

Corso di Fisica Teorica — Sessione Estiva (II modulo)

Prof. Camillo Imbimbo, Prof. S. Giusto

Prova Scritta 19/06/2002

Problema 1

Una particella vettoriale di massa m_V decade in due particelle scalari di massa m_π e m_ϕ a causa di un'interazione descritta dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_I = gV_\mu \partial^\mu \pi \phi \quad (1)$$

dove V_μ , π e ϕ sono i campi associati alle particelle in questione e g è una costante.

Domanda 1

Si calcoli la probabilità di decadimento per unità di tempo della particella vettoriale *non polarizzata* all'ordine piú basso in g . Per semplificare la formula risultante si assuma che la particella ϕ sia molto piú leggera della particella vettoriale e della particella π .

Domanda 2

Si consideri ora il caso in cui la particella vettoriale abbia spin definito lungo l'asse delle z nel sistema di riposo. Siano \vec{e}_α con $\alpha = +, 0, -$ i vettori di polarizzazione corrispondenti rispettivamente a spin $+1, 0, -1$. Si denoti con θ l'angolo formato dalla particella emessa π con l'asse delle z . Si calcoli, per ciascuno dei tre stati di spin della particella vettoriale, la distribuzione angolare dei prodotti del decadimento come funzione di θ .

Corso di Fisica Teorica — Sessione Estiva (II modulo)

Prof. Camillo Imbimbo, Prof. S. Giusto

Prova Scritta 30/07/2002

Problema 1

Due particelle scalari ϕ e ψ di massa nulla interagiscono con un campo vettoriale V_μ di massa m attraverso l'interazione descritta dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_I = gV_\mu \partial^\mu \phi \psi \quad (2)$$

Domanda 1

Si calcoli la sezione d'urto differenziale del processo di diffusione elastico $(\phi, \psi) \rightarrow (\phi, \psi)$ all'ordine piú basso in g . (*Suggerimento*: si esprima il risultato in funzione delle variabili cinematiche invariati s e t).

Domanda 2

Si calcoli la sezione d'urto *integrata* sull'angolo di diffusione nei seguenti limiti:

- a) per $\alpha \equiv \frac{s}{m^2} \ll 1$ (bassa energia)
 - b) per $\alpha \equiv \frac{s}{m^2} \gg 1$ (alta energia)
- (si esprima il risultato in termini di α , g e m).

Corso di Fisica Teorica — Sessione Autunnale (II modulo)

Prof. Camillo Imbimbo, Prof. S. Giusto

Prova Scritta 07/10/2002

Problema

Una particella vettoriale A di massa M_A decade in una particella vettoriale B di massa M_B ed in una particella scalare ϕ di massa m_ϕ attraverso l'interazione descritta dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_I = g A_\mu B^\mu \phi \quad (3)$$

Domanda 1

Si calcoli la probabilità di decadimento totale per unità di tempo nel caso in cui la particella A nello stato iniziale non sia polarizzata.

Domanda 2

Si supponga che la particella A abbia spin definito s_A (con $s_A = 1, 0, -1$) lungo l'asse delle z nel sistema di quiete. Si denoti con θ l'angolo formato dalla particella emessa B con l'asse delle z . Per ciascun s_A , si calcoli la distribuzione angolare, come funzione di θ , dei prodotti del decadimento, indipendentemente dallo spin della particella B .

Domanda 3

Si calcoli la probabilità per unità di tempo di emissione in direzione θ di una particella B con spin s_B (con $s_B = 1, 0, -1$) lungo l'asse di propagazione, per una particella A con spin s_A lungo l'asse z del sistema di quiete.

Corso di Fisica Teorica — II modulo

Prof. Camillo Imbimbo, Prof. S. Giusto

Prova Scritta 20/06/2003

Problema 1

Una particella scalare π di massa M_π decade in una particella scalare ϕ di massa nulla ed in una particella vettoriale di massa m_V descritta da un campo vettoriale V_μ . L'interazione responsabile del decadimento è descritta dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_I = gV_\mu \partial^\mu \pi \phi \quad (4)$$

Domanda 1

Si calcoli la probabilità totale di decadimento per unità di tempo della particella π in (ϕ, V) .

Domanda 2

Si calcoli la probabilità di decadimento per unità di tempo di π in uno stato finale nel quale la particella vettoriale ha spin $\sigma = 0, \pm 1$ definito nel suo sistema di quiete.

Problema 2

Si consideri la seguente densità lagrangiana in uno spazio-tempo di dimensione 3:

$$L = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^2 + m \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho \quad (5)$$

dove A_μ , $\mu = 0, 1, 2$ è un campo vettoriale reale, $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e m è un parametro reale.

Domanda 1

Si derivino le equazioni del moto relative a L . Si esprimano le equazioni in termini di $F_{\mu\nu}$.

Domanda 2

Si cerchi la soluzione generale delle equazioni di campo soddisfatte da $F_{\mu\nu}$ nella forma

$$F_{\mu\nu}(x) = \sum_{\vec{k}, \alpha} f_{\mu\nu}(\vec{k}, \alpha) e^{-ikx} a_{\vec{k}, \alpha} + f_{\mu\nu}^*(\vec{k}, \alpha) e^{ikx} a_{\vec{k}, \alpha}^\dagger \quad (6)$$

dove $\vec{k} \equiv (k_1, k_2)$, $\vec{x} \equiv (x_1, x_2)$ e $kx \equiv k^0 x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x}$, ed α è un indice discreto che labella le soluzioni indipendenti delle equazioni di campo per \vec{k} fissato.

Si assuma che $m \neq 0$. Si determini: (a) la relazione tra l'energia k^0 e l'impulso \vec{k} ; (b) i vettori di polarizzazione $f_{\mu\nu}(\vec{k}, \alpha)$ in funzione dell'impulso \vec{k} ; (c) i valori ed il significato fisico dell'indice α . (*Suggerimento*: si esprima $f_{\mu\nu}(\vec{k}, \alpha)$ in termini di $J^\mu(\vec{k}, \alpha) \equiv \epsilon^{\mu\nu\rho} f_{\nu\rho}(\vec{k}, \alpha)$.)

Domanda 3

Rispondere alla domanda 2 nel caso in cui $m = 0$. (*Suggerimento*: in questo caso è necessario considerare, oltre alle equazioni del moto, anche l'identità di Bianchi per $F_{\mu\nu}$: $\epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0$. Perché questo non era necessario quando $m \neq 0$?).

Domanda 4

Qual'è il piccolo gruppo del gruppo di Poincarè in (2+1)-dimensioni? Qual'è la massa e qual'è lo spin delle particelle (e delle anti-particelle) descritte dal campo $F_{\mu\nu}$?

Corso di Fisica Teorica — II modulo
Prof. Camillo Imbimbo, Dott. S. Giusto

Prova Scritta 29/09/2003

Problema 1

Una particella massiva di spin 2 è descritta da tensori di polarizzazione $\epsilon_{\mu\nu}^{(\sigma)}(p)$, con $\sigma = -2, -1, 0, 1, 2$, *simmetrici* e con traccia nulla

$$\epsilon_{\mu\nu}^{(\sigma)}(p) = \epsilon_{\nu\mu}^{(\sigma)}(p) \quad g^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu}^{(\sigma)}(p) = 0, \quad (7)$$

che soddisfano le seguente condizione di trasversalità

$$p^\mu \epsilon_{\mu\nu}^{(\sigma)}(p) = 0 \quad (8)$$

Domanda 1

Si consideri il tensore a 4 indici,

$$K_{\mu\nu; \mu'\nu'}(p) \equiv \sum_{\sigma} \bar{\epsilon}_{\mu\nu}^{(\sigma)}(p) \epsilon_{\mu'\nu'}^{(\sigma)}(p) \quad (9)$$

evidentemente simmetrico sotto le seguenti operazioni: (i) $\mu \leftrightarrow \nu$; (ii) $\mu' \leftrightarrow \nu'$; (iii) $(\mu, \nu) \leftrightarrow (\mu', \nu')$ e $p \rightarrow -p$.

Si scriva $K_{\mu\nu; \mu'\nu'}(p)$ come combinazione lineare di tutti i tensori a 4 indici, invarianti sotto (i)-(iii), che si possono formare a partire da p_μ e $g_{\mu\nu}$. (*Suggerimento*: questi tensori si dividono in 3 tipi: (a) quelli composti da due tensori metrici g ; (b) quelli composti da un tensore metrico g e due momenti p ; (c) quelli composti da 4 momenti p .) Si determini la combinazione lineare cercata imponendo le condizioni di trasversalità e traccia nulla

$$g^{\mu'\nu'} K_{\mu\nu; \mu'\nu'}(p) = 0 \quad p^{\nu'} K_{\mu\nu; \mu'\nu'}(p) = 0 \quad (10)$$

Domanda 2

Si determini la normalizzazione della combinazione lineare di tensori di cui al punto precedente, utilizzando la condizione

$$g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} K_{\mu\nu; \mu'\nu'}(p) = 5 \quad (11)$$

Si motivi questa condizione.

Domanda 3

Si calcoli, all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni, il tempo di decadimento di una particella di spin 2 di massa M non polarizzata in due particelle scalari di massa *nulla*, assumendo che la densità lagrangiana d'interazione sia

$$\mathcal{L}_I = \frac{G}{M} h_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi \quad (12)$$

dove

$$h_{\mu\nu}(x) = \sum_{\vec{p}, \sigma} \frac{\epsilon_{\mu\nu}^{(\sigma)}(p)}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}(2\pi)^{3/2}} a_{\vec{p}\sigma} e^{-ipx} + \frac{\bar{\epsilon}_{\mu\nu}^{(\sigma)}(p)}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}(2\pi)^{3/2}} a_{\vec{p}\sigma}^\dagger e^{ipx} \quad (13)$$

è il campo che descrive la particella di spin 2 e $\phi(x)$ quello che descrive la particella di spin 0.

Corso di Fisica Teorica — II modulo

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta 05/12/2003

Problema 1

Un fermione di massa m descritto da un campo di Dirac ψ interagisce con una particella scalare di massa m_ϕ descritta dal campo reale ϕ attraverso la densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_I = g \bar{\psi} \gamma_5 \psi \phi \quad (14)$$

Domanda 1

Si calcoli all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni la sezione d'urto differenziale non-polarizzata del processo di diffusione di un fermione sull'antifermione corrispondente. (*Suggerimento*: si scriva l'ampiezza invariante di diffusione in termini delle variabili invarianti di Mandelstam, s e t).

Domanda 2

Si calcoli la sezione d'urto integrata nei due casi limite:

- a) $s \gg m_\phi^2$
- b) $4m^2 \ll s \ll m_\phi^2$

Corso di Fisica Teorica — II modulo

Prof. Camillo Imbimbo

Soluzione Prova Scritta 05/12/2003

Domanda 1

All'ordine più basso, g^2 , ci sono due diagrammi che contribuiscono al processo, quello di canale s e quello di canale t . Siano p_1, p_2 gli impulsi rispettivamente della particella ed anti-particella entranti, q_1, q_2 quelli rispettivamente della particella ed anti-particella uscenti.

L'ampiezza A_s di canale s è

$$A_s = g^2 \frac{\bar{u}(q_1) \gamma_5 v(q_2) \bar{v}(p_2) \gamma_5 u(p_1)}{s - m_\phi^2} \quad (15)$$

mentre l'ampiezza $A - t$ del processo nel canale t è

$$A_t = -g^2 \frac{\bar{u}(q_1) \gamma_5 u(p_1) \bar{v}(p_2) \gamma_5 v(q_2)}{t - m_\phi^2} \quad (16)$$

Le ampiezze hanno un segno relativo opposto. Il modulo quadro dell'ampiezza totale mediato sugli stati iniziali e sommato su quelli finali è la somma dei tre contributi: il modulo quadro dell'ampiezza del canale s dà il contributo

$$\begin{aligned} \sum_{pol} |A_s|^2 &= \frac{1}{4} \frac{g^4}{(s - m_\phi^2)^2} \text{Tr}[\gamma_5 (\hat{p}_1 + m) \gamma_5 (\hat{p}_2 - m)] \times \\ &\quad \times \text{Tr}[\gamma_5 (\hat{q}_2 - m) \gamma_5 (\hat{q}_1 + m)] = \\ &= \frac{1}{4} \frac{g^4}{(s - m_\phi^2)^2} \text{Tr}[(\hat{p}_1 + m) (\hat{p}_2 + m)] \text{Tr}[(\hat{q}_2 + m) (\hat{q}_1 + m)] = \\ &= \frac{4 \cdot 4}{4} \frac{g^4}{(s - m_\phi^2)^2} (p_1 \cdot p_2 + m^2) (q_1 \cdot q_2 + m^2) \\ &= \frac{g^4 s^2}{(s - m_\phi^2)^2} \end{aligned} \quad (17)$$

Il modulo quadro dell'ampiezza nel canale t dà il contributo

$$\begin{aligned} \sum_{pol} |A_t|^2 &= \frac{1}{4} \frac{g^4}{(t - m_\phi^2)^2} \text{Tr}[\gamma_5 (\hat{p}_1 + m) \gamma_5 (\hat{q}_1 + m)] \times \\ &\quad \times \text{Tr}[\gamma_5 (\hat{q}_2 - m) \gamma_5 (\hat{p}_2 - m)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \frac{g^4}{(t - m_\phi^2)^2} \text{Tr}[(\hat{p}_1 + m)(\hat{q}_1 - m)] \text{Tr}[(\hat{p}_2 + m)(\hat{q}_2 - m)] = \\
&= \frac{4 \cdot 4}{4} \frac{g^4}{(t - m_\phi^2)^2} (p_1 \cdot q_1 - m^2)(p_2 \cdot q_2 - m^2) \\
&= \frac{g^4 t^2}{(t - m_\phi^2)^2} \tag{18}
\end{aligned}$$

Infine il termine d'interferenza delle due ampiezze è

$$\begin{aligned}
\sum_{pol} (A_s \bar{A}_t + \bar{A}_s A_t) &= \frac{-1}{4} \frac{2g^4}{(t - m_\phi^2)(s - m_\phi^2)} \times \\
&\quad \times \text{Tr}[\gamma_5 (\hat{p}_1 + m) \gamma_5 (\hat{q}_1 + m) \gamma_5 (\hat{q}_2 - m) \gamma_5 (\hat{p}_2 - m)] = \\
&= \frac{-1}{2} \frac{g^4}{(t - m_\phi^2)(s - m_\phi^2)} \text{Tr}[(\hat{p}_1 - m)(\hat{q}_1 + m)(\hat{q}_2 + m)(\hat{p}_2 - m)] = \\
&= \frac{-1}{2} \frac{g^4}{(t - m_\phi^2)(s - m_\phi^2)} \left(\text{Tr}[\hat{p}_1 \hat{q}_1 \hat{q}_2 \hat{p}_2] + \right. \\
&\quad \left. + 2m^2 \text{Tr}[-\hat{p}_1 \hat{q}_1 + \hat{p}_1 \hat{p}_2 - \hat{p}_1 \hat{q}_2] + 4m^4 \right) = \\
&= \frac{-4}{2} \frac{g^4}{(t - m_\phi^2)(s - m_\phi^2)} \times \\
&\quad \times \left[(p_1 \cdot q_1)(p_2 \cdot q_2) - (p_1 \cdot q_2)(p_2 \cdot q_1) + (p_1 \cdot p_2)(q_1 \cdot q_2) + \right. \\
&\quad \left. + 2m^2(-p_1 \cdot q_1 + p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot q_2) + m^4 \right] = \\
&= \frac{-4}{2} \frac{g^4}{(t - m_\phi^2)(s - m_\phi^2)} \times \\
&\quad \times \left[(m^2 - \frac{t}{2})^2 - (m^2 - \frac{u}{2})^2 + (m^2 - \frac{s}{2})^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2m^2(\frac{t}{2} - m^2 + \frac{s}{2} - m^2 + \frac{u}{2} - m^2) + m^4 \right] = \\
&= \frac{-4}{2} \frac{g^4}{(t - m_\phi^2)(s - m_\phi^2)} \times \\
&\quad \times \left[m^4 + \frac{t^2 + s^2 - u^2}{4} - m^2(t + s - u) - 2m^4 + m^4 \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-4}{2} \frac{g^4}{(t - m_\phi^2)(s - m_\phi^2)} \times \\
&\quad \times \left[m^4 + \frac{16m^4 - 8m^2u - 2ts}{4} - m^2(4m^2 - 2u) - m^4 \right] = \\
&= \frac{g^4 st}{(t - m_\phi^2)(s - m_\phi^2)} \tag{19}
\end{aligned}$$

Pertanto la sezione d'urto differenziale è

$$\frac{d\sigma}{d(-t)} = \frac{g^4}{64\pi^2} \frac{4}{s(s - 4m^2)} \left[\frac{s^2}{(s - m_\phi^2)^2} + \frac{t^2}{(t - m_\phi^2)^2} + \frac{st}{(t - m_\phi^2)(s - m_\phi^2)} \right] \tag{20}$$

Se \vec{p} è l'impulso del fermione nel sistema del baricentro

$$4|\vec{p}|^2 = s - 4m^2 \quad t = 2|\vec{p}|^2(\cos\theta - 1) \tag{21}$$

e

$$0 \leq -t \leq s - 4m^2 \quad d(-t) = d\cos\theta \frac{(s - 4m^2)}{2} \tag{22}$$

Pertanto

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{g^4}{32\pi^2} \frac{1}{s} \left[\frac{s^2}{(s - m_\phi^2)^2} + \frac{t^2}{(t - m_\phi^2)^2} + \frac{st}{(t - m_\phi^2)(s - m_\phi^2)} \right] \tag{23}$$

Domanda 2

La sezione d'urto integrata è

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{g^4}{16\pi^2 s} \left[\frac{s^2}{(s - m_\phi^2)^2} + \frac{s}{(s - m_\phi^2)} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{sm_\phi^2}{(s - m_\phi^2)(s - 4m^2)} \log \frac{s - 4m^2 + m_\phi^2}{m_\phi^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{s - 4m^2 + 2m_\phi^2}{s - 4m^2 + m_\phi^2} - \frac{2m_\phi^2}{s - 4m^2} \log \frac{s - 4m^2 + m_\phi^2}{m_\phi^2} \right] = \\
&= \frac{g^4}{16\pi^2 s} \left[\frac{s^2}{(s - m_\phi^2)^2} + \frac{s}{(s - m_\phi^2)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{s - 4m^2 + 2m_\phi^2}{s - 4m^2 + m_\phi^2} - \frac{(3s - 2m_\phi^2)m_\phi^2}{(s - m_\phi^2)(s - 4m^2)} \log \frac{s - 4m^2 + m_\phi^2}{m_\phi^2} \right] \tag{24}
\end{aligned}$$

a) Nel limite $s \gg m_\phi^2$ otteniamo

$$\sigma = \frac{3g^4}{16\pi^2 s} \quad (25)$$

b) Nel limite $s \ll m_\phi^2$

$$\sigma = \frac{g^4 s}{16\pi^2 m_\phi^4} \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4m^2}{s} \right) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{4m^2}{s} \right)^2 \right] \quad (26)$$

Se inoltre $4m^2 \ll s \ll m_\phi^2$ allora

$$\sigma = \frac{5g^4 s}{96\pi^2 m_\phi^4} \quad (27)$$

Corso di Fisica Teorica — II modulo

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta 09/03/2004

Problema 1

Un fermione di massa M descritto da un campo di Dirac Ψ decade in una particella di spin $1/2$ e di massa m descritta dal campo χ ed in una particella scalare ϕ , di massa m_ϕ , attraverso la seguente densità lagrangiana:

$$\mathcal{L}_I = \bar{\Psi}(g_1 + g_2 \gamma_5)\chi \phi + h.c. \quad (28)$$

Domanda 1

Calcolare la probabilità totale di decadimento per unità di tempo della particella Ψ in χ, ϕ

Domanda 2

Si calcoli la probabilità di decadimento per unità di tempo di una particella Ψ con spin σ lungo l'asse delle z nel suo sistema di riposo in uno stato finale in cui la particella ψ si propaga lungo un asse che forma un angolo θ rispetto all'asse delle z e ha spin s lungo l'asse z nel suo sistema di quiete.

Domanda 3

Si calcoli la probabilità di decadimento di una particella Ψ con spin σ lungo l'asse delle z nel suo sistema di riposo in uno stato finale in cui la particella ψ si propaga lungo un asse che forma un angolo θ rispetto all'asse delle z e ha spin s lungo la sua direzione di propagazione.

Corso di Teoria dei Campi
Prof. Camillo Imbimbo
Prova Parziale Scritta 01/04/2004

Domanda 1

Si determinino i vettori di polarizzazione $\epsilon_\mu(\vec{p}, \sigma)$ di una particella di spin 1, massa $m > 0$ e impulso \vec{p} arbitrario, con spin σ definito lungo l'asse delle z nel suo sistema di quiete.

Domanda 2

Si determinino i vettori di polarizzazione $\epsilon'_\mu(\vec{p}, \sigma)$ di una particella di spin 1, massa $m > 0$, impulso \vec{p} arbitrario, con spin σ definito lungo l'asse $\vec{p} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$.

Domanda 3

Sia \mathcal{P}_μ^ν la matrice di Lorentz che implementa l'inversione di parità spaziale sulle coordinate. Sia

$$U^{(1)}(P)\psi_\mu(x) = -\eta \mathcal{P}_\mu^\nu \psi_\nu(\mathcal{P} x) \quad (29)$$

l'azione della parità sulle funzioni d'onda di singola particella relative ad una particella vettoriale di massa m e di parità intrinseca η . Determinare

(a) $U(P) a_{\vec{p},\sigma} U(P)^\dagger$;

(b) $U(P) b_{\vec{p},\sigma} U(P)^\dagger$;

(c) $U(P) \hat{\psi}_\mu(x) U(P)^\dagger$

dove $U(P)$ denota l'azione della parità sullo spazio di Fock, $a_{\vec{p},\sigma}$ e $b_{\vec{p},\sigma}$ sono gli operatori di distruzione rispettivamente delle particelle e delle anti-particelle, e $\hat{\psi}_\mu(x)$ è l'operatore di campo relativistico.

Corso di Teoria dei Campi
Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 17/06/2004

Problema

Una particella scalare di massa m_ϕ descritta dal campo reale ϕ decade in un fermione di massa m e nel corrispondente antifermione, descritti da un campo di Dirac ψ . La densità lagrangiana di interazione è

$$\mathcal{L}_I = g_1 \phi \bar{\psi} \psi + g_2 \phi \bar{\psi} \gamma^5 \psi + \frac{g_3}{m_\phi} \partial_\mu \phi \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \frac{g_4}{m_\phi} \partial_\mu \phi \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \quad (30)$$

Domanda 1

Calcolare la probabilità totale di decadimento per unità di tempo della particella ϕ in $\psi, \bar{\psi}$ all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni.

Domanda 2

Si calcoli la probabilità di decadimento per unità di tempo della particella ϕ in ognuno dei possibili stati di polarizzazione con elicità definita dei fermioni nello stato finale.

Prova Scritta del 17/06/2004: Soluzione

Indichiamo con p_1 e p_2 i quadri-impulsi del fermione e dell'anti-fermione e con p il quadri-impulso dello scalare. Abbiamo

$$p = p_1 + p_2 \quad (31)$$

L'ampiezza di transizione invariante è

$$\begin{aligned} M_{fi} &= \bar{u}(p_1) \left[g_1 + g_2 \gamma^5 + i g_3 \frac{\hat{p}}{m_\phi} + i g_4 \frac{\hat{p}}{m_\phi} \gamma^5 \right] v(p_2) = \\ &= \bar{u}(p_1) \left[g_1 + g_2 \gamma^5 + i g_4 \frac{2m}{m_\phi} \gamma^5 \right] v(p_2) \end{aligned} \quad (32)$$

in quanto

$$\bar{u}(p_1)(\hat{p}_1 - m) = (\hat{p}_2 + m)v(p_2) = 0 \quad (33)$$

Pertanto

$$|M_{fi}|^2 = \bar{u}(p_1) \left[g_1 + g_2 \gamma^5 + i g_4 \frac{2m}{m_\phi} \gamma^5 \right] v(p_2) \bar{v}(p_2) \left[g_1 - g_2 \gamma^5 + i g_4 \frac{2m}{m_\phi} \gamma^5 \right] u(p_1) \quad (34)$$

Domanda 1

Poniamoci nel sistema di quiete della particella scalare che decade. La conservazione del quadri-impulso implica che

$$\vec{p}' \equiv \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \quad m_\phi = 2\sqrt{m^2 + |\vec{p}'|^2} \quad (35)$$

cioè

$$|\vec{p}'| = \frac{m_\phi}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_\phi^2}} \quad (36)$$

La probabilità di decadimento totale per unità di tempo è

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{1}{8\pi m_\phi^2} |\vec{p}'| \sum_f |M_{fi}|^2 = \\ &= \frac{1}{16\pi m_\phi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_\phi^2}} \text{Tr} \left[(\hat{p}_1 + m) (g_1 + \tilde{g}_2 \gamma^5) \times \right. \\ &\quad \left. \times (\hat{p}_2 - m) (g_1 - \tilde{g}_2^* \gamma^5) \right] \end{aligned} \quad (37)$$

dove abbiamo introdotto

$$\tilde{g}_2 \equiv g_2 + i g_4 \frac{2m}{m_\phi} \quad (38)$$

Sviluppiamo la traccia

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[(\hat{p}_1 + m) (g_1 + \tilde{g}_2 \gamma^5) (\hat{p}_2 - m) (g_1 - \tilde{g}_2^* \gamma^5) \right] &= \text{Tr} \left[(\hat{p}_1 + m) (g_1 + \tilde{g}_2 \gamma^5) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left((g_1 + \tilde{g}_2^* \gamma^5) \hat{p}_2 - (g_1 - \tilde{g}_2^* \gamma^5) m \right) \right] = \\ &= \text{Tr} \left[(\hat{p}_1 + m) (g_1^2 + |\tilde{g}_2|^2) \hat{p}_2 - m^2 (g_1^2 - |\tilde{g}_2|^2) \right] = \\ &= 4 p_1 p_2 (g_1^2 + |\tilde{g}_2|^2) - 4 m^2 (g_1^2 - |\tilde{g}_2|^2) = \\ &= 4 (p_1 p_2 - m^2) g_1^2 + 4 (p_1 p_2 + m^2) |\tilde{g}_2|^2 \end{aligned} \quad (39)$$

Notiamo che

$$p_1 p_2 = \frac{1}{2} (p_1 + p_2)^2 - m^2 = \frac{m_\phi^2}{2} - m^2 \quad (40)$$

Pertanto la traccia (39) si scrive

$$2 m_\phi^2 \left[\left(1 - \frac{4m^2}{m_\phi^2}\right) g_1^2 + |\tilde{g}_2|^2 \right] \quad (41)$$

Dunque, sostituendo in (37), otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{m_\phi}{8\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_\phi^2}} \left[\left(1 - \frac{4m^2}{m_\phi^2}\right) g_1^2 + |\tilde{g}_2|^2 \right] = \\ &= \frac{m_\phi}{8\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_\phi^2}} \left[\left(1 - \frac{4m^2}{m_\phi^2}\right) g_1^2 + g_2^2 + g_4^2 \frac{4m^2}{m_\phi^2} \right] \end{aligned} \quad (42)$$

Domanda 2

Possiamo supporre senza perdita di generalità che il momento $\vec{p}' = \vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ sia diretto lungo l'asse delle z. I vettore di polarizzazione del fermione nella rappresentazione spinoriale è dunque

$$u(p_1, \sigma_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1} \\ \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1} \end{pmatrix} \quad (43)$$

mentre quello dell'antifermione è

$$v(p_2, \sigma_2) = \begin{pmatrix} -i\sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_2} \\ i\sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_2} \end{pmatrix} \quad (44)$$

dove $\sigma_{1,2} = \pm 1$. Sostituendo queste espressioni nell'ampiezza di transizione

$$M_{fi} = \bar{u}(p_1, \sigma_1) \left[g_1 + \tilde{g}_2 \gamma^5 \right] v(p_2, \sigma_2) \quad (45)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} M_{fi} &= \bar{u}(p_1, \sigma_1) \begin{pmatrix} g_1 - \tilde{g}_2 & 0 \\ 0 & g_1 + \tilde{g}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_2} \\ i\sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_2} \end{pmatrix} = \\ &= \left(\sqrt{\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1}^\dagger \quad \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1}^\dagger \right) \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} -i(g_1 - \tilde{g}_2)\sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_2} \\ i(g_1 + \tilde{g}_2)\sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_2} \end{pmatrix} = \\ &= \left[-\sqrt{(\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|)(\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|)}(g_1 - \tilde{g}_2) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|)(\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|)}(g_1 + \tilde{g}_2) \right] i w_{\sigma_2}^\dagger w_{\sigma_1} \end{aligned} \quad (46)$$

Dunque,

$$M_{fi} = 0 \quad \text{se} \quad \sigma_1 = -\sigma_2 \quad (47)$$

(che è una conseguenza diretta della conservazione del momento angolare)

Se invece $\sigma_1 = \sigma_2$

$$M_{fi} = i(2\sigma_1 |\vec{p}'| g_1 + 2\omega_{p'} \tilde{g}_2) \quad (48)$$

Pertanto abbiamo due ampiezze diverse da zero: quella nella quale i due fermioni nello stato finale hanno elicità positiva

$$\frac{dP_+}{dt} = \frac{m_\phi}{16\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_\phi^2}} \left| \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_\phi^2}} g_1 + \tilde{g}_2 \right|^2 \quad (49)$$

e quella in cui i due fermioni hanno elicità negative

$$\frac{dP_-}{dt} = \frac{m_\phi}{16\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_\phi^2}} \left| \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_\phi^2}} g_1 - \tilde{g}_2 \right|^2 \quad (50)$$

Corso di Teoria dei Campi
Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 12(22)/07/2004

Problema

Una particella vettoriale di massa m_V descritta dal campo reale V_μ decade in un fermione di massa m e nel corrispondente antifermione, descritti da un campo di Dirac ψ . La densità lagrangiana di interazione è

$$\mathcal{L}_I = V_\mu (g_1 \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + g_2 \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi) \quad (51)$$

Domanda 1

Calcolare all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni la probabilità totale di decadimento per unità di tempo di una particella V non polarizzata in $\psi, \bar{\psi}$.

Domanda 2

Si calcolino le quattro ampiezze di transizione invarianti relative ai processi in cui la particella vettoriale V ha spin $+1$ lungo lo stesso asse lungo le quale si propaga il fermione prodotto nel decadimento, e il fermione e l'antifermione hanno elicità definita.

Domanda 3

Si calcoli la distribuzione angolare del decadimento di una particella V che si trova in uno stato con polarizzazione definita $\sigma = -1, 0, 1$ lungo l'asse delle z in una coppia fermione-antifermione di elicità definite ed in cui l'impulso del fermione formi un angolo θ con l'asse delle z .

Prova Scritta del 12(22)/07/2004: Soluzione

Indichiamo con p_1 e p_2 i quadri-impulsi del fermione e dell'anti-fermione e con p il quadri-impulso della particella vettoriale. Abbiamo

$$p = p_1 + p_2 \quad (52)$$

L'ampiezza di transizione invariante è

$$M_{fi} = \epsilon_\mu(p) \bar{u}(p_1) \left[g_1 \gamma^\mu + g_2 \gamma^5 \gamma^\mu \right] v(p_2) \quad (53)$$

Pertanto

$$|M_{fi}|^2 = \epsilon_\mu(p) \bar{u}(p_1) \left[g_1 \gamma^\mu + g_2 \gamma^5 \gamma^\mu \right] v(p_2) \epsilon_\nu^*(p) \bar{v}(p_2) \left[g_1 \gamma^\nu + g_2 \gamma^5 \gamma^\nu \right] u(p_1) \quad (54)$$

Domanda 1

Poniamoci nel sistema di quiete della particella vettoriale che decade. La conservazione del quadri-impulso implica che

$$\vec{p}' \equiv \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \quad m_V = 2\sqrt{m^2 + |\vec{p}'|^2} \quad (55)$$

cioè

$$|\vec{p}'| = \frac{m_V}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_V^2}} \quad (56)$$

La probabilità di decadimento totale per unità di tempo e per unità di angolo solido $d\Omega$ è

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt d\Omega} &= \frac{1}{32 \pi^2 m_V^2} |\vec{p}'| \frac{1}{3} \sum_{f,i} |M_{fi}|^2 = \\ &= \frac{1}{192 \pi^2 m_V} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_V^2}} \left(\frac{-4m^2 g_2^2}{m_V^2} \text{Tr}[(\hat{p}_1 + m) \gamma^5 (\hat{p}_2 - m) \gamma^5] - \right. \\ &\quad \left. - \text{Tr}[(\hat{p}_1 + m) (g_1 \gamma^\mu + g_2 \gamma^5 \gamma^\mu) (\hat{p}_2 - m) (g_1 \gamma_\mu + g_2 \gamma^5 \gamma_\mu)] \right) = \\ &= \frac{1}{192 \pi^2 m_V} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_V^2}} \left(8m^2 g_2^2 - \right. \\ &\quad \left. - \text{Tr}[(\hat{p}_1 + m) (g_1 \gamma^\mu + g_2 \gamma^5 \gamma^\mu) (\hat{p}_2 - m) (g_1 \gamma_\mu + g_2 \gamma^5 \gamma_\mu)] \right) \end{aligned} \quad (57)$$

Sviluppiamo la traccia

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}[(\hat{p}_1 + m)(g_1 + g_2 \gamma^5) \gamma^\mu (\hat{p}_2 - m) \gamma_\mu (g_1 - g_2 \gamma^5)] = \\
& = -\text{Tr}[(\hat{p}_1 + m)(g_1 + g_2 \gamma^5)(2\hat{p}_2 + 4m)(g_1 - g_2 \gamma^5)] = \\
& = -\text{Tr}[(\hat{p}_1 + m)(2\hat{p}_2 + 4m)(g_1^2 - g_2 g_1 \gamma^5)] - \\
& \quad -\text{Tr}[(\hat{p}_1 + m)(-2\hat{p}_2 + 4m)(g_1 g_2 \gamma^5 - g_2^2)] = \\
& = -g_1^2(8p_1 p_2 + 16m^2) + g_2^2(-8p_1 p_2 + 16m^2) = \\
& = -8p_1 p_2 (g_1^2 + g_2^2) + 16m^2 (g_2^2 - g_1^2)
\end{aligned} \tag{58}$$

pertanto

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt d\Omega} &= \frac{1}{24 \pi^2 m_V} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_V^2}} \left[(p_1 p_2 + 2m^2) g_1^2 + \right. \\
& \quad \left. + (p_1 p_2 - m^2) g_2^2 \right]
\end{aligned} \tag{59}$$

Notiamo che

$$p_1 p_2 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)^2 - m^2 = \frac{m_V^2}{2} - m^2 \tag{60}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt d\Omega} &= \frac{1}{24 \pi^2 m_V} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_V^2}} \left[\left(\frac{m_V^2}{2} + m^2 \right) g_1^2 + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{m_V^2}{2} - 2m^2 \right) g_2^2 \right]
\end{aligned} \tag{61}$$

and

$$\frac{dP}{dt} = \frac{m_V}{12 \pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_V^2}} \left[\left(1 + \frac{2m^2}{m_V^2}\right) g_1^2 + \left(1 - \frac{4m^2}{m_V^2}\right) g_2^2 \right] \tag{62}$$

Domanda 2

Poniamoci nel sistema di quiete della particella vettoriale che decade. Allora

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \equiv \vec{p}' \tag{63}$$

Pertanto il vettore di polarizzazione del fermione uscente si scrive nella rappresentazione spinoriale come segue:

$$u(\vec{p}', \sigma_1) = \begin{pmatrix} \left[\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1} \\ \left[\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1} \end{pmatrix} \tag{64}$$

dove $\hat{\sigma}_i$, con $i = 1, 2, 3$ sono le matrici di Pauli, mentre $\frac{1}{2}\sigma_1 = \pm\frac{1}{2}$ è l'elicità del fermione nello stato finale.

Poiché il vettore di polarizzazione $v(\vec{p}, \sigma)$ di un antifermione deve soddisfare la relazione

$$v(\vec{p}, \sigma)^* = \gamma^2 u(\vec{p}, \sigma) \quad (65)$$

abbiamo

$$v(\vec{p}, \sigma) = \begin{pmatrix} [\cos \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 - i \sin \frac{\theta}{2}] \sqrt{\omega_p - \sigma |\vec{p}|} w_\sigma \\ -[\cos \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 - i \sin \frac{\theta}{2}] \sqrt{\omega_p + \sigma |\vec{p}|} w_\sigma \end{pmatrix} \quad (66)$$

Dunque il vettore di polarizzazione dell'antifermione con impulso $-\vec{p}'$ ed elicità $\frac{1}{2}\sigma_2$ nello stato finale è

$$v(-\vec{p}', \sigma_2) = \begin{pmatrix} -[i \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2] \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_2} \\ [i \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2] \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_2} \end{pmatrix} \quad (67)$$

Il vettore di polarizzazione della particella vettoriale di spin λ nel suo sistema di quiete si scrive invece

$$\epsilon^\mu(p) = (0, \vec{\epsilon}_\lambda) \quad (68)$$

dove $\lambda = -1, 0, 1$, $\vec{\epsilon}_{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm i, 0)$ e $\vec{\epsilon}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1)$.

Sostituendo queste espressioni nell'ampiezza di transizione

$$\begin{aligned} M_{fi} &= -\bar{u}(\vec{p}', \sigma_1) \left[(g_1 + g_2 \gamma^5) \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\gamma} \right] v(-\vec{p}', \hat{\sigma}_2) = \\ &= \bar{u}(\vec{p}', \sigma_1) \begin{pmatrix} g_1 - g_2 & 0 \\ 0 & g_1 + g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} \\ -\vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} v(-\vec{p}', \sigma_2) = \\ &= \bar{u}(\vec{p}', \sigma_1) \begin{pmatrix} 0 & (g_1 - g_2) \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} \\ -(g_1 + g_2) \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} v(-\vec{p}', \sigma_2) = \\ &= u^\dagger(\vec{p}', \sigma_1) \begin{pmatrix} -(g_1 + g_2) \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & (g_1 - g_2) \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix} v(-\vec{p}', \sigma_2) = \\ &= (g_1 + g_2) \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} \times \\ &\quad \times w_{\sigma_1}^\dagger \left[\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} \left[i \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] w_{\sigma_2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (g_1 - g_2) \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|} \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|} \times \\
& \quad \times w_{\sigma_1}^\dagger \left[\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} \left[i \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] w_{\sigma_2} = \\
& = \left[(g_1 + g_2) \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} + \right. \\
& \quad \left. + (g_1 - g_2) \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|} \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|} \right] \times \\
& \times w_{\sigma_1}^\dagger \left[\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} \left[i \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] w_{\sigma_2} = \\
& = \left[(g_1 + g_2) \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} + \right. \\
& \quad \left. + (g_1 - g_2) \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|} \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|} \right] \times \\
& \times w_{\sigma_1}^\dagger \left[i \cos \theta \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} + 2i \sin^2 \frac{\theta}{2} \epsilon_\lambda^{(2)} \hat{\sigma}_2 + i \sin \theta (\epsilon_\lambda^{(1)} \hat{\sigma}_3 - \epsilon_\lambda^{(3)} \hat{\sigma}_1) \right] w_{\sigma_2} \quad (69)
\end{aligned}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}
& w_{\sigma_1}^\dagger \left[i \cos \theta \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} + 2i \sin^2 \frac{\theta}{2} \epsilon_\lambda^{(2)} \hat{\sigma}_2 + i \sin \theta (\epsilon_\lambda^{(1)} \hat{\sigma}_3 - \epsilon_\lambda^{(3)} \hat{\sigma}_1) \right] w_{\sigma_2} = \\
& \begin{cases} i \sigma_1 \cos \theta \delta_{\sigma_1, \sigma_2} - i \sin \theta \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} & \text{se } \lambda = 0 \\ \sigma_2 \sin \theta \frac{i}{\sqrt{2}} \delta_{\sigma_1, \sigma_2} \mp i \sigma_2 \sqrt{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} + i \sqrt{2} \cos \theta \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} \delta_{\sigma_1, \lambda} & \text{se } \lambda = \pm 1 \end{cases} \quad (70)
\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
M_{fi}^{\lambda=0} & = i 2 g_1 m \sigma_1 \cos \theta \delta_{\sigma_1, \sigma_2} - i 2 [g_1 \omega_{p'} + \sigma_1 g_2 |\vec{p}'|] \sin \theta \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} \\
& = i 2 g_1 m \sigma_1 \cos \theta \delta_{\sigma_1, \sigma_2} - i m_V \left[g_1 + \sigma_1 g_2 \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_V^2}} \right] \sin \theta \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} \quad (71)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
M_{fi}^{\lambda=\pm 1} & = i 2 \sqrt{2} \cos \theta [g_1 \omega_{p'} + \sigma_1 g_2 |\vec{p}'|] \delta_{\sigma_1, \lambda} \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} + \\
& + i \sigma_1 \sqrt{2} g_1 m \sin \theta \delta_{\sigma_1, \sigma_2} \pm i 2 \sqrt{2} \sigma_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} [g_1 \omega_{p'} + \sigma_1 g_2 |\vec{p}'|] \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} = \\
& = i m_V \sqrt{2} \cos \theta \left[g_1 + \sigma_1 g_2 \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_V^2}} \right] \delta_{\sigma_1, \lambda} \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} + \\
& i \sigma_1 \sqrt{2} g_1 m \sin \theta \delta_{\sigma_1, \sigma_2} \pm i m_V \sqrt{2} \sigma_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left[g_1 + \sigma_1 g_2 \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_V^2}} \right] \delta_{\sigma_1, -\sigma_2}
\end{aligned}$$

Le probabilità di decadimento per unità di tempo e per unità di angolo solido dei vari processi sono

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt d\Omega} [\lambda = 0 \rightarrow (\pm 1/2, \pm 1/2)] &= \frac{1}{16\pi^2 m_V} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_V^2}} g_1^2 m^2 \cos^2 \theta \\
\frac{dP}{dt d\Omega} [\lambda = 0 \rightarrow (\pm 1/2, \mp 1/2)] &= \frac{m_V}{64\pi^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_V^2}} \times \\
&\quad \times \left[g_1 \pm g_2 \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_V^2}} \right]^2 \sin^2 \theta \\
\frac{dP}{dt d\Omega} [\lambda = 1 \rightarrow (\pm 1/2, \pm 1/2)] &= \frac{dP}{dt d\Omega} [\lambda = -1 \rightarrow (\pm 1/2, \pm 1/2)] = \\
&= \frac{1}{32\pi^2 m_V} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_V^2}} g_1^2 m^2 \sin^2 \theta \\
\frac{dP}{dt d\Omega} [\lambda = \pm 1 \rightarrow (\pm 1/2, \mp 1/2)] &= \frac{m_V}{32\pi^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_V^2}} \times \\
&\quad \left[g_1 \pm g_2 \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_V^2}} \right]^2 \cos^4 \frac{\theta}{2} \\
\frac{dP}{dt d\Omega} [\lambda = \pm 1 \rightarrow (\mp 1/2, \pm 1/2)] &= \frac{m_V}{32\pi^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_V^2}} \times \\
&\quad \left[g_1 \mp g_2 \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_V^2}} \right]^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}
\end{aligned} \tag{72}$$

Corso di Teoria dei Campi
Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 24/09/2004

Problema

Una particella vettoriale di massa m_V descritta dal campo reale V_μ decade in un fermione di massa m e nel corrispondente antifermione, descritti da un campo di Dirac ψ . La densità lagrangiana di interazione è

$$\mathcal{L}_I = g F_{\mu\nu} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi \quad (73)$$

dove

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu \quad (74)$$

Domanda 1

Calcolare all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni la probabilità totale di decadimento per unità di tempo di una particella V non polarizzata in $\psi, \bar{\psi}$.

Domanda 2

Si calcolino le ampiezze di transizione invarianti relative ai processi in cui la particella vettoriale V ha spin definito $\lambda = 0, \pm 1$ lungo lo stesso asse lungo il quale si propaga il fermione prodotto nel decadimento, e il fermione e l'antifermione hanno elicità definita.

Prova Scritta del 24/09/2004: Soluzione

Indichiamo con p_1 e p_2 i quadri-impulsi del fermione e dell'anti-fermione e con p il quadri-impulso della particella vettoriale. Abbiamo

$$p = p_1 + p_2 \quad (75)$$

L'ampiezza di transizione invariante è

$$\begin{aligned} M_{fi} &= g [p_\mu \epsilon_\nu(p) - p_\nu \epsilon_\mu(p)] \bar{u}(p_1) \gamma^\mu \gamma^\nu v(p_2) = \\ &= 2 g \epsilon_\mu(p) \bar{u}(p_1) [(p_2 - p_1)^\mu + 2 m \gamma^\mu] v(p_2) \end{aligned} \quad (76)$$

Poniamo

$$k^\mu \equiv (p_2 - p_1)^\mu \quad (77)$$

Pertanto

$$k^2 = 2(m^2 - p_2 p_1) = 4 m^2 - m_V^2 \quad (78)$$

in quanto $p^2 = m_V^2 = 2 p_2 p_1 + 2 m^2$. Dunque

$$|M_{fi}|^2 = 4 g^2 \epsilon_\mu(p) \epsilon_\nu^*(p) \bar{u}(p_1) [k^\mu + 2 m \gamma^\mu] v(p_2) \bar{v}(p_2) [k^\nu + 2 m \gamma^\nu] u(p_1) \quad (79)$$

Domanda 1

La media sugli stati iniziali dell'ampiezza invariante dà:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_i |M_{fi}|^2 &= \frac{4}{3} g^2 \left[\frac{p^\mu p^\nu}{m_V^2} - g^{\mu\nu} \right] \bar{u}(p_1) [k^\mu + 2 m \gamma^\mu] v(p_2) \times \\ &\quad \times \bar{v}(p_2) [k^\nu + 2 m \gamma^\nu] u(p_1) = \\ &= -\frac{4}{3} g^2 \bar{v}(p_2) [k_\mu + 2 m \gamma_\mu] u(p_1) \bar{u}(p_1) [k^\mu + 2 m \gamma^\mu] v(p_2) \end{aligned} \quad (80)$$

La somma sugli stati finali dà

$$\frac{1}{3} \sum_{i,f} |M_{fi}|^2 = -\frac{4}{3} g^2 \text{Tr} [k_\mu + 2 m \gamma_\mu] (\hat{p}_1 + m) [k^\mu + 2 m \gamma^\mu] (\hat{p}_2 - m) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{4}{3} g^2 \text{Tr}(\hat{p}_1 + m) [k^2 + 2 m \hat{k}] (\hat{p}_2 - m) + \\
&\quad -\frac{8}{3} g^2 m \text{Tr}(-\hat{p}_1 + m) [\hat{k} + 8 m] (\hat{p}_2 - m) + \\
&\quad -\frac{16}{3} g^2 m p_1^\mu \text{Tr}[k^\mu + 2 m \gamma^\mu] (\hat{p}_2 - m) = \\
&= +\frac{32}{3} g^2 (p_2 p_1 - m^2)^2 + \frac{64}{3} g^2 m^2 (p_2 p_1 - m^2) + \\
&\quad +\frac{256}{3} g^2 m^2 (m^2 + p_1 p_2) + \\
&\quad -\frac{128}{3} g^2 m^2 p_1 p_2 + \frac{64}{3} g^2 m^2 (p_1 p_2 - m^2) = \\
&= \frac{32}{3} g^2 (p_2 p_1)^2 + \frac{192}{3} g^2 m^2 p_1 p_2 + \frac{160}{3} g^2 m^4 = \\
&= \frac{32}{3} g^2 \left[\frac{m_V^4}{4} + 2 m^2 m_V^2 \right] = \\
&= \frac{8}{3} g^2 \left[m_V^4 + 8 m^2 m_V^2 \right] \tag{81}
\end{aligned}$$

Poniamoci nel sistema di quiete della particella vettoriale che decade. La conservazione del quadri-impulso implica che

$$\vec{p}' \equiv \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \quad m_V = 2\sqrt{m^2 + |\vec{p}'|^2} \tag{82}$$

cioè

$$|\vec{p}'| = \frac{m_V}{2} \sqrt{1 - \frac{4 m^2}{m_V^2}} \tag{83}$$

La probabilità di decadimento totale per unità di tempo e per unità di angolo solido $d\Omega$ è

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt d\Omega} &= \frac{1}{32 \pi^2 m_V^2} |\vec{p}'| \frac{1}{3} \sum_{f,i} |M_{fi}|^2 = \\
&= \frac{g^2}{64 \pi^2 m_V} \sqrt{1 - \frac{4 m^2}{m_V^2}} \frac{8}{3} \left[m_V^4 + 8 m^2 m_V^2 \right] = \\
&= \frac{g^2 m_V^3}{24 \pi^2} \sqrt{1 - \frac{4 m^2}{m_V^2}} \left[1 + 8 \frac{m^2}{m_V^2} \right] \tag{84}
\end{aligned}$$

e la probabilità di decadimento totale per unità di tempo è

$$\frac{dP}{dt} = \frac{g^2 m_V^3}{6\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_V^2}} \left[1 + 8 \frac{m^2}{m_V^2} \right] \quad (85)$$

Domanda 2

Poniamoci nel sistema di quiete della particella vettoriale che decade. Allora

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \equiv \vec{p}' \equiv |\vec{p}'|(\sin \theta, 0, \cos \theta) \quad (86)$$

Pertanto il vettore di polarizzazione del fermione uscente si scrive nella rappresentazione spinoriale come segue:

$$u(\vec{p}', \sigma_1) = \begin{pmatrix} \left[\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1} \\ \left[\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1} \end{pmatrix} \quad (87)$$

dove $\hat{\sigma}_i$, con $i = 1, 2, 3$ sono le matrici di Pauli, mentre $\frac{1}{2}\sigma_1 = \pm \frac{1}{2}$ è l'elicità del fermione nello stato finale.

