$

In conclusione

$$\begin{aligned} \sum_{k,k'} (a_k^{\text{in}})^\dagger H_{k,k'} a_{k'}^{\text{in}} &= \sum_{k>0} \alpha_k \left[(a_k^{\text{in}})^\dagger a_k^{\text{in}} + (a_{-k}^{\text{in}})^\dagger a_{-k}^{\text{in}} \right] + \\ &+ \sum_{k>0} \theta_k \left[e^{ika} (a_{-k}^{\text{in}})^\dagger a_k^{\text{in}} + e^{-ika} (a_k^{\text{in}})^\dagger a_{-k}^{\text{in}} \right] \end{aligned} \quad (83)$$

Domanda 4

Abbiamo

$$|\{x_k\}; \text{out}\rangle = U(S) |\{x_k\}; \text{in}\rangle \quad (84)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \langle \{x_k\}; \text{out} | \{x_k\}; \text{in} \rangle &= \langle 0 | e^{\sum_k x_k^* a_k^{\text{in}}} U(S)^\dagger e^{\sum_k x_k (a_k^{\text{in}})^\dagger} U(S) | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | e^{\sum_k x_k^* a_k^{\text{in}}} e^{\sum_{k,k'} x_k S_{k'k} (a_{k'}^{\text{in}})^\dagger} | 0 \rangle = e^{\sum_{k,k'} x_k^* S_{kk'} x_{k'}} = \\ &= e^{\sum_{k>0} \frac{x_k^* x_k + x_{-k}^* x_{-k} - x_{-k}^* x_k G_k^* + x_k^* x_{-k} G_k}{F_k}} \end{aligned} \quad (85)$$

Corso di Fisica Teorica — I modulo

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta 10/11/2003

Problema 1

Siano a_n , b_n e a_n^\dagger , b_n^\dagger , con $n = 0, 1, \dots$ operatori di creazione e distruzione che soddisfano le usuali regole di commutazione

$$\begin{aligned} [a_n, a_m^\dagger] &= \delta_{n,m} & [b_n, b_m^\dagger] &= \delta_{n,m} \\ [a_n, a_m] &= [b_n, b_m] & &= 0 \end{aligned} \quad (86)$$

Domanda 1

Si determini lo stato $|\Psi\rangle$, con $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$, che soddisfa le condizioni seguenti

$$\begin{aligned} (a_n - \alpha_n b_n^\dagger)|\Psi\rangle &= 0 \\ (b_n - \alpha_n a_n^\dagger)|\Psi\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (87)$$

dove α_n , con $n = 0, 1, \dots$ sono numeri complessi. Per quali valori di α_n lo stato $|\Psi\rangle$ è normalizzabile?

Domanda 2

Sia $|\{n_0, m_0; n_1, m_1; n_2, m_2; \dots\}\rangle$ lo stato normalizzato ad 1 con numeri di occupazione relativi ad $\hat{N}_k^{(a)} \equiv a_k^\dagger a_k$ e $\hat{N}_k^{(b)} \equiv b_k^\dagger b_k$ determinati:

$$\begin{aligned} \hat{N}_k^{(a)} |\{n_0, m_0; n_1, m_1; \dots\}\rangle &= n_k |\{n_0, m_0; n_1, m_1; \dots\}\rangle \\ \hat{N}_k^{(b)} |\{n_0, m_0; n_1, m_1; \dots\}\rangle &= m_k |\{n_0, m_0; n_1, m_1; \dots\}\rangle \end{aligned} \quad (88)$$

Si calcolino i prodotti scalari

$$\langle\{n_0, m_0; n_1, m_1; \dots\}|\Psi\rangle \quad (89)$$

Domanda 3

Sia

$$\hat{H} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (a_n^\dagger a_n + b_n^\dagger b_n) \quad (90)$$

l'Hamiltoniana del sistema, con ϵ_n numeri reali. Si calcoli il valore medio di \hat{H} sullo stato $|\Psi\rangle$.

Corso di Fisica Teorica — I modulo

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta 12/01/2004

Problema

Si consideri un sistema di bosoni identici in una scatola tridimensionale di volume V interagenti attraverso un potenziale a due corpi $U(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$ invariante per rotazioni:

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{1}{2V} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}} u(k) a_{\vec{k}_2 + \vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}_1 - \vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2} \quad (91)$$

Domanda 1

Si calcoli in approssimazione di Born l'elemento di matrice \hat{T}_{fi}^{Box} tra lo stato iniziale (normalizzato) $|I\rangle$ contenente due particelle con numeri d'onda \vec{k}_1 e \vec{k}_2 e lo stato finale (normalizzato) $|F\rangle$ con due particelle di numeri d'onda \vec{k}'_1 e \vec{k}'_2 .