Poiché il vettore di polarizzazione $v(\vec{p}, \sigma)$ di un antifermione deve soddisfare la relazione

$$v(\vec{p}, \sigma)^* = \gamma^2 u(\vec{p}, \sigma) \quad (88)$$

abbiamo

$$v(\vec{p}, \sigma) = \begin{pmatrix} \left[\cos \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 - i \sin \frac{\theta}{2} \right] \sqrt{\omega_p - \sigma |\vec{p}|} w_\sigma \\ - \left[\cos \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 - i \sin \frac{\theta}{2} \right] \sqrt{\omega_p + \sigma |\vec{p}|} w_\sigma \end{pmatrix} \quad (89)$$

Dunque il vettore di polarizzazione dell'antifermione con impulso $-\vec{p}'$ ed elicità $\frac{1}{2}\sigma_2$ nello stato finale è

$$v(-\vec{p}', \sigma_2) = \begin{pmatrix} - \left[i \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_2} \\ \left[i \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_2} \end{pmatrix} \quad (90)$$

Il vettore di polarizzazione della particella vettoriale di spin λ nel suo sistema di quiete si scrive invece

$$\epsilon^\mu(p)_\lambda = (0, \vec{\epsilon}_\lambda) \quad (91)$$

dove $\lambda = -1, 0, 1$, $\vec{\epsilon}_{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm i, 0)$ e $\vec{\epsilon}_0 = (0, 0, 1)$. Inoltre

$$k^\mu = (p_2 - p_1)^\mu = (0, -2\vec{p}') \quad (92)$$

per cui

$$\epsilon_\lambda(p) \cdot k = 2\vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{p}' \quad (93)$$

cioè

$$\epsilon_{\pm 1}(p) \cdot k = \frac{1}{\sqrt{2}}|\vec{p}'| \sin \theta \quad \epsilon_0(p) \cdot k = 2|\vec{p}'| \cos \theta \quad (94)$$

Sostituendo queste espressioni nell'ampiezza di transizione

$$\begin{aligned}
\frac{M_{fi}}{2g} &= \bar{u}(\vec{p}', \sigma_1) \left[2 \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{p}' - 2m \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\gamma} \right] v(-\vec{p}', \hat{\sigma}_2) = \\
&= \bar{u}(\vec{p}', \sigma_1) \begin{pmatrix} 2 \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{p}' & 2m \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} \\ -2m \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} & 2 \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{p}' \end{pmatrix} v(-\vec{p}', \hat{\sigma}_2) \\
&= u^\dagger(\vec{p}', \sigma_1) \begin{pmatrix} -2m \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} & 2 \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{p}' \\ 2 \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{p}' & 2m \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix} v(-\vec{p}', \hat{\sigma}_2) = \\
&= \left(\left[\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1}, \left[\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] \times \right. \\
&\quad \left. \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1} \right) \begin{pmatrix} -2m \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} & 2 \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{p}' \\ 2 \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{p}' & 2m \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix} \times \\
&\quad \times \begin{pmatrix} -\left[i \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_2} \\ \left[i \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_2} \end{pmatrix} \quad (95)
\end{aligned}$$

Consideriamo l'ampiezza di decadimento per $\theta = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{M_{fi}(\theta = 0)}{2g} &= \left(\sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1}, \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1} \right) \times \\
&\quad \times \begin{pmatrix} -2m \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} & 2 \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{p}' \\ 2 \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{p}' & 2m \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i, \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_2} \\ i \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_2} \end{pmatrix} = \\
&= 2i \left(\sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1}, \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1} \right) \times \\
&\quad \times \begin{pmatrix} [m \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} + \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{p}' \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|}] w_{\sigma_2} \\ [-\vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{p}' \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} + m \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|}] w_{\sigma_2} \end{pmatrix} = \\
&= 2i w_{\sigma_1}^\dagger \left(\sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} \left[m \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} + \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{p}' \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|} \left[-\vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{p}' \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} + m \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|} \right] \right) w_{\sigma_2} = \\
&= 2i w_{\sigma_1}^\dagger \times \\
&\quad \times \left(\left[\sqrt{(\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|)(\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|)} + \sqrt{(\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|)(\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|)} \right] \times \right. \\
&\quad \quad \times m \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} + \\
&\quad \left. - \left[\sqrt{(\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|)(\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|)} - \sqrt{(\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|)(\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|)} \right] \times \right. \\
&\quad \quad \left. \times \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{p}' \right) w_{\sigma_2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 i m w_{\sigma_1}^\dagger \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} w_{\sigma_2} \times \\
&\times \left(\left[\sqrt{(\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|)(\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|)} + \sqrt{(\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|)(\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|)} \right] + \right. \\
&\left. + 4 i \delta_{\sigma_1, \sigma_2} \sigma_1 |\vec{p}'| \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{p}' \right) \quad (96)
\end{aligned}$$

Dunque se $\lambda = 0$

$$\frac{M_{fi}(\theta = 0, \lambda = 0)}{2g} = 4 i m^2 \sigma_1 \delta_{\sigma_1, \sigma_2} + 4 i \delta_{\sigma_1, \sigma_2} \sigma_1 |\vec{p}'|^2 = i m_V^2 \sigma_1 \delta_{\sigma_1, \sigma_2} \quad (97)$$

mentre se $\lambda = \pm 1$

$$\frac{M_{fi}(\theta = 0, \lambda = \pm 1)}{2g} = 2 \sqrt{2} i m m_V \delta_{\sigma_1, \pm 1} \delta_{\sigma_2, \mp 1} \quad (98)$$

Le probabilità di decadimento per unità di tempo e per unità di angolo solido dei vari processi a $\theta = 0$ sono pertanto

$$\begin{aligned}
\frac{dP_{\theta=0}}{dt d\Omega} [\lambda = 0 \rightarrow (\pm 1/2, \pm 1/2)] &= \frac{1}{64\pi^2 m_V} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_V^2}} \times \\
&\times |M_{fi}(\theta = 0, \lambda = 0)|^2 = \frac{g^2 m_V^3}{16\pi^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_V^2}} \\
\frac{dP_{\theta=0}}{dt d\Omega} [\lambda = 0 \rightarrow (\pm 1/2, \mp 1/2)] &= 0 \\
\frac{dP_{\theta=0}}{dt d\Omega} [\lambda = 1 \rightarrow (\pm 1/2, \pm 1/2)] &= \frac{dP_{\theta=0}}{dt d\Omega} [\lambda = -1 \rightarrow (\pm 1/2, \pm 1/2)] = 0 \\
\frac{dP_{\theta=0}}{dt d\Omega} [\lambda = \pm 1 \rightarrow (\pm 1/2, \mp 1/2)] &= \frac{g^2 m_V m^2}{2\pi^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_V^2}} \\
\frac{dP_{\theta=0}}{dt d\Omega} [\lambda = \pm 1 \rightarrow (\mp 1/2, \pm 1/2)] &= 0 \quad (99)
\end{aligned}$$

Si noti che la somma sugli stati finali e la media su quelli iniziali dà

$$\frac{1}{3} \sum_{i,f} \frac{dP_{\theta=0}}{dt d\Omega} = \frac{g^2 m_V}{24\pi^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_V^2}} (m_V^2 + 8m^2) \quad (100)$$

in accordo con la risposta alla domanda precedente.

Corso di Teoria dei Campi

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 30/03/2005

Problema

Una particella vettoriale di massa m_V descritta dal campo reale V_μ decade in due particelle scalari ϕ e χ di massa m_ϕ e m_χ rispettivamente. La densità lagrangiana di interazione è

$$\mathcal{L}_I = G F_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \chi \quad (101)$$

dove

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu \quad (102)$$

Domanda 0

Quali sono le dimensioni della costante di accoppiamento G ?

Domanda 1

Calcolare all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni la probabilità totale di decadimento per unità di tempo di una particella V non polarizzata nella coppia ϕ, χ

Domanda 2

Si calcoli la distribuzione angolare del decadimento di una particella vettoriale che ha spin definito $\lambda = 0, \pm 1$ lungo l'asse delle z .

Prova Scritta del 30/03/2005: Soluzione

Indichiamo con p_1 e p_2 i quadri-impulsi della particella ϕ e χ rispettivamente, e con p il quadri-impulso della particella vettoriale. Abbiamo

$$p = p_1 + p_2 \quad (103)$$

L'ampiezza di transizione invariante è

$$\begin{aligned} M_{fi} &= G [p_\mu \epsilon_\nu(p) - p_\nu \epsilon_\mu(p)] p_1^\mu p_2^\nu = \\ &= G [p_\mu \epsilon_\nu(p) - p_\nu \epsilon_\mu(p)] p^\mu p_2^\nu = \\ &= G m_V^2 \epsilon_\nu(p) p_2^\nu = \frac{1}{2} G m_V^2 \epsilon_\nu(p) k^\nu \end{aligned} \quad (104)$$

dove abbiamo posto

$$k^\mu \equiv (p_2 - p_1)^\mu \quad (105)$$

Abbiamo

$$k^2 = m_\phi^2 + m_\chi^2 - 2 p_2 p_1 = 2 m_\phi^2 + 2 m_\chi^2 - m_V^2 \quad (106)$$

in quanto $p^2 = m_V^2 = 2 p_2 p_1 + m_\phi^2 + m_\chi^2$. Dunque

$$|M_{fi}|^2 = \frac{G^2 m_V^4}{4} \epsilon_\nu(p) \epsilon_\mu(p) k^\nu k^\mu \quad (107)$$

Domanda 1

La media sugli stati iniziali dell'ampiezza invariante dà:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_i |M_{fi}|^2 &= \frac{G^2 m_V^4}{12} \left[\frac{p^\mu p^\nu}{m_V^2} - g^{\mu\nu} \right] k^\nu k^\mu \\ &= \frac{G^2 m_V^4}{12} \left[\frac{(k \cdot p)^2}{m_V^2} - k^2 \right] = \\ &= \frac{G^2 m_V^4}{12} \left[\frac{(m_\phi^2 - m_\chi^2)^2}{m_V^2} - 2 m_\phi^2 - 2 m_\chi^2 + m_V^2 \right] = \\ &= \frac{G^2 m_V^6}{12} \left[1 - 2 \frac{m_\phi^2 + m_\chi^2}{m_V^2} + \frac{(m_\phi^2 - m_\chi^2)^2}{m_V^4} \right] \end{aligned} \quad (108)$$

Poniamoci nel sistema di quiete della particella vettoriale che decade. La conservazione del quadri-impulso implica che

$$\vec{p}' \equiv \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \quad m_V = \sqrt{m_\phi^2 + |\vec{p}'|^2} + \sqrt{m_\chi^2 + |\vec{p}'|^2} \quad (109)$$

cioè

$$|\vec{p}'| = \frac{m_V}{2} \sqrt{1 - 2 \frac{m_\phi^2 + m_\chi^2}{m_V^2} + \frac{(m_\phi^2 - m_\chi^2)^2}{m_V^4}} \quad (110)$$

La probabilità di decadimento totale per unità di tempo e per unità di angolo solido $d\Omega$ è

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt d\Omega} &= \frac{1}{32 \pi^2 m_V^2} |\vec{p}'| \frac{1}{3} \sum_{f,i} |M_{fi}|^2 = \\ &= \frac{G^2 m_V^5}{12 \cdot 64 \pi^2} \left[1 - 2 \frac{m_\phi^2 + m_\chi^2}{m_V^2} + \frac{(m_\phi^2 - m_\chi^2)^2}{m_V^4} \right]^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (111)$$

e la probabilità di decadimento totale per unità di tempo è

$$\frac{dP}{dt} = \frac{G^2 m_V^5}{192 \pi} \left[1 - 2 \frac{m_\phi^2 + m_\chi^2}{m_V^2} + \frac{(m_\phi^2 - m_\chi^2)^2}{m_V^4} \right]^{\frac{3}{2}} \quad (112)$$

Domanda 2

Nel sistema di riposo della particella vettoriale che decade i vettori di polarizzazione si scrivono

$$\epsilon^\mu(\lambda, p) = (0, \vec{\epsilon}_\lambda) \quad (113)$$

con

$$\vec{\epsilon}_0 = (0, 0, 1) \quad \vec{\epsilon}_{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm i, 0) \quad (114)$$

Inoltre

$$k = p_2 - p_1 = (E_2 - E_1, 2\vec{p}') \quad (115)$$

e sia

$$\vec{p}' = |\vec{p}'|(\sin \theta, 0, \cos \theta) \quad (116)$$

dove θ è l'angolo che la particella 2 fa con l'asse delle z. Dunque

$$\epsilon(0, p) \cdot k = 2 |\vec{p}'| \cos \theta \quad \epsilon(\pm 1, p) \cdot k = \sqrt{2} |\vec{p}'| \sin \theta \quad (117)$$

Pertanto

$$|M_{0 \rightarrow f}|^2 = G^2 m_V^4 |\vec{p}'|^2 \cos^2 \theta \quad |M_{\pm 1 \rightarrow f}|^2 = \frac{1}{2} G^2 m_V^4 |\vec{p}'|^2 \sin^2 \theta \quad (118)$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{dP_{0 \rightarrow f}}{dt d\Omega} &= \frac{G^2 m_V^2}{32 \pi^2} |\vec{p}'|^3 \cos^2 \theta \\ \frac{dP_{\pm 1 \rightarrow f}}{dt d\Omega} &= \frac{G^2 m_V^2}{64 \pi^2} |\vec{p}'|^3 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (119)$$

in accordo con la risposta alla domanda 1.

Corso di Teoria dei Campi

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 08/04/2005

Problema 1

Sia $p_0 = (m, 0, 0, 0)$ un quadri-vettore impulso di riferimento, $p = (\omega_{\vec{p}}, \vec{p})$, con $\vec{p} = |\vec{p}|(\sin \theta, 0, \cos \theta)$ e $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$, un quadri-vettore impulso che soddisfa

$$p^\mu p_\mu = p_0^2 = m^2 \quad (120)$$

Si indichi infine con $\hat{p} \equiv \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ il versore unitario lungo il vettore \vec{p} .

Domanda 1

Si determini la trasformazione di Lorentz $\mathcal{R}_\mu^\nu(\hat{p})$ corrispondente ad una rotazione tridimensionale che porta l'asse delle z lungo la direzione \hat{p} . Si determini cioè una matrice 4×4 della forma

$$\mathcal{R}_\mu^\nu(\hat{p}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\hat{p}) \end{pmatrix} \quad (121)$$

con $R(\hat{p})$ matrice ortogonale 3×3 con la proprietà

$$R(\hat{p}) \hat{z} = \hat{p} \quad (122)$$

dove $\hat{z} = (0, 0, 1)$ è il versore unitario lungo l'asse delle z .

Domanda 2

Si determini il boost di Lorentz $B_z(|\vec{p}|)$ lungo l'asse delle z che corrisponde alla velocità $v = \frac{|\vec{p}|}{\omega_{\vec{p}}} \equiv \tanh \vartheta_p$.

Domanda 3

Si dimostri che la trasformazione di Lorentz $L(p)$ definita come segue

$$L(p) = \mathcal{R}(\hat{p}) B_z(|\vec{p}|) \mathcal{R}(\hat{p})^{-1} \quad (123)$$

soddisfa la relazione

$$p = L(p)p_0 \quad (124)$$

Domanda 4

Sia

$$W(\Lambda, p) = L(\Lambda p)^{-1} \Lambda L(p) \quad (125)$$

la trasformazione di Lorentz appartenente al piccolo gruppo di p_0 . Si dimostri che

$$W(\mathcal{R}, p) = \mathcal{R} \quad (126)$$

per qualunque trasformazione di Lorentz \mathcal{R} che sia una pura rotazione tridimensionale.

Problema 2

Siano $\epsilon(p, \sigma)$, con $\sigma = -1, 0, 1$, tre quadri-vettori definiti dalle relazioni seguenti:

$$\epsilon_\mu(p, \sigma) = (L(p))_\mu^\nu \epsilon_\nu(p_0, \sigma) \quad (127)$$

e

$$\epsilon_\mu(p_0, \sigma) = (0, \vec{\epsilon}_\sigma) \quad (128)$$

dove

$$\vec{\epsilon}_0 = (0, 0, 1) \quad \vec{\epsilon}_{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm i, 0) \quad (129)$$

Domanda 1

Si dimostri che, se R è una matrice ortogonale 3×3 , allora

$$R \vec{\epsilon}_\sigma = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(R) \vec{\epsilon}_{\sigma'} \quad (130)$$

dove $D_{\sigma'\sigma}(R)$ è una rappresentazione del gruppo delle rotazioni, cioè

$$\sum_{\sigma} D_{\sigma'\sigma}(R_1) D_{\sigma\sigma''}(R_2) = D_{\sigma'\sigma''}(R_1 R_2) \quad (131)$$

Domanda 2

Si dimostri che se \mathcal{R}_μ^ν è una trasformazione di Lorentz che è una pura rotazione tridimensionale della forma (121), allora

$$\mathcal{R}_\mu^\nu \epsilon_\nu(p, \sigma) = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(R) \epsilon_\mu(\mathcal{R} p, \sigma') \quad (132)$$

Domanda 3

Si dimostri che se Λ è una generica trasformazione di Lorentz, allora

$$\Lambda_\mu^\nu \epsilon_\nu(p, \sigma) = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) \epsilon_\mu(\Lambda p, \sigma') \quad (133)$$

Domanda 4

Sia $\psi_\mu(x)$ un campo vettoriale e sia

$$U(\Lambda) : \psi_\mu(x) \rightarrow \Lambda_\mu^\nu \psi_\nu(\Lambda^{-1} x) \quad (134)$$

l'azione del gruppo delle trasformazioni di Lorentz su di esso. Siano

$$\psi_\mu^{(p,\sigma)}(x) \equiv \frac{\epsilon_\mu(\vec{p}, \sigma) e^{-i p x}}{(2\pi)^{3/2} (2\omega_{\vec{p}})^{1/2}} \quad (135)$$

funzioni d'onda, con $p = (\omega_{\vec{p}}, \vec{p})$, definite dai vettori $\epsilon_\mu(p, \sigma)$. Si dimostri che

$$U(\Lambda) : \psi_\mu^{(p,\sigma)}(x) \rightarrow \left(\frac{\omega_{\Lambda p}}{\omega_p}\right)^{1/2} \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) \psi_\mu^{(\Lambda p, \sigma')}(x) \quad (136)$$

Domanda 5

Si dimostri che se $\mathcal{R}_z(\theta)$ è una trasformazione di Lorentz corrispondente ad una pura rotazione tridimensionale di un angolo θ lungo l'asse delle z , allora

$$U(\mathcal{R}_z(\theta)) : \psi_\mu^{(p_0, \sigma)}(x) \rightarrow e^{i\theta\sigma} \psi_\mu^{(p_0, \sigma)}(x) \quad (137)$$

Soluzione Prova Scritta del 08/04/2005

Problema 1

Domanda 1

$$\mathcal{R}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (138)$$

Domanda 2

$$B_z(|\vec{p}|) = e^{i\vartheta_p K_z} = \begin{pmatrix} \cosh \vartheta_p & 0 & 0 & \sinh \vartheta_p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \vartheta_p & 0 & 0 & \cosh \vartheta_p \end{pmatrix} \quad (139)$$

Domanda 3

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\hat{p}) B_z(|\vec{p}|) \mathcal{R}(\hat{p})^{-1} p_0 &= \mathcal{R}(\hat{p}) B_z(|\vec{p}|) p_0 = \mathcal{R}(\hat{p}) \begin{pmatrix} \omega_{\vec{p}} \\ 0 \\ 0 \\ |\vec{p}| \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \omega_{\vec{p}} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = p \end{aligned} \quad (140)$$

Domanda 4

$$\begin{aligned} W(\mathcal{R}, p) &= L(\mathcal{R} p)^{-1} \mathcal{R} L(p) = \\ &= \mathcal{R}(\mathcal{R}\hat{p}) B_z(|\vec{p}|)^{-1} \mathcal{R}(\mathcal{R}\hat{p})^{-1} \mathcal{R} \mathcal{R}(\hat{p}) B_z(|\vec{p}|) \mathcal{R}(\hat{p})^{-1} \end{aligned} \quad (141)$$

Notiamo che

$$(\mathcal{R} \mathcal{R}(\hat{p})) \hat{z} = \mathcal{R} \hat{p} \quad (142)$$

pertanto

$$\mathcal{R} \mathcal{R}(\hat{p}) = \mathcal{R}(\mathcal{R}\hat{p}) \mathcal{R}_z(\theta(\mathcal{R}, \hat{p})) \quad (143)$$

dove $\mathcal{R}_z(\theta)$ è una pura rotazione tridimensionale di un angolo θ lungo l'asse delle z . Dunque dalla (143)

$$\mathcal{R}(\mathcal{R}\hat{p})^{-1} \mathcal{R} \mathcal{R}(\hat{p}) = \mathcal{R}_z(\theta(\mathcal{R}, \hat{p})) \quad (144)$$

Notiamo inoltre che le rotazioni lungo l'asse delle z e i boost lungo lo stesso asse commutano:

$$\mathcal{R}_z(\theta) B_z(|\vec{p}|) = B_z(|\vec{p}|) \mathcal{R}_z(\theta) \quad (145)$$

Sostituendo nella (141) otteniamo

$$\begin{aligned} W(\mathcal{R}, p) &= \mathcal{R}(\mathcal{R}\hat{p}) B_z(|\vec{p}|)^{-1} \mathcal{R}_z(\theta(\mathcal{R}, \hat{p})) B_z(|\vec{p}|) \mathcal{R}(\hat{p})^{-1} = \\ &= \mathcal{R}(\mathcal{R}\hat{p}) \mathcal{R}_z(\theta(\mathcal{R}, \hat{p})) \mathcal{R}(\hat{p})^{-1} = \mathcal{R} \end{aligned} \quad (146)$$

Problema 2

Domanda 1

I tre vettori \vec{e}_σ formano una base ortonormale in R^3 , per cui

$$D_{\sigma'\sigma}(R) = \vec{e}_{\sigma'} \cdot (R \vec{e}_\sigma) \quad (147)$$

Inoltre

$$\begin{aligned} R_1 R_2 \vec{e}_\sigma &= \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(R_1 R_2) \vec{e}_{\sigma'} = \\ &= R_1 \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(R_2) \vec{e}_{\sigma'} = \sum_{\sigma', \sigma''} D_{\sigma'\sigma}(R_2) D_{\sigma''\sigma'}(R_1) \vec{e}_{\sigma''} \end{aligned} \quad (148)$$

da cui

$$\sum_{\sigma'} D_{\sigma''\sigma'}(R_1) D_{\sigma'\sigma}(R_2) = D_{\sigma''\sigma}(R_1 R_2) \quad (149)$$

Domanda 2

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \epsilon(p, \sigma) &= \mathcal{R} L(p) \epsilon(p_0, \sigma) = L(\mathcal{R} p) W(\mathcal{R}, p) \epsilon(p_0, \sigma) = \\ &= L(\mathcal{R} p) \mathcal{R} \epsilon(p_0, \sigma) = L(\mathcal{R} p) \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(R) \epsilon(p_0, \sigma') = \\ &= \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(R) \epsilon(\mathcal{R} p, \sigma') \end{aligned} \quad (150)$$

Domanda 3

$$\Lambda \epsilon(p, \sigma) = \Lambda L(p) \epsilon(p_0, \sigma) = L(\Lambda p) W(\Lambda, p) \epsilon(p_0, \sigma) \quad (151)$$

Poiché $W(\Lambda, p)$ è una pura rotazione tridimensionale, possiamo far uso della (150) per ottenere

$$\Lambda \epsilon(p, \sigma) = L(\Lambda p) \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) \epsilon(p_0, \sigma') = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) \epsilon(\Lambda p, \sigma') \quad (152)$$

Domanda 4

$$\begin{aligned} U(\Lambda) : \psi_\mu^{(p,\sigma)}(x) &\rightarrow \frac{\Lambda_\mu^\nu \epsilon_\nu(\vec{p}, \sigma) e^{-i(\Lambda p)x}}{(2\pi)^{3/2} (2\omega_{\vec{p}})^{1/2}} = \\ &= \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) \frac{\epsilon_\mu(\Lambda p, \sigma') e^{-i(\Lambda p)x}}{(2\pi)^{3/2} (2\omega_{\Lambda p})^{1/2}} \left(\frac{\omega_{\Lambda p}}{\omega_p}\right)^{1/2} = \\ &= \left(\frac{\omega_{\Lambda p}}{\omega_p}\right)^{1/2} \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) \psi_\mu^{(\Lambda p, \sigma')}(x) \end{aligned} \quad (153)$$

Domanda 5

Se $R_z(\theta)$ è una rotazione tridimensionale di un angolo θ lungo l'asse delle z , allora

$$R_z(\theta) \vec{\epsilon}_\sigma = e^{i\sigma\theta} \vec{\epsilon}_\sigma \quad (154)$$

Pertanto

$$D_{\sigma,\sigma'}(\mathcal{R}_z(\theta)) = \delta_{\sigma\sigma'} e^{i\sigma\theta} \quad (155)$$

Dalla (153) ricaviamo dunque

$$\begin{aligned} U(\mathcal{R}_z(\theta)) : \psi_\mu^{(p_0,\sigma)}(x) &\rightarrow \sum_{\sigma'} D_{\sigma,\sigma'}(\mathcal{R}_z(\theta)) \psi_\mu^{(p_0,\sigma')}(x) = \\ &= e^{i\theta\sigma} \psi_\mu^{(p_0,\sigma)}(x) \end{aligned} \quad (156)$$

Corso di Teoria dei Campi

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 27/10/2005

Problema

Un fermione di spin $1/2$ di massa m_1 decade in un fermione di spin $1/2$ di massa m_2 ed in una particella vettoriale di massa m .

Domanda 1

Si dimostri che l'ampiezza invariante che descrive il decadimento in questione può essere scritta nella forma seguente

$$M = \bar{u}_2(p_2, \sigma_2) (g_S + g'_S \gamma_5) u_1(p_1, \sigma_1) \epsilon^*(p, \sigma) \cdot \frac{k}{2m_1} + \bar{u}_2(p_2, \sigma_2) (g_V + g'_V \gamma_5) \epsilon^*(p, \sigma) \cdot \gamma u_1(p_1, \sigma_1) \quad (157)$$

dove (p_1, σ_1) , (p_2, σ_2) e (p, σ) sono il momento e lo spin rispettivamente del fermione che decade, del fermione e del vettore prodotti nel decadimento.

Inoltre

$$k \equiv p_1 + p_2 \quad (158)$$

(e $p = p_1 - p_2$) mentre g_S, g'_S, g_V, g'_V sono delle costanti adimensionali.

Domanda 2

Si denoti con $M(\sigma_1; \sigma_2, \sigma)$ l'ampiezza del processo in cui il fermione di massa m_1 con spin σ_1 lungo l'asse delle z nel suo sistema di riposo decade in un fermione che si propaga lungo la direzione positiva dell'asse delle z con elicità σ_2 ed un vettore che si propaga lungo la direzione negativa dell'asse delle z con elicità σ . Si determinino i valori di $\sigma_1, \sigma_2, \sigma$ per i quali $M(\sigma_1; \sigma_2, \sigma)$ è non nulla. Se l'interazione responsabile del decadimento conserva la parità, quale relazione esiste tra le ampiezze non nulle?

Domanda 3

Si calcolino le ampiezze $M(\sigma_1; \sigma_2, \sigma)$ non nulle, come funzioni delle masse m_1, m_2, m e delle costanti di accoppiamento g_S, g'_S, g_V, g'_V .

Domanda 4

Si calcoli la vita media del fermione che decade nel caso in cui la parità sia conservata ed il fermione sia in uno stato non polarizzato.

Domanda 5

Si determini la distribuzione angolare del decadimento per $\sigma_1 = \pm 1/2$ come funzione delle ampiezze $M(\sigma_1; \sigma_2, \sigma)$ non nulle.

Soluzione Prova Scritta del 20/10/2005

Domanda 1

L'ampiezza invariante deve avere la forma

$$M = \bar{u}_2 \Gamma^\mu u_1 \epsilon_\mu \quad (159)$$

dove Γ^μ è una combinazione lineare delle matrici $\{1, \gamma_5, \gamma^\nu, \gamma_5 \gamma^\nu, \sigma^{\nu\lambda}\}$:

$$\Gamma^\mu = a_1^\mu + a_2^\mu \gamma_5 + a_3^{\mu\nu} \gamma_\nu + a_4^{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\nu + a_5^{\mu\nu\lambda} \sigma_{\nu\lambda} \quad (160)$$

dove i coefficienti sono funzioni dei momenti p_1 e p_2 , od equivalentemente di $p = p_1 - p_2$ e $k = p_1 + p_2$. Poiché

$$p \cdot \epsilon = 0 \quad (161)$$

deduciamo che a_1^μ e a_2^μ sono proporzionali a k^μ :

$$a_1^\mu = g_S \frac{k^\mu}{2m_1} \quad a_2^\mu = g'_S \frac{k^\mu}{2m_1} \quad (162)$$

Per quanto riguarda a_3 e a_4 la struttura generale, tenendo conto della condizione di trasversalità, deve essere

$$a_{3,4}^{\mu\nu} = \alpha_{3,4} g^{\mu\nu} + \beta_{3,4} p^\nu k^\mu + \gamma_{3,4} k^\nu k^\mu \quad (163)$$

dove $\alpha_{3,4}, \beta_{3,4}, \gamma_{3,4}$ sono costanti indipendenti dai momenti. D'altra parte, tenendo conto delle equazioni del moto, $\hat{p}_1 u_1 = m_1 u_1$ e $\bar{u}_2 \hat{p}_2 = m_2 \bar{u}_2$, abbiamo

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 \hat{p} u_1 &= \bar{u}_2 \hat{k} \gamma_5 u_1 = (m_2 - m_1) \bar{u}_2 u_1 \\ \bar{u}_2 \hat{k} u_1 &= \bar{u}_2 \hat{p} \gamma_5 u_1 = (m_2 + m_1) \bar{u}_2 u_1 \end{aligned} \quad (164)$$

Pertanto termini in $\beta_{3,4}$ e $\gamma_{3,4}$ contribuiscono a ridefinire a_1 e a_2 . In definitiva possiamo prendere

$$a_{3,4}^{\mu\nu} = g_{V,V'} g^{\mu\nu} \quad (165)$$

Infine il tensore $a_5^{\mu\nu\lambda}$ può avere la forma seguente

$$a_5^{\mu\nu\lambda} = \alpha_5 k^\mu k^\nu p^\lambda + \beta_5 g^{\mu\nu} p_1^\lambda + \gamma_5 g^{\mu\nu} p_2^\lambda \quad (166)$$

Utilizzando le equazioni del moto, ciascuno di questi termini si riduce a termini del tipo (162) e (165). Questo dimostra che l'espressione data nel testo è l'espressione più generale per l'ampiezza invariante.

Domanda 2

Le ampiezze non nulle sono $M(\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{2}, 0)$ e $M(\pm\frac{1}{2}; \mp\frac{1}{2}, \mp 1)$. Nel caso di invarianza per parità queste quattro ampiezze sono uguali a due a due:

$$M(+\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}, 0) = M(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, 0) \quad M(+\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, -1) = M(-\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}, +1) \quad (167)$$

Infatti, lo stato finale in cui il fermione prodotto nel decadimento si propaga lungo z positivo con elicità σ_2 ed il vettore lungo z negativo con elicità σ è connesso dall'operazione di parità allo stato in cui il fermione si propaga lungo l'asse z negativo con elicità $-\sigma_2$ ed il vettore lungo l'asse z positivo con elicità $-\sigma$. Una rotazione di π lungo l'asse delle y che inverte la direzione di z manda questo stato nello stato in cui il fermione si propaga lungo z positivo con elicità $-\sigma_2$ ed il vettore lungo l'asse negativo con elicità $-\sigma$. Lo stato iniziale con spin σ_1 è mandato da queste operazioni nello stato con spin $-\sigma_1$.

Domanda 3

Siano

$$p_1 = (m_1, 0, 0, 0) \quad p_2 = (\omega_2, 0, 0, |\vec{p}|) \quad p = (\omega, 0, 0, -|\vec{p}|) \quad (168)$$

gli impulsi delle particelle nel sistema di riposo della particella che decade. Prendiamo $\vec{p} = |\vec{p}| \hat{z}$. Scegliamo la rappresentazione spinoriale.

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{m_1} \begin{pmatrix} w_{\sigma_1} \\ w_{\sigma_1} \end{pmatrix} & u_2 &= \begin{pmatrix} \alpha_{p_2, \sigma_2} w_{\sigma_2} \\ \alpha_{p_2, -\sigma_2} w_{\sigma_2} \end{pmatrix} \\ \bar{u}_2 &= (\alpha_{p_2, -\sigma_2} w_{\sigma_2}, \alpha_{p_2, +\sigma_2} w_{\sigma_2}) \end{aligned} \quad (169)$$

dove

$$\alpha_{p_2, \sigma_2} = \sqrt{\omega_2 + 2\sigma_2 |\vec{p}|} \quad (170)$$

e

$$w_{\frac{1}{2}} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_{-\frac{1}{2}} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (171)$$

Il vettore di polarizzazione della particella di spin 1 è

$$\epsilon^\mu(-|\vec{p}| \hat{z}, \sigma) = (R_y(\pi))^\mu_\nu \epsilon^\nu(|\vec{p}| \hat{z}, \sigma) \quad (172)$$

dove $R_y(\phi)$ è la matrice di rotazione di un angolo ϕ lungo l'asse delle y e

$$\epsilon^\mu(|\vec{p}|\hat{z}, \pm 1) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, \pm i, 0) \quad \epsilon^\mu(|\vec{p}|\hat{z}, 0) = (\sinh \theta_p, 0, 0, \cosh \theta_p) \quad (173)$$

e $\tanh \theta_p = \frac{|\vec{p}|}{\omega}$. Pertanto

$$\begin{aligned} \epsilon^\mu(-|\vec{p}|\hat{z}, 0) &= (\sinh \theta_p, 0, 0, -\cosh \theta_p) \\ \epsilon^\mu(-|\vec{p}|\hat{z}, 1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, -i, 0) \\ \epsilon^\mu(-|\vec{p}|\hat{z}, -1) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, i, 0) \end{aligned} \quad (174)$$

e

$$\frac{\epsilon^* \cdot k}{2m_1} = \frac{\epsilon^* \cdot p_1}{m_1} = \sinh \theta_p \quad (175)$$

NOTA BENE: la scelta dei segni di normalizzazione in $\epsilon^\mu(|\vec{p}|\hat{z}, \pm 1)$ è dettata dalla richiesta che $\epsilon^\mu(-|\vec{p}|\hat{z}, \pm 1) = \epsilon^\mu(|\vec{p}|\hat{z}, \mp 1)$.

L'ampiezza invariante è dunque

$$\begin{aligned} \frac{M(\sigma_1; \sigma_2, \sigma)}{\sqrt{m_1}} &= \delta_{\sigma_2, \sigma_1} \left[g_S \sinh \theta_p (\alpha_{p_2, -\sigma_2} + \alpha_{p_2, \sigma_2}) + \right. \\ &\quad + g'_S \sinh \theta_p (\alpha_{p_2, -\sigma_2} - \alpha_{p_2, \sigma_2}) + \\ &\quad + g_V \left((\alpha_{p_2, -\sigma_2} + \alpha_{p_2, \sigma_2}) \epsilon_\sigma^0 + (\alpha_{p_2, -\sigma_2} - \alpha_{p_2, \sigma_2}) \epsilon_\sigma^3 2 \sigma_1 \right) + \\ &\quad \left. - g'_V \left((-\alpha_{p_2, -\sigma_2} + \alpha_{p_2, \sigma_2}) \epsilon_\sigma^0 - (\alpha_{p_2, -\sigma_2} + \alpha_{p_2, \sigma_2}) \epsilon_\sigma^3 2 \sigma_1 \right) \right] + \\ &\quad + \left[g_V (\alpha_{p_2, -\sigma_2} - \alpha_{p_2, \sigma_2}) + g'_V (\alpha_{p_2, -\sigma_2} + \alpha_{p_2, \sigma_2}) \right] w_{\sigma_2}^\dagger \hat{\epsilon}_\sigma^* \cdot \hat{\sigma} w_{\sigma_1} \end{aligned} \quad (176)$$

In conclusione, le ampiezza dei processi che non cambiano l'elicità del fermione sono

$$\begin{aligned} \frac{M(\pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{2}, 0)}{\sqrt{m_1}} &= (g_S + g_V) \sinh \theta_p (\alpha_{p_2, \frac{1}{2}} + \alpha_{p_2, -\frac{1}{2}}) + \\ &\quad + g_V \cosh \theta_p (\alpha_{p_2, +\frac{1}{2}} + \alpha_{p_2, -\frac{1}{2}}) + \\ &\quad \mp (g'_S + g'_V) \sinh \theta_p (\alpha_{p_2, +\frac{1}{2}} - \alpha_{p_2, -\frac{1}{2}}) \mp g'_V \cosh \theta_p (\alpha_{p_2, \frac{1}{2}} + \alpha_{p_2, -\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (177)$$

mentre le ampiezze dei processi che cambiano l'elicità sono

$$\frac{M(\pm \frac{1}{2}; \mp \frac{1}{2}, \mp 1)}{\sqrt{m_1}} = \sqrt{2} \left[g_V (\alpha_{p_2, -\frac{1}{2}} - \alpha_{p_2, \frac{1}{2}}) \pm g'_V (\alpha_{p_2, -\frac{1}{2}} + \alpha_{p_2, \frac{1}{2}}) \right] \quad (178)$$

Domanda 4

Introduciamo la notazione

$$\alpha_{\pm} \equiv \alpha_{p_2, \frac{1}{2}} \pm \alpha_{p_2, -\frac{1}{2}} \quad (179)$$

La somma sugli stati finali e la media su quelli iniziali dà

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m_1} \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma} |M(\sigma_1; \sigma_2, \sigma)|^2 &= \frac{1}{2m_1} \left[|M(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, 0)|^2 + |M(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, 0)|^2 + \right. \\ &\quad \left. + |M(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, -1)|^2 + |M(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, 1)|^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[(g_S + g_V) \sinh \theta_p \alpha_+ + g_V \cosh \theta_p \alpha_- + \right. \\ &\quad \left. - (g'_S + g'_V) \sinh \theta_p \alpha_- - g'_V \cosh \theta_p \alpha_+ \right]^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[(g_S + g_V) \sinh \theta_p \alpha_+ + g_V \cosh \theta_p \alpha_- + \right. \\ &\quad \left. + (g'_S + g'_V) \sinh \theta_p \alpha_- + g'_V \cosh \theta_p \alpha_+ \right]^2 + \\ &\quad + \left[g_V \alpha_- + g'_V \alpha_+ \right]^2 + \left[g_V \alpha_- - g'_V \alpha_+ \right]^2 = \\ &= \left[(g_S + g_V) \sinh \theta_p \alpha_+ + g_V \cosh \theta_p \alpha_- \right]^2 + \\ &\quad + \left[(g'_S + g'_V) \sinh \theta_p \alpha_- + g'_V \cosh \theta_p \alpha_+ \right]^2 + 2g_V^2 \alpha_-^2 + 2(g'_V)^2 \alpha_+^2 \end{aligned}$$

Nel caso di interazione che preserva la parità, $g'_S = g'_V = 0$ e l'espressione precedente si riduce alla seguente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m_1} \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma} |M(\sigma_1; \sigma_2, \sigma)|^2 &= \left[(g_S + g_V) \sinh \theta_p \alpha_+ + g_V \cosh \theta_p \alpha_- \right]^2 + \\ &\quad 2g_V^2 \alpha_-^2 \end{aligned} \quad (180)$$

Esprimiamo i parametri che compaiono in questa espressione in termini delle masse delle particelle coinvolte nel decadimento: poiché

$$\omega_2 = \frac{m_1^2 + m_2^2 - m^2}{2m_1} \quad \omega = \frac{m_1^2 - m_2^2 + m^2}{2m_1} = m \cosh \theta_p \quad (181)$$

ne consegue che

$$\alpha_{\pm}^2 = 2(\omega \pm m_2) = \frac{(m_1 \pm m_2)^2 - m^2}{m_1}$$

$$|\vec{p}| = m \sinh \theta_p = \frac{\alpha_- \alpha_+}{2} = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)^2 - m^2}{2 m_1} \frac{(m_1 - m_2)^2 - m^2}{2 m_1}} \quad (182)$$

Dunque

$$\alpha_+ \sinh \theta_p + \alpha_- \cosh \theta_p = \frac{m_1 + m_2}{m} \sqrt{\frac{(m_1 - m_2)^2 - m^2}{m_1}} \quad (183)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma} |M(\sigma_1; \sigma_2, \sigma)|^2 &= \frac{(m_1 - m_2)^2 - m^2}{m^2} \left[g_S \frac{(m_1 + m_2)^2 - m^2}{2 m_1} + \right. \\ &\quad \left. + g_V (m_1 + m_2) \right]^2 + 2 g_V^2 [(m_1 - m_2)^2 - m^2] = \\ &= [(m_1 - m_2)^2 - m^2] \left[g_S^2 \frac{[(m_1 + m_2)^2 - m^2]^2}{4 m_1^2 m^2} + \right. \\ &\quad \left. + g_V^2 \frac{[(m_1 + m_2)^2 + 2 m^2]}{m^2} + g_S g_V \frac{[(m_1 + m_2)^2 - m^2] (m_1 + m_2)}{m_1 m^2} \right] \quad (184) \end{aligned}$$

La probabilità di decadimento per unità di tempo è dunque

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{|\vec{p}|}{16 \pi m_1} \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma} |M(\sigma_1; \sigma_2, \sigma)|^2 = \\ &= \frac{1}{16 \pi m_1^3} \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - m^2} [(m_1 - m_2)^2 - m^2]^{\frac{3}{2}} \times \\ &\quad \times \left[g_S^2 \frac{[(m_1 + m_2)^2 - m^2]^2}{4 m_1^2 m^2} + g_V^2 \frac{[(m_1 + m_2)^2 + 2 m^2]}{m^2} + \right. \\ &\quad \left. + g_S g_V \frac{[(m_1 + m_2)^2 - m^2] (m_1 + m_2)}{m_1 m^2} \right] \quad (185) \end{aligned}$$

Per completezza, rideriviamo il risultato (184) utilizzando i proiettori:

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma} |M(\sigma_1; \sigma_2, \sigma)|^2 &= \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \bar{u}_2 \Gamma^\mu u_1 \bar{u}_1 \Gamma^\nu u_2 \left(\frac{p_\mu p_\nu}{m^2} - g_{\mu\nu} \right) = \\
&= \left(g_S \frac{k \cdot p}{2 m_1} + g_V (m_1 - m_2) \right)^2 \frac{\text{Tr}(\hat{p}_2 + m_2)(\hat{p}_1 + m_1)}{m^2} + \\
&- \text{Tr}(\hat{p}_2 + m_2) \left(\frac{g_S k^\mu}{2 m_1} + g_V \gamma^\mu \right) (\hat{p}_1 + m_1) \left(\frac{g_S k_\mu}{2 m_1} + g_V \gamma_\mu \right) = \\
&= 4 \left(g_S \frac{k \cdot p}{2 m_1} + g_V (m_1 - m_2) \right)^2 \frac{p_1 \cdot p_2 + m_1 m_2}{m^2} + \\
&- \frac{g_S^2 k^2 (p_1 \cdot p_2 + m_1 m_2)}{m_1^2} - \frac{4 g_S g_V (m_1 p_2 + m_2 p_1) \cdot k}{m_1} + \\
&+ 8 g_V^2 (p_1 \cdot p_2 - 2 m_1 m_2) = \\
&= g_S^2 \frac{(p_1 \cdot p_2 + m_1 m_2) ((k \cdot p)^2 - m^2 k^2)}{m_1^2 m^2} + \\
&+ 4 g_V^2 \left[\frac{(m_1 - m_2)^2 (p_1 \cdot p_2 + m_1 m_2)}{m^2} + 2 (p_1 \cdot p_2 - 2 m_1 m_2) \right] + \\
&+ 4 g_S g_V \frac{(m_1 - m_2) k \cdot p (p_1 \cdot p_2 + m_1 m_2) - m^2 (m_1 p_2 + m_2 p_1) \cdot k}{m_1 m^2} = \\
&= g_S^2 \frac{((m_1 + m_2)^2 - m^2) ((m_1 - m_2)^2 - m^2)}{2 m_1^2 m^2} + \\
&+ 2 g_V^2 \frac{(m_1 - m_2)^2 ((m_1 + m_2)^2 + m^2) - 2 m^4 - 4 m^2 m_1 m_2}{m^2} + \\
&+ 2 g_S g_V \frac{(m_1 + m_2) ((m_1 + m_2)^2 - m^2) ((m_1 - m_2)^2 - m^2)}{m_1 m^2}
\end{aligned} \tag{186}$$

in accordo con (184).

Domanda 5

Sia

$$\vec{p} = |\vec{p}|(\sin \theta, 0, \cos \theta) \tag{187}$$

l'impulso del fermione prodotto nel decadimento. I vettori di polarizzazione $u_1^\theta(\pm\frac{1}{2})$ del fermione nello stato iniziale corrispondenti a stati con spin $\pm\frac{1}{2}$ lungo \hat{p} sono dati in termini dei vettori di polarizzazione $u_1(\pm\frac{1}{2})$ di spin $\pm\frac{1}{2}$

lungo \hat{z} dalla legge di trasformazione per rotazioni degli spinori bidimensionali

$$u_1^\theta(\pm\frac{1}{2}) = \cos\frac{\theta}{2} u_1(\pm\frac{1}{2}) \pm \sin\frac{\theta}{2} u_1(\mp\frac{1}{2}) \quad (188)$$

da cui

$$u_1(\pm\frac{1}{2}) = \cos\frac{\theta}{2} u_1^\theta(\pm\frac{1}{2}) \mp \sin\frac{\theta}{2} u_1^\theta(\mp\frac{1}{2}) \quad (189)$$

Siano $u_2(\vec{p}, \sigma_2)$ e $\epsilon(-\vec{p}, \sigma)$ i vettori di polarizzazione delle particelle prodotte nel decadimento ad un angolo θ rispetto all'asse delle \hat{z} con elicit  definita. L'invarianza per rotazioni implica che

$$M_\theta(\sigma_1; \sigma_2, \sigma) \equiv \bar{u}_2(\vec{p}, \sigma_2) \Gamma^\mu u_1^\theta(\sigma_1) \epsilon_\mu(-\vec{p}, \sigma) = M(\sigma_1; \sigma_2, \sigma) \quad (190)$$

dove $M(\sigma_1; \sigma_2, \sigma)$ sono le ampiezze di decadimento a $\theta = 0$ calcolate nella Domanda 3. Pertanto le ampiezze di decadimento di un fermione con spin definito lungo z sono

$$\begin{aligned} M(\pm\frac{1}{2}; \sigma_2, \sigma, \vec{p}) &\equiv \bar{u}_2(\vec{p}, \sigma_2) \Gamma^\mu u_1(\sigma_1) \epsilon_\mu(-\vec{p}, \sigma) = \\ &= \cos\frac{\theta}{2} M(\pm\frac{1}{2}; \sigma_2, \sigma) \mp \sin\frac{\theta}{2} M(\mp\frac{1}{2}; \sigma_2, \sigma) \end{aligned} \quad (191)$$

e la distribuzione angolare

$$\begin{aligned} P(\pm\frac{1}{2}; \sigma_2, \sigma, \vec{p}) &= \cos^2\frac{\theta}{2} |M(\pm\frac{1}{2}; \sigma_2, \sigma)|^2 + \sin^2\frac{\theta}{2} |M(\mp\frac{1}{2}; \sigma_2, \sigma)|^2 + \\ &\mp \sin\theta M(\pm\frac{1}{2}; \sigma_2, \sigma) M(\mp\frac{1}{2}; \sigma_2, \sigma) \end{aligned} \quad (192)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} P(\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{2}, 0, \vec{p}) &= \cos^2\frac{\theta}{2} |M(\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{2}, 0)|^2 \\ P(\pm\frac{1}{2}; \mp\frac{1}{2}, \mp 1, \vec{p}) &= \cos^2\frac{\theta}{2} |M(\pm\frac{1}{2}; \mp\frac{1}{2}, \mp 1)|^2 \\ P(\pm\frac{1}{2}; \mp\frac{1}{2}, 0, \vec{p}) &= \sin^2\frac{\theta}{2} |M(\mp\frac{1}{2}; \mp\frac{1}{2}, 0)|^2 \\ P(\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \vec{p}) &= \sin^2\frac{\theta}{2} |M(\mp\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{2}, \pm 1)|^2 \\ P(\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{2}, \mp 1, \vec{p}) &= 0 \\ P(\pm\frac{1}{2}; \mp\frac{1}{2}, \pm 1, \vec{p}) &= 0 \end{aligned} \quad (193)$$

$$(194)$$

Sommando sugli stati finali otteniamo

$$\begin{aligned}
P(\pm\frac{1}{2};\theta) &= \sum_{\sigma_2,\sigma} P(\pm\frac{1}{2};\sigma_1,\sigma,\vec{p}) = \\
&= \cos^2\frac{\theta}{2} \left[|M(\pm\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2},0)|^2 + |M(\pm\frac{1}{2};\mp\frac{1}{2},\mp 1,)|^2 \right] + \\
&\quad + \sin^2\frac{\theta}{2} \left[|M(\mp\frac{1}{2};\mp\frac{1}{2},0)|^2 + |M(\mp\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2},\pm 1,)|^2 \right] = \\
&= \cos^2\frac{\theta}{2} P_{\pm} + \sin^2\frac{\theta}{2} P_{\mp} \tag{195}
\end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto la notazione

$$P_{\pm} = |M(\pm\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2},0)|^2 + |M(\pm\frac{1}{2};\mp\frac{1}{2},\mp 1,)|^2 \tag{196}$$

Si noti che

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(P(\frac{1}{2};\theta) + P(-\frac{1}{2};\theta)) &= \frac{1}{2}(P_+ + P_-) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma_1;\sigma_2,\sigma} |M(\sigma_1;\sigma_2,\sigma)|^2 = \\
&= \frac{1}{4\pi} \int d\Omega P(\pm\frac{1}{2};\theta) \tag{197}
\end{aligned}$$

è indipendente da θ ed è (proporzionale) alla probabilità di decadimento del fermione non polarizzato. La distribuzione angolare del prodotti del decadimento del fermione è il rapporto adimensionale

$$p(\frac{1}{2};\theta) \equiv \frac{P(\frac{1}{2};\theta)}{\int d\Omega P(\pm\frac{1}{2};\theta)} = \frac{P(\frac{1}{2};\theta)}{2\pi(P_+ + P_-)} \tag{198}$$

ed è quindi dato da

$$\begin{aligned}
p(\frac{1}{2};\theta) &= \frac{P_+ + \sin^2\frac{\theta}{2}(P_- - P_+)}{2\pi(P_+ + P_-)} \\
p(-\frac{1}{2};\theta) &= \frac{P_+ + \cos^2\frac{\theta}{2}(P_- - P_+)}{2\pi(P_+ + P_-)} \tag{199}
\end{aligned}$$

La differenza (*asimmetria*) tra le probabilità di decadimento del fermione con spin up o con spin down ad angolo θ è data da

$$p(\frac{1}{2};\theta) - p(-\frac{1}{2};\theta) = \frac{\cos\theta}{2\pi} \frac{(P_+ - P_-)}{(P_+ + P_-)} \tag{200}$$

Nel caso in cui la parità è conservata,

$$P_- = P_+ \tag{201}$$

e $P(\pm\frac{1}{2}; \theta)$ è indipendente dall'angolo e l'asimmetria (200) è nulla.

Corso di Teoria dei Campi
Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 19/06/2006

Problema

Le equazioni del moto di un campo libero a due indici anti-simmetrico $B_{\mu\nu}$ in 4 dimensioni sono ottenute dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \quad (202)$$

dove

$$H_{\mu\nu\rho} \equiv \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu} \quad (203)$$

è un campo invariante rispetto alle trasformazioni di gauge per $B_{\mu\nu}$

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu} + \partial_\mu \alpha_\nu - \partial_\nu \alpha_\mu \quad (204)$$

Domanda 1

Quale tipo di particella (quale massa e quale spin) è descritta da questo campo?

Domanda 2

Si determinino i tensori di polarizzazione $h_{\mu\nu\rho}(\vec{p}, \sigma)$ relativi al campo gauge-invariante $H_{\mu\nu\rho}$.

Domanda 3

Si determinino i tensori di polarizzazione $b_{\mu\nu}(\vec{p}, \sigma)$ relativi campo $B_{\mu\nu}$. Si verifichi la consistenza del risultato ottenuto con le risposte alle domande 1 e 2.

Domanda 4

Si consideri l'interazione del campo $B_{\mu\nu}$ con un campo vettoriale massivo V_μ ed una particella scalare ϕ di masse m_V e m_ϕ :

$$\mathcal{L}_I = G \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{\mu\nu} (\partial_\rho V_\sigma \phi + V_\sigma \partial_\rho \phi) \quad (205)$$

Si verifichi l' invarianza di gauge dell'interazione. Si calcoli la probabilità di decadimento per unità di tempo di una particella V (non polarizzata) nelle particelle B e ϕ .

Soluzione Prova Scritta del 19/9/06

Domanda 1 e 2

Le equazioni per $h_{\mu\nu\rho}(p)$ sono

$$p^\mu h_{\mu\nu\rho}(p) = 0 \quad \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\mu h^{\nu\rho\sigma}(p) = 0 \quad (206)$$

La condizione di consistenza delle equazioni è $p^2 = 0$: la soluzione generale per $p^2 = 0$ è

$$h_{\mu\nu\rho}(p) = -i h \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\sigma \quad (207)$$

Il campo descrive dunque una particella scalare di massa nulla.

Domanda 3

Dato $h_{\mu\nu\rho}(p)$, $b_{\mu\nu}(p)$ soddisfa l'equazione

$$p_\mu b_{\nu\rho} + p_\nu b_{\rho\mu} + p_\rho b_{\mu\nu} = h \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\sigma$$

od equivalentemente

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\mu b_{\nu\rho} = 2 h p^\sigma \quad (208)$$

L'invarianza di gauge è

$$b_{\mu\nu}(p) \rightarrow b_{\mu\nu}(p) + p_\mu \alpha_\nu - p_\nu \alpha_\mu \quad (209)$$

Notiamo che i parametri di gauge α^μ generano uno spazio 4-dimensionale, ma le trasformazioni con $\alpha_\mu = p_\mu$ agiscono trivialmente su $b_{\mu\nu}$. Il sottospazio gauge-banali dello spazio delle soluzioni delle eqs (208) ha dunque dimensione 3.

Per $p^2 \neq 0$ le uniche soluzioni di (208) sono quelle gauge-banali: $h = 0$ e $b_{\mu\nu} = p_\mu \alpha_\nu - p_\nu \alpha_\mu$

Per $p^2 = 0$ lo spazio delle soluzioni di (208) ha dimensione 4 (incluso h). Sia infatti

$$p^\mu = (\omega, 0, 0, 0, \omega) \equiv p_0^\mu \quad (210)$$

Allora le (208) diventano

$$\begin{aligned} h &= b_{12} \\ 0 &= b_{23} - b_{02} \\ 0 &= b_{13} - b_{01} \end{aligned} \quad (211)$$

La soluzione generale per $b_{\mu\nu}$ è dunque

$$b_{\mu\nu}(p_0) = \begin{pmatrix} 0 & b_{01} & b_{02} & b_{03} \\ -b_{01} & 0 & h & b_{01} \\ -b_{02} & -h & 0 & b_{02} \\ b_{03} & -b_{01} & -b_{02} & 0 \end{pmatrix} \quad (212)$$

I tensori gauge-triviali sono

$$(p_0)_\mu \alpha_\nu(p_0) - (p_0)_\nu \alpha_\mu(p_0) = \omega \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_2 \\ -\alpha_3 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (213)$$

Lo spazio dei tensori fisici ottenuto quotizzando lo spazio delle soluzioni per lo spazio triviale (213) ha dunque dimensione 1 (in accordo con la risposta alle domande 1 e 2), ed un rappresentativo è

$$b_{\mu\nu}(p_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & -h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (214)$$

Domanda 4

L'interazione è gauge-invariante perché può essere riscritta attraverso un'integrazione per parti come

$$\mathcal{L}_I = \frac{1}{3} G \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} H_{\nu\rho\sigma} V_\mu \phi \quad (215)$$

Siano p^μ , k^μ e q^μ gli impulsi del V , k^μ , del B e del ϕ rispettivamente, con $p = k + q$. L'ampiezza invariante di decadimento è dunque

$$M = i 2 G h k^\mu \epsilon_\mu(p, \sigma) \quad (216)$$

Il fattore di normalizzazione h deve essere determinato dalla condizione che lo stato corrispondente sia normalizzato nella maniera usuale. Posto $H_{\mu\nu\rho} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\sigma \varphi$, la densità lagrangiana per il campo scalare φ diventa quella standard

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi \quad (217)$$

Dunque dobbiamo prendere $h = 1$. L'ampiezza invariante modulo quadro mediata sugli stati iniziali è pertanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{\sigma} |M|^2 &= \frac{4}{3} G^2 k^{\mu} k^{\nu} \left(\frac{p_{\mu} p_{\nu}}{m_V^2} - g_{\mu\nu} \right) = \\ &= \frac{4}{3} G^2 \frac{(k \cdot p)^2}{m_V^2} \end{aligned} \quad (218)$$

Abbiamo

$$p \cdot k = \frac{m_V^2 - m_{\phi}^2}{2} \quad |\vec{k}| = \frac{p \cdot k}{m_V} = \frac{m_V^2 - m_{\phi}^2}{2 m_V} \quad (219)$$

dove $|\vec{k}|$ è l'impulso tridimensionale del B nel sistema del baricentro. Dunque

$$\frac{dP}{dt} = \frac{4 G^2}{3 m_V^2} \frac{(k \cdot p)^3}{8 \pi m_V^3} = \frac{G^2}{48 \pi m_V^5} (m_V^2 - m_{\phi}^2)^3 \quad (220)$$

Corso di Teoria dei Campi

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 20/11/2006

Problema

Un campo $\psi_\mu^A(x)$ con μ indice vettoriale e A indice spinoriale di Dirac soddisfa alle seguenti equazioni relativistiche

$$\begin{aligned}(i \gamma^\alpha \partial_\alpha - m) \psi_\mu &= 0 \\ \gamma^\mu \psi_\mu &= 0\end{aligned}\tag{221}$$

dove m è un parametro reale diverso da zero.

Domanda 1

Qual'è il contenuto in termini di particelle (spin e massa) di questo campo?

Domanda 2

Si otteghano i vettori di polarizzazione $u_\mu^A(\vec{p} = 0, \sigma)$ del campo per tri-impulso nullo e valore definito σ dello spin lungo l'asse z nel sistema di riposo.

Domanda 3

Si dimostri che le equazioni del moto che si ottengono dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi}_\mu (\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu) \partial_\rho \psi_\nu + m \bar{\psi}_\mu [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \psi_\nu\tag{222}$$

sono equivalenti alle equazioni (221).

Soluzione Prova Scritta del 20/11/06

Domanda 1 e 2

Andiamo nel sistema di riposo $p^\mu = (\omega, 0, 0, 0)$. Le equazioni (221) diventano

$$(\omega \gamma^0 - m) \gamma_\mu = 0 \quad \gamma^\mu \psi_\mu = 0 \quad (223)$$

La consistenza della prima equazione implica

$$\omega = m \quad (224)$$

Cioè il parametro m deve essere identificato con la massa della particella descritta dalle equazioni. Inoltre posto

$$\psi_\mu = \begin{pmatrix} \phi_\mu \\ \chi_\mu \end{pmatrix} \quad (225)$$

dove ϕ_μ e χ_μ sono spinori a due componenti, ed utilizzando la rappresentazione spinoriale delle matrici gamma, otteniamo

$$\begin{aligned} \phi_\mu &= \chi_\mu \\ \phi_0 &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\chi} \quad \chi_0 = -\vec{\sigma} \cdot \vec{\phi} \end{aligned} \quad (226)$$

da cui

$$\phi_0 = \chi_0 = 0 \quad \vec{\chi} = \vec{\phi} \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{\phi} = 0 \quad (227)$$

L'ultima equazione permette di esprimere il bi-spinore ϕ_3 in termini di ϕ_1 e ϕ_2 :

$$\phi_3 = i \sigma_1 \phi_2 - i \sigma_2 \phi_1 = \frac{1}{2} (\sigma_- \phi_+ - \sigma_+ \phi_-) \quad (228)$$

dove abbiamo introdotto

$$\phi_\pm = \phi_1 \pm i \phi_2 \quad \sigma_\pm = \sigma_1 \pm i \sigma_2 \quad (229)$$

In conclusione la soluzione generale dell'equazioni (223) è funzione dei due bi-spinori ϕ_\pm , cioè di 4 parametri: ϕ_\pm^a con $a, b = 1, 2$. Se prendiamo le componenti dei bi-spinori con $a, b = 1$ come quelle di spin $-1/2$ e quelle con $a, b = 2$ come quelle di spin $+1/2$, gli spin delle 4 soluzioni proporzionali a $(\phi_+^2, \phi_+^1, \phi_-^2, \phi_-^1)$ sono rispettivamente $+3/2, +1/2, -1/2, -3/2$. Si tratta dunque di una particella massiva di spin $3/2$ ed i vettori di polarizzazione di spin definito sono proprio quelli proporzionali a ϕ_\pm^a .

Domanda 3

Le equazioni del moto che discendono dalla lagrangiana sono nello spazio dei momenti

$$[\gamma^\mu \hat{p} \gamma^\nu - \gamma^\nu \hat{p} \gamma^\mu + m(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)] \psi_\nu = 0 \quad (230)$$

Vogliamo dedurre da questa due equazioni che non contengono indici vettoriali liberi moltiplicando per p^μ e per γ^μ . Moltiplicando per p^μ otteniamo

$$m(\hat{p} \gamma^\nu - \gamma^\nu \hat{p}) \psi_\nu = 0 \quad (231)$$

Da cui

$$\hat{p} \gamma \cdot \psi = p \cdot \psi \quad (232)$$

Moltiplicando (230) a sinistra per γ^μ otteniamo invece

$$[4\hat{p} \gamma^\nu - \gamma_\mu \gamma^\nu \hat{p} \gamma^\mu + m(4\gamma^\nu - \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu)] \psi_\nu = 0 \quad (233)$$

Da cui

$$\begin{aligned} 0 &= 4\hat{p} \gamma^\nu \psi_\nu - \gamma_\mu \gamma^\nu \hat{p} \gamma^\mu \psi_\nu + 6m \gamma^\nu \psi_\nu = \\ &= 4\hat{p} \gamma \cdot \psi - 2\gamma^\nu \hat{p} \psi_\nu - 2\hat{p} \gamma^\nu \psi_\nu + 6m \gamma \cdot \psi = \\ &= 4\hat{p} \gamma \cdot \psi - 4p \cdot \psi + 6m \gamma \cdot \psi \end{aligned} \quad (234)$$

Inserendo in questa equazione la (232) ricaviamo

$$6m \gamma \cdot \psi = 0 \quad (235)$$

cioè la seconda delle (221). Sostituendo questa nella (232) si deduce inoltre

$$p \cdot \gamma = 0 \quad (236)$$

Sostituiamo allora $\gamma \cdot \psi = p \cdot \psi = 0$ nell'equazione (230)

$$[\gamma^\nu \hat{p} \gamma^\mu + m \gamma^\nu \gamma^\mu] \psi_\nu = 0 \quad (237)$$

Da cui

$$\begin{aligned} 0 &= -\hat{p} \gamma^\nu \gamma^\mu \psi_\nu + 2m \psi^\mu = \\ &= -2\hat{p} \psi^\mu + 2m \psi^\mu \end{aligned} \quad (238)$$

cioè la prima delle (221).

Corso di Teoria dei Campi

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 21/12/2006

Problema 1

Si determini lo spettro (massa e spin delle particelle) del sistema descritto dalla densità lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(V)} (F^{(V)})^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(W)} (F^{(W)})^{\mu\nu} + \\ & + \frac{1}{2} (m_V^2 V_\mu V^\mu + m_W^2 W_\mu W^\mu + 2 m_{VW}^2 V_\mu W^\mu) \end{aligned} \quad (239)$$

dove $F_{\mu\nu}^{(V)} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ e $F_{\mu\nu}^{(W)} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$

Problema 2

Una particella massiva, scarica, di spin 2 di massa m_h è descritta da un tensore di polarizzazione $h_{\mu\nu}(p)$ simmetrico, a traccia nulla e trasverso ($p^\mu h_{\mu\nu}(p) = 0$).

Si determini l'ampiezza più generale compatibile con l'invarianza di Lorentz che descrive il decadimento di questa particella in una coppia fermione-antifermione di spin 1/2 di massa m .

Si determinino le restrizioni all'ampiezza che derivano da:

- invarianza sotto parità P ;
- invarianza sotto coniugazione di carica C .

Soluzione Prova Scritta del 21/12/06

Problema 1

Lo spettro del sistema è costituito da due particelle vettoriali massive di massa

$$m_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(m_V^2 + m_W^2 \pm \sqrt{(m_V^2 - m_W^2)^2 + 4 m_{VW}^4} \right) \quad (240)$$

Problema 2

Introduciamo

$$p = p_1 + p_2 \quad k = p_1 - p_2 \quad (241)$$

dove p_1 e p_2 sono gli impulsi dei fermioni prodotti nel decadimento e p è l'impulso della particella di spin 2 che decade. L'ampiezza invariante più generale è

$$A = \frac{h_{\mu\nu}(p) k^\mu}{m_h} \bar{u}(p_2) \left(g_1 k^\nu + g'_1 k^\nu \gamma_5 + g_2 \gamma^\nu + g'_2 \gamma^\nu \gamma_5 \right) v(p_1) \quad (242)$$

Gli accoppiamenti g_1, g_2 hanno parità $P = +1$ mentre quelli proporzionali a g'_1, g'_2 hanno $P = -1$. Gli accoppiamenti g_1, g'_1, g_2 hanno parità di carica $C = +1$ mentre quello con g'_2 ha parità di carica $C = -1$. (Bisogna tenere conto che per coniugazione di carica, p_1 e p_2 si scambiano quindi k cambia di segno).

Corso di Teoria dei Campi
Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 31/01/2007

Problema 1

Una particella fermionica di spin $1/2$ e massa m è descritta da un campo di Dirac ψ . Si vogliono confrontare le interazioni tra due fermioni identici descritte dalle due seguenti densità lagrangiane:

$$\begin{aligned} (a) \quad \mathcal{L}_\phi &= g \phi \bar{\psi} \psi \\ (b) \quad \mathcal{L}_V &= g V_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \end{aligned}$$

dove ϕ è un campo scalare di massa m_ϕ e V_μ è un campo vettoriale di massa m_V .

Si determini all'ordine perturbativo più basso il potenziale $V(r)$ a grande distanza tra due particelle fermioniche nel limite non-relativistico nei casi (a) e (b). In particolare stabilire, nei due casi, se il potenziale è attrattivo o repulsivo.

Problema 2

Si determini una rappresentazione delle matrici di Dirac, unitariamente equivalente alla rappresentazione standard, per la quale gli spinori $u(p)$ che soddisfano le equazioni del moto per un impulso generico p^μ con $p^2 = m^2$ e $p^0 > 0$ hanno solo le prime due componenti non nulle.

Corso di Teoria dei Campi

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 22/06/2007

Problema 1

Si consideri una particella vettoriale carica descritta da un campo $W_\mu(x)$ di massa m_W accoppiata ad una particella vettoriale scarica descritta da un campo $A_\mu(x)$, di massa m_A non nulla.

Domanda 1

Si scriva la più generale ampiezza invariante che descrive il decadimento $A \rightarrow W + \bar{W}$, assumendo la conservazione della parità. Quanti sono i parametri indipendenti che controllano quest'ampiezza? Se si assume, oltre all'invarianza per P , anche quella per C quanti e quali sono i parametri indipendenti?

Domanda 2

Si assuma la conservazione di P e di C e si supponga che A abbia parità di carica $+1$. Si calcoli la vita media della particella A non polarizzata al primo ordine in teoria delle perturbazioni, in funzione dei parametri di cui alla domanda 1.

Problema 2

Usando gli stessi campi del Problema 1, si consideri ora il caso in cui A è il campo fotonico. Si vuole descrivere l'interazione efficace del bosone W con il campo fotonico, assumendo la conservazione della parità.

Domanda 1

Si scriva l'ampiezza invariante più generale che conserva la parità per il processo $W \rightarrow W' + A$ dove A è un fotone virtuale. Siano p e p' i momenti della particella W , e $q = p - p'$ il momento del fotone virtuale. Quanti e quali sono le funzioni di q^2 indipendenti che controllano l'interazione efficace?

Domanda 2

Si calcoli, nel caso della Domanda 1, il potenziale di interazione a distanza r all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni, tra due particelle W di carica uguale, nel limite non-relativistico di bassa energia.

Soluzione Prova Scritta del 22/06/07

Problema 1

Siano p e p' gli impulsi della particella W e della anti-particella W . ϵ and ϵ' i vettori di polarizzazione corrispondenti e $\epsilon^{(A)}$ il vettore di polarizzazione della particella A . Si ponga

$$P = p + p' \quad q = p - p' \quad (243)$$

L'ampiezza invariante più generale che rispetta P dipende da 4 parametri:

$$M = \epsilon_\alpha^* (\epsilon')_\beta^* \epsilon_\mu^{(A)} T_{\mu\alpha\beta} \quad (244)$$

e

$$T_{\mu\alpha\beta} = A g_{\alpha\beta} q_\mu + B g_{\alpha\mu} q_\beta + B' g_{\beta\mu} q_\alpha + C q_\alpha q_\beta q_\mu \quad (245)$$

Se C è conservato e la particella A ha parità di carica $C = +1$ ($C = -1$) l'ampiezza $T_{\mu\alpha\beta}$ deve essere invariante (cambiare segno) per $\alpha \rightarrow \beta$ e $q \rightarrow -q$:

$$T_{\mu\alpha\beta} \rightarrow -A g_{\alpha\beta} q_\mu - B' g_{\alpha\mu} q_\beta - B g_{\beta\mu} q_\alpha - C q_\alpha q_\beta q_\mu \quad (246)$$

Dunque se $C = 1$ allora

$$A = 0 \quad C = 0 \quad B(q^2) = -B'(q^2) \quad (247)$$

e

$$T_{\mu\alpha\beta} = B (g_{\alpha\mu} q_\beta - g_{\beta\mu} q_\alpha) \quad (248)$$

mentre se $C = -1$

$$T_{\mu\alpha\beta} = A g_{\alpha\beta} q_\mu + B(g_{\alpha\mu} q_\beta + g_{\beta\mu} q_\alpha) + C q_\alpha q_\beta q_\mu \quad (249)$$

Problema 2

Partiamo ora dal tensore a tre indici più generale, tenendo conto che non abbiamo più la condizione di trasversalità associata al campo A :

$$T_{\mu\alpha\beta} = a(q^2) g_{\alpha\beta} q_\mu + b(q^2) g_{\alpha\mu} q_\beta + b'(q^2) g_{\beta\mu} q_\alpha + c(q^2) q_\alpha q_\beta q_\mu + d(q^2) g_{\alpha\beta} P_\mu + e(q^2) q_\alpha q_\beta P_\mu \quad (250)$$

Abbiamo tenuto conto che :

$$P \cdot \epsilon = -q \cdot \epsilon \quad P \cdot \epsilon' = q \cdot \epsilon \quad (251)$$

L'invarianza di gauge impone la conservazione della corrente:

$$q^\mu T_{\mu\alpha\beta} = 0 \quad (252)$$

cioè

$$0 = a(q^2) g_{\alpha\beta} q^2 + (b(q^2) + b'(q^2)) q_\alpha q_\beta + c(q^2) q^2 q_\alpha q_\beta \quad (253)$$

Dunque

$$\begin{aligned} a(q^2) &= 0 \\ b(q^2) + b'(q^2) &= -q^2 c(q^2) \end{aligned} \quad (254)$$

Ridefinendo

$$b(q^2) = q^2 B(q^2) \quad b'(q^2) = q^2 B'(q^2) \quad (255)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} T_{\mu\alpha\beta} &= B(q^2) [g_{\alpha\mu} q_\beta q^2 - q_\alpha q_\beta q_\mu] + B'(q^2) [g_{\beta\mu} q_\alpha q^2 - q_\alpha q_\beta q_\mu] + \\ &+ d(q^2) g_{\alpha\beta} P_\mu + e(q^2) q_\alpha q_\beta P_\mu \end{aligned} \quad (256)$$

e l'elemento di matrice della corrente è

$$\begin{aligned} J_\mu &= B(q^2) [\epsilon_\mu (\epsilon')^* \cdot q_\beta q^2 - \epsilon \cdot q \epsilon \cdot q q_\mu] + \\ &+ B'(q^2) [(\epsilon')^*_\mu \epsilon \cdot q q^2 - \epsilon \cdot q \epsilon \cdot q q_\mu] + \\ &+ d(q^2) \epsilon \cdot (\epsilon')^* P_\mu + e(q^2) \epsilon \cdot q (\epsilon')^* \cdot q P_\mu \end{aligned} \quad (257)$$

Il termine dominante nel limite di grande distante $q^2 \rightarrow 0$ è

$$J_\mu \approx d(0) \epsilon \cdot (\epsilon')^* P_\mu \quad (258)$$

L'ampiezza di diffusione di due particelle W all'ordine più basso e nel limite di grande distanza è

$$\begin{aligned} M &\approx - \frac{d(0)^2 \epsilon_1 \cdot (\epsilon'_1)^* \epsilon_2 \cdot (\epsilon'_2)^* (p_1 + p'_1) \cdot (p_2 + p'_2)}{q^2} \approx \\ &\approx - \frac{d(0)^2 \epsilon_1 \cdot (\epsilon'_1)^* \epsilon_2 \cdot (\epsilon'_2)^* 4 m_W^2}{q^2} \end{aligned} \quad (259)$$

Prendiamo il caso in cui le polarizzazione delle particelle 1 e 2 sono diverse e non cambiano nel processo di diffusione (in questo caso manca il termine di scambio)

$$\epsilon_1 \cdot (\epsilon'_1)^* = \epsilon_2 \cdot (\epsilon'_2)^* = -1 \quad (260)$$

Per questo processo

$$M \approx -\frac{d(0)^2 4 m_W^2}{q^2} \quad (261)$$

Confrontando con l'ampiezza per a diffusione di due elettroni nel limite non relativistico, deduciamo che il potenziale tra le due particelle W è

$$V(r) = \frac{d(0)^2}{r} \quad (262)$$

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 27/07/2007

Problema 1

Si consideri una particella vettoriale carica descritta da un campo $W_\mu(x)$ di massa m_W accoppiata ad una particella vettoriale scarica descritta da un campo $A_\mu(x)$, di massa m_A non nulla attraverso l'interazione

$$\mathcal{L} = i g \left[F_{\nu\mu}^\dagger W^\nu - (W^\nu)^\dagger F_{\nu\mu} \right] A^\mu \quad (263)$$

Domanda 1

Si calcoli la vita media della particella A non polarizzata al primo ordine in teoria delle perturbazioni.

Soluzione Prova Scritta del 27/07/07

Problema 1

Siano p e p' gli impulsi delle particelle W e \bar{W} prodotti nel decadimento della particella A , il cui impulso è

$$P = p + p' \quad (264)$$

Denotiamo con q la differenza degli impulsi

$$q = p - p' \quad (265)$$

L'ampiezza invariante del decadimento è

$$M = g \epsilon_A^\mu(P) J_\mu(p, p') \quad (266)$$

dove

$$\begin{aligned} J_\mu(p, p') &= g \left[(p^\nu \epsilon_\mu^*(p) - p_\mu (\epsilon^*)^\nu(p)) \epsilon_\nu^*(p') + \right. \\ &\quad \left. - ((p')^\nu \epsilon_\mu^*(p') - (p')_\mu (\epsilon^*)^\nu(p')) \epsilon_\nu^*(p) \right] = \\ &= \epsilon_\lambda^*(p) \epsilon_\nu^*(p') \left[\delta_\mu^\lambda q^\nu + \delta_\mu^\nu q^\lambda - g^{\nu\lambda} q_\mu \right] \end{aligned} \quad (267)$$

ed $\epsilon(p)(\epsilon(p'))$ è il vettore di polarizzazione della particella W (\bar{W}).

Notiamo che $J(p, p')$ è conservato

$$P^\mu J_\mu(p, p') = (p + p')^\mu J_\mu(p, p') = 0 \quad (268)$$

Pertanto il modulo quadro dell'ampiezza di decadimento sommato sugli stati iniziali è

$$\sum_{\epsilon_A} |M|^2 = -g^2 J_\mu(p, p') J^\mu(p, p') \quad (269)$$

Se sommiamo anche sugli stati di polarizzazione delle particelle finali otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{\epsilon_A, \epsilon} |M|^2 &= -g^2 N^{\lambda\alpha}(p) N^{\nu\beta}(p') \left[g_{\mu\lambda} q_\nu + g_{\mu\nu} q_\lambda - g_{\nu\lambda} q_\mu \right] \times \\ &\quad \times \left[g_{\mu\alpha} q_\beta + g_{\mu\alpha} q_\beta - g_{\alpha\beta} q_\mu \right] \end{aligned}$$

dove $N^{\lambda\alpha}(p)$ è la matrice densità delle particelle vettoriali massive

$$N^{\lambda\alpha}(p) = \frac{p^\lambda p^\alpha}{m_W^2} - g^{\lambda\alpha} \quad (270)$$

che soddisfa la condizione di trasversalità

$$p_\lambda N^{\lambda\alpha}(p) = 0 \quad (271)$$

Dunque

$$\begin{aligned} - \sum_{\epsilon_A, \epsilon} \frac{|M|^2}{g^2} &= N^{\lambda\alpha}(p) N^{\nu\beta}(p') \left[g_{\alpha\lambda} q_\nu q_\beta + g_{\beta\lambda} q_\nu q_\alpha + g_{\alpha\nu} q_\lambda q_\beta + \right. \\ &\quad \left. + g_{\beta\nu} q_\lambda q_\alpha - 2g_{\alpha\beta} q_\nu q_\lambda - 2g_{\nu\lambda} q_\alpha q_\beta + g_{\nu\lambda} g_{\alpha\beta} q^2 \right] = \\ &= 2 N_\lambda^\lambda(p) q_\nu N^{\nu\beta}(p') q_\beta - 2 q_\nu N^{\nu\beta}(p) N_\beta^\alpha(p') q_\alpha + N^{\nu\beta}(p) N_{\beta\nu}(p') q^2 \end{aligned}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} N_\lambda^\lambda(p) &= -3 \\ N^{\nu\beta}(p) N_{\beta\nu}(p') &= \left(\frac{p' \cdot p}{m_W^2} \right)^2 + 2 \\ q_\nu N^{\nu\beta}(p') q_\beta &= p_\nu N^{\nu\beta}(p') p_\beta = m_W^2 \left[\left(\frac{p' \cdot p}{m_W^2} \right)^2 - 1 \right] \\ q_\nu N^{\nu\beta}(p) N_\beta^\alpha(p') q_\alpha &= -p'_\nu N^{\nu\beta}(p) N_\beta^\alpha(p') p_\alpha = -p \cdot p' \left(\frac{p' \cdot p}{m_W^2} \right)^2 + p \cdot p' = \\ &= m_W^2 \frac{p' \cdot p}{m_W^2} \left[1 - \left(\frac{p' \cdot p}{m_W^2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (272)$$

Introduciamo per comodità la variabile

$$x \equiv \frac{p' \cdot p}{m_W^2} = \frac{m_A^2}{2m_W^2} - 1 \quad (273)$$

in definitiva

$$\begin{aligned} - \sum_{\epsilon_A, \epsilon} \frac{|M|^2}{g^2 m_W^2} &= -6(x^2 - 1) - 2x[1 - x^2] + (x^2 + 2)2(1 - x) = \\ &= 10 - 6x - 4x^2 = 12 + \frac{m_A^2}{m_W^2} - \frac{m_A^4}{m_W^4} = \\ &= -4 \left(\frac{m_A^2}{4m_W^2} - 1 \right) \left(\frac{m_A^2}{m_W^2} + 3 \right) \end{aligned} \quad (274)$$

Sia \vec{p} l'impulso della W nel sistema di riposo della A .

$$(\vec{p})^2 = \frac{1}{4} (m_A^2 - 4 m_W^2) \quad (275)$$

La probabilità di decadimento è

$$\begin{aligned} \Gamma_{A \rightarrow W \bar{W}} &= \frac{1}{3} \frac{|\vec{p}|}{8 \pi m_A^2} \sum_{\epsilon_A, \epsilon} |M|^2 = \\ &= \frac{g^2 |\vec{p}| m_W^2}{24 \pi m_A^2} 4 \left(\frac{m_A^2}{4 m_W^2} - 1 \right) \left(\frac{m_A^2}{m_W^2} + 3 \right) = \\ &= \frac{g^2 m_W}{6 \pi} \left(\frac{m_A^2}{4 m_W^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} \left(1 + 3 \frac{m_W^2}{m_A^2} \right) \end{aligned} \quad (276)$$

Corso di Teoria dei Campi
Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 5/12/2008

Problema 1

Un elettrone diffonde in un campo elettromagnetico esterno il cui potenziale è dato da

$$A_\mu(x) = (g e^{-\frac{x^2}{l^2}}, 0, 0, 0) \quad (277)$$

Domanda 1

Calcolare all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni la sezione d'urto di diffusione per il processo in cui l'elettrone iniziale non è polarizzato e non si misura lo spin di quello finale.

Domanda 2

Calcolare all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni la sezione d'urto di diffusione per i processi in cui l'elettrone iniziale e finale hanno elicità definite.

Soluzione Prova Scritta del 05/12/08

Problema 1

Siano $|i\rangle = a_{\vec{p}_i, \sigma_i}^\dagger |0\rangle$ e $|f\rangle = a_{\vec{p}_f, \sigma_f}^\dagger |0\rangle$ gli stati iniziali e finali dell'elettrone. L'elemento di matrice S al primo ordine è

$$\begin{aligned}
 S_{fi} &= g e i \int d^4x \langle f | \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) | i \rangle e^{-\frac{x^2}{i^2}} = \\
 &= g e 2\pi \delta(E_f - E_i) i \frac{\bar{u}(p_f, \sigma_f) \gamma^0 u(p_i, \sigma_i)}{(2\pi)^3 2\omega_i} \int d^3\vec{x} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}_i - \vec{p}_f)} e^{-\frac{x^2}{i^2}} = \\
 &= g e 2\pi \delta(E_f - E_i) i \frac{\bar{u}(p_f, \sigma_f) \gamma^0 u(p_i, \sigma_i)}{(2\pi)^3 2\omega_i} \pi^{\frac{3}{2}} l^3 e^{-\frac{l^2(\vec{p}_f - \vec{p}_i)^2}{4}} \equiv \quad (278) \\
 &= 2\pi i \delta(E_f - E_i) \frac{M_{fi}}{(2\pi)^3 2\omega_i} \quad (279)
 \end{aligned}$$

dove

$$M_{fi} = g e \bar{u}(p_f, \sigma_f) \gamma^0 u(p_i, \sigma_i) \pi^{\frac{3}{2}} l^3 e^{-\frac{l^2(\vec{p}_f - \vec{p}_i)^2}{4}} \quad (280)$$

La probabilità di transizione per unità di tempo è

$$\frac{dw_{i \rightarrow f}}{T} = 2\pi \delta(E_f - E_i) \frac{|M_{fi}|^2}{(2\omega_i)^2 V} \frac{d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3} \quad (281)$$

e la sezione d'urto differenziale

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{fi} &= \frac{dw_{i \rightarrow f}}{T \frac{v}{V}} = 2\pi \delta(E_f - E_i) \frac{|M_{fi}|^2}{4\omega_i |\vec{p}_i|} \frac{d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3} = \\
 &= 2\pi \delta(E_f - E_i) \frac{|M_{fi}|^2}{4\omega_i |\vec{p}_i|} \frac{|\vec{p}_f| E_f dE_f d\Omega_f}{(2\pi)^3} = \\
 &= |M_{fi}|^2 \frac{d\Omega_f}{16\pi^2} \quad (282)
 \end{aligned}$$

ovvero

$$\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega_f} = \frac{\pi g^2 e^2 l^6}{16} \left| \bar{u}(p_f, \sigma_f) \gamma^0 u(p_i, \sigma_i) \right|^2 e^{-\frac{l^2(\vec{p}_f - \vec{p}_i)^2}{2}} \quad (283)$$

Domanda 1

Mediando sulla polarizzazione degli stati iniziali e sommando su quelle degli stati finali otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{f,i} \frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega_f} &= \frac{\pi g^2 e^2 l^6}{32} \text{Tr} \left[(\hat{p}_f + m) \gamma^0 (\hat{p}_i + m) \gamma^0 \right] e^{-\frac{l^2 (\vec{p}_f - \vec{p}_i)^2}{2}} = \\
&= \frac{\pi g^2 e^2 l^6}{8} [2 E_f E_i - p_f \cdot p_i + m^2] e^{-\frac{l^2 (\vec{p}_f - \vec{p}_i)^2}{2}} = \\
&= \frac{\pi g^2 e^2 l^6}{8} [E_f E_i + \vec{p}_f \cdot \vec{p}_i + m^2] e^{-\frac{l^2 (\vec{p}_f - \vec{p}_i)^2}{2}} = \\
&= \frac{\pi g^2 e^2 l^6}{8} [|\vec{p}|^2 + |\vec{p}|^2 \cos \theta + 2 m^2] e^{-l^2 |\vec{p}|^2 (1 - \cos \theta)} = \\
&= \frac{\pi g^2 e^2 l^6}{4} [|\vec{p}|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + m^2] e^{-l^2 |\vec{p}|^2 (1 - \cos \theta)} \tag{284}
\end{aligned}$$

dove

$$|\vec{p}| \equiv |\vec{p}_i| = |\vec{p}_f| \tag{285}$$

e θ è l'angolo di diffusione.

Domanda 2

Prendiamo l'asse delle z lungo l'asse di propagazione dell'elettrone iniziale

$$\begin{aligned}
p_i &= (E, 0, 0, |\vec{p}|) \\
p_f &= (E, \sin \theta |\vec{p}|, 0, \cos \theta |\vec{p}|) \tag{286}
\end{aligned}$$

Indichiamo con $\sigma_{i,f} = \pm \frac{1}{2}$ le elicit  degli elettroni iniziale e finale, e con $u(\vec{p}_{i,f}, \sigma_{i,f})$ i vettori di polarizzazione nella base dell'elicit . Dobbiamo calcolare le ampiezze

$$A(\sigma_f, \sigma_i) = \bar{u}(p_f, \sigma_f) \gamma^0 u(p_i, \sigma_i) = u^\dagger(p_f, \sigma_f) u(p_i, \sigma_i) \tag{287}$$

Per ragioni di simmetria

$$A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \tag{288}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
u(p_i, +\frac{1}{2}) &= \begin{pmatrix} \sqrt{\omega + |\vec{p}|} w_+ \\ \sqrt{\omega - |\vec{p}|} w_+ \end{pmatrix} \\
u(p_f, \pm \frac{1}{2}) &= \begin{pmatrix} \sqrt{\omega \pm |\vec{p}|} \left[\cos \frac{\theta}{2} - i \sigma_2 \sin \frac{\theta}{2} \right] w_\pm \\ \sqrt{\omega \mp |\vec{p}|} \left[\cos \frac{\theta}{2} - i \sigma_2 \sin \frac{\theta}{2} \right] w_\pm \end{pmatrix} \tag{289}
\end{aligned}$$

dove

$$w_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (290)$$

sono due spinori a due componenti. Dunque

$$\begin{aligned} A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= (\omega + |\vec{p}|) w_+^\dagger \left[\cos \frac{\theta}{2} + i \sigma_2 \sin \frac{\theta}{2} \right] w_+ + \\ &+ (\omega - |\vec{p}|) w_+^\dagger \left[\cos \frac{\theta}{2} + i \sigma_2 \sin \frac{\theta}{2} \right] w_+ = \\ &= 2\omega \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (291)$$

mentre

$$\begin{aligned} A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) &= 2m i \sin \frac{\theta}{2} w_-^\dagger \sigma_2 w_+ = \\ &= 2m \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (292)$$

In conclusione

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}}}{d\Omega_f} &= \frac{\pi g^2 e^2 l^6}{4} E^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-l^2 |\vec{p}|^2 (1 - \cos \theta)} \\ \frac{d\sigma_{\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}}}{d\Omega_f} &= \frac{\pi g^2 e^2 l^6}{4} m^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{-l^2 |\vec{p}|^2 (1 - \cos \theta)} \end{aligned} \quad (293)$$

Corso di Teoria dei Campi

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 19/12/2008

Problema 1

Si calcoli, al primo ordine in teoria delle perturbazioni, la probabilità per unità di volume ed unità di tempo di creazione di una coppia elettrone-positrone nel potenziale

$$A_\mu = (0, \vec{A} e^{-i\omega t}) \quad (294)$$

con \vec{A} costante.

Problema 2

Sia ψ uno campo spinoriale di Dirac, $\psi_{R,L} \equiv \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \psi$ le proiezioni di chiralità definita, $\psi^c = C \psi^*$ lo spinore coniugato di carica.

Domanda 1

Si dimostri che, in una rappresentazione generica, valgono le identità

$$(\psi^c)_R = (\psi_L)^c \quad (\psi^c)_L = (\psi_R)^c$$

Domanda 2

Sia $\psi_L(x)$ un campo fermionico quantizzato ed α un numero reale non nullo. Si dimostri che la densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = i \overline{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \alpha \left[\overline{(\psi_L)^c} \psi_L + \overline{\psi}_L (\psi_L)^c \right] \quad (295)$$

è relativisticamente invariante e se ne derivino le equazioni di campo corrispondenti.

Domanda 3

Si determinino: a) la massa; b) lo spin; c) le proprietà di coniugazione di carica; d) i vettori di polarizzazione delle particelle ed antiparticelle descritte dal sistema (295).

Soluzione Prova Scritta del 19/12/2008

Problema 1

Sia

$$|f\rangle = a_{\vec{p}_1, \sigma_1}^\dagger b_{\vec{p}_2, \sigma_2}^\dagger |0\rangle \quad (296)$$

lo stato finale della coppia elettrone-positrone. Senza perdita di generalità, possiamo scegliere l'asse delle z lungo \vec{A} :

$$\vec{A} = A \hat{z} \quad (297)$$

L'elemento di matrice S al primo ordine è

$$\begin{aligned} S_{fi} &= A e i \int d^4x \langle f | \bar{\psi}(x) \gamma^3 \psi(x) | i \rangle e^{-i\omega t} = \\ &= A e (2\pi)^4 i \delta(\omega_2 + \omega_1 - \omega) \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \frac{\bar{u}(p_2, \sigma_2) \gamma^3 v(p_1, \sigma_1)}{(2\pi)^3 2 \sqrt{\omega_1 \omega_2}} \end{aligned} \quad (298)$$

Il modulo quadro dell'ampiezza di transizione è

$$\begin{aligned} |S_{fi}|^2 &= A^2 e^2 (2\pi)^4 \delta(\omega_2 + \omega_1 - \omega) \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) T V \times \\ &\times \frac{|\bar{u}(p_2, \sigma_2) \gamma^3 v(p_1, \sigma_1)|^2}{(2\pi)^6 4 \omega_1 \omega_2} \end{aligned} \quad (299)$$

La probabilità di produzione per unità di volume e di tempo di una coppia, è pertanto

$$\begin{aligned} dP_{fi} &= \frac{dw_{fi}}{VT} = \frac{A^2 e^2}{(2\pi)^2} \int d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2 \delta(\omega_2 + \omega_1 - \omega) \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \times \\ &\times \frac{|\bar{u}(p_2, \sigma_2) \gamma^3 v(p_1, \sigma_1)|^2}{4 \omega_1 \omega_2} = \\ &= \frac{A^2 e^2}{4 (2\pi)^2} \int d\Omega |\vec{p}_1| \omega_1 d\omega_1 \delta(2\omega_1 - \omega) \frac{|\bar{u}(p_2, \sigma_2) \gamma^3 v(p_1, \sigma_1)|^2}{\omega_1^2} = \\ &= \frac{A^2 e^2}{8 (2\pi)^2} d\Omega \sqrt{1 - \frac{4m^2}{\omega^2}} |\bar{u}(p_2, \sigma_2) \gamma^3 v(p_1, \sigma_1)|^2 \end{aligned} \quad (300)$$

Sommando sulla polarizzazione degli stati finali otteniamo

$$\begin{aligned}
\sum_{f,i} \frac{dP_{fi}}{d\Omega} &= \frac{A^2 e^2}{8(2\pi)^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{\omega^2}} \text{Tr}(\hat{p}_2 + m) \gamma^3 (\hat{p}_1 - m) \gamma^3 = \\
&= \frac{A^2 e^2}{(2\pi)^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{\omega^2}} (\omega_1^2 - (p_1^{(z)})^2) = \\
&= \frac{A^2 e^2}{4(2\pi)^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{\omega^2}} (\omega^2 - (\omega^2 - 4m^2) \cos^2 \theta) \quad (301)
\end{aligned}$$

Integrando sull'angolo solido

$$\begin{aligned}
P_{fi} &= \frac{A^2 e^2}{4(2\pi)^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{\omega^2}} \left(\omega^2 4\pi - (\omega^2 - 4m^2) \frac{4\pi}{3} \right) = \\
&= \frac{A^2 e^2}{3 \cdot 2\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{\omega^2}} (\omega^2 + 2m^2) = \\
&= \frac{e^2 |\vec{E}|^2}{6\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{\omega^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{\omega^2} \right) \quad (302)
\end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto il campo elettrico $\vec{E} = i\omega \vec{A}$.