Domanda 2

Si calcoli la probabilità di transizione per unità di tempo e per unità di flusso tra gli stati $|I\rangle$ e $|F\rangle$

$$d\sigma \equiv \frac{dP_{fi}}{T \Phi} \equiv \frac{|T_{fi}^{Box} 2\pi i \delta_{Box}(E_f - E_i)|^2}{T \Phi} \quad (92)$$

tenendo conto delle seguenti definizioni: (a) $\delta_{Box}(E_f - E_i)^2 = \delta(E_f - E_i) \frac{T}{2\pi \hbar}$; (b) Il flusso $\Phi = \frac{v_{rel}}{V}$ dove v_{rel} è la velocità della particella 2 nel sistema di quiete della particella 1.

Domanda 3

Si calcoli, in approssimazione di Born, la sezione d'urto di diffusione di due particelle scalari *identiche* interagenti con il potenziale $U(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$ in prima quantizzazione. (*Suggerimento*: si vada nel sistema del centro di massa e ci si riduca al problema di diffusione di una particella in un potenziale esterno)

Domanda 4

Si confrontino le risposte alle domande 2 e 3.

Corso di Fisica Teorica — I modulo

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta 05/02/2004

Problema

Si consideri la seguente Hamiltoniana

$$\hat{H} = E_a a^\dagger a + E_b b^\dagger b + g (a^\dagger + a) (b^\dagger + b) \quad (93)$$

dove (a, a^\dagger) e (b, b^\dagger) sono operatori di creazione e distruzione bosonici tra loro commutanti.

Domanda 1

Si calcoli l'energia dello stato fondamentale al secondo ordine nella costante di accoppiamento g .

Domanda 2

Si determini la trasformazione canonica che diagonalizza l'Hamiltoniana del sistema e si calcoli l'energia esatta dello stato fondamentale. (*Suggerimento*: si passi alle variabili hermitiane $\hat{x} \sim a^\dagger + a$ e $\hat{y} \sim b + b^\dagger$ ed alle loro variabili coniugate \hat{p}_x e \hat{p}_y)

Domanda 3

Si confronti il risultato esatto con quello della teoria delle perturbazioni.

Corso di Fisica Teorica — I modulo
Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta 05/02/2004 — Soluzione

Domanda 1

L'azione del potenziale sullo stato fondamentale è:

$$g(a^\dagger + a)(b^\dagger + b)|0\rangle = g a^\dagger b^\dagger |0\rangle \quad (94)$$

Pertanto

$$E_0(g) = -\frac{g^2}{E_a + E_b} + O(g^3) \quad (95)$$

Domanda 2

Prendiamo

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{1}{\sqrt{2E_a}}(a^\dagger + a) & \hat{p}_x &= \frac{i\sqrt{E_a}}{\sqrt{2}}(a^\dagger - a) \\ \hat{y} &= \frac{1}{\sqrt{2E_b}}(b^\dagger + b) & \hat{p}_y &= \frac{i\sqrt{E_b}}{\sqrt{2}}(b^\dagger - b) \end{aligned} \quad (96)$$

Le relazioni inverse sono

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{E_a} \hat{x} + i \frac{\hat{p}_x}{\sqrt{E_a}}) & a^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{E_a} \hat{x} - i \frac{\hat{p}_x}{\sqrt{E_a}}) \\ b &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{E_b} \hat{y} + i \frac{\hat{p}_y}{\sqrt{E_b}}) & b^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{E_b} \hat{y} - i \frac{\hat{p}_y}{\sqrt{E_b}}) \end{aligned} \quad (97)$$

I coefficienti delle combinazioni $a^\dagger + a$ e $b^\dagger + b$ sono scelti in modo da rendere eguali ad 1 le masse dei due oscillatori associati:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= E_a \frac{1}{2} \left(\sqrt{E_a} \hat{x} - i \frac{\hat{p}_x}{\sqrt{E_a}} \right) \left(\sqrt{E_a} \hat{x} + i \frac{\hat{p}_x}{\sqrt{E_a}} \right) + \\ &+ E_b \frac{1}{2} \left(\sqrt{E_b} \hat{y} - i \frac{\hat{p}_y}{\sqrt{E_b}} \right) \left(\sqrt{E_b} \hat{y} + i \frac{\hat{p}_y}{\sqrt{E_b}} \right) + 2 \sqrt{E_a E_b} g \hat{x} \hat{y} = \\ &= \frac{1}{2} \hat{p}_x^2 + \frac{1}{2} \hat{p}_y^2 + \\ &+ \frac{1}{2} E_a^2 \hat{x}^2 + \frac{1}{2} E_b^2 \hat{y}^2 + 2 \sqrt{E_a E_b} g \hat{x} \hat{y} - \frac{1}{2} (E_a + E_b) \end{aligned} \quad (98)$$