Problema 2

Domanda 1

Poiché

$$(\gamma^\mu)^* = -C^{-1} \gamma^\mu C \quad (303)$$

abbiamo

$$\gamma_5^* = -C^{-1} \gamma_5 C \quad (304)$$

Dunque

$$(\psi^c)_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} C \psi^* = C \frac{1 - (\gamma_5)^*}{2} \psi^* = C (\psi_L)^* = (\psi_L)^c \quad (305)$$

Domanda 2

L'invarianza relativistica della densità lagrangiana discende direttamente dal fatto che ψ^c si trasforma, per rotazioni di Lorentz, come ψ .

La variazione dell'azione per una variazione $\delta\psi_L(x)$ è

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x \left[\delta\bar{\psi}_L i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_L i \gamma^\mu \partial_\mu \delta\psi_L + \right. \\
&\quad \left. + \alpha \left((C \delta\psi_L^*)^\dagger \gamma^0 (\psi_L) + \overline{(\psi_L)^c} \delta\psi_L + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \delta\bar{\psi}_L C (\psi_L)^* + (\psi_L)^\dagger \gamma^0 C (\delta\psi_L)^* \right) \right] = \\
&= \int d^4x \left[\delta\bar{\psi}_L i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_L i \gamma^\mu \partial_\mu \delta\psi_L + \right. \\
&\quad \left. + \alpha \left((\delta\psi_L)^t C^\dagger \gamma^0 \psi_L + (\psi_L)^t C^\dagger \gamma^0 \delta\psi_L + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \delta\bar{\psi}_L C (\psi_L)^* + (\delta\psi_L)^\dagger \gamma^0 C (\psi_L)^* \right) \right] = \\
&= \int d^4x \left[\delta\bar{\psi}_L i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_L i \gamma^\mu \partial_\mu \delta\psi_L + \right. \\
&\quad \left. + 2\alpha \left(\overline{(\psi_L)^c} \delta\psi_L + \delta\bar{\psi}_L (\psi_L)^c \right) \right] \tag{306}
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato l'antisimmetria di $C \gamma^0$. Le equazioni del moto sono pertanto

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = -2\alpha (\psi_L)^c \tag{307}$$

Domanda 3

Prendendo il complesso coniugato di ambo i membri dell'equazione (307) otteniamo

$$-i (\gamma^\mu)^* \partial_\mu (\psi_L)^* = -2\alpha C^* \psi_L \tag{308}$$

da cui, ricordando che $C C^* = 1$,

$$i \gamma^\mu \partial_\mu C (\psi_L)^* = -2\alpha \psi_L \tag{309}$$

ovvero

$$i \gamma^\mu \partial_\mu (\psi_L)^c = -2\alpha \psi_L \tag{310}$$

Dalla (307) deriviamo dunque

$$-i \gamma^\nu \partial_\nu i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = \partial^2 \psi_L = 2i \alpha \gamma^\nu \partial_\nu (\psi_L)^c = -(2\alpha)^2 \psi_L \tag{311}$$

Pertanto il campo ψ_L ha massa

$$m = |2\alpha| \tag{312}$$

Supponiamo per fissare le idee che

$$\alpha < 0 \quad (313)$$

In questo caso

$$m = -2\alpha \quad (314)$$

Il modo piú semplice di discutere il contenuto delle equazioni relativistiche (307) è introdurre il campo

$$\chi(x) = \psi_L(x) + (\psi_L(x))^c \quad (315)$$

$\chi(x)$ è un campo di Majorana

$$\chi^c = \chi \quad (316)$$

Sommando tra loro (307) e (310) otteniamo

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \chi = -2\alpha \chi \quad (317)$$

ovvero $\chi(x)$ soddisfa le equazioni di Dirac con una massa $m = -2\alpha$. (Nel caso $\alpha > 0$ il campo $\tilde{\chi} = \psi_L - (\psi_L)^c$ è di Majorana e soddisfa l'equazione di Dirac con $m = 2\alpha$).

In conclusione, il campo ψ_L descrive una particella di massa m , spin $1/2$, *neutra*, che coincide cioè con la propria antiparticella:

$$\chi(x) = \sum_{\vec{p}\sigma} \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} u(p, \sigma) a_{\vec{p},\sigma} + \frac{e^{ipx}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} u^c(p, \sigma) a_{\vec{p},\sigma}^\dagger \quad (318)$$

dove $u(p, \sigma)$ sono i vettori di polarizzazione degli spinori di Dirac.

Poiché

$$\psi_L(x) = P_L \chi(x) \quad (\psi_L(x))^c = P_R \chi(x) \quad (319)$$

abbiamo

$$\psi_L(x) = \sum_{\vec{p}\sigma} \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} P_L u(p, \sigma) a_{\vec{p},\sigma} + \frac{e^{ipx}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} (P_R u(p, \sigma))^c a_{\vec{p},\sigma}^\dagger \quad (320)$$

mentre

$$(\psi_L(x))^c = \sum_{\vec{p}\sigma} \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} P_R u(p, \sigma) a_{\vec{p},\sigma} + \frac{e^{ipx}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} (P_L u(p, \sigma))^c a_{\vec{p},\sigma}^\dagger \quad (321)$$

NOTA: Il termine di massa per ψ_L nella (295) è detto termine di massa di Majorana, per distinguerlo dal termine di massa nella densità lagrangiana di Dirac che coinvolge anche la proiezione con chiralità opposta ψ_R .

Corso di Teoria dei Campi
Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 20/02/2009

Problema 1

Tre particelle vettoriali reali V_μ^a , con $a = 1, 2, 3$, di massa uguale m_V si accoppiano a tre particelle scalari neutre ϕ^a , anche queste con la stessa massa $m_\phi < \frac{m_V}{2}$, attraverso l'interazione

$$\mathcal{L}_I = i g \epsilon_{abc} V_\mu^a \phi^b \partial^\mu \phi^c \quad (322)$$

Domanda 1

Si determini all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni la vita media delle 3 particelle vettoriali V^a .

Domanda 2

Si determinino, allo stesso ordine in teoria delle perturbazioni, le distribuzioni angolari dei decadimenti $V^a \rightarrow \pi^b + \pi^c$ nel caso in cui V^a abbia uno stato di spin definito nel suo sistema di quiete.

Domanda 3

Si definiscano dei campi carichi $\phi^\pm = \frac{\phi^1 \pm i \phi^2}{\sqrt{2}}$ e $V_\mu^\pm = \frac{V_\mu^1 \pm i V_\mu^2}{\sqrt{2}}$. Quale deve essere la parità di carica intrinseca di V_μ^3 affinché l'interazione conservi C ?

Problema 2

Una particella scalare neutra ϕ di massa m decade in due fotoni attraverso l'accoppiamento

$$\mathcal{L}_I = \frac{g}{m} \phi \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} \quad (323)$$

dove $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Domanda 1

Si determini all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni la vita media di ϕ .

Domanda 2

Si prenda come asse delle z la direzione di propagazione dei due fotoni prodotti nel decadimento. Si determini al primo ordine in teoria delle perturbazioni lo stato di polarizzazione dei fotoni emessi nella base delle polarizzazioni *lineari* lungo x ed y , (ovvero le ampiezze relative ai decadimenti con fotoni polarizzati *linearmente* lungo x ed y).

Soluzione Prova Scritta del 20/02/2009

Problema 1

Consideriamo il processo di decadimento di una V^a con $a = 3$. I prodotti del decadimento saranno due particelle scalari con $b = 1$ e $c = 2$. L'ampiezza al primo ordine è

$$M_{3 \rightarrow 1+2} = g \epsilon_3^\mu(p; \sigma) (k_1 - k_2)_\mu = g \epsilon_3(p; \sigma) \cdot q \quad (324)$$

dove p è il quadri-impulso della particella vettoriale V_μ^3 che decade, $\epsilon_3(p, \sigma)$ è il suo vettore di polarizzazione e

$$p = k_1 + k_2 \quad q = k_1 - k_2 \quad (325)$$

k_1 e k_2 sono gli impulsi delle particelle scalari prodotte nel decadimento. Poiché

$$p^2 = m_V^2 = 2 m_\phi^2 + 2 k_1 \cdot k_2 \quad (326)$$

abbiamo

$$q^2 = 4 m_\phi^2 - m_V^2 \quad (327)$$

Nel sistema di riposo di V

$$q = (0, 2 \vec{k}) \quad p = (m_V, \vec{0}) \quad (328)$$

dove $\pm \vec{k}$ sono i tri-impulsi delle particelle scalari. Dunque

$$|\vec{k}| = \frac{m_V}{2} \sqrt{1 - \frac{4 m_\phi^2}{m_V^2}} \quad (329)$$

La probabilità di decadimento per unità di tempo e di angolo solido è

$$\frac{d\Gamma_{3 \rightarrow 1+2}(\sigma)}{d\Omega} = \frac{g^2}{64 \pi^2 m_V} \sqrt{1 - \frac{4 m_\phi^2}{m_V^2}} |\epsilon_3(p; \sigma) \cdot q|^2 \quad (330)$$

Domanda 1

Mediando sulle polarizzazioni della particella vettoriale otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_\sigma \frac{d\Gamma_{3 \rightarrow 1+2}}{d\Omega} &= \frac{g^2}{64 \pi^2 m_V} \sqrt{1 - \frac{4 m_\phi^2}{m_V^2}} \frac{(-q^2)}{3} = \\ &= \frac{g^2}{64 \pi^2} \frac{m_V}{3} \left(1 - \frac{4 m_\phi^2}{m_V^2}\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (331)$$

In definitiva, tenendo conto della simmetria tra gli indici 1,2,3, otteniamo per la vita media di ciascun V^a

$$\Gamma_V = \frac{g^2}{48\pi} m_V \left(1 - \frac{4m_\phi^2}{m_V^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (332)$$

Domanda 2

Prendiamo σ , lo spin di V lungo l'asse delle z . I vettori di polarizzazione con spin definito sono

$$\epsilon_3(p; 0) = (0, 0, 0, 1) \quad \epsilon_3(p; \pm 1) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm i, 0) \quad (333)$$

per cui

$$\epsilon_3(p; 0) \cdot q = -2|\vec{k}| \cos \theta \quad \epsilon_3(p; \pm 1) \cdot q = -\frac{2|\vec{k}| \sin \theta}{\sqrt{2}} \quad (334)$$

avendo scelto \vec{k} nel piano z, x ed avendo chiamato θ l'angolo tra \vec{k} e l'asse z . In definitiva le distribuzioni angolari dei decadimenti polarizzati sono

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_{\sigma=0}}{d\Omega} &= \frac{g^2}{64\pi^2} m_V \left(1 - \frac{4m_\phi^2}{m_V^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cos^2 \theta \\ \frac{d\Gamma_{\sigma=\pm 1}}{d\Omega} &= \frac{g^2}{64\pi^2} m_V \left(1 - \frac{4m_\phi^2}{m_V^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (335)$$

Domanda 3

L'accoppiamento di $V_\mu^{(3)}$ è

$$\mathcal{L}_3 = i g V_\mu^{(3)} (\phi^+ \partial^\mu \phi^- - \partial_\mu \phi^+ \phi^-) \quad (336)$$

La corrente

$$J^\mu = (\phi^+ \partial^\mu \phi^- - \partial_\mu \phi^+ \phi^-) \quad (337)$$

cambia di segno per scambio di ϕ^+ con ϕ^- . Pertanto $V^{(3)}$ deve avere $C = -1$ se la coniugazione di carica è rispettata.

Un modo alternativo di derivare questo risultato è osservare che la coniugazione di carica agisce sui campi neutri ϕ^a come l'inversione di parità nello spazio interno 3-dimensionale degli indici a ¹. Rispetto alle riflessioni

¹Questa operazione di inversione è nota come la G parità per l'isospin.

di parità nello spazio interno, il tensore ϵ_{abc} ha parità negativa. Il vettore ϕ^a appare quadraticamente nell'interazione: pertanto ρ^a deve essere assiale rispetto a questa operazione.

Problema 2

Sia p l'impulso della particella scalare ϕ che decade, k_1 e k_2 gli impulsi dei fotoni prodotti nel decadimento. Nel sistema di riposo di ϕ

$$k_{1,2} = (|\vec{k}|, \pm\vec{k}) \quad p = (m, \vec{0}) \quad (338)$$

dove $\pm\vec{k}$ sono i tri-impulsi delle particelle scalari, ovvero

$$|\vec{k}| = \frac{m}{2} \quad (339)$$

L'ampiezza invariante è

$$M = 2 \frac{4g}{m} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\mu \bar{\epsilon}_1^\nu k_2^\rho \bar{\epsilon}_2^\sigma \quad (340)$$

dove $\epsilon_{1,2}$ sono le polarizzazioni dei fotoni. Il fattore 2 viene dalla possibilità per un fotone uscente di contrarsi con 2 diversi campi A_μ . La probabilità di decadimento per unità di tempo e di angolo solido è

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{64g^2}{32\pi^2 m^4} \frac{m}{2} |\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\mu \bar{\epsilon}_1^\nu k_2^\rho \bar{\epsilon}_2^\sigma|^2 = \frac{g^2}{\pi^2 m^3} |\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\mu \bar{\epsilon}_1^\nu k_2^\rho \bar{\epsilon}_2^\sigma|^2 \quad (341)$$

Domanda 1

Sommando sulle polarizzazioni dei fotoni finali

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \frac{d\Gamma}{d\Omega} &= \frac{g^2}{\pi^2 m^3} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\nu\beta} g^{\sigma\delta} k_1^\mu k_2^\rho k_1^\alpha k_2^\gamma = \\ &= \frac{g^2}{\pi^2 m^3} (-2) (\delta_{\mu\alpha} \delta_{\rho\gamma} - \delta_{\mu\gamma} \delta_{\rho\alpha}) k_1^\mu k_2^\rho k_1^\alpha k_2^\gamma = \\ &= \frac{2g^2}{\pi^2 m^3} (k_1 \cdot k_2)^2 = \frac{g^2}{2\pi^2} m \end{aligned} \quad (342)$$

La probabilità per unità di tempo si ottiene integrando

$$\Gamma = \frac{1}{2} \int d\Omega \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{g^2 m}{\pi} \quad (343)$$

IL fattore $\frac{1}{2}$ davanti all'integrale tiene conto della simmetria di Bose dei fotoni nello stato finale.

Domanda 2

Scriviamo l'ampiezza invariante nel sistema di riposo del ϕ :

$$M = \frac{8g}{m} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\mu \bar{\epsilon}_1^\nu k_2^\rho \bar{\epsilon}_2^\sigma = \frac{8g}{m} \left[\epsilon_{ijk} |\vec{k}| \bar{\epsilon}_1^i k_2^j \bar{\epsilon}_2^k + \epsilon_{jki} k_1^j \bar{\epsilon}_1^k |\vec{k}| \bar{\epsilon}_2^i \right] \quad (344)$$

gli altri termini, in cui o ν o σ sono uguali a 0 si annullano in quanto $k_1^i = -k_2^i = \vec{k}$. Dunque

$$M = 8g \vec{k} \cdot (\vec{\epsilon}_1 \wedge \vec{\epsilon}_2) \quad (345)$$

e

$$\frac{d\Gamma_{\bar{\epsilon}_1, \epsilon_2}}{d\Omega} = \frac{g^2}{\pi^2} |\vec{k} \cdot (\vec{\epsilon}_1 \wedge \vec{\epsilon}_2)|^2 \quad (346)$$

Prendiamo \vec{k} lungo l'asse delle z . $\vec{\epsilon}_{1,2}$ giacciono nel piano x, y . Dunque

$$M_{xx} = M_{yy} = 0 \quad M_{xy} = -M_{yx} = 4gm \quad (347)$$

e

$$\frac{d\Gamma_{\epsilon_1, \epsilon_2}}{d\Omega} = \frac{m g^2}{4\pi^2} |\vec{\epsilon}_1 \wedge \vec{\epsilon}_2|^2 \quad (348)$$

Lo stato di polarizzazione dei fotoni è pertanto

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (e_x \otimes e_y - e_y \otimes e_x) \quad (349)$$

(derivabile direttamente anche dalla conservazione del momento angolare e della parità).

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 17/09/2010

Una particella vettoriale descritta dal campo V_μ di massa m_V decade in una particella scalare descritta dal campo ϕ di massa m_ϕ ed una particella vettoriale descritta dal campo W_μ di massa m_W attraverso l'interazione

$$\mathcal{L}_I = \frac{g_1}{m_V} \phi \partial_{[\mu} V_{\nu]} \partial^\mu W^\nu + \frac{g_2}{m_V} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \phi \partial_\mu V_\nu \partial_\rho W_\sigma$$

Domanda 1 (Punti 18)

Si calcoli il tempo di decadimento di V attraverso questo processo al primo ordine in teoria delle perturbazioni.

Domanda 2 (Punti 18)

Si calcoli la distribuzione angolare della particella scalare emessa senza misura dello stato di elicità del vettore finale, nel caso in cui la particella V che decade ha spin definito lungo l'asse delle z nel suo sistema di riposo e $g_2 = 0$.

Domanda 1

Siano p, p' i momenti delle particelle V e W rispettivamente. L'ampiezza invariante di decadimento al primo ordine si scrive

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \frac{g_1}{m_V} p'_\mu \bar{\epsilon}_\nu^{(W)}(p', \sigma') p_{[\mu} \epsilon_{\nu]}^{(V)}(p, \sigma) + \\ &+ \frac{g_2}{m_V} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p'_\rho \bar{\epsilon}_\sigma^{(W)}(p', \sigma') p_\mu \epsilon_\nu^{(V)}(p, \sigma) = \\ &= \frac{1}{m_V} [g_1 p \cdot p' g^{\sigma\nu} - g_1 p^\sigma (p')^\nu + g_2 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p'_\rho p_\mu] \bar{\epsilon}_\sigma^{(W)} \epsilon_\nu^{(V)} \quad (350)\end{aligned}$$

Il modulo quadro è

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{m_V^2} [g_1 p \cdot p' g^{\sigma\nu} - g_1 p^\sigma (p')^\nu + g_2 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p'_\rho p_\mu] \bar{\epsilon}_\sigma^{(W)} \epsilon_\nu^{(V)} \times \\ &\times [g_1 p \cdot p' g^{\beta\delta} - g_1 p^\delta (p')^\beta + g_2 \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} p'_\gamma p_\alpha] \epsilon_\delta^{(W)} \bar{\epsilon}_\beta^{(V)} \quad (351)\end{aligned}$$

Operando la somma sugli stati finali e la media su quelli iniziali

$$\begin{aligned}3 \sum |\mathcal{M}|^2 &= \frac{g_1 p \cdot p' g^{\sigma\nu} - g_1 p^\sigma (p')^\nu + g_2 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p'_\rho p_\mu}{m_V^2} \left(\frac{p'_\sigma p'_\delta}{m_W^2} - g_{\sigma\delta} \right) \times \\ &\times [g_1 p \cdot p' g^{\beta\delta} - g_1 p^\delta (p')^\beta + g_2 \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} p'_\gamma p_\alpha] \left(\frac{p_\nu p_\beta}{m_V^2} - g_{\nu\beta} \right) = \\ &= \frac{1}{m_V^2} [g_1 p \cdot p' g^{\sigma\nu} - g_1 p^\sigma (p')^\nu + g_2 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p'_\rho p_\mu] \times \\ &\times [g_1 p \cdot p' g^{\beta\delta} - g_1 p^\delta (p')^\beta + g_2 \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} p'_\gamma p_\alpha] \times \\ &\times \left[\frac{p_\nu p_\beta p'_\sigma p'_\delta}{m_V^2 m_W^2} - g_{\nu\beta} \frac{p'_\sigma p'_\delta}{m_W^2} - g_{\sigma\delta} \frac{p_\nu p_\beta}{m_V^2} + g_{\sigma\delta} g_{\nu\beta} \right] = \\ &= \frac{g_2^2}{m_V^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\alpha\nu\gamma\sigma} p'_\rho p_\mu p'_\gamma p_\alpha + \frac{g_1^2}{m_V^2} [p \cdot p' g^{\sigma\nu} - p^\sigma (p')^\nu] \times \\ &\times [p \cdot p' g^{\nu\sigma} - p^\sigma (p')^\nu] = \\ &= \frac{g_2^2}{m_V^2} \epsilon^{\mu\rho\nu\sigma} \epsilon^{\alpha\gamma\nu\sigma} p'_\rho p_\mu p'_\gamma p_\alpha + \frac{g_1^2}{m_V^2} [2(p \cdot p')^2 + m_V^2 m_W^2] = \\ &= -\frac{2g_2^2}{m_V^2} (g^{\mu\alpha} g^{\rho\gamma} - g^{\mu\gamma} g^{\rho\alpha}) p'_\rho p_\mu p'_\gamma p_\alpha +\end{aligned} \quad (352)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g_1^2}{m_V^2} [2(p \cdot p')^2 + m_V^2 m_W^2] = \\
& = \frac{2g_2^2}{m_V^2} ((p \cdot p')^2 - m_V^2 m_W^2) + \frac{g_1^2}{m_V^2} [2(p \cdot p')^2 + m_V^2 m_W^2] = \\
& = \frac{2(g_2^2 + g_1^2)}{m_V^2} ((p \cdot p')^2 - m_V^2 m_W^2) + 3g_1^2 m_W^2 \quad (353)
\end{aligned}$$

La probabilità per unità di tempo di decadimento è quindi

$$\Gamma = \frac{((p \cdot p')^2 - m_V^2 m_W^2)^{\frac{1}{2}}}{24 \pi m_V^3} \left(\frac{2(g_2^2 + g_1^2)}{m_V^2} ((p \cdot p')^2 - m_V^2 m_W^2)^2 + 3g_1^2 m_W^2 \right)$$

Domanda 2

In questo caso consideriamo soltanto la somma sugli stati finali, senza mediare su quelli iniziali

$$\begin{aligned}
\sum_{finali} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{g_1^2}{m_V^2} [p \cdot p' g^{\sigma\nu} - p^\sigma (p')^\nu] \times \\
&\times [p \cdot p' g^{\beta\delta} - p^\delta (p')^\beta] \left[\frac{p'_\sigma p'_\delta}{m_W^2} - g_{\sigma\delta} \right] \bar{\epsilon}_\beta^{(V)} \epsilon_\nu^{(V)} = \\
&= \frac{g_1^2}{m_V^2} [p \cdot p' g^{\sigma\nu} - p^\sigma (p')^\nu] \times \\
&\times [p \cdot p' g^{\beta\delta} - p^\delta (p')^\beta] [-g_{\sigma\delta}] \bar{\epsilon}_\beta^{(V)} \epsilon_\nu^{(V)} = \\
&= -\frac{g_1^2}{m_V^2} [p \cdot p' g^{\sigma\nu} - p^\sigma (p')^\nu] [p \cdot p' \delta_\sigma^\beta - p_\sigma (p')^\beta] \bar{\epsilon}_\beta^{(V)} \epsilon_\nu^{(V)} = \\
&= \frac{g_1^2}{m_V^2} [(p \cdot p')^2 - m_V^2 p' \cdot \bar{\epsilon}^{(V)} p' \cdot \epsilon^{(V)}] \quad (354)
\end{aligned}$$

Nel sistema di riposo della particella vettoriale che decade il vettore di polarizzazione della V si scrive

$$\epsilon^{(V)\mu}(p, \sigma) = (0, \vec{\epsilon}_\sigma) \quad (355)$$

con $\sigma = 0, \pm$ e

$$\vec{\epsilon}_0 = (0, 0, 1) \quad \vec{\epsilon}_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm i, 0) \quad (356)$$

Scriviamo il quadri-impulso della W come segue

$$p' = (E_W, -\vec{p}') \quad (357)$$

dove \vec{p}' è il tri-impulso della ϕ che forma un angolo θ con l'asse di polarizzazione z :

$$\vec{p}' = |\vec{p}'|(\sin \theta, 0, \cos \theta) \quad (358)$$

e

$$|\vec{p}'|^2 = \frac{(p \cdot p')^2 - m_V^2 m_W^2}{m_V^2} \quad (359)$$

Dunque

$$p' \cdot \epsilon^{(V)} = \vec{\epsilon}_\sigma \cdot \vec{p}' \quad (360)$$

Pertanto

$$\sum_{finali} |\mathcal{M}|^2 = \frac{g_1^2}{m_V^2} [(p \cdot p')^2 - m_V^2 |\vec{\epsilon}_\sigma \cdot \vec{p}'|^2] \quad (361)$$

Quindi le distribuzioni angolari del decadimento per i vari stati di polarizzazione della V sono proporzionali alle seguenti funzioni dell'angolo di decadimento:

$$\begin{aligned} \sum_{finali} |\mathcal{M}|^2(\sigma = 0) &= \frac{g_1^2}{m_V^2} [(p \cdot p')^2 - m_V^2 |\vec{p}'|^2 \cos^2 \theta] = \\ &= \frac{g_1^2}{m_V^2} [(p \cdot p')^2 \sin^2 \theta + m_V^2 m_W^2 \cos^2 \theta] \\ \sum_{finali} |\mathcal{M}|^2(\sigma = \pm 1) &= \frac{g_1^2}{m_V^2} [(p \cdot p')^2 - \frac{m_V^2}{2} |\vec{p}'|^2 \sin^2 \theta] = \\ &= \frac{g_1^2}{m_V^2} [(p \cdot p')^2 (1 - \frac{\sin^2 \theta}{2}) + \frac{m_V^2 m_W^2}{2} \sin^2 \theta] \end{aligned} \quad (362)$$

Corso di Teoria dei Campi

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 27/09/2011

Problema 1

Una particella scalare ϕ di massa m si accoppia al campo elettromagnetico attraverso l'interazione

$$\mathcal{L}_I = \frac{g}{M} \phi \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}$$

Domanda 1

Si calcoli, all'ordine piú basso in teoria delle perturbazioni, la sezione d'urto differenziale di produzione di ϕ per diffusione di un fotone non polarizzato in un campo elettrostatico esterno classico

$$\vec{E}_{cl}(\vec{x}) = Q \frac{e^{-\mu|\vec{x}|} \vec{x}}{|\vec{x}|^3} (1 + \mu|\vec{x}|)$$

Domanda 2

Si calcoli la stessa sezione d'urto nel caso in cui il fotone incidente sia polarizzato linearmente.

Problema 2

Sia ψ uno campo spinoriale di Dirac, $\psi_{R,L} \equiv \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \psi$ le proiezioni di chiralità definita, $\psi^c = C \psi^*$ lo spinore coniugato di carica.

Domanda 1

Si dimostri che, in una rappresentazione generica, valgono le identità

$$(\psi^c)_R = (\psi_L)^c \quad (\psi^c)_L = (\psi_R)^c$$

Domanda 2

Sia $\psi_L(x)$ un campo fermionico quantizzato ed α un numero reale non nullo. Si derivino le equazioni di campo corrispondenti alla densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \alpha [(\bar{\psi}_L)^c \psi_L + \bar{\psi}_L (\psi_L)^c]$$

Domanda 3

Si determinino: massa, spin, proprietà di coniugazione di carica, del sistema descritto dalla lagrangiana data.

Soluzione Prova Scritta del 27/09/2011

Problema 1

Siano k e ϵ_μ impulso e vettore di polarizzazione del fotone nello stato iniziale, p l'impulso dello scalare nello stato finale, $q = p - k$ il momento trasferito. L'ampiezza di diffusione invariante è

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \frac{g}{M} 2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (2 k^\mu \epsilon^\nu) (2 q^\rho \tilde{A}_{cl}^\sigma(q)) = \frac{8g}{M} \epsilon_{ijk} k^i \epsilon^j q^k \tilde{A}_{cl}^0(q) = \\ &= -\frac{8gi}{M} \epsilon_{ijk} k^i \epsilon^j \tilde{E}_{cl}^k(q)\end{aligned}$$

dove il primo fattore 2 è dovuto alle due possibilità che il fotone entrante ha di contrarsi con un $F_{\mu\nu}$. $\tilde{A}_{cl}^0(q)$ e $\tilde{E}_{cl}^k(q)$ sono le trasformate di Fourier del potenziale $A_{cl}^0(\vec{x})$ e del campo elettrico esterno $E_{cl}^k(\vec{x})$. Abbiamo

$$\begin{aligned}\vec{E}_{cl}(\vec{x}) &= -\vec{\nabla} \frac{Q e^{-\mu|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \\ A_{cl}^0(q) &= Q \int d^3\vec{x} \frac{e^{-i\vec{x}\cdot\vec{q}-\mu|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} = \frac{4\pi Q}{\mu^2 + \vec{q}^2} \\ \tilde{E}_{cl}^k(q) &= \frac{4\pi Q i q^k}{\mu^2 + \vec{q}^2}\end{aligned}\tag{363}$$

Dunque

$$\mathcal{M} = \frac{32\pi g Q \vec{\epsilon} \cdot (\vec{q} \times \vec{k})}{M \mu^2 + \vec{q}^2} = -\frac{8gi}{M} \vec{\epsilon} \cdot (\vec{E}(q) \times \vec{k})\tag{364}$$

e

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}|^2 &= \frac{64g^2}{M^2} \left[|\vec{E}|^2 \vec{k}^2 - (\vec{k} \cdot \vec{E})^2 - \vec{k}^2 |\vec{\epsilon} \cdot \vec{E}|^2 \right] = \\ &= \frac{64 \cdot 16 \pi^2 g^2 Q^2}{M^2 (\vec{q}^2 + \mu^2)^2} \left[|\vec{p}|^2 \vec{k}^2 - (\vec{k} \cdot \vec{p})^2 - \vec{k}^2 |\vec{\epsilon} \cdot \vec{p}|^2 \right]\end{aligned}\tag{365}$$

Domanda 1

Mediando sulle polarizzazioni del fotone incidente otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sum_{pol} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{32g^2}{M^2} \left[|\vec{E}|^2 \vec{k}^2 - (\vec{k} \cdot \vec{E})^2 \right] = \\ &= \frac{32 \cdot 16 \pi^2 g^2 Q^2}{M^2 (\vec{q}^2 + \mu^2)^2} \left[|\vec{p}|^2 \vec{k}^2 - (\vec{k} \cdot \vec{p})^2 \right]\end{aligned}\tag{366}$$

La sezione d'urto differenziale è

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{|\vec{p}| |M_{fi}|^2}{16 \pi^2 |\vec{k}|} = \frac{|\vec{p}|}{|\vec{k}|} \frac{2 g^2}{\pi^2 M^2} \left[|\vec{E}|^2 \vec{k}^2 - (\vec{k} \cdot \vec{E})^2 \right] = \\
&= \frac{32 g^2 Q^2 |\vec{p}|}{M^2 |\vec{k}| (\bar{q}^2 + \mu^2)^2} \left[|\vec{p}|^2 \vec{k}^2 - (\vec{k} \cdot \vec{p})^2 \right] = \\
&= \frac{32 g^2 Q^2}{M^2} \frac{\sin^2 \theta |\vec{p}|^3 |\vec{k}|}{(|\vec{p}|^2 + |\vec{k}|^2 - 2 |\vec{p}| |\vec{k}| \cos \theta + \mu^2)^2} \quad (367)
\end{aligned}$$

dove θ è l'angolo di diffusione. La velocità dello scalare prodotto è

$$v = \frac{|\vec{p}|}{|\vec{k}|} = \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}} \quad \omega = |\vec{k}|$$

per cui

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{32 g^2 Q^2}{M^2} \frac{\sin^2 \theta v^3}{(v^2 + 1 - 2 v \cos \theta + \mu^2 \omega^2)^2}$$

Domanda 2

Prendiamo il fotone incidente lungo l'asse delle z e il vettore di polarizzazione lungo l'asse delle x :

$$\vec{k} = (0, 0, \omega) \quad \vec{\epsilon}_x = (1, 0, 0) \quad \vec{p} = |\vec{p}| (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

Dalla (365) otteniamo

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{64 \cdot 16 \pi^2 g^2 Q^2}{M^2} \frac{|\vec{p}|^2 \omega^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{(\bar{q}^2 + \mu^2)^2}$$

e per la sezione d'urto differenziale

$$\frac{d\sigma_x}{d\Omega} = \frac{64 g^2 Q^2}{M^2} \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi v^3}{(v^2 + 1 - 2 v \cos \theta + \mu^2 \omega^2)^2}$$

Se il fotone incidente è polarizzato lungo l'asse delle y la sezione d'urto diventa invece

$$\frac{d\sigma_y}{d\Omega} = \frac{64 g^2 Q^2}{M^2} \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi v^3}{(v^2 + 1 - 2 v \cos \theta + \mu^2 \omega^2)^2}$$

Problema 2

Domanda 1

Da

$$(\gamma^\mu)^* = -C^{-1} \gamma^\mu C \quad \gamma_5^* = -C^{-1} \gamma_5 C$$

otteniamo

$$(\psi^c)_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} C \psi^* = C \frac{1 - (\gamma_5)^*}{2} \psi^* = C (\psi_L)^* = (\psi_L)^c$$

Domanda 2

La variazione dell'azione per una variazione $\delta \psi_L(x)$ è

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left[\delta \bar{\psi}_L i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_L i \gamma^\mu \partial_\mu \delta \psi_L + \right. \\ &\quad \left. + \alpha \left((C \delta \psi_L^*)^\dagger \gamma^0 (\psi_L) + \overline{(\psi_L)^c} \delta \psi_L + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \delta \bar{\psi}_L C (\psi_L)^* + (\psi_L)^\dagger \gamma^0 C (\delta \psi_L)^* \right) \right] = \\ &= \int d^4x \left[\delta \bar{\psi}_L i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_L i \gamma^\mu \partial_\mu \delta \psi_L + \right. \\ &\quad \left. + \alpha \left((\delta \psi_L)^t C^\dagger \gamma^0 \psi_L + (\psi_L)^t C^\dagger \gamma^0 \delta \psi_L + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \delta \bar{\psi}_L C (\psi_L)^* + (\delta \psi_L)^\dagger \gamma^0 C (\psi_L)^* \right) \right] = \\ &= \int d^4x \left[\delta \bar{\psi}_L i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_L i \gamma^\mu \partial_\mu \delta \psi_L + \right. \\ &\quad \left. + 2 \alpha \left(\overline{(\psi_L)^c} \delta \psi_L + \delta \bar{\psi}_L (\psi_L)^c \right) \right] \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato l'antisimmetria di $C \gamma^0$. Le equazioni del moto sono pertanto

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = -2 \alpha (\psi_L)^c \quad (368)$$

Domanda 3

Prendendo il complesso coniugato di ambo i membri dell'equazione (368) otteniamo

$$-i (\gamma^\mu)^* \partial_\mu (\psi_L)^* = -2 \alpha C^* \psi_L$$

da cui, ricordando che $C C^* = 1$,

$$i \gamma^\mu \partial_\mu C (\psi_L)^* = -2 \alpha \psi_L \Rightarrow i \gamma^\mu \partial_\mu (\psi_L)^c = -2 \alpha \psi_L \quad (369)$$

Dunque

$$-i \gamma^\nu \partial_\nu i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = \partial^2 \psi_L = 2 i \alpha \gamma^\nu \partial_\nu (\psi_L)^c = -(2 \alpha)^2 \psi_L$$

Pertanto il campo ψ_L ha massa

$$m = |2 \alpha|$$

Il modo piú semplice di discutere il contenuto delle equazioni relativistiche (368) è (per $\alpha > 0$) introdurre il campo

$$\begin{aligned} \chi(x) &= \psi_L(x) + (\psi_L(x))^c \\ \psi_L(x) &= P_L \chi(x) \quad (\psi_L(x))^c = P_R \chi(x) \end{aligned}$$

che soddisfa

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \chi = -2 \alpha \chi$$

Quindi $\chi(x)$ soddisfa le equazioni di Dirac con una massa $m = -2 \alpha^2$:

$$\chi(x) = \sum_{\vec{p}\sigma} \frac{e^{-i p x}}{(2 \pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2 \omega_{\vec{p}}}} u(p, \sigma) a_{\vec{p}, \sigma} + \frac{e^{i p x}}{(2 \pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2 \omega_{\vec{p}}}} u^c(p, \sigma) a_{\vec{p}, \sigma}^\dagger$$

dove $u(p, \sigma)$ sono i vettori di polarizzazione degli spinori di Dirac. In conclusione, il campo ψ_L descrive una particella di massa m , spin $1/2$, *neutra*, che coincide cioè con la propria antiparticella:

$$\psi_L(x) = \sum_{\vec{p}\sigma} \frac{e^{-i p x}}{(2 \pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2 \omega_{\vec{p}}}} P_L u(p, \sigma) a_{\vec{p}, \sigma} + \frac{e^{i p x}}{(2 \pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2 \omega_{\vec{p}}}} (P_R u(p, \sigma))^c a_{\vec{p}, \sigma}^\dagger$$

NOTA: Il termine di massa per ψ_L nella (363) è detto di Majorana, per distinguerlo dal termine di massa nella densità lagrangiana di Dirac che coinvolge anche la proiezione con chiralità opposta ψ_R .

²Nel caso $\alpha > 0$ il campo $\tilde{\chi} = \psi_L - (\psi_L)^c$ è di Majorana e soddisfa l'equazione di Dirac con $m = 2 \alpha$.

Corso di Teoria dei Campi
Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 21/06/2013

Problema 1

Una particella scalare ϕ carica e di massa m si accoppia al campo elettromagnetico esterno $A_\mu(x)$ attraverso l'interazione

$$\mathcal{L}_I = i e A_\mu (\phi^\dagger \partial^\mu \phi - \partial^\mu \phi^\dagger \phi) \quad (370)$$

Domanda 1

Si calcoli, all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni, la sezione d'urto differenziale di diffusione dello scalare in un campo elettromagnetico esterno descritto dai potenziali indipendenti dal tempo

$$\begin{aligned} A_0(x) &= -e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{2a^2}} \vec{E} \cdot \vec{x} \\ \vec{A}(x) &= e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{2a^2}} \frac{1}{2} \vec{x} \wedge \vec{B} \end{aligned} \quad (371)$$

Domanda 2

Verificare che il risultato non dipende dalla scelta del gauge per (A_0, \vec{A}) .

Problema 2

Un fermione di Dirac ψ di massa m si accoppia ad un campo elettromagnetico esterno $A_\mu(x)$ attraverso l'interazione

$$\mathcal{L}_I = e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (372)$$

Domanda 1

Si calcoli, all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni, la sezione d'urto di diffusione non-polarizzata del fermione nel campo elettromagnetico descritto da (371)

Domanda 2

Si calcoli la sezione d'urto di diffusione di un fermione con elicità $h = 1/2$ in un fermione con elicità $h = -1/2$, nel caso in cui $\vec{B} = 0$ ed in cui il fermione iniziale si propaga nella direzione del campo \vec{E} .

Soluzione Prova Scritta del 21/06/2013

Problema 1

Siano $|i\rangle = a_{\vec{p}_i}^\dagger |0\rangle$ e $|f\rangle = a_{\vec{p}_f}^\dagger |0\rangle$ gli stati iniziali e finali dell'elettrone. L'elemento di matrice S al primo ordine è

$$S_{fi} = i e \int d^4x \langle f | (i \phi^\dagger \partial^\mu \phi - i \partial^\mu \phi^\dagger \phi) | i \rangle A_\mu(\vec{x}) \quad (373)$$

Sostituendo in questa espressione le espressioni per i campi quantizzati

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int d^3\vec{p} \left[\frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (2\omega_{\vec{p}})^{\frac{1}{2}}} a_{\vec{p}} + \frac{e^{ipx}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (2\omega_{\vec{p}})^{\frac{1}{2}}} b_{\vec{p}}^\dagger \right] \\ \phi^\dagger(x) &= \int d^3\vec{p} \left[\frac{e^{ipx}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (2\omega_{\vec{p}})^{\frac{1}{2}}} a_{\vec{p}}^\dagger + \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (2\omega_{\vec{p}})^{\frac{1}{2}}} b_{\vec{p}} \right] \end{aligned} \quad (374)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} S_{fi} &= i e \int d^4x d^3\vec{p} d^3\vec{q} \langle f | (a_{\vec{q}}^\dagger p^\mu a_{\vec{p}} + q^\mu a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}}) | i \rangle \times \\ &\quad \times \frac{e^{i(q-p)x}}{(2\pi)^3 (2\omega_{\vec{p}})^{\frac{1}{2}} (2\omega_{\vec{q}})^{\frac{1}{2}}} A_\mu(\vec{x}) = \\ &= i e 2\pi \int d^3\vec{x} d^3\vec{p} d^3\vec{q} \delta(\omega_{\vec{p}} - \omega_{\vec{q}}) \delta(\vec{q} - \vec{p}_f) \delta(\vec{p} - \vec{p}_i) \times \\ &\quad \times \frac{e^{i(q-p)x}}{(2\pi)^3 (2\omega_{\vec{p}})} (p+q)^\mu A_\mu(\vec{x}) = \\ &= 2\pi i e \delta(\omega_{\vec{p}_f} - \omega_{\vec{p}_i}) \int d^3\vec{x} \frac{e^{-i(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{x}}}{(2\pi)^3 (2\omega_{\vec{p}_i})} (p_f + p_i)^\mu A_\mu(\vec{x}) = \\ &= 2\pi i \delta(\omega_{\vec{p}_f} - \omega_{\vec{p}_i}) \frac{M_{fi}}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{p}_i}} \end{aligned} \quad (375)$$

dove

$$M_{fi} = e (p_f + p_i)^\mu \int d^3\vec{x} e^{-i(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{x}} A_\mu(\vec{x}) = e P^\mu \tilde{A}_\mu(\vec{q}) \quad (376)$$

dove

$$P \equiv p_f + p_i \quad q \equiv p_f - p_i \quad (377)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_0(\vec{q}) &= -i E^i \frac{\partial}{\partial q^i} \int d^3 \vec{x} e^{-i \vec{q} \cdot \vec{x}} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{2a^2}} = \\
&= -i E^i \frac{\partial}{\partial q^i} (2\pi)^{\frac{3}{2}} a^3 e^{-\frac{a^2 \vec{q}^2}{2}} = i (2\pi)^{\frac{3}{2}} a^5 \vec{E} \cdot \vec{q} e^{-\frac{a^2 \vec{q}^2}{2}} \\
\tilde{A}_i(\vec{q}) &= i \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B^j \frac{\partial}{\partial q^k} \int d^3 \vec{x} e^{-i \vec{p} \cdot \vec{x}} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{2a^2}} = \\
&= i \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B^j \frac{\partial}{\partial q^k} (2\pi)^{\frac{3}{2}} a^3 e^{-\frac{a^2 \vec{q}^2}{2}} = -i \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B^j q^k (2\pi)^{\frac{3}{2}} a^5 e^{-\frac{a^2 \vec{q}^2}{2}}
\end{aligned}$$

Dunque

$$M_{fi} = i e (2\pi)^{\frac{3}{2}} a^5 e^{-\frac{a^2 (\vec{p}_f - \vec{p}_i)^2}{2}} \left[2\omega \vec{E} \cdot (\vec{p}_f - \vec{p}_i) + \vec{B} \cdot (\vec{p}_i \wedge \vec{p}_f) \right] \quad (378)$$

dove $\omega \equiv \omega_{\vec{p}_f} = \omega_{\vec{p}_i}$. La sezione d'urto differenziale

$$d\sigma_{fi} = \int \frac{d w_{i \rightarrow f}}{T \frac{v}{V}} = \int 2\pi \delta(\omega_{\vec{p}_f} - \omega_{\vec{p}_i}) \frac{|M_{fi}|^2}{4\omega_i |\vec{p}_i|} \frac{d^3 \vec{p}_f}{(2\pi)^3} = |M_{fi}|^2 \frac{d\Omega_f}{16\pi^2}$$

è dunque

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega_f} &= \frac{e^2}{16\pi^2} (P \tilde{A}(q))^2 = \\
&= \frac{e^2 \pi a^{10}}{2} e^{-a^2 (\vec{p}_f - \vec{p}_i)^2} \left[2\omega \vec{E} \cdot (\vec{p}_f - \vec{p}_i) + \vec{B} \cdot (\vec{p}_i \wedge \vec{p}_f) \right]^2 \quad (379)
\end{aligned}$$

Domanda 2

L'ampiezza è invariante per una trasformazione di gauge del potenziale trasforma secondo

$$P^\mu \tilde{A}_\mu(q) \rightarrow P^\mu \tilde{A}(q) + P^\mu q_\mu \epsilon = P^\mu \tilde{A}(q) \quad (380)$$

in quando $P q = 0$.

Problema 2

Domanda 1

Siano $|i\rangle = a_{\vec{p}_i, \sigma_i}^\dagger |0\rangle$ e $|f\rangle = a_{\vec{p}_f, \sigma_f}^\dagger |0\rangle$ gli stati iniziali e finali dell'elettrone. L'elemento di matrice S al primo ordine è

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= i e \int d^4x \langle f | \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) | i \rangle A_\mu(\vec{x}) = \\
&= i e 2\pi \delta(\omega_f - \omega_i) i \frac{\bar{u}(p_f, \sigma_f) \gamma^\mu u(p_i, \sigma_i)}{(2\pi)^3 2\omega_i} \tilde{A}_\mu(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \\
&= 2\pi i \delta(\omega_f - \omega_i) \frac{M_{fi}}{(2\pi)^3 2\omega_i}
\end{aligned} \tag{381}$$

dove

$$M_{fi} = e \bar{u}(p_f, \sigma_f) \gamma^\mu u(p_i, \sigma_i) \tilde{A}_\mu(\vec{q}) \tag{382}$$

Mediando sulla polarizzazione degli stati iniziali e sommando su quelle degli stati finali otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{f,i} |M_{fi}|^2 &= \frac{e^2}{2} \text{Tr} \left[(\hat{p}_f + m) \gamma^\mu (\hat{p}_i + m) \gamma^\nu \right] \tilde{A}_\mu(\vec{q}) \tilde{A}_\nu(\vec{q}) = \\
&= 2e^2 \left[2(p_f \tilde{A}(\vec{q})) (p_i \tilde{A}(\vec{q})) + (\tilde{A}(\vec{q}) \tilde{A}(\vec{q})) (m^2 - p_f p_i) \right] = \\
&= e^2 \left[(P\tilde{A})^2 - (q\tilde{A})^2 + q^2 \tilde{A}^2 \right] = \\
&= e^2 \left[(P\tilde{A})^2 - \frac{1}{2} (q_\mu \tilde{A}_\nu - q_\nu \tilde{A}_\mu)^2 \right]
\end{aligned} \tag{383}$$

Questa espressione è invariante per $\tilde{A}(q) \rightarrow \tilde{A}(q) + \epsilon q$, ovvero per trasformazioni di gauge del potenziale. Si osservi che nel gauge scelto

$$q \tilde{A} = 0 \tag{384}$$

e dunque con questa scelta del potenziale, la sezione d'urto non polarizzata

$$\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega_f} = \frac{e^2}{16\pi^2} \left[(P\tilde{A})^2 + q^2 \tilde{A}^2 \right] \tag{385}$$

Domanda 2

Prendiamo l'asse delle z lungo il campo \vec{E} coincidente con l'asse di propagazione dell'elettrone iniziale

$$\begin{aligned}
p_i &= (\omega, 0, 0, |\vec{p}|) \\
p_f &= (\omega, \sin \theta |\vec{p}|, 0, \cos \theta |\vec{p}|)
\end{aligned} \tag{386}$$

Indichiamo con $\sigma_{i,f} = \pm \frac{1}{2}$ le elicit  degli elettroni iniziale e finale, e con $u(\vec{p}_{i,f}, \sigma_{i,f})$ i vettori di polarizzazione nella base dell'elicit . Dobbiamo calcolare l' ampiezza

$$\begin{aligned} M_{fi} &= e \bar{u}(p_f, -1/2) \gamma^0 u(p_i, 1/2) \tilde{A}_0(q) = \\ &= e u^\dagger(p_f, -1/2) u(p_i, 1/2) \tilde{A}_0(q) \end{aligned}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} u(p_i, +\frac{1}{2}) &= \begin{pmatrix} \sqrt{\omega + |\vec{p}|} w_+ \\ \sqrt{\omega - |\vec{p}|} w_+ \end{pmatrix} \\ u(p_f, -\frac{1}{2}) &= \begin{pmatrix} \sqrt{\omega - |\vec{p}|} \left[\cos \frac{\theta}{2} - i \sigma_2 \sin \frac{\theta}{2} \right] w_- \\ \sqrt{\omega + |\vec{p}|} \left[\cos \frac{\theta}{2} - i \sigma_2 \sin \frac{\theta}{2} \right] w_- \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (387)$$

dove

$$w_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (388)$$

sono due spinori a due componenti. Dunque

$$\begin{aligned} M_{fi} &= 2 m e i \sin \frac{\theta}{2} w_-^\dagger \sigma_2 w_+ \tilde{A}_0(q) = \\ &= -2 e m \sin \frac{\theta}{2} \tilde{A}_0(q) \end{aligned} \quad (389)$$

In conclusione

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega_f} &= \frac{e^2 m^2}{4 \pi^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \tilde{A}_0^2(q) = 2 \pi e^2 m^2 a^{10} (\vec{E} \cdot \vec{q})^2 e^{-a^2 \vec{q}^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} = \\ &= 8 \pi e^2 m^2 a^{10} \vec{E}^2 |\vec{p}|^2 e^{-4 a^2 \vec{p}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \sin^6 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (390)$$

NOTA: Le seguenti formule possono essere utili

$$\begin{aligned} J^\mu(p_1, p_2) &= \bar{u}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) = \frac{1}{2m} P^\mu \bar{u}(p_2) u(p_1) + \\ &\quad - \frac{1}{4m} q_\nu \bar{u}(p_2) [\gamma^\mu, \gamma^\nu] u(p_1) \end{aligned}$$

Da questo, posto

$$P \equiv p_1 + p_2 \quad q \equiv p_2 - p_1$$

otteniamo nel limite elastico (campo esterno indipendente dal tempo)

$$\begin{aligned}\bar{u}(p_2) \gamma^0 u(p_1) &= 2\omega w_2^\dagger w_1 \\ \bar{u}(p_2) \gamma^i u(p_1) &= P^i w_2^\dagger w_1 - i \epsilon_{ijk} q^j w_2^\dagger \sigma^k w_1\end{aligned}$$

dove, nella base di elicità

$$\begin{aligned}w_1 &= w_\sigma \\ w_2 &= e^{-i \frac{\theta}{2} \sigma_2} w_{\sigma'}\end{aligned}$$

Corso di Teoria dei Campi

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 23/07/2013

Problema 1

Un fermione di massa m descritto dal campo di Dirac ψ interagisce con un campo scalare ϕ in maniera descritta dalla densità lagrangiana di interazione

$$\mathcal{L}_1 = i g \phi \bar{\psi} \gamma_5 \psi \quad (391)$$

Domanda 1

Si consideri il processo di diffusione elastica del fermione, in una situazione nella quale il campo scalare è considerato come un campo esterno classico indipendente dal tempo

$$\phi_{cl}(\vec{x}) = \frac{g'}{4\pi} \frac{e^{-\mu|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \quad (392)$$

Si calcoli, all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni, la sezione d'urto di diffusione non-polarizzata del fermione nel campo scalare esterno (392).

Domanda 2

Si calcoli all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni, la sezione d'urto di diffusione elastica nel campo classico (392) per stati generici di spin del fermione.

Domanda 3

Confrontando il risultato al punto precedente con la sezione d'urto elastica di Born non-relativistica, dedurre il potenziale effettivo $V(\vec{x}, \vec{p}, \vec{\sigma})$, dipendente dalla posizione \vec{x} , momento \vec{p} e lo spin $\vec{\sigma}$, cui la particella fermionica è soggetta nel limite non-relativistico.

Problema 2

Si consideri invece dell'interazione (391), l'interazione

$$\mathcal{L}_2 = -g \phi \bar{\psi} \psi \quad (393)$$

Domanda 1

Si calcoli all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni, la sezione d'urto di diffusione elastica nel campo classico (392) per stati generici di spin del fermione.

Domanda 2

Si calcoli in questo caso il potenziale effettivo non-relativistico $V(\vec{x}, \vec{p}, \vec{\sigma})$ di cui alla Domanda 3 del problema precedente.

Soluzione Prova Scritta del 23/07/2013

Problema 1

Siano $|i, \sigma_i\rangle = a_{\vec{p}_i, \sigma_i}^\dagger |0\rangle$ e $|f\rangle = a_{\vec{p}_f, \sigma_f}^\dagger |0\rangle$ gli stati iniziali e finali dell'elettrone. L'elemento di matrice S al primo ordine è

$$S_{fi} = g \int d^4x \langle f | \bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) | i \rangle \phi_{cl}(\vec{x})$$

Sostituendo in questa espressione le espressioni per i campi quantizzati

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{\sigma} \int d^3\vec{p} \left[\frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (2\omega_{\vec{p}})^{\frac{1}{2}}} a_{\vec{p}, \sigma} u_{\vec{p}, \sigma} + \frac{e^{ipx}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (2\omega_{\vec{p}})^{\frac{1}{2}}} b_{\vec{p}, \sigma}^\dagger v_{\vec{p}, \sigma} \right] \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_{\sigma} \int d^3\vec{p} \left[\frac{e^{ipx}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (2\omega_{\vec{p}})^{\frac{1}{2}}} a_{\vec{p}, \sigma}^\dagger \bar{u}_{\vec{p}, \sigma} + \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (2\omega_{\vec{p}})^{\frac{1}{2}}} b_{\vec{p}, \sigma} \bar{v}_{\vec{p}, \sigma} \right] \end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} S_{fi} &= g \int d^4x \bar{u}(p_f, \sigma_f) \gamma_5 u(p_i, \sigma_i) \times \\ &\quad \times \frac{e^{i(\omega_f - \omega_i)x^0} e^{-i(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{x}}}{(2\pi)^3 (2\omega_{\vec{p}_f})^{\frac{1}{2}} (2\omega_{\vec{p}_i})^{\frac{1}{2}}} \phi_{cl}(\vec{x}) = \\ &= 2\pi g \delta(\omega_{\vec{p}_f} - \omega_{\vec{p}_i}) \bar{u}(p_f, \sigma_f) \gamma_5 u(p_i, \sigma_i) \int d^3\vec{x} \frac{e^{-i(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{x}}}{(2\pi)^3 (2\omega_{\vec{p}_i})} \phi_{cl}(\vec{x}) = \\ &= -2\pi i \delta(\omega_{\vec{p}_f} - \omega_{\vec{p}_i}) \frac{M_{fi}}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{p}_i}} \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} M_{fi} &= i g \bar{u}(p_f, \sigma_f) \gamma_5 u(p_i, \sigma_i) \int d^3\vec{x} e^{-i(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{x}} \phi_{cl}(\vec{x}) = \\ &= i g \bar{u}(p_f, \sigma_f) \gamma_5 u(p_i, \sigma_i) \tilde{\phi}(\vec{q}) \end{aligned}$$

dove

$$\vec{q} \equiv \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\vec{q}) &= \int d^3\vec{x} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} \phi_{cl}(\vec{x}) = \frac{g'}{4\pi} \int d^3\vec{x} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} \frac{e^{-\mu|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} = \\ &= \frac{i g'}{2|\vec{q}|} \int_0^\infty d|\vec{x}| (e^{-i|\vec{q}||\vec{x}|} - e^{i|\vec{q}||\vec{x}|}) e^{-\mu|\vec{x}|} = \frac{g'}{\mu^2 + \vec{q}^2} \quad (394) \end{aligned}$$

Nella rappresentazione standard

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} & \gamma_5 &= \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} & \gamma^i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^i \gamma_5 &= \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} & \gamma^0 \gamma^i \gamma_5 &= - \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (395)$$

$$u_{i,f} = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega + m} w_{i,f} \\ \sqrt{\omega - m} \frac{\vec{p}_{i,f}}{|\vec{p}_{i,f}|} \cdot \vec{\sigma} w_{i,f} \end{pmatrix}\quad (396)$$

$$(397)$$

Quindi

$$\bar{u}_2 \gamma_5 u_1 = w_f^\dagger \vec{q} \cdot \vec{\sigma} w_i\quad (398)$$

e

$$M_{fi} = \frac{i g g'}{\mu^2 + \vec{q}^2} w_f^\dagger \vec{q} \cdot \vec{\sigma} w_i\quad (399)$$

Domanda 1

Abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sum_{i,f} |M_{fi}|^2 &= -\tilde{\phi}_{cl}^2(\vec{q}) \frac{g^2}{2} \text{Tr}(\hat{p}_1 + m) \gamma_5 (\hat{p}_2 + m) \gamma_5 = \\ &= -\tilde{\phi}_{cl}^2(\vec{q}) \frac{g^2}{2} \text{Tr}(-\hat{p}_1 \hat{p}_2 + m^2) = \\ &= -\tilde{\phi}_{cl}^2(\vec{q}) g^2 2 (m^2 - p_1 p_2) = -g^2 \tilde{\phi}_{cl}^2(\vec{q}) q^2\end{aligned}\quad (400)$$

La sezione d'urto di diffusione elastica non polarizzata è quindi

$$\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega_f} = \frac{|M_{fi}|^2}{16 \pi^2} = -\frac{g^2 \tilde{\phi}_{cl}^2(\vec{q}) q^2}{16 \pi^2} = \frac{g^2 (g')^2}{16 \pi^2} \frac{\vec{q}^2}{(\mu^2 + \vec{q}^2)^2}\quad (401)$$

Domanda 2

La sezione d'urto di diffusione elastica polarizzata è

$$\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega_f} = \frac{g^2 (g')^2}{16 \pi^2} \frac{1}{(\mu^2 + \vec{q}^2)^2} |w_f^\dagger \vec{q} \cdot \vec{\sigma} w_i|^2\quad (402)$$

Domanda 3

La sezione d'urto di Born in un potenziale $V(\vec{x}, \vec{p}, \vec{\sigma})$ non-relativistico è

$$\frac{d\sigma_{Born}}{d\Omega} = \frac{m^2}{(2\pi)^2} |\langle \vec{p}_f | V(\vec{x}, \vec{p}, \vec{\sigma}) | \vec{p}_i \rangle|^2 \quad (403)$$

dove

$$\langle \vec{p}_f | V(\vec{x}, \vec{p}, \vec{\sigma}) | \vec{p}_i \rangle = \int d^3\vec{x} e^{-i\vec{p}_f \cdot \vec{x}} V(\vec{x}, -i\vec{\nabla}, \vec{\sigma}) e^{i\vec{p}_i \cdot \vec{x}} \quad (404)$$

Dunque

$$\langle \vec{p}_f | V(\vec{x}, \vec{p}, \vec{\sigma}) | \vec{p}_i \rangle = \frac{g g'}{2m} \frac{i\vec{q} \cdot \vec{\sigma}}{\mu^2 + \vec{q}^2} = \frac{g g'}{2m} \frac{i\vec{q} \cdot \vec{\sigma}}{\mu^2 + \vec{q}^2} \quad (405)$$

Poiché questo dipende solo da \vec{q} , il potenziale effettivo non dipende dal momento \vec{p}^B

$$V(\vec{x}, \vec{\sigma}) = \frac{g}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \phi_{cl}(\vec{x}) = -\frac{g g'}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{x} \frac{e^{-\mu|\vec{x}|}}{|\vec{x}|^3} (1 + \mu|\vec{x}|) \quad (406)$$

Problema 2

Domanda 1

Facendo uso della rappresentazione standard

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 u_1 &= \left(\sqrt{\omega + m} w_f^\dagger \quad \sqrt{\omega - m} w_f^\dagger \frac{\vec{p}_f}{|\vec{p}_f|} \cdot \vec{\sigma} \right) \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\omega + m} w_i \\ \sqrt{\omega - m} \frac{\vec{p}_i}{|\vec{p}_i|} \cdot \vec{\sigma} w_i \end{pmatrix} = \\ &= (\omega + m) w_f^\dagger w_i - \frac{(\omega - m)}{|\vec{p}_i|^2} w_f^\dagger (\vec{p}_f \cdot \vec{p}_i + i(\vec{p}_f \wedge \vec{p}_i) \cdot \vec{\sigma}) w_i = \\ &= w_f^\dagger w_i \left(\omega + m - \frac{1}{\omega + m} \vec{p}_f \cdot \vec{p}_i \right) - \frac{i(\vec{p}_f \wedge \vec{p}_i)}{\omega + m} \cdot w_f^\dagger \vec{\sigma} w_i \end{aligned}$$

Verifica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i,f} |\bar{u}_2 u_1|^2 &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\omega + m - \frac{1}{\omega + m} \vec{p}_f \cdot \vec{p}_i - \frac{i(\vec{p}_f \wedge \vec{p}_i)}{\omega + m} \cdot \vec{\sigma} \right] \times \\ &\times \left[\omega + m - \frac{1}{\omega + m} \vec{p}_f \cdot \vec{p}_i + \frac{i(\vec{p}_f \wedge \vec{p}_i)}{\omega + m} \cdot \vec{\sigma} \right] = \end{aligned}$$

³ $V(\vec{x}, \vec{\sigma})$ è il termine *tensoriale* dell'interazione del nucleone nel campo generato da un altro nucleone.

$$\begin{aligned}
&= \left[(\omega + m - \frac{1}{\omega + m} \vec{p}_f \cdot \vec{p}_i)^2 + \frac{|\vec{p}_f \wedge \vec{p}_i|^2}{(\omega + m)^2} \right] = \\
&= \left[(\omega + m)^2 + \frac{|\vec{p}|^4 \cos^2 \theta}{(\omega + m)^2} - 2 \vec{p}_f \cdot \vec{p}_i + \frac{|\vec{p}|^4 \sin^2 \theta}{(\omega + m)^2} \right] = \\
&= \left[(\omega + m)^2 + \frac{(\omega^2 - m^2)^2}{(\omega + m)^2} - 2 \vec{p}_f \cdot \vec{p}_i \right] = \\
&= 2 \left[\omega^2 + m^2 - \vec{p}_f \cdot \vec{p}_i \right] = (p_1 + p_2)^2 \tag{407}
\end{aligned}$$

La sezione d'urto di diffusione elastica polarizzata è

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega_f} &= \frac{g^2 (g')^2}{16 \pi^2} \frac{1}{(\mu^2 + \vec{q}^2)^2} |w_f^\dagger w_i (\omega + m - \frac{1}{\omega + m} \vec{p}_f \cdot \vec{p}_i) + \\
&\quad - \frac{i (\vec{p}_f \wedge \vec{p}_i)}{\omega + m} \cdot w_f^\dagger \vec{\sigma} w_i|^2
\end{aligned}$$

Domanda 2

Nel limite non relativistico

$$\begin{aligned}
\omega + m &= 2m + \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + \dots \\
\frac{\vec{p}_f \cdot \vec{p}_i}{\omega + m} &= \frac{|\vec{p}|^2}{2m} \cos \theta + \dots
\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\bar{u}_2 u_1 &= w_f^\dagger w_i \left(2m + \frac{\vec{p}^2}{m} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \dots \right) - \frac{i (\vec{p}_f \wedge \vec{p}_i)}{2m} \cdot w_f^\dagger \vec{\sigma} w_i + \dots = \\
&= w_f^\dagger w_i \left(2m + \frac{\vec{q}^2}{4m} + \dots \right) - \frac{i (\vec{q} \wedge \vec{p}_i)}{2m} \cdot w_f^\dagger \vec{\sigma} w_i + \dots \tag{408}
\end{aligned}$$

E la sezione d'urto nel limite non-relativistico diventa

$$\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega_f} = \frac{g^2 (g')^2}{16 \pi^2} \frac{4m^2}{(\mu^2 + \vec{q}^2)^2} |w_f^\dagger \left(\mathbb{I} \left(1 + \frac{\vec{q}^2}{8m^2} \right) - \frac{i (\vec{q} \wedge \vec{p}_i)}{4m^2} \cdot \vec{\sigma} \right) w_i|^2 \tag{409}$$

Dunque

$$\langle \vec{p}_f | V(\vec{x}, \vec{p}, \vec{\sigma}) | \vec{p}_i \rangle = - \frac{g g'}{(\mu^2 + \vec{q}^2)} \left[\mathbb{I} \left(1 + \frac{\vec{q}^2}{8m^2} \right) - \frac{i (\vec{q} \wedge \vec{p}_i)}{4m^2} \cdot \vec{\sigma} \right] \tag{410}$$

Il potenziale non-relativistico pertanto è la somma di due termini⁴

$$V(\vec{x}, \vec{p}, \vec{\sigma}) = V_1(\vec{x}) + V_2(\vec{x}, \vec{p}, \vec{\sigma}) \quad (411)$$

dove

$$\begin{aligned} V_1(\vec{x}) &= \left(-1 + \frac{\vec{\nabla}^2}{8m^2}\right) \frac{g g'}{4\pi} \frac{e^{-\mu|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} = \left(-1 + \frac{\mu^2}{8m^2}\right) \frac{g g'}{4\pi} \frac{e^{-\mu|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} - g g' \frac{\delta(\vec{x})}{8m^2} \\ V_2(\vec{x}, \vec{p}, \vec{\sigma}) &= \frac{(\vec{x} \wedge \vec{p})}{4m^2} \cdot \vec{\sigma} \frac{g g'}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x}|} \frac{d}{d|\vec{x}|} \frac{e^{-\mu|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \end{aligned} \quad (412)$$

⁴ $V_1(\vec{x})$ è un potenziale centrale mentre $V_2(\vec{x})$ è un termine di *spin-orbita*.

Corso di Teoria dei Campi

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 24/09/2013

Problema 1

Una particella scalare neutra di massa m in due fotoni attraverso l'interazione

$$\mathcal{L}_I = \frac{g_1}{m} \phi \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} + \frac{g_2}{m} \phi F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

Domanda 1

Si calcoli il tempo di decadimento dello scalare in due fotoni all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni.

Domanda 2

Si calcoli al primo ordine in teoria delle perturbazioni la probabilità di decadimento per unità di tempo in due fotoni polarizzati linearmente, i cui piani di polarizzazione formano un angolo θ fra loro.

Domanda 3

Si discuta come il risultato precedente possa essere usato per determinare la parità intrinseca della particella scalare, assumendo che il processo di decadimento conservi la parità.

Soluzione Prova Scritta del 24/09/2013

Problema 1

Siano k_1^μ and k_2^μ i quadri-impulsi dei fotoni prodotti dal decadimento, ϵ_1^μ and ϵ_2^μ i rispettivi vettori di polarizzazione. L'ampiezza di transizione è

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \frac{g_1}{m} 4 \times 2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\mu \epsilon_1^\nu k_2^\rho \epsilon_2^\sigma + \\ &\quad + \frac{g_2}{m} 2 \times 2 k_1^\mu \epsilon_1^\nu (k_2)_\mu (\epsilon_2)_\nu - \frac{g_2}{m} 2 \times 2 k_1^\mu \epsilon_1^\nu (k_2)_\nu (\epsilon_2)_\mu = \\ &= \mathcal{A}_{\nu\sigma} \epsilon_1^\nu \epsilon_2^\sigma\end{aligned}$$

dove

$$\mathcal{A}_{\nu\sigma} = \frac{8g_1}{m} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\mu k_2^\rho + \frac{4g_2}{m} k_1 \cdot k_2 g_{\nu\sigma} - \frac{4g_2}{m} (k_1)_\sigma (k_2)_\nu$$

Se \vec{k} è il tri-momento di uno dei fotoni nel centro di massa del decadimento, $|\vec{k}| = \frac{m}{2}$. Pertanto la probabilità decadimento per unità di tempo e per unità di angolo solido è

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{1}{32\pi^2 m^2} \frac{m}{2} \mathcal{A}_{\nu\sigma} \epsilon_1^\nu \epsilon_2^\sigma \mathcal{A}_{\alpha\beta}^* (\epsilon_1^*)^\alpha (\epsilon_2^*)^\beta$$

Sommando sulle polarizzazioni dei fotoni finali

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma_1, \sigma_2} \frac{d\Gamma}{d\Omega} &= \frac{m}{64\pi^2 m^2} \mathcal{A}_{\nu\sigma} (\mathcal{A}^*)^{\nu\sigma} = \frac{1}{64\pi^2 m} \left[\frac{8g_1}{m} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\mu k_2^\rho + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4g_2}{m} k_1 \cdot k_2 g_{\nu\sigma} - \frac{4g_2}{m} (k_1)_\sigma (k_2)_\nu \right] \left[\frac{8g_1}{m} \epsilon^{\alpha\nu\beta\sigma} (k_1)_\alpha (k_2)_\beta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4g_2}{m} k_1 \cdot k_2 g^{\nu\sigma} - \frac{4g_2}{m} (k_1)^\sigma (k_2)^\nu \right] = \\ &= \frac{1}{64\pi^2 m} \left[\frac{64g_1^2}{m^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\mu k_2^\rho \epsilon^{\alpha\nu\beta\sigma} (k_1)_\alpha (k_2)_\beta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{16g_2^2}{m^2} (k_1 \cdot k_2)^2 4 - 2 \frac{16g_2^2}{m^2} (k_1 \cdot k_2)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{64\pi^2 m} \left[\frac{64g_1^2}{m^2} (-2) (g_{\mu\alpha} g_{\rho\beta} - g_{\mu\beta} g_{\rho\alpha}) k_1^\mu k_2^\rho (k_1)_\alpha (k_2)_\beta + (413) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{32 g_2^2}{m^2} (k_1 \cdot k_2)^2] = \\
& = \frac{1}{64 \pi^2 m} \left[\frac{64 g_1^2}{m^2} (2) (k_1 \cdot k_2)^2 + \frac{32 g_2^2}{m^2} (k_1 \cdot k_2)^2 \right] = \\
& = \frac{(k_1 \cdot k_2)^2}{2 m^3 \pi^2} [4 g_1^2 + g_2^2] = \frac{m}{8 \pi^2} [4 g_1^2 + g_2^2]
\end{aligned}$$

La probabilità per unità di tempo è

$$\Gamma = \frac{1}{2} \int \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{m}{4 \pi} [4 g_1^2 + g_2^2]$$

Domanda 2

L'ampiezza invariante nel sistema di riposo della particella scalare è

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} & = \frac{g_1}{m} 4 \times 2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\mu \epsilon_1^\nu k_2^\rho \epsilon_2^\sigma + \\
& + \frac{g_2}{m} 2 \times 2 k_1^\mu \epsilon_1^\nu (k_2)_\mu (\epsilon_2)_\nu - \frac{g_2}{m} 2 \times 2 k_1^\mu \epsilon_1^\nu (k_2)_\nu (\epsilon_2)_\mu = \\
& = 8 g_1 \vec{k} \cdot (\vec{\epsilon}_1 \wedge \vec{\epsilon}_2) + 2 g_2 m \vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2 = \\
& = 4 g_1 m \sin \theta + 2 g_2 m \cos \theta
\end{aligned}$$

La probabilità di decadimento per unità di angolo solido per unità di tempo è

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{2}{64 \pi^2 m} |4 g_1 m \sin \theta + 2 g_2 m \cos \theta|^2 = \frac{m}{8 \pi^2} |2 g_1 \sin \theta + g_2 \cos \theta|^2$$

La probabilità per unità di tempo è

$$\Gamma = \frac{m}{4 \pi} |2 g_1 \sin \theta + g_2 \cos \theta|^2$$

Corso di Teoria dei Campi
Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 24/09/2013

Problema 1

Un elettrone diffonde nel campo elettromagnetico esterno

$$A_\mu = (G \delta(\vec{x}), 0, 0, 0)$$

dove G è una costante.

Domanda 1

Si calcoli la sezione d'urto di diffusione non polarizzata all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni.

Domanda 2

Si calcolino le sezioni d'urto di diffusione per un elettrone entrante ed uscente con la stessa elicità $h = +\frac{1}{2}$ e per elettrone entrante con $h = +\frac{1}{2}$ e uscente con $h = -\frac{1}{2}$.

Problema 2

Si calcoli, al primo ordine in teoria delle perturbazioni, la probabilità per unità di volume ed unità di tempo di creazione di una coppia elettrone-positrone in un campo elettrico

$$\vec{E}(t) = \vec{E} \Re(e^{i\omega t})$$

dove \vec{E} è costante ed uniforme.

Soluzione Prova Scritta del 04/02/2014

Problema 1

Domanda 1,2

Siano $|i\rangle = a_{\vec{p}_i, \sigma_i}^\dagger |0\rangle$ e $|f\rangle = a_{\vec{p}_f, \sigma_f}^\dagger |0\rangle$ gli stati iniziali e finali dell'elettrone. L'elemento di matrice S al primo ordine è

$$\begin{aligned} S_{fi} &= i e \int d^4x \langle f | \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) | i \rangle A_\mu(\vec{x}) = \\ &= i e 2\pi \delta(\omega_f - \omega_i) i \frac{\bar{u}(p_f, \sigma_f) \gamma^0 u(p_i, \sigma_i)}{(2\pi)^3 2\omega_i} \tilde{A}_0(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \\ &= 2\pi i \delta(\omega_f - \omega_i) \frac{M_{fi}}{(2\pi)^3 2\omega_i} \end{aligned} \quad (414)$$

dove

$$\begin{aligned} M_{fi} &= M_{fi} = e \bar{u}(p_f, \sigma_f) \gamma^0 u(p_i, \sigma_i) \int d^3\vec{x} e^{-i(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{x}} A_0(\vec{x}) = \\ &= e G \bar{u}(p_f, \sigma_f) \gamma^0 u(p_i, \sigma_i) \end{aligned} \quad (415)$$

Prendiamo l'asse delle z lungo il campo \vec{E} coincidente con l'asse di propagazione dell'elettrone iniziale

$$\begin{aligned} p_i &= (\omega, 0, 0, |\vec{p}|) \\ p_f &= (\omega, \sin \theta |\vec{p}|, 0, \cos \theta |\vec{p}|) \end{aligned} \quad (416)$$

Nel limite elastico (campo esterno indipendente dal tempo)

$$\bar{u}(p_f) \gamma^0 u(p_i) = \left(2\omega \cos \frac{\theta}{2} w_{\sigma_f}^\dagger w_{\sigma_i} + 2m i \sin \frac{\theta}{2} w_{\sigma_f}^\dagger \sigma_2 w_{\sigma_i} \right)$$

Dunque

$$M_{++} = M_{--} = e G 2\omega \cos \frac{\theta}{2} \quad M_{-+} = -e G 2m \sin \frac{\theta}{2} = -M_{+-} \quad (417)$$

La sezione d'urto differenziale di diffusione senza variazione di elicità è pertanto

$$\frac{d\sigma_{++}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{--}}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} |M_{++}|^2 = \frac{e^2 G^2 \omega^2}{4\pi^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (418)$$

La sezione d'urto differenziale con cambiamento di elicità è

$$\frac{d\sigma_{-+}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{+-}}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} |M_{+-}|^2 = \frac{e^2 G^2 m^2}{4\pi^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (419)$$

e quella totale

$$\frac{d\sigma_{++}}{d\Omega} + \frac{d\sigma_{+-}}{d\Omega} = \frac{e^2 G^2}{4\pi^2} \left(\omega^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + m^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (420)$$

Problema 2

Sia

$$|f\rangle = a_{\vec{p}_1, \sigma_1}^\dagger b_{\vec{p}_2, \sigma_2}^\dagger |0\rangle \quad (421)$$

lo stato finale della coppia elettrone-positrone. Senza perdita di generalità, possiamo scegliere l'asse delle z lungo \vec{A} :

$$\vec{A}(t) = A \Re(e^{i\omega t}) \hat{z} \quad (422)$$

e

$$\vec{E} = \partial_0 \vec{A}(t) = i\omega \vec{A}(t) \quad (423)$$

L'elemento di matrice S al primo ordine è

$$\begin{aligned} S_{fi} &= A e i \int d^4x \langle f | \bar{\psi}(x) \gamma^3 \psi(x) | i \rangle e^{-i\omega t} = \\ &= A e (2\pi)^4 i \delta(\omega_2 + \omega_1 - \omega) \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \frac{\bar{u}(p_2, \sigma_2) \gamma^3 v(p_1, \sigma_1)}{(2\pi)^3 2 \sqrt{\omega_1 \omega_2}} \end{aligned} \quad (424)$$

Il modulo quadro dell'ampiezza di transizione è

$$\begin{aligned} |S_{fi}|^2 &= A^2 e^2 (2\pi)^4 \delta(\omega_2 + \omega_1 - \omega) \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) T V \times \\ &\times \frac{|\bar{u}(p_2, \sigma_2) \gamma^3 v(p_1, \sigma_1)|^2}{(2\pi)^6 4 \omega_1 \omega_2} \end{aligned} \quad (425)$$

La probabilità di produzione per unità di volume e di tempo di una coppia,

è pertanto

$$\begin{aligned}
dP_{fi} &= \frac{dw_{fi}}{VT} = \frac{A^2 e^2}{(2\pi)^2} \int d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2 \delta(\omega_2 + \omega_1 - \omega) \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \times \\
&\times \frac{|\bar{u}(p_2, \sigma_2) \gamma^3 v(p_1, \sigma_1)|^2}{4\omega_1 \omega_2} = \\
&= \frac{A^2 e^2}{4(2\pi)^2} \int d\Omega |\vec{p}_1| \omega_1 d\omega_1 \delta(2\omega_1 - \omega) \frac{|\bar{u}(p_2, \sigma_2) \gamma^3 v(p_1, \sigma_1)|^2}{\omega_1^2} = \\
&= \frac{A^2 e^2}{8(2\pi)^2} d\Omega \sqrt{1 - \frac{4m^2}{\omega^2}} |\bar{u}(p_2, \sigma_2) \gamma^3 v(p_1, \sigma_1)|^2 \quad (426)
\end{aligned}$$

Sommando sulla polarizzazione degli stati finali otteniamo

$$\begin{aligned}
\sum_{f,i} \frac{dP_{fi}}{d\Omega} &= \frac{A^2 e^2}{8(2\pi)^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{\omega^2}} \text{Tr}(\hat{p}_2 + m) \gamma^3 (\hat{p}_1 - m) \gamma^3 = \\
&= \frac{A^2 e^2}{(2\pi)^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{\omega^2}} (\omega_1^2 - (p_1^{(z)})^2) = \\
&= \frac{A^2 e^2}{4(2\pi)^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{\omega^2}} (\omega^2 - (\omega^2 - 4m^2) \cos^2 \theta) \quad (427)
\end{aligned}$$

Integrando sull'angolo solido

$$\begin{aligned}
P_{fi} &= \frac{A^2 e^2}{4(2\pi)^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{\omega^2}} \left(\omega^2 4\pi - (\omega^2 - 4m^2) \frac{4\pi}{3} \right) = \\
&= \frac{A^2 e^2}{3 \cdot 2\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{\omega^2}} (\omega^2 + 2m^2) = \\
&= \frac{e^2 |\vec{E}|^2}{6\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{\omega^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{\omega^2} \right) \quad (428)
\end{aligned}$$

dove abbiamo reintrodotta il campo elettrico $\vec{E} = i\omega \vec{A}$.

Corso di Teoria dei Campi

Prof. Camillo Imbimbo

Written test 27/06/2014

Problem 1

A massive vector particle of mass M decays into scalar particles of masses m_1 and m_2 via the interaction described by the lagrangian density

$$\mathcal{L} = i g V^\mu (\phi_1 \partial_\mu \phi_2 - \phi_2 \partial_\mu \phi_1) \quad (429)$$

where V_μ is the field describing the vector particle and $\phi_{1,2}$ are the fields describing the scalar particles.

Question 1 (Points 5/30)

Compute the decay rate at the lowest order in perturbation theory for states of the vector particle of definite spin $0, \pm 1$ along the z axis.

Question 2 (Points 5/30)

Let the ϕ_1 particle be emitted in the z, x plane, at an angle θ with respect to the z axis. Compute at the lowest order in perturbation theory the differential decay rates for vector particles of definite spin along the z axis.

Problem 2

The interaction of a charged scalar particle ϕ of mass m with the electromagnetic field A_μ is described by the lagrangian density

$$\mathcal{L}_I = e i A_\mu (\phi^\dagger \partial^\mu \phi - \partial^\mu \phi^\dagger \phi) - e^2 A_\mu A^\mu \phi^\dagger \phi \quad (430)$$

where e is the charge of ϕ . We consider the scattering process

$$\gamma + \phi \rightarrow \gamma' + \phi' \quad (431)$$

in which a photon of momentum k is diffused by the scalar particle of momentum p to give a photon of momentum k' and the scalar particle of momentum p' .

Question 1 (Points 10/30)

Compute at the lowest order in perturbation theory the *invariant amplitude* for this process.

Question 2 (Points 4/30)

Show that the amplitude is invariant under the gauge transformations of the polarization vectors of the incoming and outgoing photons:

$$\epsilon(k) \rightarrow \epsilon(k) + \alpha k \quad \epsilon(k') \rightarrow \epsilon(k') + \beta k' \quad (432)$$

Question 3 (Points 6/30)

Compute the invariant amplitudes for incoming and outgoing photons of definite helicity $h = \pm 1$ as functions of the diffusion angle θ of the photon in the *rest frame* of the initial scalar particle.

Question 4 (Points 6/30)

Compute the differential cross section for unpolarized photons in the rest frame of the initial scalar particle.

Solution written test of 27/06/2014

Problem 1

Questions 1,2

The invariant amplitudes are

$$\mathcal{M}_\sigma = g \epsilon^\mu(p, \sigma) ((k_1)_\mu - (k_2)_\mu) \quad (433)$$

where

$$\begin{aligned} \epsilon(\vec{p}, 0) &= (0, 0, 0, 1) & \epsilon(\vec{p}, \pm 1) &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, \pm i, 0) \\ k_1 &= (\omega_2, \vec{k}) & k_2 &= (\omega_2, -\vec{k}) & M &= \omega_1 + \omega_2 \end{aligned} \quad (434)$$

Hence

$$\mathcal{M}_{\pm 1} = \mp 2 g |\vec{k}| \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \quad \mathcal{M}_0 = 2 g |\vec{k}| \cos \theta \quad (435)$$

From this

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_0}{d\Omega} &= \frac{|\vec{k}|}{32 \pi^2 M^2} 4 g^2 |\vec{k}|^2 \cos^2 \theta \\ \frac{d\Gamma_{\pm 1}}{d\Omega} &= \frac{|\vec{k}|}{32 \pi^2 M^2} 4 g^2 |\vec{k}|^2 \frac{\sin^2 \theta}{2} \end{aligned} \quad (436)$$

We obtain for the total decay rate

$$\Gamma_0 = \Gamma_{\pm 1} = \frac{|\vec{k}|}{32 \pi^2 M^2} 4 g^2 |\vec{k}|^2 \frac{4 \pi}{3} = \frac{g^2 |\vec{k}|^3}{6 \pi M^2} \quad (437)$$

where

$$k^2 = \frac{(M^2 - (m_1 + m_2)^2)(M^2 - (m_1 - m_2)^2)}{4 M^2} \quad (438)$$

Problem 2

Question 1

Momentum conservation

$$p + k = p' + k' \quad (439)$$

implies

$$\begin{aligned}
p \cdot k &= p' \cdot k' & p \cdot k' &= p' \cdot k & p \cdot p' - k \cdot k' &= m^2 \\
p \cdot k' - p \cdot k &= -k \cdot k' \\
(p+k)^2 - m^2 &= 2p \cdot k \\
(p-k')^2 - m^2 &= -2p \cdot k'
\end{aligned} \tag{440}$$

There are three Feynman diagram contributing to the amplitude:

$$\mathcal{M} = e^2 (\epsilon^\mu)^*(k') \epsilon^\nu(k) M_{\mu\nu} \tag{441}$$

where

$$M_{\mu\nu} = \frac{(2p+k)_\nu (2p'+k')_\mu}{2p \cdot k} - \frac{(2p-k')_\mu (2p'-k)_\nu}{2p \cdot k'} - 2g_{\mu\nu} \tag{442}$$

Hence

$$\mathcal{M} = 2e^2 \left[\frac{p \cdot \epsilon p' \cdot (\epsilon')^*}{p \cdot k} - \frac{p' \cdot \epsilon p \cdot (\epsilon')^*}{p \cdot k'} - \epsilon \cdot (\epsilon')^* \right] \tag{443}$$

where we put $\epsilon \equiv \epsilon(k)$ and $\epsilon' \equiv \epsilon(k')$.

Question 2

We have

$$\begin{aligned}
k^\nu M_{\mu\nu} &= \frac{2p \cdot k (2p'+k')_\mu}{2p \cdot k} - \frac{(2p-k')_\mu 2p' \cdot k}{2p \cdot k'} - 2k_\mu = \\
&= (2p'+k')_\mu - (2p-k')_\mu - 2k_\mu = \\
&= 2(p'+k' - p - k) = 0
\end{aligned} \tag{444}$$

and analogously

$$(k')^\mu M_{\mu\nu} = 0 \tag{445}$$

Question 3

Let us take

$$\begin{aligned}
p &= (m, 0, 0, 0) & k &= (\omega, 0, 0, \omega) \\
k' &= (\omega', \omega' \sin \theta, 0, \omega' \cos \theta) \\
p' &= (\omega + m - \omega', -\omega' \sin \theta, 0, \omega - \omega' \cos \theta)
\end{aligned} \tag{446}$$

Then

$$\begin{aligned}\epsilon_{\pm}(k) &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, \pm i, 0) \\ \epsilon_{\pm}(k') &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (0, \cos \theta, \pm i, -\sin \theta)\end{aligned}\quad (447)$$

Hence

$$p \cdot \epsilon_{\pm}(k) = p \cdot \epsilon_{\pm}(k') = 0 \quad (448)$$

We deduce that

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\pm\pm} &= -2 e^2 \epsilon_{\pm} \cdot (\epsilon'_{\pm})^* = e^2 (1 + \cos \theta) \\ \mathcal{M}_{\mp\mp} &= -2 e^2 \epsilon_{\pm} \cdot (\epsilon'_{\mp})^* = e^2 (1 - \cos \theta)\end{aligned}\quad (449)$$

Question 4

The modulus squared of the invariant amplitude summed over the final and averaged over the initial polarization states is

$$\frac{1}{2} \sum |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{2} 2 [(1 + \cos \theta)^2 + (1 - \cos \theta)^2] = 2 e^4 (1 + \cos^2 \theta) \quad (450)$$

The unpolarized differential cross section in the rest frame of the initial scalar is

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{(\omega')^2}{[(p+k)^2 - m^2]^2} \frac{1}{2} \sum |\mathcal{M}|^2 = \\ &= \frac{e^4}{8\pi^2} \frac{(\omega')^2}{4m^2\omega^2} (1 + \cos^2 \theta) = \\ &= \frac{e^4}{32\pi^2 m^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)\right)^2} 2(1 + \cos^2 \theta)\end{aligned}\quad (451)$$

where we used the conservation of energy

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m} (1 - \cos \theta) \quad (452)$$

ADDENDUM

Although this was not necessary for the resolution of the problem, let us compute the average (450) in a manifest covariant way

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e^4} \sum |\mathcal{M}|^2 &= M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = \frac{(2p+k) \cdot (2p+k) (2p'+k') \cdot (2p'+k')}{4(p \cdot k)^2} + \\
&+ \frac{(2p-k') \cdot (2p-k') (2p'-k) \cdot (2p'-k)}{4(p \cdot k')^2} + 16 + \\
&-4 \frac{(2p+k) \cdot (2p'+k')}{2p \cdot k} + 4 \frac{(2p-k') \cdot (2p'-k)}{2p \cdot k'} + \\
&-2 \frac{(2p+k) \cdot (2p'-k) (2p'+k') \cdot (2p-k')}{2p \cdot k 2p \cdot k'} = \\
&= \frac{(4m^2 + 4p \cdot k)^2}{4(p \cdot k)^2} + \frac{(4m^2 - 4k' \cdot p)^2}{4(p \cdot k')^2} + 16 + \\
&-4 \frac{(4p \cdot p' + 4p' \cdot k + k \cdot k')}{2p \cdot k} + 4 \frac{(4p \cdot p' - 4k \cdot p + k \cdot k')}{2p \cdot k'} + \\
&-2 \frac{(4pp' + 2k \cdot (p' - p)) (4p' \cdot p + 2k' \cdot (p - p'))}{2p \cdot k 2p \cdot k'} = \\
&= 4 \frac{m^4 + 2m^2 p \cdot k + (p \cdot k)^2}{(p \cdot k)^2} + 4 \frac{m^4 - 2m^2 k' \cdot p + (k' \cdot p)^2}{(p \cdot k')^2} + 16 + \\
&-4 \frac{(4(p+k) \cdot p' + k \cdot k')}{2p \cdot k} + 4 \frac{(4p \cdot (p' - k) + k \cdot k')}{2p \cdot k'} + \\
&-2 \frac{(4pp' + 2k \cdot (k - k')) (4p' \cdot p + 2k' \cdot (k' - k))}{2p \cdot k 2p \cdot k'} = \\
&= 4 \frac{m^4 + 2m^2 p \cdot k + (p \cdot k)^2}{(p \cdot k)^2} + 4 \frac{m^4 - 2m^2 k' \cdot p + (k' \cdot p)^2}{(p \cdot k')^2} + 16 + \\
&-4 \frac{(4(p'+k') \cdot p' + k \cdot k')}{2p \cdot k} + 4 \frac{(4p \cdot (p - k') + k \cdot k')}{2p \cdot k'} + \\
&-2 \frac{(4pp' + 2k \cdot (p' - p)) (4p' \cdot p + 2k' \cdot (p - p'))}{2p \cdot k 2p \cdot k'} = \\
&= 4 \frac{m^4 + 2m^2 p \cdot k + (p \cdot k)^2}{(p \cdot k)^2} + 4 \frac{m^4 - 2m^2 k' \cdot p + (k' \cdot p)^2}{(p \cdot k')^2} + 16 + \\
&-4 \frac{(4m^2 + 4k' \cdot p' + k \cdot k')}{2p \cdot k} + 4 \frac{(4m^2 - 4p \cdot k' + k \cdot k')}{2p \cdot k'} + \\
&-2 \frac{(4pp' + 2k \cdot (k - k')) (4p' \cdot p + 2k' \cdot (k' - k))}{2p \cdot k 2p \cdot k'} \tag{453}
\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e^4} \sum |\mathcal{M}|^2 &= \frac{4m^4 + 8m^2 p \cdot k + 4(p \cdot k)^2}{(p \cdot k)^2} + \\
&+ \frac{4m^4 - 8m^2 k' \cdot p + 4(k' \cdot p)^2}{(p \cdot k')^2} + 16 + \\
&- \frac{8m^2 + 8k' \cdot p' + 2k \cdot k'}{p \cdot k} + \frac{8m^2 - 8p \cdot k' + 2k \cdot k'}{p \cdot k'} + \\
&- \frac{(4p \cdot p' - 2k \cdot k')(4p' \cdot p - 2k' \cdot k)}{2p \cdot k p \cdot k'} = \\
&= \frac{4m^4}{(p \cdot k)^2} + \frac{4m^4}{(p \cdot k')^2} + 8 - \frac{2k \cdot k'}{p \cdot k} + \frac{2k \cdot k'}{p \cdot k'} - \frac{(4m^2 + 2k \cdot k')^2}{2p \cdot k p \cdot k'} = \\
&= \frac{4m^4}{(p \cdot k)^2} + \frac{4m^4}{(p \cdot k')^2} - \frac{8m^4}{p \cdot k p \cdot k'} + 8 + \\
&+ 2k \cdot k' \left(-\frac{1}{p \cdot k} + \frac{1}{p \cdot k'} - \frac{k \cdot k' + 4m^2}{p \cdot k p \cdot k'} \right) = \\
&= 4m^4 \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right)^2 + 8 - 2k \cdot k' \frac{p \cdot k' + k \cdot k' - p \cdot k + 4m^2}{p \cdot k p \cdot k'} = \\
&= 4m^4 \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right)^2 + 8 - 2k \cdot k' \frac{4m^2}{p \cdot k p \cdot k'} = \\
&= 4m^4 \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right)^2 + 8 + 2(p \cdot k' - p \cdot k) \frac{4m^2}{p \cdot k p \cdot k'} = \\
&= 4 \left[m^4 \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right)^2 + 2 + 2m^2 \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right) \right] \quad (454)
\end{aligned}$$

In conclusion

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum |\mathcal{M}|^2 &= 2e^4 \left[m^4 \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right)^2 + 2 + 2m^2 \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right) \right] = \\
&= 2e^4 \left[\left[m^2 \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right) + 1 \right]^2 + 1 \right] \quad (455)
\end{aligned}$$

Since $p \cdot k = m\omega$ and $p \cdot k' = m\omega'$, one has

$$m^2 \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right) + 1 = \frac{m}{\omega} - \frac{m}{\omega'} + 1 = \cos \theta \quad (456)$$

and this expression agrees with (450).

Corso di Teoria dei Campi
Prof. Camillo Imbimbo

Esame scritto del 29/09/2014

Problema 1

Una particella scalare di massa m descritta dal campo ϕ decade in un fermione ψ_1 di massa m_1 ed un anti-fermione $\bar{\psi}_2$ di massa m_2 , descritti rispettivamente dai campi di Dirac ψ_1 e ψ_2 , attraverso una interazione mediata dal vettore W_μ di massa m_W

$$\mathcal{L}_I = g_1 W_\mu \partial^\mu \phi + g_2 W_\mu \bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_2 + h.c. \quad (457)$$

Domanda 1 (Punti 15/30)

Si calcoli all'ordine più basso in g_1 e g_2 la probabilità totale di decadimento per unità di tempo della particella scalare nella coppia fermionica.

Domanda 2 (Punti 10/30)

Si determini la distribuzione angolare del decadimento per *elicità* definite della coppia fermione-antifermione nel sistema di quiete della particella scalare.

Domanda 3 (Punti 10/30)

Si determini la distribuzione angolare del decadimento per *spin* definito lungo l'asse z della coppia fermione-antifermione nel sistema di quiete della particella scalare.