Consideriamo la trasformazione canonica associata ad una rotazione delle (\hat{x}, \hat{y}) e (\hat{p}_x, \hat{p}_y) che diagonalizza il potenziale:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \cos \theta \hat{x}' + \sin \theta \hat{y}' & \hat{p}_x &= \cos \theta \hat{p}'_x + \sin \theta \hat{p}'_y \\ \hat{y} &= -\sin \theta \hat{x}' + \cos \theta \hat{y}' & \hat{p}_y &= -\sin \theta \hat{p}'_x + \cos \theta \hat{p}'_y\end{aligned}\quad (99)$$

L'angolo θ è determinato dalla relazione

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_a^2 & 2g\sqrt{E_a E_b} \\ 2g\sqrt{E_a E_b} & E_b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \omega_a^2 & 0 \\ 0 & \omega_b^2 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (100)$$

dove $\omega_{a,b}^2$ sono gli autovalori della matrice del potenziale, soluzioni dell'equazione secolare:

$$\det \begin{pmatrix} E_a^2 - \omega^2 & 2g\sqrt{E_a E_b} \\ 2g\sqrt{E_a E_b} & E_b^2 - \omega^2 \end{pmatrix} = (E_a^2 - \omega^2)(E_b^2 - \omega^2) - 4g^2 E_a E_b = 0 \quad (101)$$

Pertanto

$$\omega_{a,b}^2 = \frac{1}{2} \left(E_a^2 + E_b^2 \pm \sqrt{(E_a^2 - E_b^2)^2 + 16g^2 E_a E_b} \right) \quad (102)$$

(dove abbiamo scelto $E_a \geq E_b$).

In termini delle variabili $(\hat{x}', \hat{p}'_x, \hat{y}', \hat{p}'_y)$ l'Hamiltoniana diventa

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}'_x)^2 + \frac{1}{2} (\hat{p}'_y)^2 + \frac{1}{2} \omega_a^2 (\hat{x}')^2 + \frac{1}{2} \omega_b^2 (\hat{y}')^2 - \frac{1}{2} (E_a + E_b) \quad (103)$$

L'energia dello stato fondamentale è pertanto

$$E_0(g) = \frac{1}{2} (\omega_a + \omega_b) - \frac{1}{2} (E_a + E_b) \quad (104)$$

con $\omega_{a,b}$ date in Eq.(??)

Determiniamo θ dall'Eq. (??):

$$(E_a^2 - \omega_a^2) \cos \theta - 2g\sqrt{E_a E_b} \sin \theta = 0 \quad (105)$$

cioè

$$\tan \theta = \frac{(E_a^2 - \omega_a^2)}{2g\sqrt{E_a E_b}} = \frac{E_a^2 - E_b^2 - \sqrt{(E_a^2 - E_b^2)^2 + 16g^2 E_a E_b}}{4g\sqrt{E_a E_b}} \quad (106)$$

NOTA: L'angolo θ può essere equivalentemente determinato dalla condizione che il coefficiente di $\hat{x}' \hat{y}'$ nell'Hamiltoniana si annulli. Sostituendo le relazioni (??) nell'Hamiltoniana otteniamo per il coefficiente di questo termine

$$(E_a^2 - E_b^2)2 \cos \theta \sin \theta + 4g \sqrt{E_a E_b} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0 \quad (107)$$

Pertanto

$$(E_a^2 - E_b^2) \sin 2\theta + 4g \sqrt{E_a E_b} \cos 2\theta = 0 \quad (108)$$

da cui

$$\tan 2\theta = \frac{4g \sqrt{E_a E_b}}{(E_b^2 - E_a^2)} \quad (109)$$

in accordo con la (??). Infatti dalla (??) otteniamo

$$\tan \theta = \frac{1 - \sqrt{1 + \tan^2 2\theta}}{\tan 2\theta} = \frac{E_a^2 - E_b^2 - \sqrt{(E_b^2 - E_a^2)^2 + 16g^2 E_a E_b}}{4g \sqrt{E_a E_b}} \quad (110)$$

Domanda 3

Sviluppando $\omega_{a,b}^2$ in Eq. (??) al secondo ordine in g otteniamo

$$\omega_{a,b}^2 = \frac{1}{2} \left(E_a^2 + E_b^2 \pm (E_a^2 - E_b^2 + \frac{8g^2 E_a E_b}{E_a^2 - E_b^2}) + O(g^3) \right) \quad (111)$$