Soluzione dell' esame scritto del 29/09/2014

Problema 1

Domanda 1

L'ampiezza invariante è

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} &= g_1 p^\mu \frac{1}{p^2 - m_W^2} \left(\frac{p^\mu p^\nu}{m_W^2} - \eta^{\mu\nu} \right) g_2 \bar{u}(p_1) \gamma_\nu v(p_2) = \\
 &= g_1 \frac{1}{m^2 - m_W^2} \left(\frac{m^2}{m_W^2} - 1 \right) g_2 \bar{u}(p_1) \hat{p} v(p_2) = \\
 &= \frac{g_1 g_2}{m_W^2} (m_1 - m_2) \bar{u}(p_1) v(p_2)
 \end{aligned} \tag{458}$$

dove

$$\begin{aligned}
 p &= p_1 + p_2 & p_1 \cdot p_2 &= \frac{m^2 - (m_1^2 + m_2^2)}{2} \\
 m &= \omega_1 + \omega_2 = \sqrt{|\vec{p}_1| + m_1} + \sqrt{|\vec{p}_1| + m_2} \\
 |\vec{p}_1|^2 &= \frac{(m^2 - (m_1 + m_2)^2)(m^2 - (m_1 - m_2)^2)}{4m^2}
 \end{aligned} \tag{459}$$

Il modulo quadro, sommato sulle polarizzazioni finali è

$$\begin{aligned}
 \sum_{\sigma_1, \sigma_2} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{g_1^2 g_2^2}{m_W^4} (m_1 - m_2)^2 \text{Tr}(\hat{p}_2 - m_2) (\hat{p}_1 - m_1) = \\
 &= \frac{g_1^2 g_2^2}{m_W^4} (m_1 - m_2)^2 4 (p_1 \cdot p_2 - m_1 m_2) = \\
 &= 2 \frac{g_1^2 g_2^2}{m_W^4} (m_1 - m_2)^2 (m^2 - (m_1 + m_2)^2) =
 \end{aligned} \tag{460}$$

La probabilità di decadimento per unità di tempo è quindi

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Gamma}{dt} &= \frac{g_1^2 g_2^2}{4\pi m^2 m_W^4} (m_1 - m_2)^2 (m^2 - (m_1 + m_2)^2) |\vec{p}_1| = \\
 &= \frac{g_1^2 g_2^2 (m_1 - m_2)^2}{8\pi m^3 m_W^4} (m^2 - (m_1 + m_2)^2)^{\frac{3}{2}} (m^2 - (m_1 - m_2)^2)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{461}$$

Domanda 2

Il vettore di polarizzazione del fermione si scrive nella rappresentazione *standard*:

$$u(\vec{p}_1, \sigma_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_1 + m_1} [\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2] w_{\sigma_1} \\ \sigma_1 \sqrt{\omega_1 - m_1} [\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2] w_{\sigma_1} \end{pmatrix} \quad (462)$$

dove $\hat{\sigma}_i$, con $i = 1, 2, 3$ sono le matrici di Pauli, mentre $\frac{1}{2}\sigma_1 = \pm \frac{1}{2}$ è l'elicità del fermione nello stato finale. Il vettore di polarizzazione dell'anti-fermione

$$\begin{aligned} v(-\vec{p}_1, \sigma_2) &= \begin{pmatrix} \sigma_2 \sqrt{\omega_2 - m_2} [-\sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 - i \cos \frac{\theta}{2}] w_{\sigma_2} \\ -\sqrt{\omega_2 + m_2} [-\sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 - i \cos \frac{\theta}{2}] w_{\sigma_2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -i \sigma_2 \sqrt{\omega_2 - m_2} [\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2] w_{\sigma_2} \\ i \sqrt{\omega_2 + m_2} [\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2] w_{\sigma_2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (463)$$

Quindi

$$\bar{u}_1 v_2 = -i (\sqrt{(\omega_1 + m_1)(\omega_2 - m_2)} + \sqrt{(\omega_1 - m_1)(\omega_2 + m_2)}) \delta_{\sigma_1, \sigma_2} \quad (464)$$

e

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{2 g_1^2 g_2^2}{m_W^4} (m_1 - m_2)^2 (\omega_1 \omega_2 - m_1 m_2 + |p_1|^2) \delta_{\sigma_1, \sigma_2} = \\ &= \frac{2 g_1^2 g_2^2}{m_W^4} (m_1 - m_2)^2 (p_1 \cdot p_2 - m_1 m_2) \delta_{\sigma_1, \sigma_2} = \\ &= \frac{g_1^2 g_2^2}{m_W^4} (m_1 - m_2)^2 (m^2 - (m_1 + m_2)^2) \delta_{\sigma_1, \sigma_2} \end{aligned} \quad (465)$$

Dunque

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_{++}}{dt d\Omega} &= \frac{d\Gamma_{--}}{dt d\Omega} = \frac{1}{8\pi} \frac{d\Gamma}{dt} \\ \frac{d\Gamma_{+-}}{dt d\Omega} &= \frac{d\Gamma_{-+}}{dt d\Omega} = 0 \end{aligned} \quad (466)$$

in accordo con la conservazione del momento angolare.

Domanda 3

Il vettore di polarizzazione del fermione si scrive nella rappresentazione *standard*:

$$u(\vec{p}_1, \sigma_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_1 + m_1} w_{\sigma_1} \\ \sqrt{\omega_1 - m_1} \frac{\vec{p}_1}{|\vec{p}_1|} \cdot \vec{\sigma} w_{\sigma_1} \end{pmatrix} \quad (467)$$

Il vettore di polarizzazione dell'anti-fermione

$$v_2 = v(-\vec{p}_1, \sigma_2) = \gamma^2 u^*(-\vec{p}_1, \sigma_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_2 - m_2} \frac{\vec{p}_1}{|\vec{p}_1|} \cdot \vec{\sigma} \hat{\sigma}_2 w_{\sigma_2} \\ -\sqrt{\omega_2 + m_2} \hat{\sigma}_2 w_{\sigma_2} \end{pmatrix} \quad (468)$$

Quindi, posto $\vec{n} = \frac{\vec{p}_1}{|\vec{p}_1|}$,

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 v_2 &= \left(\sqrt{(\omega_1 + m_1)(\omega_2 - m_2)} + \sqrt{(\omega_1 - m_1)(\omega_2 + m_2)} \right) \times \\ &\quad \times w_{\sigma_1}^\dagger \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \hat{\sigma}_2 w_{\sigma_2} = \\ &= i \left(\sqrt{(\omega_1 + m_1)(\omega_2 - m_2)} + \sqrt{(\omega_1 - m_1)(\omega_2 + m_2)} \right) \times \\ &\quad \times w_{\sigma_1}^\dagger (\sin \theta \hat{\sigma}_3 - \cos \theta \hat{\sigma}_1) w_{\sigma_2} = \\ &= i \left(\sqrt{(\omega_1 + m_1)(\omega_2 - m_2)} + \sqrt{(\omega_1 - m_1)(\omega_2 + m_2)} \right) \times \\ &\quad \times (\sin \theta \delta_{\sigma_1, \sigma_2} \sigma_2 - \cos \theta \delta_{\sigma_1, -\sigma_2}) \end{aligned} \quad (469)$$

e

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{2 g_1^2 g_2^2}{m_W^4} (m_1 - m_2)^2 (\omega_1 \omega_2 - m_1 m_2 + |p_1|^2) \times \\ &\quad \times (\sin^2 \theta \delta_{\sigma_1, \sigma_2} + \cos^2 \theta \delta_{\sigma_1, -\sigma_2}) = \\ &= \frac{g_1^2 g_2^2}{m_W^4} (m_1 - m_2)^2 (m^2 - (m_1 + m_2)^2) \times \\ &\quad \times (\sin^2 \theta \delta_{\sigma_1, \sigma_2} + \cos^2 \theta \delta_{\sigma_1, -\sigma_2}) \end{aligned} \quad (470)$$

Dunque

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_{++}}{dt d\Omega} &= \frac{d\Gamma_{--}}{dt d\Omega} = \frac{1}{8\pi} \frac{d\Gamma}{dt} \sin^2 \theta \\ \frac{d\Gamma_{+-}}{dt d\Omega} &= \frac{d\Gamma_{-+}}{dt d\Omega} = \frac{1}{8\pi} \frac{d\Gamma}{dt} \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (471)$$

Corso di Teoria dei Campi

Prof. Camillo Imbimbo

Esame scritto del 14/07/2014

Problema 1

Una particella vettoriale massiva di massa m_V neutra decade in una coppia particella-antiparticella scalare carica, di massa m attraverso la seguente lagrangiana di interazione

$$\mathcal{L}_I = i g_1 V_\mu (\phi^\dagger \partial^\mu \phi - \partial^\mu \phi^\dagger \phi) + \frac{g_2}{m_V^2} F_{\mu\nu}(V) \partial^\mu \phi^\dagger \partial^\nu \phi \quad (472)$$

dove

$$F_{\mu\nu}(V) \equiv \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu \quad (473)$$

Domanda 1 (Punti 5/30)

Si calcoli all'ordine più basso in g_1 e g_2 la probabilità totale di decadimento per unità di tempo della particella vettoriale non polarizzata nella coppia scalare.

Domanda 2 (Punti 10/30)

Si determini la distribuzione angolare del decadimento per spin definito della particella vettoriale nel suo sistema di riposo.

Problema 2

Una particella vettoriale di massa m_V neutra ed un fermione di Dirac carico di massa m , descritti dai campi V_μ e ψ rispettivamente, si accoppiano al campo elettromagnetico A_μ secondo la

$$\mathcal{L}_I = \frac{e}{2 f_V} F_{\mu\nu}(V) F^{\mu\nu}(A) + e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (474)$$

dove $F_{\mu\nu}(V) \equiv \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ e $F_{\mu\nu}(A) \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Domanda 1 (Punti 15/30)

Si calcoli all'ordine più basso in e la probabilità totale di decadimento per unità di tempo della particella vettoriale massiva non polarizzata in una coppia fermione-anti-fermione.

Domanda 2 (Punti 10/30)

Si supponga che la la particella vettoriale abbia spin +1 lungo l'asse z nel suo sistema di riposo. Si determinino le distribuzioni angolari di decadimento per i vari stati di elicità dei fermioni finali.

Soluzione dell' esame scritto del 14/07/2014

Problema 1

L'ampiezza invariante è

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_\sigma &= g_1 \epsilon^\mu(p, \sigma) (\bar{k}_\mu - k_\mu) + \frac{g_2}{m_V^2} (p_\mu \epsilon_\nu(p, \sigma) - p_\nu \epsilon_\mu(p, \sigma)) \bar{k}^\mu k^\nu = \\
 &= \epsilon^\mu(p, \sigma) \left(g_1 (\bar{k}_\mu - k_\mu) + \frac{g_2}{m_V^2} (p \cdot \bar{k} k_\mu - p \cdot k \bar{k}_\mu) \right) = \\
 &= \epsilon^\mu(p, \sigma) \left(\left(g_1 - \frac{g_2}{m_V^2} p \cdot k \right) \bar{k}_\mu - \left(g_1 - \frac{g_2}{m_V^2} p \cdot \bar{k} \right) k_\mu \right) \quad (475)
 \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
 p &= k + \bar{k} & k \cdot \bar{k} &= \frac{m_V^2}{2} - m^2 & p \cdot k &= p \cdot \bar{k} = \frac{m_V^2}{2} \\
 \epsilon(\vec{p}, 0) &= (0, 0, 0, 1) & \epsilon(\vec{p}, \pm 1) &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, \pm i, 0) \\
 k &= (\omega, \vec{k}) & \bar{k} &= (\omega, -\vec{k}) & m_V &= 2\omega & \vec{k} &= |\vec{k}| (\sin \theta, 0, \cos \theta) \quad (476)
 \end{aligned}$$

Dunque

$$\mathcal{M}_\sigma = \epsilon^\mu(p, \sigma) \left(g_1 - \frac{g_2}{2} \right) (\bar{k}_\mu - k_\mu) \quad (477)$$

ovvero

$$\mathcal{M}_{\pm 1} = \pm 2 g |\vec{k}| \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \quad \mathcal{M}_0 = -2 g |\vec{k}| \cos \theta \quad (478)$$

dove

$$g \equiv g_1 - \frac{g_2}{2} \quad (479)$$

Da cui

$$\frac{d\Gamma_0}{d\Omega} = \frac{|\vec{k}|^3}{8 \pi^2 m_V^2} |g|^2 \cos^2 \theta \quad \frac{d\Gamma_{\pm 1}}{d\Omega} = \frac{|\vec{k}|^3}{8 \pi^2 m_V^2} |g|^2 \frac{\sin^2 \theta}{2}$$

Otteniamo per la probabilità totale di decadimento

$$\Gamma_0 = \Gamma_{\pm 1} = \frac{|\vec{k}|}{32 \pi^2 m_V^2} 4 |g|^2 |\vec{k}|^2 \frac{4\pi}{3} = \frac{|g|^2 |\vec{k}|^3}{6 \pi m_V^2} \quad (480)$$

dove

$$|\vec{k}|^2 = \frac{m_V^2}{4} - m^2 \quad (481)$$

Problema 2

Domanda 1

L'ampiezza invariante è

$$\begin{aligned} M_{fi}(\lambda, \sigma_1, \sigma_2) &= \frac{e}{2 f_V} (-2 p^2) \epsilon_\mu(p, \lambda) \frac{g^{\mu\nu}}{p^2} e \bar{u}(k, \sigma_1) \gamma^\mu v(\sigma_2, \bar{k}) = \\ &= \frac{e^2}{f_V} \epsilon_\mu(p, \lambda) \bar{u}_1 \gamma^\mu v_2 \end{aligned} \quad (482)$$

Il modulo quadro, mediato sulle polarizzazioni iniziali e sommato sulle polarizzazioni finali è

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{i,f} |M_{fi}(\lambda, \sigma_1, \sigma_2)|^2 &= \frac{e^4}{3 f_V^2} (-g_{\mu\nu}) \text{Tr}(\hat{k} + m) \gamma^\mu (\hat{k} - m) \gamma^\nu = \\ &= -\frac{e^4}{3 f_V^2} \text{Tr}(\hat{k} + m) \gamma^\mu (\hat{k} - m) \gamma_\mu = \\ &= -\frac{e^4}{3 f_V^2} \text{Tr}(\hat{k} \gamma^\mu \hat{k} \gamma_\mu - 4 m^2) = -\frac{e^4}{3 f_V^2} \text{Tr}(-2 \hat{k} \hat{k} - 4 m^2) = \\ &= \frac{8 e^4}{3 f_V^2} (k \cdot \bar{k} + 2 m^2) = \frac{8 e^4}{3 f_V^2} \left(\frac{m_V^2}{2} + m^2 \right) = \end{aligned} \quad (483)$$

La probabilità totale di decadimento non polarizzato è

$$\Gamma = \frac{|\vec{k}|}{8 \pi m_V^2} \frac{8 e^4}{3 f_V^2} \left(\frac{m_V^2}{2} + m^2 \right) = \frac{e^4 m_V}{12 \pi f_V^2} \left(1 + \frac{2 m^2}{m_V^2} \right) \left(1 - \frac{4 m^2}{m_V^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (484)$$

Domanda 2

Poniamoci nel sistema di quiete della particella vettoriale che decade:

$$\vec{k} = -\vec{k} \quad (485)$$

Il vettore di polarizzazione del fermione si scrive nella rappresentazione *standard*:

$$u(\vec{k}, \sigma) = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega + m} \left[\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] w_\sigma \\ \sigma \sqrt{\omega - m} \left[\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] w_\sigma \end{pmatrix} \quad (486)$$

dove $\hat{\sigma}_i$, con $i = 1, 2, 3$ sono le matrici di Pauli, mentre $\frac{1}{2}\sigma = \pm\frac{1}{2}$ è l'elicità del fermione nello stato finale. Quindi

$$v(\vec{k}, \sigma) = \gamma_2 u^*(\vec{k}, \sigma) = \begin{pmatrix} \sigma \sqrt{\omega - m} \left[\cos \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 - i \sin \frac{\theta}{2} \right] w_\sigma \\ -\sqrt{\omega + m} \left[\cos \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 - i \sin \frac{\theta}{2} \right] w_\sigma \end{pmatrix} \quad (487)$$

e

$$\begin{aligned} v(-\vec{k}, \sigma) &= \begin{pmatrix} \sigma \sqrt{\omega - m} \left[-\sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 - i \cos \frac{\theta}{2} \right] w_\sigma \\ -\sqrt{\omega + m} \left[-\sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 - i \cos \frac{\theta}{2} \right] w_\sigma \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -i \sigma \sqrt{\omega - m} \left[\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] w_\sigma \\ i \sqrt{\omega + m} \left[\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] w_\sigma \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (488)$$

Il vettore di polarizzazione della particella vettoriale di spin λ nel suo sistema di quiete si scrive invece

$$\epsilon^\mu(p) = (0, \vec{\epsilon}_\lambda) \quad (489)$$

dove $\lambda = -1, 0, 1$, $\vec{\epsilon}_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm i, 0)$ e $\vec{\epsilon}_0 = (0, 0, 1)$. Sostituendo queste espressioni nell'ampiezza di transizione

$$\begin{aligned} M_{fi}(\lambda, \sigma_1, \sigma_2) &= -\frac{e^2}{f_V} \bar{u}(\vec{k}, \sigma_1) \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\gamma} v(-\vec{k}, \hat{\sigma}_2) = \\ &= -\frac{e^2}{f_V} \bar{u}(\vec{k}, \sigma_1) \begin{pmatrix} 0 & \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} \\ -\vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} v(-\vec{k}, \sigma_2) = \\ &= -\frac{e^2}{f_V} u^\dagger(\vec{k}, \sigma_1) \begin{pmatrix} 0 & \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} v(-\vec{k}, \sigma_2) = \\ &= -\frac{i e^2}{f_V} (\omega + m - \sigma_1 \sigma_2 (\omega - m)) \times \\ &\times w_1^\dagger \left[\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\sigma} \left[\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] w_2 \end{aligned} \quad (490)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \left[\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] \hat{\sigma}_1 \left[\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] &= \cos \theta \hat{\sigma}_1 + \sin \theta \hat{\sigma}_3 \\ \left[\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] \hat{\sigma}_2 \left[\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] &= \hat{\sigma}_2 \\ \left[\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] \hat{\sigma}_3 \left[\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_2 \right] &= -\sin \theta \hat{\sigma}_1 + \cos \theta \hat{\sigma}_3 \end{aligned} \quad (491)$$

Dunque

$$\begin{aligned}
M_{fi}^{\lambda=0} &= -\frac{2ie^2}{f_V} (\delta_{\sigma_1, \sigma_2} m + \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} \omega) w_1^\dagger [-\sin \theta \hat{\sigma}_1 + \cos \theta \hat{\sigma}_3], w_2 = \\
&= -\frac{2ie^2}{f_V} (\delta_{\sigma_1, \sigma_2} m + \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} \omega) [-\sin \theta \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} + \cos \theta \delta_{\sigma_1, \sigma_2}] = \\
&= -\frac{2ie^2}{f_V} [-\omega \sin \theta \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} + m \cos \theta \delta_{\sigma_1, \sigma_2}] = \\
|M_{fi}^{\lambda=0}|^2 &= \frac{4e^4}{f_V^2} [\omega^2 \sin^2 \theta \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} + m^2 \cos^2 \theta \delta_{\sigma_1, \sigma_2}] \quad (492)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
M_{fi}^{\lambda=\pm 1} &= \pm \frac{\sqrt{2}ie^2}{f_V} (\delta_{\sigma_1, \sigma_2} m + \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} \omega) w_1^\dagger [\cos \theta \hat{\sigma}_1 + \sin \theta \hat{\sigma}_3 \pm i \hat{\sigma}_2] w_2 = \\
&= \pm \frac{\sqrt{2}ie^2}{f_V} (\delta_{\sigma_1, \sigma_2} m + \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} \omega) [(\cos \theta \pm \sigma_1) \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} + \sin \theta \delta_{\sigma_1, \sigma_2}] = \\
&= \pm \frac{\sqrt{2}ie^2}{f_V} [\omega (\cos \theta \pm \sigma_1) \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} + m \sin \theta \delta_{\sigma_1, \sigma_2}] = \\
|M_{fi}^{\lambda=\pm 1}|^2 &= \frac{2e^4}{f_V^2} [\omega^2 (\cos \theta \pm \sigma_1)^2 \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} + m^2 \sin^2 \theta \delta_{\sigma_1, \sigma_2}] \quad (493)
\end{aligned}$$

Le probabilità di decadimento per unità di tempo e per unità di angolo solido dei vari processi sono

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma_{\lambda=0 \rightarrow (\pm, \pm)}}{d\Omega} &= \frac{|\vec{k}|}{32 \pi^2 m_V} \frac{4e^4 m^2}{f_V^2} \cos^2 \theta = \frac{|\vec{k}| e^4 m^2}{8 \pi^2 m_V f_V^2} \cos^2 \theta \\
\frac{d\Gamma_{\lambda=0 \rightarrow (\mp, \pm)}}{d\Omega} &= \frac{|\vec{k}|}{32 \pi^2 m_V} \frac{4e^4 \omega^2}{f_V^2} \sin^2 \theta = \frac{|\vec{k}| e^4 m_V}{32 \pi^2 f_V^2} \sin^2 \theta \\
\frac{d\Gamma_{\lambda=1 \rightarrow (\pm, \pm)}}{d\Omega} &= \frac{d\Gamma_{\lambda=-1 \rightarrow (\pm, \pm)}}{d\Omega} = \frac{|\vec{k}|}{32 \pi^2 m_V} \frac{2e^4 m^2}{f_V^2} \sin^2 \theta = \\
&= \frac{|\vec{k}| e^4 m^2}{16 \pi^2 m_V f_V^2} \sin^2 \theta \\
\frac{d\Gamma_{\lambda=\pm 1 \rightarrow (\pm, \mp)}}{d\Omega} &= \frac{|\vec{k}|}{32 \pi^2 m_V} \frac{2e^4 \omega^2}{f_V^2} 4 \cos^4 \frac{\theta}{2} = \frac{|\vec{k}| e^4 m_V}{16 \pi^2 f_V^2} \cos^4 \frac{\theta}{2} \\
\frac{d\Gamma_{\lambda=\mp 1 \rightarrow (\pm, \mp)}}{d\Omega} &= \frac{|\vec{k}|}{32 \pi^2 m_V} \frac{2e^4 \omega^2}{f_V^2} 4 \sin^4 \frac{\theta}{2} = \frac{|\vec{k}| e^4 m_V}{16 \pi^2 f_V^2} \sin^4 \frac{\theta}{2} \quad (494)
\end{aligned}$$

Corso di Teoria dei Campi

Prof. Camillo Imbimbo

Esame scritto del 10/3/2015

Problema 1

Una particella scalare di massa M descritta da un campo Φ decade in un fotone e in una coppia particella-antiparticella, di massa nulla, descritta da un campo ϕ , attraverso l'interazione

$$\mathcal{L}_I = \frac{e g}{M^3} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} \partial^\rho \phi^\dagger \partial^\sigma \phi \Phi$$

dove $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ è il tensore del campo elettro-magnetico.

Domanda 1

Si dimostri che lo spettro dei fotoni emessi (senza misurare la loro polarizzazione) è

$$\frac{d\Gamma(\Phi \rightarrow \phi \bar{\phi} \gamma)}{d\omega} = \frac{e^2 g^2}{96 \pi^3 M^3} \omega^3 \left(1 - \frac{2\omega}{M}\right)$$

ω è l'energia del fotone nel sistema di riposo del Φ .

Soluzione dell' esame scritto del 10/3/2014

Problema 1

Domanda 1

Siano $\vec{q}, \vec{p}, \vec{p}'$ gli impulsi rispettivamente del fotone, della particella ϕ e dell'anti-particella $\bar{\phi}$ nel sistema di riposo della particella che decade. Siano $\omega, \omega_p, \omega_{p'}$ le rispettive energie. Poiché la particella che decade è scalare, possiamo prendere, senza perdita di generalità, \vec{q} lungo l'asse delle z . Sia θ l'angolo che \vec{p} forma con \vec{q} . La conservazione di energia e impulso implicano

$$M = \omega + \omega_p + \omega_{p'} \quad 0 = \vec{q} + \vec{p} + \vec{p}'$$

La probabilità di decadimento per unità di tempo è

$$\begin{aligned} d\Gamma &= (2\pi)^4 \delta(M - \omega - \omega_p - \omega_{p'}) \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{p}' + \vec{q}) \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{p}' d^3\vec{q}}{(2\pi)^9 8\omega\omega_p\omega_{p'}} \times \\ &\times \sum_{pol} \frac{|\mathcal{M}|^2}{2M} = \\ &= \frac{\delta(M - \omega - \omega_p - \omega_{p'})}{16 \times 32 \pi^5 M} \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{q}}{\omega\omega_p\omega_{p'}} \sum_{pol} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{\delta(M - \omega - \omega_p - \omega_{p'})}{16 \times 32 \pi^5 M} \frac{2\pi |\vec{p}| d\omega_p d\cos\theta 4\pi\omega d\omega}{\omega_{p'}} \sum_{pol} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{\frac{\omega_{p'}}{\omega|\vec{p}|}}{64 \pi^3 M} \frac{|\vec{p}| d\omega_p \omega d\omega}{\omega_{p'}} \sum_{pol} |\mathcal{M}|^2 = \frac{d\omega_p d\omega}{64 \pi^3 M} \sum_{pol} |\mathcal{M}|^2 \end{aligned}$$

L'ampiezza invariante è

$$\mathcal{M} = \frac{2ge}{M^3} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q^\mu \epsilon^\nu(q) p^\rho (p')^\sigma$$

Quindi

$$\begin{aligned} \sum_{pol} |\mathcal{M}|^2 &= -\frac{4g^2 e^2}{M^6} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\alpha\nu\beta\gamma} q^\mu p^\rho (p')^\sigma q_\alpha p_\beta (p')_\gamma = \\ &= \frac{4g^2 e^2}{M^6} 2(q \cdot p)(q \cdot p')(p \cdot p') \end{aligned}$$

Abbiamo

$$q \cdot p = \frac{M^2}{2} - \omega_{p'} M \quad q \cdot p' = \frac{M^2}{2} - \omega_p M \quad p' \cdot p = \frac{M^2}{2} - \omega M$$

Dunque

$$d\Gamma = \frac{g^2 e^2}{64 \pi^3 M} \left(1 - \frac{2\omega_{p'}}{M}\right) \left(1 - \frac{2\omega_p}{M}\right) \left(1 - \frac{2\omega}{M}\right) d\omega_p d\omega$$

In definitiva la distribuzione in energia dei fotoni emessa è

$$\frac{d\Gamma}{d\omega} = \frac{g^2 e^2}{64 \pi^3 M} \left(1 - \frac{2\omega}{M}\right) \int_{\omega_p^{min}}^{\omega_p^{max}} \left(1 - \frac{2\omega_{p'}}{M}\right) \left(1 - \frac{2\omega_p}{M}\right) d\omega_p$$

L'intervallo in cui varia ω_p è determinato dalla conservazione dell'energia⁵

$$M - \omega = \omega_p + \sqrt{\omega^2 + \omega_p^2 + 2\omega\omega_p \cos\theta} \Rightarrow$$

$$\frac{\omega_p}{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{M}{\omega} - 1\right)^2 - 1}{\left(\frac{M}{\omega} - 1\right) + \cos\theta}$$

Per un valore fissato di ω , ω_p varia tra i valori estremi in corrispondenza a $\theta = 0$ o $\theta = \pi$

$$\theta = 0 \Rightarrow \omega_p^{min} = \frac{M}{2} - \omega$$

$$\theta = \pi \Rightarrow \omega_p^{max} = \frac{M}{2}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{d\omega} &= \frac{g^2 e^2}{64 \pi^3} \left(1 - \frac{2\omega}{M}\right) \frac{1}{2} \int_{1-\frac{2\omega}{M}}^1 \left(\frac{2\omega}{M} - 1 + x\right) (1-x) dx \\ &= \frac{g^2 e^2}{64 \pi^3} \left(1 - \frac{2\omega}{M}\right) \frac{2\omega^3}{3M^3} = \\ &= \frac{g^2 e^2}{96 \pi^3} \left(1 - \frac{2\omega}{M}\right) \frac{\omega^3}{M^3} \end{aligned}$$

⁵Un modo geometrico di capire l'intervallo di variazione di ω_p è osservare che $\vec{p} + \vec{p}' + \vec{q} = 0$ significa che i vettori \vec{p} , \vec{p}' e \vec{q} giacciono su un piano e definiscono un triangolo. Si pensi a \vec{q} come un lato fisso del triangolo, mentre il vertice opposto, definito da \vec{p} è variabile compatibilmente con la conservazione dell'energia: $|\vec{p}| + |\vec{p}' + \vec{q}| = M - \omega$. Questa relazione significa che la somma delle lunghezze dei due lati \vec{p} e \vec{p}' è costante e pari a $M - \omega$. Dunque il vertice mobile di triangolo definisce una ellisse, la cui separazione dei fuochi è ω . La distanza minima dell'ellisse da uno dei fuochi definisce ω_p^{min} : $\omega_p^{min} + \omega + \omega_p^{min} = M - \omega$. Ovvero $\omega_p^{min} = \frac{M}{2} - \omega$. La distanza massima dal fuoco è $\omega_p^{max} = \omega_p^{min} + \omega = \frac{M}{2}$.

Il caso massivo.

Il caso in cui il campo ϕ ha massa m non nulla è algebricamente più complesso. L'espressione (495) rimane valida ma l'ampiezza invariante diventa

$$\sum_{pol} |\mathcal{M}|^2 = \frac{4g^2 e^2}{M^6} [2(q \cdot p)(q \cdot p')(p \cdot p') - m^2((q \cdot p)^2 + (q \cdot p')^2)]$$

dove

$$q \cdot p = \frac{M^2}{2} - \omega_{p'} M \quad q \cdot p' = \frac{M^2}{2} - \omega_p M \quad p' \cdot p = \frac{M^2}{2} - m^2 - \omega M$$

Inoltre gli estremi della integrazione in ω_p determinati dalle equazioni

$$M - \omega = \omega_p + \sqrt{\omega^2 + \omega_p^2 + 2\omega |\vec{p}| \cos \theta}$$

diventano

$$\omega_p^{max,min} = \frac{M - \omega}{2} \pm \frac{\omega}{2} \beta$$

$$\beta^2 \equiv 1 - \frac{4m^2}{M(M - 2\omega)}$$

La distribuzione dei fotoni diventa

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{d\omega} &= \frac{g^2 e^2}{64 \pi^3 M} \int_{\omega_p^{min}}^{\omega_p^{max}} \left[\left(1 - \frac{2\omega}{M} - \frac{2m^2}{M^2}\right) \left(1 - \frac{2\omega_{p'}}{M}\right) \left(1 - \frac{2\omega_p}{M}\right) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{m^2}{2M^2} \left[\left(1 - \frac{2\omega_{p'}}{M}\right)^2 + \left(1 - \frac{2\omega_p}{M}\right)^2 \right] \right] d\omega_p = \\ &= \frac{g^2 e^2}{96 \pi^3} \left(1 - \frac{2\omega}{M}\right) \frac{\beta^3 \omega^3}{M^3} \end{aligned}$$

Corso di Teoria dei Campi

Prof. Camillo Imbimbo

Esame scritto del 3/7/2015

Problema 1

Si consideri il seguente processo in cui un fotone γ di impulso k incidente su una particella scalare Φ carica di massa M crea una particella σ neutra e di massa nulla

$$\gamma_k + \Phi_p \rightarrow \sigma_{k'} + \Phi_{p'} \quad (495)$$

La particella carica Φ interagisce con il campo elettromagnetico attraverso la corrente conservata

$$\mathcal{L}_\Phi = i e A_\mu (\partial^\mu \Phi^\dagger \Phi - \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi) \quad (496)$$

mentre la particella scalare σ interagisce col campo elettromagnetico attraverso la densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{g}{M} \sigma \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \quad (497)$$

dove $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ è il tensore elettromagnetico.

Domanda 1

Si calcoli all'ordine più basso non nullo la sezione d'urto differenziale di diffusione del processo mediata sugli stati di polarizzazione del fotone incidente nel sistema di *laboratorio* in cui la particella Φ è inizialmente ferma.

Domanda 2

Si supponga il fotone incidente polarizzato linearmente. Si calcoli l'ampiezza di diffusione per il processo in cui le particelle diffuse nello stato finale giacciono nel piano definito dall'asse di propagazione e quello di polarizzazione.

Soluzione dell' esame scritto del 3/7/2015

Problema 1

Domanda 1

Siano

$$q = p' - p \quad P = p + p' \quad (498)$$

L'ampiezza invariante è

$$\mathcal{M} = \frac{8 g e}{q^2 M} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\mu \epsilon_\nu(k) q_\rho P_\sigma \quad (499)$$

Il modulo quadro mediato sugli stati di polarizzazione del fotone è

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{pol} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{32 g^2 e^2}{q^4 M^2} \sum_{pol} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\mu \epsilon_\nu(k) q_\rho P_\sigma \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} k_\alpha \epsilon_\beta^*(k) q_\gamma P_\delta = \\ &= -\frac{32 g^2 e^2}{q^4 M^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\mu q_\rho P_\sigma \epsilon_{\alpha\nu\gamma\delta} k^\alpha q^\gamma P^\delta = \\ &= -\frac{32 g^2 e^2}{q^4 M^2} [(k \cdot q)^2 P^2 + (k \cdot P)^2 q^2] \end{aligned} \quad (500)$$

La sezione d'urto invariante è

$$\begin{aligned} d\sigma &= \delta(\omega_p + \omega - \omega_{p'} - \omega_{k'}) \delta^{(3)}(\vec{p}' + \vec{k}' - \vec{p} - \vec{k}) \frac{|\mathcal{M}|^2}{4 p \cdot k} \frac{d^3 \vec{p}' d^3 \vec{k}'}{4 \omega_{p'} \omega_{k'} (2\pi)^2} = \\ &= \delta(\omega_p + \omega - \omega_{p'} - \omega_{k'}) \frac{|\mathcal{M}|^2}{p \cdot k} \frac{d^3 \vec{k}'}{\omega_{p'} \omega_{k'} 64 \pi^2} = \\ &= \delta(\omega_p + \omega - \omega_{p'} - \omega_{k'}) \frac{|\mathcal{M}|^2}{p \cdot k} \frac{d\Omega' |\vec{k}'| d\omega_{k'}}{\omega_{p'} 64 \pi^2} = \\ &= \delta(\omega_p + \omega - \omega_{p'} - \omega_{k'}) \frac{|\mathcal{M}|^2 |\vec{k}'|}{(p \cdot k) \omega_{p'}} \frac{d(-\cos \theta) d\omega_{k'}}{32 \pi} \end{aligned} \quad (501)$$

dove

$$\omega_{p'} = \sqrt{M^2 + (\vec{p} + \vec{k} - \vec{k}')^2} \quad (502)$$

Nel sistema del laboratorio (scegliamo come piano della diffusione il piano (x, z))

$$\begin{aligned}
p &= (M, 0, 0, 0) & k &= (\omega, 0, 0, \omega) \\
k' &= (\omega_{k'}, |\vec{k}'| \sin \theta, 0, |\vec{k}'| \cos \theta) \\
p' &= (\omega_{p'}, -|\vec{k}'| \sin \theta, 0, \omega - |\vec{k}'| \cos \theta) \\
k \cdot p &= M \omega & p \cdot p' &= M \omega_{p'} \\
k \cdot p' &= \omega (\omega_{p'} - \omega + |\vec{k}'| \cos \theta)
\end{aligned} \tag{503}$$

Quindi

$$\omega_{p'} = \sqrt{M^2 + \omega^2 + \omega_{k'}^2 - 2 \omega \omega_{k'} \cos \theta} \tag{504}$$

Pertanto

$$1 + \frac{\partial \omega_{p'}}{\partial \omega_{k'}} = 1 + \frac{\omega_{k'}}{\omega_{p'}} (1 - \cos \theta \frac{\omega}{\omega_{k'}}) = \frac{M + \omega(1 - \cos \theta)}{\omega_{p'}} \tag{505}$$

Da cui

$$d\sigma = \frac{\omega_{k'}}{M + \omega(1 - \cos \theta)} \frac{|\mathcal{M}|^2}{M \omega} \frac{d(-\cos \theta)}{32 \pi} \tag{506}$$

L'energia $\omega_{k'}$ dello scalare σ è determinata dall'equazione

$$\omega + M = \omega_{k'} + \sqrt{M^2 + (\vec{k} - \vec{k}')^2} \tag{507}$$

ovvero

$$\omega_{k'} = \frac{M \omega}{M + \omega(1 - \cos \theta)} \tag{508}$$

$$\omega_{p'} = M + \omega - \omega_{k'} \tag{509}$$

and

$$\begin{aligned}
q^2 &= 2 M^2 - 2 p \cdot p' = 2 M (M - \omega_{p'}) = 2 M (\omega_{k'} - \omega) = \\
&= -\frac{2 M \omega^2 (1 - \cos \theta)}{M + \omega(1 - \cos \theta)}
\end{aligned} \tag{510}$$

Pertanto la sezione d'urto diventa

$$d\sigma = \frac{\frac{1}{2} \sum_{pol} |\mathcal{M}|^2}{[M + \omega(1 - \cos\theta)]^2} \frac{d(-\cos\theta)}{32\pi} \quad (511)$$

La media sulle polarizzazioni del modulo quadro dell'ampiezza diventa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{pol} |\mathcal{M}|^2 &= -\frac{32g^2e^2}{q^4M^2} [(k \cdot q)^2 P^2 + (k \cdot P)^2 q^2] = \\ &= \frac{128g^2e^2}{q^4M^2} [2(k \cdot p')(k \cdot p)(p \cdot p') - M^2((k \cdot p)^2 + (k \cdot p')^2)] = \\ &= \frac{128g^2e^2\omega^2}{q^4} [2(M - \omega_{k'}(1 - \cos\theta))(M + \omega - \omega_{k'}) + \\ &\quad - (M^2 + (M - \omega_{k'}(1 - \cos\theta))^2)] \\ &= \frac{128g^2e^2\omega^2}{q^4} \left[2 \frac{M^2}{(M + \omega(1 - \cos\theta))^2} (M^2 + \omega(M + \omega)(1 - \cos\theta)) + \right. \\ &\quad \left. - M^2 - \frac{M^4}{(M + \omega(1 - \cos\theta))^2} \right] = \\ &= \frac{128g^2e^2\omega^4M^2}{q^4} \frac{2(1 - \cos\theta) - (1 - \cos\theta)^2}{(M + \omega(1 - \cos\theta))^2} = \\ &= \frac{128g^2e^2\omega^4M^2}{q^4} \frac{\sin^2\theta}{(M + \omega(1 - \cos\theta))^2} \end{aligned} \quad (512)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d(-\cos\theta)} &= \frac{4g^2e^2\omega^4M^2}{\pi q^4} \frac{\sin^2\theta}{[M + \omega(1 - \cos\theta)]^4} = \\ &= \frac{g^2e^2}{\pi} \frac{\sin^2\theta}{[M + \omega(1 - \cos\theta)]^2(1 - \cos\theta)^2} = \\ &= \frac{g^2e^2}{\pi} \frac{\cot^2\frac{\theta}{2}}{[M + \omega(1 - \cos\theta)]^2} \end{aligned} \quad (513)$$

Domanda 2

L'ampiezza nel sistema di laboratorio è

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{16ge}{q^2M} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\mu \epsilon_\nu(k) p'_\rho p_\sigma = \\ &= \frac{16ge}{q^2M} \epsilon^{ijk} k_i \epsilon_j p'_k M = \frac{16ge}{q^2} \vec{p}' \cdot (\vec{\epsilon} \times \vec{k}') \end{aligned} \quad (514)$$

Vediamo quindi che l'ampiezza di diffusione si annulla quando le particelle dello stato finale sono nel piano di polarizzazione, l'ampiezza di diffusione è nulla.

Questo ci fornisce un modo alternativo e molto più veloce per effettuare il calcolo richiesto alla domanda precedente. Possiamo prendere come insieme delle polarizzazioni su cui mediare quella lungo x, che dà ampiezza nulla, e quella lungo y che dà

$$\mathcal{M}_y = \frac{16 g e}{q^2} \vec{p}' \cdot (\vec{\epsilon}_y \times \vec{k}') = \frac{16 g e}{q^2} |\vec{k}'| \sin \theta \omega \quad (515)$$

Pertanto

$$\frac{1}{2} \sum_{pol} |\mathcal{M}|^2 = \frac{128 g^2 e^2 \omega^2 \sin^2 \theta}{q^4} \frac{M^2 \omega^2}{[M + \omega - \omega \cos \theta]^2} \quad (516)$$

Corso di Teoria dei Campi
Prof. Camillo Imbimbo

Esame scritto del 15/9/2015

Problema 1

Una particella scalare neutra descritta dal campo ϕ di massa M decade in una particella vettoriale massiva carica V di massa m e nella sua antiparticella \bar{V} attraverso l'interazione descritta dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_I = \frac{g_1}{M} \phi F_{\mu\nu}^\dagger(V) F_{\mu\nu}(V) + \frac{g_2}{M} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \phi F_{\mu\nu}^\dagger(V) F_{\rho\sigma}(V) \quad (517)$$

dove

$$F_{\mu\nu}(V) = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu \quad (518)$$

e V_μ è il campo che descrive la particella vettoriale.

Domanda 1

Si calcoli la probabilità di decadimento della particella scalare per unità di tempo al primo ordine in teoria delle perturbazioni.

Domanda 2

Si calcoli, al primo ordine in teoria delle perturbazioni, le probabilità per unità di tempo di decadimento della particella scalare nei vari stati di elicità della coppia vettoriale. (Per semplificare si ponga, per questa domanda, $g_2 = 0$).

Soluzione dell' esame scritto del 15/9/2015

Problema 1

Siano (p, σ) , $(\bar{p}, \bar{\sigma})$ i momenti e le polarizzazioni delle particelle V e \bar{V} .
L'ampiezza invariante di decadimento al primo ordine si scrive

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \frac{2g_1}{M} p_\mu u_\nu^*(p, \sigma) \bar{p}_{[\mu} v_{\nu]}(\bar{p}, \bar{\sigma}) + \\
&\quad + \frac{4g_2}{M} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\mu u_\nu^*(p, \sigma) \bar{p}_\rho v_\sigma(\bar{p}, \bar{\sigma}) \\
&= \frac{2}{M} [g_1 (p \cdot \bar{p} g^{\mu\nu} - p^\mu \bar{p}^\nu) + 2g_2 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\sigma \bar{p}_\rho] u_\nu^* v_\mu \equiv \\
&\equiv \mathcal{M}^{\mu\nu} u_\nu^* v_\mu
\end{aligned} \tag{519}$$

Domanda 1

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma, \bar{\sigma}} |\mathcal{M}|^2 &= \sum_{\sigma, \bar{\sigma}} \mathcal{M}^{\mu\nu} \bar{\mathcal{M}}^{\alpha\beta} u_\nu^* v_\mu u_\beta v_\alpha^* = \\
&= \mathcal{M}^{\mu\nu} \bar{\mathcal{M}}^{\alpha\beta} (g_{\nu\beta} - \frac{p_\nu p_\beta}{m^2}) (g_{\alpha\mu} - \frac{\bar{p}_\alpha \bar{p}_\mu}{m^2}) = \\
&= \frac{4}{M^2} [g_1 (p \cdot \bar{p} g^{\mu\nu} - p^\mu \bar{p}^\nu) + 2g_2 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\sigma \bar{p}_\rho] \times \\
&\quad \times [g_1 (p \cdot \bar{p} g^{\alpha\beta} - p^\alpha \bar{p}^\beta) + 2g_2 \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} p_\delta \bar{p}_\gamma] (g_{\nu\beta} - \frac{p_\nu p_\beta}{m^2}) (g_{\alpha\mu} - \frac{\bar{p}_\alpha \bar{p}_\mu}{m^2}) = \\
&\equiv \frac{4}{M^2} (g_1^2 A + g_1 g_2 C + g_2^2 B)
\end{aligned} \tag{520}$$

dove

$$\begin{aligned}
A &= (p \cdot \bar{p} g^{\mu\nu} - p^\mu \bar{p}^\nu) (g_{\nu\beta} - \frac{p_\nu p_\beta}{m^2}) (p \cdot \bar{p} g^{\alpha\beta} - p^\alpha \bar{p}^\beta) (g_{\alpha\mu} - \frac{\bar{p}_\alpha \bar{p}_\mu}{m^2}) = \\
&= (p \cdot \bar{p} g^{\mu\beta} - p^\mu \bar{p}^\beta - p \cdot \bar{p} \frac{p^\mu p^\beta}{m^2} + \frac{p \cdot \bar{p}}{m^2} p^\mu p^\beta) \times \\
&\quad \times (p \cdot \bar{p} g_{\mu\beta} - p_\mu \bar{p}_\beta) = 2(p \cdot \bar{p})^2 + m^4
\end{aligned} \tag{521}$$

e

$$\begin{aligned}
B &= 4 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\sigma \bar{p}_\rho \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} p_\delta \bar{p}_\gamma (g_{\nu\beta} - \frac{p_\nu p_\beta}{m^2}) (g_{\alpha\mu} - \frac{\bar{p}_\alpha \bar{p}_\mu}{m^2}) = \\
&= 4 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\sigma \bar{p}_\rho \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} p_\delta \bar{p}_\gamma g_{\nu\beta} g_{\alpha\mu} = \\
&= -8 (g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} - g^{\rho\delta} g^{\sigma\gamma}) p_\sigma \bar{p}_\rho p_\delta \bar{p}_\gamma = \\
&= 8(p \cdot \bar{p})^2 - 8m^4
\end{aligned} \tag{522}$$

e

$$\begin{aligned}
C &= (p \cdot \bar{p} g^{\mu\nu} - p^\mu \bar{p}^\nu) (g_{\nu\beta} - \frac{p_\nu p_\beta}{m^2}) 2 \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} p_\delta \bar{p}_\gamma (g_{\alpha\mu} - \frac{\bar{p}_\alpha \bar{p}_\mu}{m^2}) + \\
&\quad + 2 g_2 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\sigma \bar{p}_\rho (g_{\nu\beta} - \frac{p_\nu p_\beta}{m^2}) (p \cdot \bar{p} g^{\alpha\beta} - p^\alpha \bar{p}^\beta) (g_{\alpha\mu} - \frac{\bar{p}_\alpha \bar{p}_\mu}{m^2}) = \\
&= 0
\end{aligned} \tag{523}$$

Dunque

$$\sum_{\sigma, \bar{\sigma}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{4}{M^2} [g_1^2 (2(p \cdot \bar{p})^2 + m^4) + 8 g_2^2 ((p \cdot \bar{p})^2 - m^4)] \tag{524}$$

e

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{1}{16 \pi^2 M^4} [g_1^2 (2(p \cdot \bar{p})^2 + m^4) + 8 g_2^2 ((p \cdot \bar{p})^2 - m^4)] \sqrt{M^2 - 4m^2} \tag{525}$$

Poiché

$$M^2 = 2m^2 + 2p \cdot \bar{p} \tag{526}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{\sqrt{M^2 - 4m^2}}{4 \pi M^4} \left[\frac{g_1^2}{2} [(M^2 - 2m^2)^2 + 2m^4] + 2 g_2^2 [(M^2 - 2m^2)^2 - 4m^2] \right] = \\
&= \frac{\sqrt{M^2 - 4m^2}}{4 \pi M^4} \left[\frac{g_1^2}{2} [(M^2 - 2m^2)^2 + 2m^4] + 2 g_2^2 (M^2 - 4m^2) M^2 \right] \tag{527}
\end{aligned}$$

Domanda 2

L'ampiezza invariante è

$$\mathcal{M} = \frac{2}{M} [g_1 (p \cdot \bar{p} u^* \cdot v - p \cdot v \bar{p} \cdot u^*) + 2 g_2 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\sigma \bar{p}_\rho u_\nu^* v_\mu] \tag{528}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
p^\mu &= (\omega, 0, 0, |p|) & \bar{p}^\mu &= (\omega, 0, 0, -|p|) & 2\omega &= M \\
u^\mu(p, \pm) &= (0, \vec{\epsilon}_\pm, 0) & u^\mu(\bar{p}, \pm) &= (0, \vec{\epsilon}_\mp, 0) & v^\mu(\bar{p}, \pm) &= (u^\mu(\bar{p}))^* = (0, \vec{\epsilon}_\pm, 0) \\
u^\mu(p, 0) &= \left(\frac{|p|}{m}, 0, 0, \frac{\omega}{m}\right) & v^\mu(\bar{p}, 0) &= (u^\mu(\bar{p}, 0))^* = \left(\frac{|p|}{m}, 0, 0, -\frac{\omega}{m}\right)
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
u^*(p, \pm) \cdot v(\bar{p}, \pm) &= -\vec{\epsilon}_{\mp} \cdot \vec{\epsilon}_{\pm} = -1 & u^*(p, \pm) \cdot v(\bar{p}, \mp) &= 0 \\
u^*(p, 0) \cdot v(\bar{p}, 0) &= \frac{|p|^2 + \omega^2}{m^2} = \frac{M^2}{2m^2} - 1 \\
p \cdot v(\bar{p}, \pm) &= 0 & \bar{p} \cdot u^*(p, \pm) &= 0 \\
p \cdot v(\bar{p}, 0) &= \frac{M|p|}{m} = \bar{p} \cdot u^*(p, 0)
\end{aligned} \tag{529}$$

L'ampiezze invarianti non nulle per i decadimenti con elicit  definita sono

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\pm\pm} &= \frac{2}{M} [-g_1 p \cdot \bar{p} \pm 4 g_2 \omega |p|] = \\
&= \frac{2}{M} [-g_1 (\frac{M^2}{2} - m^2) \pm 4 g_2 \frac{M}{2} \sqrt{\frac{M^2}{4} - m^2}] \\
\mathcal{M}_{00} &= \frac{2}{M} [g_1 (p \cdot \bar{p} \frac{|p|^2 + \omega^2}{m^2} - \frac{M^2 |p|^2}{m^2})] = \frac{2m^2}{M} g_1
\end{aligned} \tag{530}$$

Le probabilit  di decadimento negli stati di elicit  definita sono

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\pm\pm} &= \frac{1}{2\pi M^4} [-g_1 (\frac{M^2}{2} - m^2) \pm 4 g_2 \frac{M}{2} \sqrt{\frac{M^2}{4} - m^2}]^2 \sqrt{\frac{M^2}{4} - m^2} \\
\Gamma_{00} &= \frac{g_1^2 m^4}{2\pi M^4} \sqrt{\frac{M^2}{4} - m^2}
\end{aligned} \tag{531}$$

Corso di Teoria dei Campi
Prof. Camillo Imbimbo

Esame scritto del 18/02/2016

Problema 1

Una particella scalare neutra descritta dal campo Φ di massa M decade in una particella vettoriale massiva V di massa m_V e in una particella scalare π di massa m attraverso l'interazione descritta dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_I = \frac{g_1}{M^2} \partial^\mu \Phi \partial^\nu \pi F_{\mu\nu}(V) + g_2 \Phi \partial^\mu \pi V_\mu \quad (532)$$

dove

$$F_{\mu\nu}(V) = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu \quad (533)$$

e V_μ è il campo che descrive la particella vettoriale.