Cioè

$$\omega_{a,b}^2 = E_{a,b}^2 \pm \frac{4g^2 E_a E_b}{E_a^2 - E_b^2} + O(g^3) \quad (112)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \omega_a &= E_a + \frac{2g^2 E_b}{E_a^2 - E_b^2} + O(g^3) \\ \omega_b &= E_b - \frac{2g^2 E_a}{E_a^2 - E_b^2} + O(g^3) \end{aligned} \quad (113)$$

Sostituendo nell'espressione (??) per l'energia dello stato fondamentale otteniamo:

$$\begin{aligned} E_0(g) &= \frac{1}{2} \left(E_a + E_b + \frac{2g^2 (E_b - E_a)}{E_a^2 - E_b^2} \right) - \frac{1}{2} (E_a + E_b) + O(g^3) \\ &= -\frac{g^2}{E_a + E_b} + O(g^3) \end{aligned} \quad (114)$$

in accordo con la risposta (??) alla Domanda 1.

Corso di Fisica Teorica — I modulo

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta 02/04/2004

Problema

Un sistema di N particelle bosoniche identiche di spin j è descritto, nella rappresentazione di prima quantizzazione, dalla seguente Hamiltoniana:

$$\hat{H} = \mu \sum_{i=1}^N S_z^{(i)} - \lambda \sum_{i < j} \vec{S}^{(i)} \cdot \vec{S}^{(j)} \quad (115)$$

dove $\vec{S}^{(i)} = (S_x^{(i)}, S_y^{(i)}, S_z^{(i)})$ sono gli operatori di spin della particella i -esima, e $\mu > 0$ e $\lambda > 0$ sono costanti reali positive.

Domanda 1

Scrivere l'Hamiltoniana del sistema nella rappresentazione di seconda quantizzazione, facendo uso degli operatori di creazione e distruzione a_σ e a_σ^\dagger relativi a stati con spin S_z uguale a σ , con $\sigma = -j, -j+1, \dots, j$.

Domanda 2

Calcolare, al primo ordine in λ , l'energia dello stato fondamentale del sistema.

Domanda 3

Calcolare l'energia dello stato fondamentale al secondo ordine in λ .

Domanda 4

Calcolare l'energia dello stato fondamentale esatta.

Corso di Fisica Teorica
Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 12/07/2004

Problema

Si consideri un sistema di N fermioni identici non-relativistici di massa m che si muovono in una scatola unidimensionale di lunghezza L ed interagiscono attraverso un potenziale a due corpi

$$V(x_1, x_2) = \frac{g}{\mu} e^{-\mu |x_1 - x_2|} \quad (116)$$

Domanda 1

Si derivi l'Hamiltoniana del sistema nel formalismo di seconda quantizzazione in termini degli operatori di creazione e distruzione a_p e a_p^\dagger di stati di singola particella di momento definito p .

Domanda 2

Si calcoli l'energia dello stato fondamentale per $g = 0$. (Si consideri il limite termodinamico, $L \rightarrow \infty$).

Domanda 3

Si calcoli l'energia dello stato fondamentale al primo ordine in g .

Prova Scritta del 17/06/2004: Soluzione

Domanda 1

$$\hat{H} = \sum_p \frac{\hbar^2 p^2}{2m} a_p^\dagger a_p + \frac{g}{2L} \sum_{p_1, p_2, k} \frac{2}{k^2 + \mu^2} a_{p_1-k}^\dagger a_{p_2+k}^\dagger a_{p_2} a_{p_1} \quad (117)$$

Domanda 2

$$N = \sum_{|p| < p_f} 1 = \int_{|p| < p_f} \frac{L dp}{2\pi} = \frac{L p_f}{\pi} \quad (118)$$

$$\frac{E_F^{(0)}}{N} = \sum_{|p| < p_f} \frac{\hbar^2 p^2}{2m N} = \int_{|p| < p_f} \frac{L dp}{2\pi} \frac{\hbar^2 p^2}{2m N} = \frac{\hbar^2 p_f^3 L}{6\pi m N} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{6m} \left(\frac{N}{L}\right)^2 \quad (119)$$

Domanda 3

$$\begin{aligned} \frac{E_F^{(1)}}{N} &= \frac{g}{2LN} \sum_{p_1, p_2, k} \frac{2}{k^2 + \mu^2} \langle F | a_{p_1-k}^\dagger a_{p_2+k}^\dagger a_{p_2} a_{p_1} | F \rangle = \\ &= \frac{g}{LN \mu^2} - \sum_{|p_1|, |p_2| < p_f} \frac{2}{(p_1 - p_2)^2 + \mu^2} = \end{aligned} \quad (120)$$