Domanda 1

Si calcoli la probabilità di decadimento della particella scalare per unità di tempo al primo ordine in teoria delle perturbazioni.

Domanda 2

Si calcoli, al primo ordine in teoria delle perturbazioni, le probabilità per unità di tempo di decadimento della particella scalare nei vari stati di elicità della particella vettoriale.

Soluzione dell' esame scritto del 18/2/2016

Problema 1

Siano P il momento della particella scalare Φ che decade, p quello della π e q il momento della particella vettoriale, $\epsilon^\mu(q, \sigma)$ il suo vettore di polarizzazione:

$$\begin{aligned} P &= p + q \\ M^2 &= m^2 + m_V^2 + 2p \cdot q \Rightarrow p \cdot q = \frac{M^2 - m^2 - m_V^2}{2} \end{aligned} \quad (534)$$

L'ampiezza invariante è

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\sigma &= \frac{g_1}{M^2} P^\mu p^\nu (q_\mu \epsilon_\nu(q) - q_\nu \epsilon_\mu(q)) + g_2 p^\nu \epsilon_\nu(q) = \\ &= \frac{g_1}{M^2} q^\mu p^\nu (q_\mu \epsilon_\nu(q) - q_\nu \epsilon_\mu(q)) + g_2 p^\nu \epsilon_\nu(q) = \\ &= \frac{g_1}{M^2} p^\nu m_V^2 \epsilon_\nu(q) + g_2 p^\nu \epsilon_\nu(q) = \\ &= \left(\frac{g_1 m_V^2}{M^2} + g_2 \right) p^\nu \epsilon_\nu(q, \sigma) \end{aligned} \quad (535)$$

Domanda 1

Il modulo quadro dell'ampiezza sommato sugli stati finali della polarizzazione della particella vettoriale è

$$\begin{aligned} \sum_\sigma |\mathcal{M}_\sigma|^2 &= \left| \frac{g_1 m_V^2}{M^2} + g_2 \right|^2 p^\nu p^\mu \sum_\sigma \epsilon_\nu^*(q, \sigma) \epsilon_\mu(q, \sigma) = \\ &= \left| \frac{g_1 m_V^2}{M^2} + g_2 \right|^2 p^\nu p^\mu \left(\frac{q_\nu q_\mu}{m_V^2} - g_{\nu\mu} \right) = \\ &= \left| \frac{g_1 m_V^2}{M^2} + g_2 \right|^2 \left(\frac{(q \cdot p)^2}{m_V^2} - m^2 \right) = \\ &= \left| \frac{g_1 m_V^2}{M^2} + g_2 \right|^2 \frac{(M^2 - m^2 - m_V^2)^2 - 4 m_V^2 m^2}{4 m_V^2} = \\ &= \left| \frac{g_1 m_V^2}{M^2} + g_2 \right|^2 \frac{(M^2 - (m + m_V)^2)(M^2 - (m - m_V)^2)}{4 m_V^2} \end{aligned} \quad (536)$$

Nel sistema di quiete di Φ

$$\begin{aligned} q &= (\omega, \vec{p}) & p &= (\omega', -\vec{p}) \\ \omega + \omega' &= M = \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2} + \sqrt{m_V^2 + |\vec{p}|^2} \\ |\vec{p}|^2 &= \frac{(M^2 - (m + m_V)^2)(M^2 - (m - m_V)^2)}{4M^2} \end{aligned}$$

La probabilità di decadimento

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{8\pi M^2} \sqrt{\frac{(M^2 - (m + m_V)^2)(M^2 - (m - m_V)^2)}{4M^2}} \times \\ &\times \left| \frac{g_1 m_V^2}{M^2} + g_2 \right|^2 \frac{(M^2 - (m + m_V)^2)(M^2 - (m - m_V)^2)}{4m_V^2} = \\ &= \frac{1}{64\pi M^3 m_V^2} \left| \frac{g_1 m_V^2}{M^2} + g_2 \right|^2 [(M^2 - (m + m_V)^2)(M^2 - (m - m_V)^2)]^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Domanda 2

I vettori di polarizzazione di elicità definita della particella vettoriale nel sistema di quiete di Φ , avendo posto $\vec{p} = |\vec{p}| \hat{z}$, sono

$$\begin{aligned} \epsilon_\sigma^0(q) &= \frac{\vec{\epsilon}_\sigma(q) \cdot \vec{p}}{\omega} \\ \epsilon_0(q) &= \left(\frac{|\vec{p}|}{m_V}, 0, 0, \frac{\omega}{m_V} \right) \\ \epsilon_\pm(q) &= (0, \vec{\epsilon}_\pm) \end{aligned} \quad (537)$$

Quindi

$$\begin{aligned} p^\mu \epsilon_\mu(q, \sigma) &= \omega' \frac{\vec{\epsilon}_\sigma(q) \cdot \vec{p}}{\omega} + \vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_\sigma(q) = \vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_\sigma(q) \frac{\omega' + \omega}{\omega} = \\ &= \vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_\sigma(q) \frac{M}{\omega} = \epsilon_\sigma^0(q) M = \begin{cases} 0 & \text{per } \sigma = \pm \\ \frac{|\vec{p}|M}{m_V} & \text{per } \sigma = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (538)$$

L'unica ampiezza di elicità diversa da zero è quella con $\sigma = 0$

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_0|^2 &= \left| \frac{g_1 m_V^2}{M^2} + g_2 \right|^2 \frac{|\vec{p}|^2 M^2}{m_V^2} = \\ &= \left| \frac{g_1 m_V^2}{M^2} + g_2 \right|^2 \frac{(M^2 - (m + m_V)^2)(M^2 - (m - m_V)^2)}{4m_V^2} \end{aligned} \quad (539)$$

in accordo col risultato ottenuto nella domanda 1.

Corso di Teoria dei Campi
Prof. Camillo Imbimbo

Esame scritto del 01/08/2016

Problema 1

Una particella scalare neutra descritta dal campo ϕ di massa M decade in una particella vettoriale massiva V di massa m e nella sua anti-particella attraverso l'interazione descritta dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_I = g_1 M \phi V^\mu V_\mu^\dagger + \frac{g_2}{M} \partial_\mu \partial_\nu \phi V^\mu (V^\nu)^\dagger + \frac{g_3}{M} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \phi \partial_\rho V_\nu \partial_\sigma V_\mu^\dagger \quad (540)$$

dove V_μ è il campo che descrive la particella vettoriale.

Domanda 1

Si calcoli la probabilità di decadimento della particella scalare per unità di tempo al primo ordine in teoria delle perturbazioni.

Domanda 2

Si calcoli, al primo ordine in teoria delle perturbazioni, le probabilità per unità di tempo di decadimento della particella scalare nei vari stati di elicità della particella vettoriale.

Domanda 3

Qual'è la probabilità per unità di tempo di decadimento della particella scalare in uno stato finale in cui le due particelle vettoriali abbiano polarizzazione lineari trasverse fra loro ortogonali.

Soluzione dell' esame scritto del 1/8/2016

Problema 1

Siano (p, σ) , $(\bar{p}, \bar{\sigma})$ i momenti e le polarizzazioni delle particelle V e \bar{V} .
L'ampiezza invariante di decadimento al primo ordine si scrive

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &\equiv \mathcal{M}^{\mu\nu} u_\nu^*(p, \sigma) v_\mu(\bar{p}, \bar{\sigma}) = \\
&= \left(M g_1 g^{\mu\nu} - \frac{g_2}{M} (p_\mu + \bar{p}_\mu) (p_\nu + \bar{p}_\nu) + \right. \\
&\quad \left. - \frac{g_3}{M} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho \bar{p}_\sigma \right) u_\nu^*(p, \sigma) v_\mu(\bar{p}, \bar{\sigma}) \\
&= \left(M g_1 g^{\mu\nu} - \frac{g_2}{M} p_\mu \bar{p}_\nu - \frac{g_3}{M} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho \bar{p}_\sigma \right) u_\nu^*(p, \sigma) v_\mu(\bar{p}, \bar{\sigma})
\end{aligned} \tag{541}$$

con

$$\mathcal{M}^{\mu\nu} = M g_1 g^{\mu\nu} - \frac{g_2}{M} p_\mu \bar{p}_\nu - \frac{g_3}{M} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho \bar{p}_\sigma \tag{542}$$

Domanda 1

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma, \bar{\sigma}} |\mathcal{M}|^2 &= \sum_{\sigma, \bar{\sigma}} \mathcal{M}^{\mu\nu} \bar{\mathcal{M}}^{\alpha\beta} u_\nu^* v_\mu u_\beta v_\alpha^* = \\
&= \mathcal{M}^{\mu\nu} \bar{\mathcal{M}}^{\alpha\beta} \left(g_{\nu\beta} - \frac{p_\nu \bar{p}_\beta}{m^2} \right) \left(g_{\alpha\mu} - \frac{\bar{p}_\alpha \bar{p}_\mu}{m^2} \right) = \\
&\equiv g_1^2 A + g_2^2 B + g_3^2 C + g_1 g_2 D + g_1 g_3 E + g_2 g_3 F
\end{aligned} \tag{543}$$

dove

$$\begin{aligned}
A &= M^2 \left(2 + \frac{(p \cdot \bar{p})^2}{m^4} \right) \\
B &= \frac{1}{M^2} \left(m^2 - \frac{(p \cdot \bar{p})^2}{m^2} \right)^2 \\
C &= \frac{1}{M^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} p_\sigma \bar{p}_\sigma p_\gamma \bar{p}_\delta g_{\nu\beta} g_{\alpha\mu} = \frac{2}{M^2} \left((p \cdot \bar{p})^2 - m^4 \right) \\
D &= - \left(g^{\mu\nu} p^\alpha \bar{p}^\beta + g^{\alpha\beta} p^\mu \bar{p}^\nu \right) \left(g_{\nu\beta} - \frac{p_\nu \bar{p}_\beta}{m^2} \right) \left(g_{\alpha\mu} - \frac{\bar{p}_\alpha \bar{p}_\mu}{m^2} \right) = \\
&= -2 g^{\mu\nu} \left(\bar{p}_\nu - \frac{p_\nu p \cdot \bar{p}}{m^2} \right) \left(p_\mu - \frac{\bar{p}_\mu \bar{p} \cdot p}{m^2} \right) = \\
&= -2 \frac{p \cdot \bar{p}}{m^4} \left((p \cdot \bar{p})^2 - m^4 \right) \\
E &= F = 0
\end{aligned} \tag{544}$$

Le ultime identità si possono anticipare osservando che non si possono formare degli pseudo-scalari con i due soli quadri-momenti p e \bar{p} . Dunque

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma, \bar{\sigma}} |\mathcal{M}|^2 = & M^2 \left(2 + \frac{(p \cdot \bar{p})^2}{m^4} \right) g_1^2 + g_2^2 \frac{m^4}{M^2} \left(1 - \frac{(p \cdot \bar{p})^2}{m^4} \right)^2 + \\ & - 2 g_3^2 \frac{m^4}{M^2} \left(1 - \frac{(p \cdot \bar{p})^2}{m^4} \right) - g_1 g_2 2 p \cdot \bar{p} \left(\frac{(p \cdot \bar{p})^2}{m^4} - 1 \right) \end{aligned} \quad (545)$$

Poiché

$$\begin{aligned} M^2 = & 2 m^2 + 2 p \cdot \bar{p} \\ \frac{(p \cdot \bar{p})^2}{m^4} - 1 = & \frac{M^2 (M^2 - 4 m^2)}{4 m^4} = \frac{M^2}{m^2} \left(\frac{M^2}{4 m^2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (546)$$

allora

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma, \bar{\sigma}} |\mathcal{M}|^2 = & \left(3 + \frac{M^2}{m^2} \left(\frac{M^2}{4 m^2} - 1 \right) \right) M^2 g_1^2 + g_2^2 M^2 \left(\frac{M^2}{4 m^2} - 1 \right)^2 + \\ & - 2 g_1 g_2 M^2 \left(\frac{M^2}{2 m^2} - 1 \right) \left(\frac{M^2}{4 m^2} - 1 \right) + \\ & + 2 g_3^2 m^2 \left(\frac{M^2}{4 m^2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (547)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{d\Omega} = & \frac{\sqrt{M^2 - 4 m^2}}{64 \pi^2 M^2} \left[\left(3 + \frac{M^2}{m^2} \left(\frac{M^2}{4 m^2} - 1 \right) \right) M^2 g_1^2 + g_2^2 M^2 \left(\frac{M^2}{4 m^2} - 1 \right)^2 + \right. \\ & - 2 g_1 g_2 M^2 \left(\frac{M^2}{2 m^2} - 1 \right) \left(\frac{M^2}{4 m^2} - 1 \right) + \\ & \left. + 2 g_3^2 m^2 \left(\frac{M^2}{4 m^2} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (548)$$

La probabilità di decadimento integrata su tutti gli angoli è pertanto

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{\sqrt{M^2 - 4 m^2}}{16 \pi M^2} \left[\left(3 + \frac{M^2}{m^2} \left(\frac{M^2}{4 m^2} - 1 \right) \right) M^2 g_1^2 + g_2^2 M^2 \left(\frac{M^2}{4 m^2} - 1 \right)^2 + \right. \\ & - 2 g_1 g_2 M^2 \left(\frac{M^2}{2 m^2} - 1 \right) \left(\frac{M^2}{4 m^2} - 1 \right) + \\ & \left. + 2 g_3^2 m^2 \left(\frac{M^2}{4 m^2} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (549)$$

Domanda 2

L'ampiezza invariante è

$$\mathcal{M} = \left(M g_1 u^* \cdot v - \frac{g_2}{M} p \cdot v \bar{p} \cdot u^* - \frac{g_3}{M} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho \bar{p}_\sigma u_\nu^* v_\mu \right)$$

Inoltre

$$\begin{aligned} p^\mu &= (\omega, 0, 0, |p|) & \bar{p}^\mu &= (\omega, 0, 0, -|p|) & 2\omega &= M \\ u^\mu(p, \pm) &= (0, \vec{\epsilon}_\pm, 0) & (u^*)^\mu(\bar{p}, \pm) &= (0, \vec{\epsilon}_\mp, 0) \\ v^\mu(\bar{p}, \pm) &= (u^\mu(\bar{p}))^* = (0, \vec{\epsilon}_\pm, 0) \\ u^\mu(p, 0) &= \left(\frac{|p|}{m}, 0, 0, \frac{\omega}{m} \right) & v^\mu(\bar{p}, 0) &= (u^\mu(\bar{p}, 0))^* = \left(\frac{|p|}{m}, 0, 0, -\frac{\omega}{m} \right) \\ -\frac{g_3}{M} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho \bar{p}_\sigma u_\nu^* v_\mu &= -\frac{2g_3\omega|p|}{M} \epsilon^{ab} u_a^* v_b = \\ &= -g_3 |\vec{p}| \epsilon^{ab} u_a^* v_b \quad a, b = 1, 2 \end{aligned} \quad (550)$$

Quindi

$$\begin{aligned} u^*(p, \pm) \cdot v(\bar{p}, \pm) &= -\vec{\epsilon}_\mp \cdot \vec{\epsilon}_\pm = -1 & u^*(p, \pm) \cdot v(\bar{p}, \mp) &= 0 \\ u^*(p, 0) \cdot v(\bar{p}, 0) &= \frac{|p|^2 + \omega^2}{m^2} = \frac{M^2}{2m^2} - 1 \\ p \cdot v(\bar{p}, \pm) &= 0 & \bar{p} \cdot u^*(p, \pm) &= 0 \\ p \cdot v(\bar{p}, 0) &= \frac{2\omega|p|}{m} = \frac{M|p|}{m} = \bar{p} \cdot u^*(p, 0) \\ \epsilon^{ab} u_a^*(\pm) v_b(\pm) &= \pm i \end{aligned} \quad (551)$$

L'ampiezze invarianti non nulle per i decadimenti con elicità definita sono

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\pm\pm} &= -M g_1 \mp i g_3 |p| = \\ &= -g_1 M \mp i g_3 \sqrt{\frac{M^2}{4} - m^2} \\ \mathcal{M}_{00} &= g_1 M \left(\frac{M^2}{2m^2} - 1 \right) - \frac{g_2}{M} \frac{M^2 |p|^2}{m^2} = \\ &= g_1 M \left(\frac{M^2}{2m^2} - 1 \right) - g_2 M \left(\frac{M^2}{4m^2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (552)$$

I moduli quadri delle ampiezze invarianti sono

$$|\mathcal{M}_{\pm\pm}|^2 = g_1^2 M^2 + g_3^2 \left(\frac{M^2}{4} - m^2 \right) \quad (553)$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{00}|^2 &= g_1^2 M^2 \left(\frac{M^2}{2m^2} - 1 \right)^2 + g_2^2 M^2 \left(\frac{M^2}{4m^2} - 1 \right)^2 + \\ &\quad - 2 g_1 g_2 M^2 \left(\frac{M^2}{2m^2} - 1 \right) \left(\frac{M^2}{4m^2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (554)$$

Verifichiamo il risultato della sottosezione precedente:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma\sigma'} |\mathcal{M}_{\sigma\sigma'}|^2 &= 2 g_1^2 M^2 + g_1^2 M^2 \left(\frac{M^2}{2m^2} - 1 \right)^2 + g_2^2 M^2 \left(\frac{M^2}{4m^2} - 1 \right)^2 + \\ &\quad - 2 g_1 g_2 M^2 \left(\frac{M^2}{2m^2} - 1 \right) \left(\frac{M^2}{4m^2} - 1 \right) + \\ &\quad + 2 g_3^2 \left(\frac{M^2}{4} - m^2 \right) = \\ &= g_1^2 M^2 \left(3 + \frac{M^2}{m^2} \left(\frac{M^2}{4m^2} - 1 \right) \right) + g_2^2 M^2 \left(\frac{M^2}{4m^2} - 1 \right)^2 + \\ &\quad - 2 g_1 g_2 M^2 \left(\frac{M^2}{2m^2} - 1 \right) \left(\frac{M^2}{4m^2} - 1 \right) + 2 g_3^2 \left(\frac{M^2}{4} - m^2 \right) \end{aligned} \quad (555)$$

Le probabilità di decadimento negli stati di elicità definita sono

$$\begin{aligned} \Gamma_{\pm\pm} &= \frac{\sqrt{M^2 - 4m^2}}{16\pi M^2} \left(g_1^2 M^2 + g_3^2 \left(\frac{M^2}{4} - m^2 \right) \right) \\ \Gamma_{00} &= \frac{\sqrt{M^2 - 4m^2}}{16\pi M^2} \left(g_1^2 M^2 \left(\frac{M^2}{2m^2} - 1 \right)^2 + g_2^2 M^2 \left(\frac{M^2}{4m^2} - 1 \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. - 2 g_1 g_2 M^2 \left(\frac{M^2}{2m^2} - 1 \right) \left(\frac{M^2}{4m^2} - 1 \right) \right) \end{aligned} \quad (556)$$

Domanda 3

Nel caso di polarizzazione lineare trasversa

$$p \cdot v = \bar{p} \cdot u^* = 0 \quad (557)$$

in quanto $v = (0, v_a, 0)$ e $u = (0, u_a, 0)$, $a = 1, 2$. Se le polarizzazioni sono tra loro trasverse

$$u^* \cdot v = 0 \quad (558)$$

Dunque l'ampiezza è

$$\mathcal{M} = g_3 |\vec{p}| \epsilon^{ab} u_a^* v_b = g_3 |\vec{p}| \quad (559)$$

Quindi

$$\Gamma = \frac{(M^2 - 4m^2)^{\frac{3}{2}}}{64 \pi M^2} g_3^2 \quad (560)$$

Corso di Teoria dei Campi
Prof. Camillo Imbimbo

Esame scritto del 09/08/2017

Problema 1

Una particella scalare carica ϕ di massa m , un vettore carico W di massa m_W , due fermioni di Dirac ψ e χ di masse m_1 ed m_2 interagiscono attraverso la densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_I = G \partial_\mu \phi W^\mu + W_\mu^\dagger \bar{\psi} \gamma^\mu (g_1 + g_2 \gamma_5) \chi + \text{h. c.}$$

dove G , g_1 e g_2 sono tre parametri reali.

Domanda 1 (Punti 4)

Determinare le dimensioni dei parametri G , g_1 e g_2

Domanda 2 (Punti 20)

Si calcoli la probabilità di decadimento totale della particella scalare in una coppia di fermioni $(\psi, \bar{\chi})$ per unità di tempo all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni.

Domanda 3 (Punti 20)

Nella stessa approssimazione, si determinino le probabilità di decadimento per i vari stati di elicità dei fermioni nello stato finale.

Soluzione dell' esame scritto del 09/08/2017

Problema 1

Domanda 1

G ha dimensioni di una massa, e g_1 e g_2 sono parametri adimensionali.

Domanda 2

Sia p l' impulso della particella scalare che decade, p_1 e p_2 gli impulsi dei fermioni prodotti,

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 \\ p^2 &= m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2 p_1 \cdot p_2 \end{aligned} \quad (561)$$

L'ampiezza invariante all'ordine più basso è

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= G \bar{u}_1 \gamma^\mu (g_1 + g_2 \gamma_5) v_2 \frac{(\not{p}_\mu \not{p}_\nu - g_{\mu\nu})}{p^2 - m_W^2} (-i p^\nu) = \\ &= -i G \bar{u}_1 \not{p} (g_1 + g_2 \gamma_5) v_2 \frac{1}{m_W^2} = \\ &= -i \frac{G}{m_W^2} [(m_1 - m_2) g_1 \bar{u}_1 v_2 + (m_1 + m_2) g_2 \bar{u}_1 \gamma_5 v_2] = \\ &= -i \frac{G}{m_W^2} \bar{u}_1 [(m_1 - m_2) g_1 + (m_1 + m_2) g_2 \gamma_5] v_2 \end{aligned} \quad (562)$$

Il modulo quadro dell'ampiezza sommato sulle polarizzazioni degli stati finali

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{G^2}{m_W^4} \text{Tr} \left[((m_1 - m_2) g_1 + (m_1 + m_2) g_2 \gamma_5) (\not{p}_2 - m_2) \times \right. \\ &\quad \left. \times ((m_1 - m_2) g_1 - (m_1 + m_2) g_2 \gamma_5) (\not{p}_1 + m_1) \right] = \\ &= \frac{4 G^2}{m_W^4} [(m_1 - m_2)^2 g_1^2 (p_1 \cdot p_2 - m_1 m_2) + \\ &\quad + (m_1 + m_2)^2 g_2^2 (p_1 \cdot p_2 + m_1 m_2)] = \\ &= \frac{2 G^2}{m_W^4} [g_1^2 (m_1 - m_2)^2 (m^2 - (m_1 + m_2)^2) + \\ &\quad + g_2^2 (m_1 + m_2)^2 (m^2 - (m_1 - m_2)^2)] \end{aligned} \quad (563)$$

La probabilità per unità di tempo di decadimento

$$\Gamma = \frac{G^2 |\vec{p}'|}{2 \pi m_W^4 m^2} [g_1^2 (m_1 - m_2)^2 (m^2 - (m_1 + m_2)^2) + g_2^2 (m_1 + m_2)^2 (m^2 - (m_1 - m_2)^2)] \quad (564)$$

dove

$$\sqrt{|\vec{p}'|^2 + m_1^2} + \sqrt{|\vec{p}'|^2 + m_2^2} = m \quad (565)$$

ovvero

$$|\vec{p}'|^2 = \frac{m^4 + (m_1^2 - m_2^2)^2 - 2 m^2 (m_1^2 + m_2^2)}{4 m^2} \quad (566)$$

ovvero

$$|\vec{p}'| = \frac{\sqrt{(m - m_1 - m_2)(m + m_1 - m_2)(m - m_1 + m_2)(m + m_1 + m_2)}}{2m} \quad (567)$$

Domanda 3

Prendiamo

$$p_1 = (\omega_1, 0, 0, |\vec{p}'|) \quad p_1 = (\omega_1, 0, 0, -|\vec{p}'|) \quad (568)$$

Per la conservazione del momento angolare, le ampiezze di decadimento sono diverse da zero solo se le elicità dei due fermioni sono uguali. Denotiamo con $\frac{dP_{\pm}}{dt}$ le probabilità per unità di tempo di decadimento per elicità dei due fermioni pari a $\pm \frac{1}{2}$. Possiamo usare le formule dell'esercizio del 17/06/2014

$$\begin{aligned} u(p_1, \sigma_1) &= \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_1 + \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1} \\ \sqrt{\omega_1 - \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1} \end{pmatrix} \\ v(p_2, \sigma_2) &= \begin{pmatrix} -i \sqrt{\omega_2 - \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_2} \\ i \sqrt{\omega_2 + \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (569)$$

dove $\sigma_{1,2} = \pm 1$. Sostituendo queste espressioni nell'ampiezza di transizione

$$\mathcal{M} = \bar{u}_1 [\tilde{g}_1 + \tilde{g}_2 \gamma^5] v_2 \quad (570)$$

dove

$$\begin{aligned} i \tilde{g}_1 &= \frac{G}{m_W^2} (m_1 - m_2) g_1 \\ i \tilde{g}_2 &= \frac{G}{m_W^2} (m_1 + m_2) g_2 \end{aligned} \quad (571)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\sigma_1 \sigma_2} = & \left[-\sqrt{(\omega_1 - \sigma_1 |\vec{p}'|)(\omega_2 - \sigma_2 |\vec{p}'|)}(\tilde{g}_1 - \tilde{g}_2) + \right. \\ & \left. + \sqrt{(\omega_1 + \sigma_1 |\vec{p}'|)(\omega_2 + \sigma_2 |\vec{p}'|)}(\tilde{g}_1 + \tilde{g}_2) \right] i w_{\sigma_2}^\dagger w_{\sigma_1} \end{aligned} \quad (572)$$

Le ampiezze di decadimento sono nulle per elicità dei fermioni opposte, come richiesto dalla conservazione del momento angolare. Per $\sigma_1 = \sigma_2 = \pm$ otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\pm = i & \left[-\sqrt{(\omega_1 \mp |\vec{p}'|)(\omega_2 \mp |\vec{p}'|)}(\tilde{g}_1 - \tilde{g}_2) + \right. \\ & \left. + \sqrt{(\omega_1 \pm |\vec{p}'|)(\omega_2 \pm |\vec{p}'|)}(\tilde{g}_1 + \tilde{g}_2) \right] \end{aligned} \quad (573)$$

Quindi

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_\pm|^2 = & (\sqrt{(\omega_1 \pm |\vec{p}'|)(\omega_2 \pm |\vec{p}'|)} - \sqrt{(\omega_1 \mp |\vec{p}'|)(\omega_2 \mp |\vec{p}'|)})^2 \tilde{g}_1^2 + \\ & + (\sqrt{(\omega_1 \pm |\vec{p}'|)(\omega_2 \pm |\vec{p}'|)} + \sqrt{(\omega_1 \mp |\vec{p}'|)(\omega_2 \mp |\vec{p}'|)})^2 \tilde{g}_2^2 + \\ & + 2 ((\omega_1 \pm |\vec{p}'|)(\omega_2 \pm |\vec{p}'|) - (\omega_1 \mp |\vec{p}'|)(\omega_2 \mp |\vec{p}'|)) \tilde{g}_1 \tilde{g}_2 \Big] = \\ = & 2 (\omega_1 \omega_2 + |\vec{p}'|^2 - m_1 m_2) \tilde{g}_1^2 + \\ & + 2 (\omega_1 \omega_2 + |\vec{p}'|^2 + m_1 m_2) \tilde{g}_2^2 \pm 4 m |\vec{p}'| \tilde{g}_1 \tilde{g}_2 \end{aligned} \quad (574)$$

Le corrispondenti probabilità per unità di tempo di decadimento

$$\begin{aligned} \Gamma_\pm = & \frac{G^2 |\vec{p}'|}{2 \pi m_W^4 m^2} \left[2 (\omega_1 \omega_2 + |\vec{p}'|^2 - m_1 m_2) \tilde{g}_1^2 + \right. \\ & \left. + 2 (\omega_1 \omega_2 + |\vec{p}'|^2 + m_1 m_2) \tilde{g}_2^2 \pm 4 m |\vec{p}'| \tilde{g}_1 \tilde{g}_2 \right] \end{aligned} \quad (575)$$

Queste formule sono in accordo con quelle ottenute alla domanda precedente perché

$$\begin{aligned} \omega_1 \omega_2 + |\vec{p}'|^2 - m_1 m_2 = p_1 \cdot p_2 - m_1 m_2 = \frac{m^2 - (m_1 + m_2)^2}{2} \\ \omega_1 \omega_2 + |\vec{p}'|^2 + m_1 m_2 = p_1 \cdot p_2 + m_1 m_2 = \frac{m^2 - (m_1 - m_2)^2}{2} \end{aligned} \quad (576)$$

Corso di Teoria dei Campi
Prof. Camillo Imbimbo

Esame scritto del 25/09/2017

Problema 1

Una particella vettoriale V di massa M interagisce con un fermione di Dirac ψ di massa m attraverso la densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_I = g_1 V_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + i g_2 F_{\mu\nu} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi + i g_3 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} \bar{\psi} \gamma_\rho \gamma_\sigma \psi$$

dove $F_{\mu\nu}(V) \equiv \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ e g_1 e g_2 e g_3 sono tre parametri.

Domanda 1 (Punti 22/27)

Si calcoli la probabilità di decadimento totale della particella vettoriale nella coppia di fermioni $(\psi, \bar{\psi})$ per unità di tempo al primo ordine in teoria delle perturbazioni. (*N.B.: si può inizialmente porre $g_1 = g_2 = 0$, e risolvere il problema nel caso generale solo facoltativamente.*)

Domanda 2 (Punti 24)

Nel caso $g_1 = g_2 = 0$ e nella stessa approssimazione, si determinino le distribuzioni angolari dei decadimenti di una particella V che si trova a riposo in uno stato con spin definito $\sigma = -1, 0, 1$ lungo l'asse delle z in una coppia fermione-antifermione di elicità definite ed in cui l'impulso del fermione formi un angolo θ con l'asse delle z .

Soluzione dell' esame scritto del 25/09/2017

Problema 1

Domanda 1

Indichiamo con p_1 e p_2 i quadri-impulsi del fermione e dell'anti-fermione e con p il quadri-impulso della particella vettoriale. Abbiamo

$$p = p_1 + p_2 \quad (577)$$

L'ampiezza di transizione invariante è

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} &= g_1 M_1 + g_2 M_2 + g_3 M_3 \\ M_1 &= \epsilon_\mu(p) \bar{u}(p_1) \gamma^\mu v(p_2) \\ M_2 &= [p_\mu \epsilon_\nu(p) - p_\nu \epsilon_\mu(p)] \bar{u}(p_1) \gamma^\mu \gamma^\nu v(p_2) = \\ &= 2 \epsilon_\mu(p) \bar{u}(p_1) [(p_2 - p_1)^\mu + 2 m \gamma^\mu] v(p_2) \\ M_3 &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} [p_\mu \epsilon_\nu(p) - p_\nu \epsilon_\mu(p)] \bar{u}(p_1) \gamma_\sigma \gamma_\rho v(p_2) = \\ &= -i [p_\mu \epsilon_\nu(p) - p_\nu \epsilon_\mu(p)] \bar{u}(p_1) \gamma_5 [\gamma^\mu, \gamma^\nu] v(p_2) = \\ &= -2i [p_\mu \epsilon_\nu(p) - p_\nu \epsilon_\mu(p)] \bar{u}(p_1) \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu v(p_2) = \\ &= -2i \bar{u}(p_1) \gamma_5 [(-m + \hat{p}_2) \hat{\epsilon} - \hat{\epsilon} (-m + \hat{p}_1)] v(p_2) = \\ &= -4i (p_2 - p_1) \cdot \epsilon \bar{u}(p_1) \gamma_5 v(p_2) \end{aligned} \quad (578)$$

dove abbiamo usato le identità

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\rho \gamma_\sigma &= -i \gamma_5 [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \\ \bar{u}_1 \hat{p}_1 &= m \bar{u}_1 \quad \hat{p}_2 v_2 = -m v_2 \end{aligned} \quad (579)$$

Poniamo

$$k^\mu \equiv (p_2 - p_1)^\mu \Rightarrow k \cdot p = 0 \quad (580)$$

per cui

$$k^2 = 2(m^2 - p_2 p_1) = 4m^2 - M^2 \quad (581)$$

in quanto

$$p^2 = M^2 = 2p_2 p_1 + 2m^2 \Rightarrow p_2 \cdot p_1 = \frac{M^2}{2} - m^2 \quad (582)$$

Dunque

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} &= (g_1 + 4g_2 m) \epsilon_\mu \bar{u}_1 \gamma^\mu v_2 + 2g_2 \epsilon \cdot k \bar{u}_1 v_2 + \\ &= -4i g_3 \epsilon \cdot k \bar{u}_1 \gamma_5 v_2 \end{aligned} \quad (583)$$

Il modulo quadro dell'ampiezza è

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_{fi}|^2 &= [(g_1 + 4g_2 m) \epsilon_\mu \bar{u}_1 \gamma^\mu v_2 + 2g_2 \epsilon \cdot k \bar{u}_1 v_2 + \\
&\quad -4i g_3 \epsilon \cdot k \bar{u}_1 \gamma_5 v_2] \times \\
&\quad \times [(g_1 + 4g_2 m) \bar{\epsilon}_\mu \bar{v}_2 \gamma^\mu u_1 + 2g_2 \bar{\epsilon} \cdot k \bar{v}_2 u_1 + \\
&\quad -4i g_3 \bar{\epsilon} \cdot k \bar{v}_2 \gamma_5 u_1] = \\
&= \tilde{g}_1^2 A + g_2^2 B + g_3^2 C + \tilde{g}_1 g_2 D + \tilde{g}_1 g_3 E + g_2 g_3 F \quad (584)
\end{aligned}$$

dove

$$\tilde{g}_1 = g_1 + 4m g_2 \quad (585)$$

e

$$\begin{aligned}
A &= \bar{u}_1 \hat{\epsilon} v_2 \bar{v}_2 \hat{\epsilon}^* u_1 \\
B &= 4 \epsilon \cdot k \bar{u}_1 v_2 \bar{\epsilon} \cdot k \bar{v}_2 u_1 \\
C &= -16 \epsilon \cdot k \bar{\epsilon} \cdot k \bar{u}_1 \gamma_5 v_2 \bar{v}_2 \gamma_5 u_1 \\
D &= 2 \bar{\epsilon} \cdot k \bar{u}_1 \hat{\epsilon} v_2 \bar{v}_2 u_1 + 2 \epsilon \cdot k \bar{v}_2 \hat{\epsilon}^* u_1 \bar{u}_1 v_2 \\
E &= -4i \bar{\epsilon} \cdot k \bar{u}_1 \hat{\epsilon} v_2 \bar{v}_2 \gamma_5 u_1 - 4i \epsilon \cdot k \bar{u}_1 \gamma_5 v_2 \bar{v}_2 \hat{\epsilon}^* u_1 \\
F &= -8i \epsilon \cdot k \bar{\epsilon} \cdot k [\bar{u}_1 v_2 \bar{v}_2 \gamma_5 u_1 + \bar{u}_1 \gamma_5 v_2 \bar{v}_2 u_1] \quad (586)
\end{aligned}$$

Sommiamo sulle polarizzazioni dei fermioni finali e mediando su quelle del vettore

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \sum_{i,f} A &= \frac{1}{3} \left(\frac{p^\mu p^\nu}{M^2} - g^{\mu\nu} \right) \sum_f \bar{u}_1 \gamma^\mu v_2 \bar{v}_2 \gamma^\nu u_1 = \\
&= -\frac{1}{3} \text{Tr} \gamma^\mu (\hat{p}_2 - m) \gamma_\mu (\hat{p}_1 + m) = \\
&= -\frac{1}{3} \text{Tr} (-2\hat{p}_2 - 4m) (\hat{p}_1 + m) = \\
&= \frac{1}{3} (8 p_2 \cdot p_1 + 16 m^2) = \frac{4}{3} (M^2 + 2 m^2) \quad (587)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \sum_{i,f} B &= \frac{4}{3} \left(\frac{p^\mu p^\nu}{M^2} - g^{\mu\nu} \right) k_\mu k_\nu \sum_f \bar{u}_1 v_2 \bar{v}_2 u_1 = \\
&= \frac{4}{3} (M^2 - 4 m^2) \text{Tr} (\hat{p}_2 - m) (\hat{p}_1 + m) = \\
&= \frac{4}{3} (M^2 - 4 m^2) (4 p_2 \cdot p_1 - 4 m^2) = \\
&= \frac{8}{3} (M^2 - 4 m^2)^2 \quad (588)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \sum_{i,f} C &= -16 \frac{1}{3} \left(\frac{p^\mu p^\nu}{M^2} - g^{\mu\nu} \right) k_\mu k_\nu \sum_f \bar{u}_1 \gamma_5 v_2 \bar{v}_2 \gamma_5 u_1 = \\
&= -\frac{16}{3} (M^2 - 4m^2) \text{Tr} \gamma_5 (\hat{p}_2 - m) \gamma_5 (\hat{p}_1 + m) = \\
&= \frac{16}{3} (M^2 - 4m^2) \text{Tr} (\hat{p}_2 + m) (\hat{p}_1 + m) = \\
&= \frac{16}{3} (M^2 - 4m^2) (4p_1 \cdot p_1 + 4m^2) = \frac{32}{3} (M^2 - 4m^2) M^2 \quad (589)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \sum_{i,f} D &= \frac{2}{3} \left(\frac{p^\mu p^\nu}{M^2} - g^{\mu\nu} \right) k_\mu \sum_f [\bar{u}_1 \gamma_\nu v_2 \bar{v}_2 u_1 + \bar{v}_2 \gamma_\nu u_1 \bar{u}_1 v_2] = \\
&= -\frac{2}{3} \sum_f [\bar{u}_1 \hat{k} v_2 \bar{v}_2 u_1 + \bar{v}_2 \hat{k} u_1 \bar{u}_1 v_2] = \\
&= -\frac{2}{3} \text{Tr} [\hat{k} (\hat{p}_2 - m) (\hat{p}_1 + m) + \hat{k} (\hat{p}_1 + m) (\hat{p}_2 - m)] = \\
&= -\frac{2}{3} \text{Tr} [\hat{k} (2p_2 \cdot p_1 - 2m^2 + 2m \hat{p}_2 - 2m \hat{p}_1)] = \\
&= -\frac{16m}{3} k^2 = \frac{16m}{3} (M^2 - 4m^2) \quad (590)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \sum_{i,f} E &= -4i \frac{1}{3} \left(\frac{p^\mu p^\nu}{M^2} - g^{\mu\nu} \right) k_\mu \times \\
&\times \sum_f \bar{u}_1 \gamma_\nu v_2 \bar{v}_2 \gamma_5 u_1 + \bar{u}_1 \gamma_5 v_2 \bar{v}_2 \gamma_\nu u_1 = \\
&= \frac{4i}{3} \sum_f \bar{u}_1 \hat{k} v_2 \bar{v}_2 \gamma_5 u_1 + \bar{u}_1 \gamma_5 v_2 \bar{v}_2 \hat{k} u_1 = \\
&= \frac{4i}{3} \text{Tr} \hat{k} (\hat{p}_2 - m) \gamma_5 (\hat{p}_1 + m) + \gamma_5 (\hat{p}_2 - m) \hat{k} (\hat{p}_1 + m) = \\
&= \frac{4i}{3} \text{Tr} \gamma_5 \hat{k} (\hat{p}_2 + m) (\hat{p}_1 + m) + \gamma_5 (\hat{p}_2 - m) \hat{k} (\hat{p}_1 + m) = \\
&= \frac{4i}{3} 2k \cdot p_2 \text{Tr} \gamma_5 (\hat{p}_1 + m) = 0 \quad (591)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \sum_{i,f} F &= -\frac{8i}{3} \left(\frac{p^\mu p^\nu}{M^2} - g^{\mu\nu} \right) k_\mu k_\nu \times \\
&\quad \times \sum_f [\bar{u}_1 v_2 \bar{v}_2 \gamma_5 u_1 + \bar{u}_1 \gamma_5 v_2 \bar{v}_2 u_1] = \\
&= \frac{8i}{3} k^2 \text{Tr}[(\hat{p}_2 - m) \gamma_5 (\hat{p}_1 + m) + \gamma_5 (\hat{p}_2 - m) (\hat{p}_1 + m)] = 0 \quad (592)
\end{aligned}$$

Gli ultimi due contributi, dispari per parità, si annullano in quanto funzioni invarianti di due momenti soltanto. L'ampiezza totale mediata sugli stati iniziali e sommata sugli stati finali è quindi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \sum_{i,f} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \tilde{g}_1^2 \frac{4}{3} (M^2 + 2m^2) + g_2^2 \frac{8}{3} (M^2 - 4m^2)^2 + \\
&\quad + g_3^2 \frac{32}{3} (M^2 - 4m^2) M^2 + \tilde{g}_1 g_2 \frac{16m}{3} (M^2 - 4m^2) \quad (593)
\end{aligned}$$

Poniamoci nel sistema di quiete della particella vettoriale che decade. La conservazione del quadri-impulso implica che

$$\vec{p}' \equiv \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \quad M = 2\sqrt{m^2 + |\vec{p}'|^2} \quad (594)$$

cioè

$$|\vec{p}'| = \frac{M}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \quad (595)$$

La probabilità di decadimento totale per unità di tempo è

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= \frac{1}{8\pi M^2} |\vec{p}'| \frac{1}{3} \sum_{f,i} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \\
&= \frac{1}{16\pi M} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \times \\
&\quad \times \left[\tilde{g}_1^2 \frac{4}{3} (M^2 + 2m^2) + g_2^2 \frac{8}{3} (M^2 - 4m^2)^2 + \right. \\
&\quad \left. + g_3^2 \frac{32}{3} (M^2 - 4m^2) M^2 + \tilde{g}_1 g_2 \frac{8m}{3} (M^2 - 4m^2) \right] \quad (596)
\end{aligned}$$

Domanda 2

L'ampiezza di transizione è in questo caso

$$\mathcal{M}_{fi} = -4i g_3 \epsilon \cdot k \bar{u}_1 \gamma_5 v_2 \quad (597)$$

Nel sistema di quiete della particella vettoriale che decade

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \equiv \vec{p}' \equiv |\vec{p}'|(\sin \theta, 0, \cos \theta) \quad (598)$$

Pertanto il vettore di polarizzazione del fermione uscente si scrive nella rappresentazione *spinoriale* come segue:

$$u(\vec{p}', \sigma_1) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\theta\hat{\sigma}_2} \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1} \\ e^{-\frac{i}{2}\theta\hat{\sigma}_2} \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1} \end{pmatrix} \quad (599)$$

dove $\hat{\sigma}_i$, con $i = 1, 2, 3$ sono le matrici di Pauli, mentre $\frac{1}{2}\sigma_1 = \pm\frac{1}{2}$ è l'elicità del fermione nello stato finale.

Il vettore di polarizzazione dell'antifermione con impulso $-\vec{p}'$ ed elicità $\frac{1}{2}\sigma_2$ nello stato finale è

$$v(-\vec{p}', \sigma_2) = \begin{pmatrix} -i e^{-\frac{i}{2}\theta\hat{\sigma}_2} \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_2} \\ i e^{-\frac{i}{2}\theta\hat{\sigma}_2} \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_2} \end{pmatrix} \quad (600)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 \gamma_5 v_2 &= i \left(\sqrt{\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1}^\dagger e^{\frac{i}{2}\theta\hat{\sigma}_2} \quad \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1}^\dagger e^{\frac{i}{2}\theta\hat{\sigma}_2} \right) \times \\ &\times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\ &\times \left(-\sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} e^{-\frac{i}{2}\theta\hat{\sigma}_2} w_{\sigma_2} \quad \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|} e^{-\frac{i}{2}\theta\hat{\sigma}_2} w_{\sigma_2} \right) = \\ &= i \left(\sqrt{\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1}^\dagger e^{\frac{i}{2}\theta\hat{\sigma}_2} \quad \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1}^\dagger e^{\frac{i}{2}\theta\hat{\sigma}_2} \right) \times \\ &\times \left(\sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} e^{-\frac{i}{2}\theta\hat{\sigma}_2} w_{\sigma_2} \quad \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|} e^{-\frac{i}{2}\theta\hat{\sigma}_2} w_{\sigma_2} \right) = \\ &= i w_{\sigma_1}^\dagger w_{\sigma_2} \left[\sqrt{\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|} \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} + \right. \\ &\left. + \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|} \right] = \\ &= i \delta_{\sigma_1, \sigma_2} 2\omega_{p'} \end{aligned} \quad (601)$$

Il vettore di polarizzazione della particella vettoriale di spin λ nel suo sistema di quiete si scrive invece

$$\epsilon^\mu(p)_\lambda = (0, \vec{\epsilon}_\lambda) \quad (602)$$

dove $\lambda = -1, 0, 1$. Scegliamo⁶

$$\vec{\epsilon}_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm i, 0) \quad \vec{\epsilon}_0 = (0, 0, 1) \quad (603)$$

Inoltre

$$k^\mu = (p_2 - p_1)^\mu = (0, -2\vec{p}') \quad (604)$$

per cui

$$\epsilon_\lambda(p) \cdot k = 2\vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{p}' \quad (605)$$

cioè

$$\epsilon_{\pm 1}(p) \cdot k = \mp \sqrt{2} |\vec{p}'| \sin \theta \quad \epsilon_0(p) \cdot k = 2|\vec{p}'| \cos \theta \quad (606)$$

In definitiva

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{+1;\pm\pm} &= \mathcal{M}_{-1;\pm\pm} = \mp 4 g_3 \sqrt{2} |\vec{p}'| \sin \theta 2\omega_{p'} = \\ &= \mp 2 g_3 \sqrt{2} M^2 \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \sin \theta \\ \mathcal{M}_{0;\pm\pm} &= 4 g_3 2|\vec{p}'| \cos \theta 2\omega_{p'} = 4 g_3 M^2 \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \cos \theta \end{aligned} \quad (607)$$

Le distribuzioni angolari del decadimento sono date quindi da

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{+1;\pm\pm}|^2 &= |\mathcal{M}_{-1;\pm\pm}|^2 = 8 g_3^2 M^2 (M^2 - 4m^2) \sin^2 \theta \\ |\mathcal{M}_{0;\pm\pm}|^2 &= 16 g_3^2 M^2 (M^2 - 4m^2) \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (608)$$

Si noti che

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{i,f} |\mathcal{M}_{if}|^2 &= \frac{1}{3} \left[|\mathcal{M}_{+1;++}|^2 + |\mathcal{M}_{+1;--}|^2 + |\mathcal{M}_{-1;++}|^2 + |\mathcal{M}_{-1;--}|^2 + \right. \\ &+ \left. |\mathcal{M}_{0;++}|^2 + |\mathcal{M}_{0;--}|^2 \right] = \\ &= \frac{1}{3} g_3^2 M^2 (M^2 - 4m^2) (4 \times 8 \sin^2 \theta + 2 \times 16 \cos^2 \theta) = \\ &= \frac{32}{3} g_3^2 M^2 (M^2 - 4m^2) \end{aligned} \quad (609)$$

⁶N.B. La scelta del segno \mp di fronte a $\epsilon_{\pm 1}$ è una scelta convenzionale, consistente con la definizione standard degli operatori di salita e discesa dell'algebra del momento angolare: si noti che non sempre abbiamo fatto questa scelta nella risoluzione degli esercizi in questa raccolta. I risultati fisici non dipendono da questa convenzione, naturalmente.

in accordo con (593).

Appendice

Una maniera per ottenere le distribuzioni angolari che sfrutta l'invarianza per rotazioni è partire dalle espressioni per le ampiezze di decadimento per $\theta = 0$, cioè con la coppia fermione-antifermione che si propaga lungo l'asse delle z . Queste ampiezze sono più facili da calcolare che le ampiezze a θ generico: nel caso in questione ($g_1 = g_2 = 0$) le uniche ampiezze non nulle sono quelle con $\lambda = 0$ del vettore che decade:

$$\mathcal{M}_{0;\pm\pm}(\theta = 0) = 4 g_3 M^2 \sqrt{1 - \frac{4 m^2}{M^2}} \quad (610)$$

Lo stato f_{σ_1, σ_2} dei fermioni finali di polarizzazioni date ad angolo θ è legato allo stato con le stesse polarizzazioni ad angolo θ da una rotazione $R_y(\theta)$ intorno all'asse delle y . Pertanto, per l'invarianza per rotazione, l'ampiezza tra lo stato del vettore $\epsilon(\lambda)$ e uno stato generico f di spin dei fermioni a $\theta \neq 0$ si scrive in termini delle ampiezze a $\theta = 0$ come

$$\mathcal{M}_{\lambda, f_{\sigma_1, \sigma_2}}(\theta) = \sum_{\lambda'} (R_y^{-1}(\theta))_{\lambda' \lambda} \mathcal{M}_{\lambda', f_{\sigma_1, \sigma_2}}(\theta = 0) \quad (611)$$

dove $(R_y^{-1}(\theta))_{\lambda' \lambda}$ è la matrice 3×3 che implementa le rotazioni su uno spin 1. Poiché le uniche ampiezze non-nulle a $\theta = 0$ sono quelle con $\sigma_1 = \sigma_2$, questo rimane vero per $\theta \neq 0$. Inoltre poiché le le uniche ampiezze non-nulle a $\theta = 0$ sono quelle con $\lambda = 0$ abbiamo

$$\mathcal{M}_{\lambda, f_{\sigma, \sigma}}(\theta) = (R_y^{-1}(\theta))_{0\lambda} \mathcal{M}_{0, f_{\sigma, \sigma}}(\theta = 0) \quad (612)$$

La matrice $R_y^{-1}(\theta)$, nella base $\{\epsilon_+, \epsilon_-, \epsilon_0\}$ è

$$R_y^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} & \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\ \sin^2 \frac{\theta}{2} & \cos^2 \frac{\theta}{2} & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (613)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\pm 1, f_{\pm, \pm}}(\theta) &= \mp \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \mathcal{M}_{0, f_{\pm, \pm}} \\ \mathcal{M}_{0, f_{\pm, \pm}}(\theta) &= \cos \theta \mathcal{M}_{0, f_{\pm, \pm}} \end{aligned} \quad (614)$$

in accordo con le (607).

Corso di Teoria dei Campi

Prof. Camillo Imbimbo

Esame scritto del 29/01/2018

Problema 1

Una particella scalare ϕ di massa M , un vettore W_μ di massa m_W , ed un fermione di Dirac ψ di massa m interagiscono attraverso la densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_I = G \partial_\mu \phi W^\mu + g \partial_\mu W_\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi + \text{h. c.}$$

Domanda 1 (Punti 4)

Determinare la dimensione dei parametri G e g .

Domanda 2 (Punti 15)

Si calcoli la probabilità di decadimento totale dello scalare $\phi \rightarrow \psi + \bar{\psi}$ per unità di tempo all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni.

Domanda 3 (Punti 25)

Nella stessa approssimazione, si determinino le probabilità di decadimento per i vari stati di elicità dei fermioni nello stato finale. Si spieghi “a priori” il risultato ottenuto in termini di invarianza.

Soluzione dell' esame scritto del 29/01/2018

Problema 1

Domanda 1

G ha dimensioni di una massa e g adimensionale.

Domanda 2

Sia p l' impulso della particella scalare che decade, p_1 e p_2 gli impulsi dei fermioni prodotti,

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 \\ p^2 &= M^2 = 2 m^2 + 2 p_1 \cdot p_2 \Rightarrow p_2 \cdot p_1 = \frac{M^2}{2} - m^2 \end{aligned} \quad (615)$$

L'ampiezza totale all' ordine più basso è quindi data da

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= g G (-i p^\mu) \Delta_{\mu\nu}(p) g (-i p_\rho) \bar{u}(p_1) \gamma^\rho \gamma^\nu v(p_2) = \\ &= G g \frac{\left(\frac{p^\mu p^\nu}{m_W^2} - g_{\mu\nu}\right)}{p^2 - m_W^2} (-i p^\mu) (-i p_\rho) \bar{u}(p_1) \gamma^\rho \gamma^\nu v(p_2) = \\ &= \frac{G g}{m_W^2} (-i p^\nu) (-i p_\rho) \bar{u}(p_1) \gamma^\rho \gamma^\nu v(p_2) = \\ &= -\frac{G g}{m_W^2} m^2 \bar{u}(p_1) v(p_2) \end{aligned} \quad (616)$$

dove $\Delta_{\mu\nu}(p) = \frac{\left(\frac{p^\mu p^\nu}{m_W^2} - g_{\mu\nu}\right)}{p^2 - m_W^2}$ è il propagatore del vettore massivo ed dove abbiamo usato le identità

$$\bar{u}_1 \hat{p}_1 = m \bar{u}_1 \quad \hat{p}_2 v_2 = -m v_2 \quad (617)$$

Il modulo quadro dell'ampiezza sommato sulle polarizzazioni degli stati finali

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{G^2 g^2}{m_W^4} \text{Tr} \left[(\not{p}_2 - m) (\not{p}_1 + m) \right] = \\ &= \frac{4 G^2}{m_W^4} [p_1 \cdot p_2 - m^2] = \frac{2 G^2}{m_W^4} [M^2 - 4 m^2] \end{aligned} \quad (618)$$

La probabilità per unità di tempo di decadimento nel sistema di riposo dello scalare

$$\Gamma = \frac{G^2}{4 \pi m_W^4 M^2} [M^2 - 4 m^2] |\vec{p}| = \frac{G^2}{8 \pi m_W^4 M^2} [M^2 - 4 m^2]^{\frac{3}{2}} \quad (619)$$

dove

$$|\vec{p}'| = \sqrt{\frac{M^2}{4} - m^2} \quad (620)$$

Domanda 3

Possiamo prendere senza perdita di generalità

$$p_1 = (\omega, 0, 0, |\vec{p}'|) \quad p_2 = (\omega, 0, 0, -|\vec{p}'|) \quad \omega = \frac{M}{2} \quad (621)$$

Per la conservazione del momento angolare, le ampiezze di decadimento sono diverse da zero solo se le l'elicità dei due fermioni sono uguali. Denotiamo con $\frac{dP_{\pm}}{dt}$ le probabilità per unital di tempo di decadimento per elicità dei due fermioni pari a $\pm\frac{1}{2}$. Possiamo usare le formule dell'esercizio del 17/06/2014

$$\begin{aligned} u(p_1, \sigma_1) &= \begin{pmatrix} \sqrt{\omega + \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1} \\ \sqrt{\omega - \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1} \end{pmatrix} \\ v(p_2, \sigma_2) &= \begin{pmatrix} -i \sqrt{\omega - \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_2} \\ i \sqrt{\omega + \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (622)$$

dove $\sigma_{1,2} = \pm 1$. Sostituendo queste espressioni nell'ampiezza di transizione

$$\mathcal{M} = -\frac{Gg}{m_W^2} m^2 \bar{u}_1 v_2 \quad (623)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\sigma_1 \sigma_2} &= -\frac{Gg}{m_W^2} \left[-\sqrt{(\omega - \sigma_1 |\vec{p}'|)(\omega - \sigma_2 |\vec{p}'|)} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(\omega + \sigma_1 |\vec{p}'|)(\omega + \sigma_2 |\vec{p}'|)} \right] i w_{\sigma_2}^\dagger w_{\sigma_1} \end{aligned} \quad (624)$$

Le ampiezze di decadimento sono nulle per elicità dei fermioni opposte, come richiesto dalla conservazione del momento angolare. Per $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = \pm 1$ otteniamo

$$\mathcal{M}_{\pm} = -\frac{Gg}{m_W^2} i \left[-(\omega - \sigma |\vec{p}'|) + (\omega + \sigma |\vec{p}'|) \right] = -2i\sigma \frac{Gg}{m_W^2} |\vec{p}'| \quad (625)$$

Quindi

$$|\mathcal{M}_{\pm}|^2 = 4 \frac{G^2 g^2}{m_W^4} |\vec{p}'|^2 \quad (626)$$

Le corrispondenti probabilità per unità di tempo di decadimento

$$\Gamma_{\pm} = \frac{G^2 |\vec{p}|}{2 \pi m_W^4 M^2} |\vec{p}|^3 = \frac{G^2 |\vec{p}|}{16 \pi m_W^4 M^2} (M^2 - 4 m^2)^{\frac{3}{2}} \quad (627)$$

In accordo con il risultato precedente. Questo si spiega in quanto l'interazione conserva la parità.

Corso di Teoria dei Campi

Prof. Camillo Imbimbo

Esame scritto del 10/09/2018

Problema 1

Una particella scalare ϕ di massa M ed un vettore carico W_μ di massa m_W interagiscono attraverso la densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_I = g M \phi W^{\dagger \mu} W_\mu - \frac{G}{M} \phi F^{\mu\nu}(W) F_{\mu\nu}^\dagger(W)$$

dove $F_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$.

Domanda 1 (Punti 18)

Si calcoli la probabilità di decadimento totale dello scalare $\phi \rightarrow W + \bar{W}$ per unità di tempo all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni.

Domanda 2 (Punti 15)

Nella stessa approssimazione, si determinino le probabilità di decadimento per i vari stati di elicità dei vettori nello stato finale. Si verifichi esplicitamente la consistenza di questo risultato con la risposta del punto precedente.

Soluzione dell' esame scritto del 10/09/2018

Problema 1

Siano (p, σ) , $(\bar{p}, \bar{\sigma})$ i momenti e le polarizzazioni delle particelle V e \bar{V} .
L'ampiezza invariante di decadimento al primo ordine si scrive

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &\equiv \mathcal{M}^{\mu\nu} u_\nu^*(p, \sigma) v_\mu(\bar{p}, \bar{\sigma}) = \\
&= M g g^{\mu\nu} u_\nu^*(p, \sigma) v_\mu(\bar{p}, \bar{\sigma}) + \frac{G}{M} p_{[\mu} u_{\nu]}^*(p, \sigma) \bar{p}_{[\mu} v_{\nu]}(\bar{p}, \bar{\sigma}) = \\
&= u_\nu^*(p, \sigma) \left[M g g^{\mu\nu} + \frac{2G}{M} (g^{\mu\nu} p \cdot \bar{p} - \bar{p}^\nu p^\mu) \right] v_\mu(\bar{p}, \bar{\sigma}) \quad (628)
\end{aligned}$$

Se P è il momento dello scalare

$$P = p + \bar{p} \Rightarrow p \cdot \bar{p} = \frac{M^2}{2} - m_W^2 \quad (629)$$

Domanda 1

Sommando sulle polarizzazioni dello stato finale otteniamo

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \bar{\sigma}} |\mathcal{M}|^2 &= \sum_{\sigma \bar{\sigma}} \mathcal{M}^{\mu\nu} u_\nu^*(p, \sigma) v_\mu(\bar{p}, \bar{\sigma}) \mathcal{M}^{\sigma\rho} u_\rho(p, \sigma) v_\sigma^*(\bar{p}, \bar{\sigma}) = \\
&= \mathcal{M}^{\mu\nu} \left(\frac{p_\rho p_\nu}{m_W^2} - g_{\rho\nu} \right) \mathcal{M}^{\rho\sigma} \left(\frac{\bar{p}_\mu \bar{p}_\sigma}{m_W^2} - g_{\mu\sigma} \right) = \\
&= \left[M g g^{\mu\nu} + \frac{2G}{M} (g^{\mu\nu} p \cdot \bar{p} - \bar{p}^\nu p^\mu) \right] \left(\frac{p_\rho p_\nu}{m_W^2} - g_{\rho\nu} \right) \times \\
&\quad \times \left[M g g^{\sigma\rho} + \frac{2G}{M} (g^{\sigma\rho} p \cdot \bar{p} - \bar{p}^\rho p^\sigma) \right] \left(\frac{\bar{p}_\mu \bar{p}_\sigma}{m_W^2} - g_{\mu\sigma} \right) = \\
&= \left[M g \left(\frac{p_\rho p^\mu}{m_W^2} - \delta_\rho^\mu \right) - \frac{2G}{M} (\delta_\rho^\mu p \cdot \bar{p} - \bar{p}_\rho p^\mu) \right] \times \\
&\quad \times \left[M g \left(\frac{\bar{p}_\mu \bar{p}^\rho}{m_W^2} - \delta_\mu^\rho \right) - \frac{2G}{M} (\delta_\mu^\rho p \cdot \bar{p} - \bar{p}^\rho p_\mu) \right] = \\
&= \left[M^2 g^2 \left(\frac{(p \cdot \bar{p})^2}{m_W^4} + 2 \right) + \frac{4G^2}{M^2} (4 (p \cdot \bar{p})^2 - 2 (\bar{p} \cdot p)^2 + m_W^4) + \right. \\
&\quad \left. - 4 G g (p \cdot \bar{p} - p \cdot \bar{p} - 4 p \cdot \bar{p} + p \cdot \bar{p}) \right] = \\
&= \left[M^2 g^2 \left(\frac{(p \cdot \bar{p})^2}{m_W^4} + 2 \right) + \frac{4G^2}{M^2} (2 (p \cdot \bar{p})^2 + m_W^4) + 12 G g p \cdot \bar{p} \right] (630)
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \bar{\sigma}} |\mathcal{M}|^2 &= M^2 g^2 \left(\frac{M^4}{4 m_W^4} - \frac{M^2}{m_W^2} + 3 \right) + 4 G^2 \left(\frac{M^2}{2} - 2 m_W^2 + 3 \frac{m_W^4}{M^2} \right) + \\ &+ 12 G g \left(\frac{M^2}{2} - m_W^2 \right) \end{aligned} \quad (631)$$

La probabilità di decadimento per unità di tempo è pertanto

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\sqrt{M^2 - 4 m_W^2}}{16 \pi M^2} \left[M^2 g^2 \left(\frac{M^4}{4 m_W^4} - \frac{M^2}{m_W^2} + 3 \right) + \right. \\ &\left. + 4 G^2 \left(\frac{M^2}{2} - 2 m_W^2 + 3 \frac{m_W^4}{M^2} \right) + 12 G g \left(\frac{M^2}{2} - m_W^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (632)$$

Domanda 2

Possiamo prendere l'asse delle z lungo la direzione di propagazione della particella vettoriale W prodotta nel decadimento. Per la conservazione del momento angolare, le elicità delle particelle devono essere uguali: le ampiezze non nulle sono

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\sigma\sigma} &= M g u_\mu^*(p, \sigma) v^\mu(\bar{p}, \sigma) + \\ &+ \frac{2G}{M} (p \cdot \bar{p} u_\mu^*(p, \sigma) v^\mu(\bar{p}, \sigma) - \bar{p} \cdot u^*(p, \sigma) p \cdot v(\bar{p}, \sigma)) \end{aligned} \quad (633)$$

Abbiamo inoltre, nel sistema di riposo della particella scalare

$$\begin{aligned} p^\mu &= (\omega, 0, 0, |\vec{p}|) & \bar{p}^\mu &= (\omega, 0, 0, -|\vec{p}|) & 2\omega &= M \\ u^\mu(p, \pm) &= (0, \vec{e}_\pm, 0) & (u^*)^\mu(\bar{p}, \pm) &= (0, \vec{e}_\mp, 0) \end{aligned} \quad (634)$$

dove

$$|\vec{p}|^2 = \frac{M^2}{4} - m_W^2 \quad (635)$$

è il modulo quadro del 3-impulso delle particelle vettoriali. Per quanto riguarda l'anti-particella, che si muove lungo la direzione negativa di z , il vettore di polarizzazione corrispondente all'elicità \pm è descritto dal vettore \vec{e}_\mp , ovvero

$$v^\mu(\bar{p}, \pm) = (u^\mu(\bar{p}, \pm))^* = (0, \vec{e}_\mp, 0)^* = (0, \vec{e}_\pm, 0) \quad (636)$$

Infine

$$\begin{aligned}
u^\mu(p, 0) &= \left(\frac{|p|}{m_W}, 0, 0, \frac{\omega}{m_W} \right) = u^{*\mu}(p, 0) \\
v^\mu(\bar{p}, 0) &= (u^\mu(\bar{p}, 0))^* = \left(\frac{|p|}{m_W}, 0, 0, -\frac{\omega}{m_W} \right) = v^{*\mu}(\bar{p}, 0)
\end{aligned} \tag{637}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
u^*(p, \pm) \cdot v(\bar{p}, \pm) &= -\vec{\epsilon}_\mp \cdot \vec{\epsilon}_\pm = -1 \\
u^*(p, \pm) \cdot v(\bar{p}, \mp) &= 0 \\
u^*(p, 0) \cdot v(\bar{p}, 0) &= \frac{|p|^2 + \omega^2}{m_W^2} = \frac{M^2}{2m_W^2} - 1 \\
p \cdot v(\bar{p}, \pm) &= \bar{p} \cdot u^*(p, \pm) = 0 \\
p \cdot v(\bar{p}, 0) &= \bar{p} \cdot u^*(p, 0) = \frac{2\omega|p|}{m_W} = \frac{M|p|}{m_W}
\end{aligned} \tag{638}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\pm\pm} &= -Mg - \frac{2G}{M} p \cdot \bar{p} = -Mg - \frac{2G}{M} \left(\frac{M^2}{2} - m_W^2 \right) \\
\mathcal{M}_{00} &= Mg \left(\frac{M^2}{2m_W^2} - 1 \right) + \frac{2G}{M} \left(p \cdot \bar{p} \left(\frac{M^2}{2m_W^2} - 1 \right) - \frac{M^2|p|^2}{m_W^2} \right) = \\
&= Mg \left(\frac{M^2}{2m_W^2} - 1 \right) + \\
&+ \frac{2G}{Mm_W^2} \left(\left(\frac{M^2}{2} - m_W^2 \right)^2 - M^2 \left(\frac{M^2}{4} - m_W^2 \right) \right) = \\
&= Mg \left(\frac{M^2}{2m_W^2} - 1 \right) + \\
&+ \frac{2G}{Mm_W^2} \left(\frac{M^4}{4} + m_W^4 - M^2 m_W^2 - \frac{M^4}{4} + M^2 m_W^2 \right) = \\
&= Mg \left(\frac{M^2}{2m_W^2} - 1 \right) + 2G \frac{m_W^2}{M}
\end{aligned} \tag{639}$$

Verifichiamo la consistenza con il risultato del punto precedente

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma} |\mathcal{M}_{\pm\pm}|^2 &= 2 M^2 g^2 + \frac{8 G^2}{M^2} \left(\frac{M^4}{4} + m_W^4 - M^2 m_W^2 \right) + \\
&+ 8 g G \left(\frac{M^2}{2} - m_W^2 \right) + M^2 g^2 \left(\frac{M^4}{4 m_W^4} + 1 - \frac{M^2}{m_W^2} \right) + \\
&+ 4 G^2 \frac{m_W^4}{M^2} + 4 g G \left(\frac{M^2}{2} - m_W^2 \right) = \\
&= M^2 g^2 \left(\frac{M^4}{4 m_W^4} + 3 - \frac{M^2}{m_W^2} \right) + \frac{8 G^2}{M^2} \left(\frac{M^4}{4} + \frac{3}{2} m_W^4 - M^2 m_W^2 \right) + \\
&+ 12 g G \left(\frac{M^2}{2} - m_W^2 \right) \tag{640}
\end{aligned}$$

Corso di Teoria dei Campi
Prof. Camillo Imbimbo

Esame scritto del 24/01/2019

Problema 1

Una particella vettoriale W di massa M interagisce con un fermione di Dirac ψ di massa m attraverso la densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_I = g \partial_\mu W_\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi$$

Domanda 1

Si calcoli la probabilità di decadimento totale della particella vettoriale nella coppia di fermioni $(\psi, \bar{\psi})$ per unità di tempo al primo ordine in teoria delle perturbazioni.

Domanda 2

Si determinino le distribuzioni angolari dei decadimenti di una particella W che si trova a riposo in uno stato con spin definito $\sigma = -1, 0, 1$ lungo l'asse delle z in una coppia fermione-antifermione di elicità definite ed in cui l'impulso del fermione formi un angolo θ con l'asse delle z .

Soluzione dell' esame scritto del 24/01/2019

Problema 1

Domanda 1

Indichiamo con p_1 e p_2 i quadri-impulsi del fermione e dell'anti-fermione e con p il quadri-impulso della particella vettoriale. Abbiamo

$$p = p_1 + p_2 \quad (641)$$

L'ampiezza di transizione invariante è

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} &= g p_\mu \epsilon_\nu(p) \bar{u}(p_1) \gamma^\mu \gamma^\nu v(p_2) = \\ &= g \epsilon_\nu(p) \bar{u}(p_1) (m + \hat{p}_2) \gamma^\nu v(p_2) = \\ &= 2 g \bar{u}(p_1) [\epsilon \cdot p_2 + m \epsilon \cdot \gamma] v(p_2) \end{aligned} \quad (642)$$

dove abbiamo usato le identità

$$\bar{u}_1 \hat{p}_1 = m \bar{u}_1 \quad \hat{p}_2 v_2 = -m v_2 \quad (643)$$

Poniamo

$$k^\mu \equiv (p_2 - p_1)^\mu \Rightarrow k \cdot p = 0 \quad (644)$$

per cui

$$k^2 = 2(m^2 - p_2 p_1) = 4 m^2 - M^2 \quad (645)$$

in quanto

$$p^2 = M^2 = 2 p_2 p_1 + 2 m^2 \Rightarrow p_2 \cdot p_1 = \frac{M^2}{2} - m^2 \quad (646)$$

Inoltre

$$p \cdot p_2 = p \cdot p_1 = \frac{1}{2} M^2 \quad (647)$$

Dunque il modulo quadro dell'ampiezza è

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = 4 g^2 A \quad (648)$$

dove

$$\begin{aligned} A &= (\epsilon \cdot p_2 \bar{u}_1 v_2 + m \bar{u}_1 \epsilon \cdot \gamma v_2) (\epsilon^* \cdot p_2 \bar{v}_2 u_1 + m \bar{v}_2 \epsilon^* \cdot \gamma u_1) = \\ &= \epsilon \cdot p_2 \epsilon^* \cdot p_2 \bar{u}_1 v_2 \bar{v}_2 u_1 + m \epsilon^* \cdot p_2 \bar{u}_1 \epsilon \cdot \gamma v_2 \bar{v}_2 u_1 + \\ &+ m \epsilon \cdot p_2 \bar{u}_1 v_2 \bar{v}_2 \epsilon^* \cdot \gamma u_1 + m^2 \bar{u}_1 \epsilon \cdot \gamma v_2 \bar{v}_2 \epsilon^* \cdot \gamma u_1 \end{aligned} \quad (649)$$

Sommiamo sulle polarizzazioni dei fermioni finali e mediamo su quelle del vettore

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{i,f} A &= \frac{1}{3} \left(\frac{p^\mu p^\nu}{M^2} - g^{\mu\nu} \right) \sum_f \left[(p_2)_\mu (p_2)_\nu \bar{u}_1 v_2 \bar{v}_2 u_1 + m (p_2)_\nu \bar{u}_1 \gamma_\mu v_2 \bar{v}_2 u_1 + \right. \\ &\quad \left. + m (p_2)_\mu \bar{u}_1 v_2 \bar{v}_2 \gamma_\nu u_1 + m^2 \bar{u}_1 \gamma_\mu v_2 \bar{v}_2 \gamma_\nu u_1 \right] \end{aligned} \quad (650)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{i,f} A &= \frac{1}{3} \left(\frac{p^\mu p^\nu}{M^2} - g^{\mu\nu} \right) \left[(p_2)_\mu (p_2)_\nu \text{Tr} (\hat{p}_2 - m) (\hat{p}_1 + m) + \right. \\ &\quad \left. + m (p_2)_\nu \text{Tr} (\hat{p}_1 + m) \gamma_\mu (\hat{p}_2 - m) + (p_2)_\mu m \text{Tr} (\hat{p}_1 + m) (\hat{p}_2 - m) \gamma_\nu + \right. \\ &\quad \left. + m^2 \text{Tr} (\hat{p}_1 + m) \gamma_\mu (\hat{p}_2 - m) \gamma_\nu \right] = \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{p^\mu p^\nu}{M^2} - g^{\mu\nu} \right) \left[(p_2)_\mu (p_2)_\nu (p_1 \cdot p_2 - m^2) + \right. \\ &\quad \left. + m^2 (p_2)_\nu k_\mu + m^2 (p_2)_\mu k_\nu \right] + \\ &\quad + m^2 \frac{1}{3} \left(\frac{p^\mu p^\nu}{M^2} - g^{\mu\nu} \right) \text{Tr} (\hat{p}_1 \gamma_\mu \hat{p}_2 \gamma_\nu - m^2 \gamma_\mu \gamma_\nu) \end{aligned} \quad (651)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{i,f} A &= \frac{4}{3} \left(\frac{(p \cdot p_2)^2}{M^2} - m^2 \right) (p_1 \cdot p_2 - m^2) - \frac{8}{3} m^2 p_2 \cdot k + \\ &\quad + m^2 \frac{1}{3} \text{Tr} \left(\frac{\hat{p}_1 \hat{p}_2 \hat{p}_1 \hat{p}_2}{M^2} - m^2 \right) - (\hat{p}_1 \gamma^\mu \hat{p}_2 \gamma_\mu - 4 m^2) = \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{M^2}{4} - m^2 \right) (p_1 \cdot p_2 - m^2) + \frac{8}{3} m^2 (p_1 \cdot p_2 - m^2) + \\ &\quad + m^2 \frac{1}{3} \text{Tr} ((m^2 - m^2) + 2 \hat{p}_1 \hat{p}_2 + 4 m^2) = \\ &= \frac{4}{3} \left[\left(\frac{M^2}{4} + m^2 \right) (p_1 \cdot p_2 - m^2) + m^2 (2 p_1 \cdot p_2 + 4 m^2) \right] = \\ &= \frac{4}{3} \left[\frac{M^4}{8} - 2 m^4 + m^2 (M^2 + 2 m^2) \right] = \frac{M^2}{6} (M^2 + 8 m^2) \end{aligned} \quad (652)$$

Poniamoci nel sistema di quiete della particella vettoriale che decade. La conservazione del quadri-impulso implica che

$$\vec{p}' \equiv \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \quad M = 2\sqrt{m^2 + |\vec{p}'|^2} \quad (653)$$

cioè

$$|\vec{p}'| = \frac{M}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \quad (654)$$

La probabilità di decadimento totale per unità di tempo è

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{1}{8\pi M^2} |\vec{p}'| \frac{1}{3} \sum_{f,i} |M_{fi}|^2 = \\ &= \frac{1}{16\pi M} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \times \\ &\times 4g^2 \frac{M^2}{6} (M^2 + 8m^2) \end{aligned} \quad (655)$$

Domanda 2

L'ampiezza di transizione è

$$\mathcal{M}_{fi} = 2g (\epsilon \cdot p_2 \bar{u}_1 v_2 + m \bar{u}_1 \epsilon \cdot \gamma v_2) \quad (656)$$

Nel sistema di quiete della particella vettoriale che decade

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \equiv \vec{p}' \equiv |\vec{p}'| (\sin \theta, 0, \cos \theta) \quad (657)$$

Pertanto il vettore di polarizzazione del fermione uscente si scrive nella rappresentazione *spinoriale* come segue:

$$u(\vec{p}', \sigma_1) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\theta \hat{\sigma}_2} \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1} \\ e^{-\frac{i}{2}\theta \hat{\sigma}_2} \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1} \end{pmatrix} \quad (658)$$

dove $\hat{\sigma}_i$, con $i = 1, 2, 3$ sono le matrici di Pauli, mentre $\frac{1}{2}\sigma_1 = \pm \frac{1}{2}$ è l'elicità del fermione nello stato finale.

Il vettore di polarizzazione dell'antifermione con impulso $-\vec{p}'$ ed elicità $\frac{1}{2}\sigma_2$ nello stato finale è

$$v(-\vec{p}', \sigma_2) = \begin{pmatrix} -i e^{-\frac{i}{2}\theta \hat{\sigma}_2} \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_2} \\ i e^{-\frac{i}{2}\theta \hat{\sigma}_2} \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_2} \end{pmatrix} \quad (659)$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1 v_2 &= i \left(\sqrt{\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1}^\dagger e^{\frac{i}{2}\theta \hat{\sigma}_2} \quad \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1}^\dagger e^{\frac{i}{2}\theta \hat{\sigma}_2} \right) \times \\
&\times \left(-\sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} e^{-\frac{i}{2}\theta \hat{\sigma}_2} w_{\sigma_2} \quad \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|} e^{-\frac{i}{2}\theta \hat{\sigma}_2} w_{\sigma_2} \right) = \\
&= i w_{\sigma_1}^\dagger w_{\sigma_2} \left[-\sqrt{\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|} \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} + \right. \\
&\left. + \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|} \right] = \\
&= i \delta_{\sigma_1, \sigma_2} 2 \sigma_1 |\vec{p}'| \tag{660}
\end{aligned}$$

Il vettore di polarizzazione della particella vettoriale di spin λ nel suo sistema di quiete si scrive invece

$$\epsilon^\mu(p)_\lambda = (0, \vec{\epsilon}_\lambda) \tag{661}$$

dove $\lambda = -1, 0, 1$. Scegliamo⁷

$$\vec{\epsilon}_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (1, \pm i, 0) \quad \vec{\epsilon}_0 = (0, 0, 1) \tag{662}$$

Inoltre

$$k^\mu = (p_2 - p_1)^\mu = (0, -2\vec{p}') \tag{663}$$

per cui

$$\epsilon_\lambda(p) \cdot p_2 = \frac{1}{2} \epsilon_\lambda(p) \cdot k = \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{p}' \tag{664}$$

cioè

$$\epsilon_{\pm 1}(p) \cdot p_2 = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} |\vec{p}'| \sin \theta \quad \epsilon_0(p) \cdot p_2 = |\vec{p}'| \cos \theta \tag{665}$$

⁷N.B. La scelta del segno \mp di fronte a $\epsilon_{\pm 1}$ è una scelta convenzionale, consistente con la definizione standard degli operatori di salita e discesa dell'algebra del momento angolare: si noti che non sempre abbiamo fatto questa scelta nella risoluzione degli esercizi in questa raccolta. I risultati fisici non dipendono da questa convenzione, naturalmente.

Inoltre

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1 \epsilon \cdot \gamma v_2 &= i \left(\sqrt{\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1}^\dagger e^{\frac{i}{2}\theta \hat{\sigma}_2} \quad \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1}^\dagger e^{\frac{i}{2}\theta \hat{\sigma}_2} \right) \times \\
&\begin{pmatrix} 0 & \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \sigma \\ -\vec{\epsilon}_\lambda \cdot \sigma & 0 \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} -\sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} e^{-\frac{i}{2}\theta \hat{\sigma}_2} w_{\sigma_2} & \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|} e^{-\frac{i}{2}\theta \hat{\sigma}_2} w_{\sigma_2} \end{pmatrix} = \\
&= i \left(\sqrt{\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1}^\dagger e^{\frac{i}{2}\theta \hat{\sigma}_2} \quad \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1}^\dagger e^{\frac{i}{2}\theta \hat{\sigma}_2} \right) \times \\
&\times \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|} \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \sigma e^{-\frac{i}{2}\theta \hat{\sigma}_2} w_{\sigma_2} & \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \sigma \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} e^{-\frac{i}{2}\theta \hat{\sigma}_2} w_{\sigma_2} \end{pmatrix} = \\
&= i \left(\sqrt{\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|} \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|} + \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} \right) \times \\
&\times w_{\sigma_1}^\dagger \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \sigma w_{\sigma_2} \tag{666}
\end{aligned}$$

dove $\vec{\epsilon}_\lambda$ è il vettore di polarizzazione ruotato di un angolo θ intorno all'asse delle y . Converrà calcolare dapprima le ampiezze a $\theta = 0$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\pm\pm}(\theta = 0, \lambda = 0) &= \pm 4 g i (|\vec{p}'|^2 + m^2) = \pm 4 g i \omega_{p'}^2 = \pm g i M^2 \\
\mathcal{M}_{\pm\mp}(\theta = 0, \lambda = \pm 1) &= \pm 2 g i \sqrt{2} 2 m \omega_{p'} = \pm 2 g i \sqrt{2} m M \tag{667}
\end{aligned}$$

Si noti che per $\theta = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \sum_{i,f} |\mathcal{M}_{if}|^2 &= \frac{1}{3} \left[|\mathcal{M}_{+1;+-}|^2 + |\mathcal{M}_{-1;-+}|^2 + \right. \\
&+ |\mathcal{M}_{0;++}|^2 + |\mathcal{M}_{0;--}|^2 \left. \right] = \\
&= \frac{g^2}{3} 2 M^2 \left[M^2 + 8 m^2 \right] \tag{668}
\end{aligned}$$

in accordo con la risposta al punto precedente.

Per l'invarianza per rotazione, l'ampiezza tra lo stato del vettore $\epsilon(\lambda)$ e uno stato generico f di spin dei fermioni a $\theta \neq 0$ si scrive in termini delle ampiezze a $\theta = 0$ come

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\lambda, f_{\sigma_1, \sigma_2}}(\theta) &= \sum_{\lambda'} (R_y^{-1}(\theta))_{\lambda' \lambda} \mathcal{M}_{\lambda', f_{\sigma_1, \sigma_2}}(\theta = 0) = \\
&= (R_y^{-1}(\theta))_{0\lambda} \mathcal{M}_{0, f_{\sigma_1, \sigma_2}}(\theta = 0) + (R_y^{-1}(\theta))_{1\lambda} \mathcal{M}_{1, f_{\sigma_1, \sigma_2}}(\theta = 0) + \\
&+ (R_y^{-1}(\theta))_{-1\lambda} \mathcal{M}_{-1, f_{\sigma_1, \sigma_2}}(\theta = 0) \tag{669}
\end{aligned}$$

dove $(R_y^{-1}(\theta))_{\lambda'\lambda}$ è la matrice 3×3 che implementa le rotazioni su uno spin 1:

$$R_y^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} & \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\ \sin^2 \frac{\theta}{2} & \cos^2 \frac{\theta}{2} & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (670)$$

Le distribuzioni angolari sono proporzionali a $|\mathcal{M}_{\lambda, f\sigma_1, \sigma_2}(\theta)|^2$. Abbiamo⁸

$$\mathcal{M}_{0;\pm\pm}(\theta) = (R_y^{-1}(\theta))_{00}\mathcal{M}_{0;\pm\pm}(\theta = 0) = \pm \cos \theta g i M^2$$

$$\mathcal{M}_{0;\pm\mp}(\theta) = (R_y^{-1}(\theta))_{\pm 10}\mathcal{M}_{\pm 1;\pm\mp}(\theta = 0) = (-1) 2 \sin \theta i g m M$$

$$\mathcal{M}_{+1;\pm\pm}(\theta) = (R_y^{-1}(\theta))_{0+1}\mathcal{M}_{0;\pm\pm}(\theta = 0) = \mp \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} i g M^2$$

$$\mathcal{M}_{-1;\pm\pm}(\theta) = (R_y^{-1}(\theta))_{0-1}\mathcal{M}_{0;\pm\pm}(\theta = 0) = \pm \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} i g M^2$$

$$\mathcal{M}_{\pm 1;\pm\mp}(\theta) = (R_y^{-1}(\theta))_{\pm 1,1}\mathcal{M}_{\pm;\pm\mp}(\theta = 0) = (-1) \pm 2 g i \sqrt{2} m M \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\mathcal{M}_{\pm 1;\mp\pm}(\theta) = (R_y^{-1}(\theta))_{\mp 1,\pm 1}\mathcal{M}_{\mp 1;\mp\pm}(\theta = 0) = (-1) \mp 2 g i \sqrt{2} m M \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

⁸Check the signs in brackets, as they come from mathematica

Corso di Teoria dei Campi
Prof. Camillo Imbimbo

Esame scritto del 01/03/2019

Problema 1

Una particella vettoriale W di massa M interagisce con un fermione di Dirac ψ di massa m attraverso la densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_I = g W_\mu \bar{\psi} (\gamma^\mu + \gamma_5 \gamma^\mu) \psi$$

Domanda 1

Si calcoli la probabilità di decadimento totale della particella vettoriale nella coppia di fermioni $(\psi, \bar{\psi})$ per unità di tempo al primo ordine in teoria delle perturbazioni.

Domanda 2

Si determinino le distribuzioni angolari dei decadimenti di una particella W che si trova a riposo in uno stato con spin definito $\sigma = -1, 0, 1$ lungo l'asse delle z in una coppia fermione-antifermione di elicità definite ed in cui l'impulso del fermione formi un angolo θ con l'asse delle z .

Soluzione dell' esame scritto del 01/03/2019

Problema 1

Domanda 1

Indichiamo con p_1 e p_2 i quadri-impulsi del fermione e dell'anti-fermione e con p il quadri-impulso della particella vettoriale. Abbiamo

$$p = p_1 + p_2 \quad (671)$$

L'ampiezza di transizione invariante è

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} &= g \epsilon_\mu(p) \bar{u}(p_1) (\gamma^\mu + \gamma_5 \gamma^\mu) v(p_2) = \\ &= g \bar{u}(p_1) [\epsilon \cdot \gamma + \gamma_5 \epsilon \cdot \gamma] v(p_2) \end{aligned} \quad (672)$$

Poniamo

$$k^\mu \equiv (p_2 - p_1)^\mu \Rightarrow k \cdot p = 0 \quad (673)$$

per cui

$$k^2 = 2(m^2 - p_2 p_1) = 4m^2 - M^2 \quad (674)$$

in quanto

$$p^2 = M^2 = 2p_2 p_1 + 2m^2 \Rightarrow p_2 \cdot p_1 = \frac{M^2}{2} - m^2 \quad (675)$$

Inoltre

$$p \cdot p_2 = p \cdot p_1 = \frac{1}{2} M^2 \quad (676)$$

Dunque il modulo quadro dell'ampiezza è

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = g^2 A \quad (677)$$

dove

$$A = \bar{u}(p_1) [\epsilon \cdot \gamma + \gamma_5 \epsilon \cdot \gamma] v(p_2) \bar{v}(p_2) [\epsilon^* \cdot \gamma - \gamma_5 \epsilon^* \cdot \gamma] u(p_1) \quad (678)$$

Sommiamo sulle polarizzazioni dei fermioni finali e mediamo su quelle del vettore

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{i,f} A &= \frac{1}{3} \left(\frac{p^\mu p^\nu}{M^2} - g^{\mu\nu} \right) \sum_f \bar{u}(p_1) [\gamma_\mu + \gamma_5 \gamma_\mu] v(p_2) \times \\ &\quad \times \bar{v}(p_2) [\gamma_\nu + \gamma_5 \gamma_\nu] u(p_1) \end{aligned} \quad (679)$$

Poiché

$$\bar{u}(p_1) \not{p} v(p_2) = 0 \quad \bar{u}(p_1) \gamma_5 \not{p} v(p_2) = -2 m \bar{u}(p_1) \gamma_5 v(p_2) \quad (680)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{i,f} A &= -\frac{4}{3} \frac{m^2}{M^2} \sum_f \bar{u}(p_1) \gamma_5 v(p_2) \bar{v}(p_2) \gamma_5 u(p_1) + \\ &\quad -\frac{1}{3} \sum_f \bar{u}(p_1) [\gamma_\mu + \gamma_5 \gamma_\mu] v(p_2) \times \\ &\quad \times \bar{v}(p_2) [\gamma^\mu + \gamma_5 \gamma^\mu] u(p_1) \end{aligned} \quad (681)$$

Ovvero

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{i,f} A &= -\frac{4}{3} \frac{m^2}{M^2} \text{Tr}(\not{p}_1 + m) \gamma_5 (\not{p}_2 - m) \gamma_5 + \\ &\quad -\frac{1}{3} \text{Tr}(\not{p}_1 + m) [\gamma_\mu + \gamma_5 \gamma_\mu] (\not{p}_2 - m) [\gamma^\mu + \gamma_5 \gamma^\mu] \end{aligned} \quad (682)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{i,f} A &= -\frac{4}{3} \frac{m^2}{M^2} \text{Tr}(\not{p}_1 + m) \gamma_5 (\not{p}_2 - m) \gamma_5 + \\ &\quad -\frac{1}{3} \text{Tr}(\not{p}_1 + m) (1 + \gamma_5) \gamma_\mu (\not{p}_2 - m) \gamma^\mu (1 + \gamma_5) = \\ &= \frac{4}{3} \frac{m^2}{M^2} \text{Tr}(\not{p}_1 + m) (\not{p}_2 + m) + \\ &\quad + \frac{1}{3} \text{Tr}(\not{p}_1 + m) (1 + \gamma_5) (2\not{p}_2 + 4m) (1 - \gamma_5) = \\ &= -\frac{4}{3} \frac{m^2}{M^2} \text{Tr}(\not{p}_1 + m) (\not{p}_2 + m) + \frac{1}{3} \text{Tr}(\not{p}_1 + m) 4\not{p}_2 (1 - \gamma_5) = \\ &= \frac{16}{3} \frac{m^2}{M^2} (p_1 \cdot p_2 + m^2) + \frac{16}{3} p_1 \cdot p_2 = \\ &= \frac{8}{3} m^2 + \frac{8}{3} M^2 - \frac{16}{3} m^2 = \frac{8}{3} (M^2 - m^2) \end{aligned} \quad (683)$$

Poniamoci nel sistema di quiete della particella vettoriale che decade. La conservazione del quadri-impulso implica che

$$\vec{p}' \equiv \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \quad M = 2\sqrt{m^2 + |\vec{p}'|^2} \quad (684)$$

cioè

$$|\vec{p}'| = \frac{M}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \quad (685)$$

La probabilità di decadimento totale per unità di tempo è

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{1}{8\pi M^2} |\vec{p}'| \frac{1}{3} \sum_{f,i} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \\ &= \frac{1}{16\pi M} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \frac{8}{3} g^2 (M^2 - m^2) \end{aligned} \quad (686)$$

Domanda 2

L'ampiezza di transizione è

$$\mathcal{M}_{fi} = g \bar{u}(p_1) [\epsilon \cdot \gamma + \gamma_5 \epsilon \cdot \gamma] v(p_2) \quad (687)$$

Nel sistema di quiete della particella vettoriale che decade

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \equiv \vec{p}' \equiv |\vec{p}'|(\sin \theta, 0, \cos \theta) \quad (688)$$

Pertanto il vettore di polarizzazione del fermione uscente si scrive nella rappresentazione *spinoriale* come segue:

$$u(\vec{p}', \sigma_1) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\theta\hat{\sigma}_2} \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1} \\ e^{-\frac{i}{2}\theta\hat{\sigma}_2} \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1} \end{pmatrix} \quad (689)$$

dove $\hat{\sigma}_i$, con $i = 1, 2, 3$ sono le matrici di Pauli, mentre $\frac{1}{2}\sigma_1 = \pm\frac{1}{2}$ è l'elicità del fermione nello stato finale.

Il vettore di polarizzazione dell'antifermione con impulso $-\vec{p}'$ ed elicità $\frac{1}{2}\sigma_2$ nello stato finale è

$$v(-\vec{p}', \sigma_2) = \begin{pmatrix} -i e^{-\frac{i}{2}\theta\hat{\sigma}_2} \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_2} \\ i e^{-\frac{i}{2}\theta\hat{\sigma}_2} \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_2} \end{pmatrix} \quad (690)$$

Il vettore di polarizzazione della particella vettoriale di spin λ nel suo sistema di quiete si scrive invece

$$\epsilon^\mu(p)_\lambda = (0, \vec{\epsilon}_\lambda) \quad (691)$$

dove $\lambda = -1, 0, 1$. Scegliamo

$$\vec{\epsilon}_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm i, 0) \quad \vec{\epsilon}_0 = (0, 0, 1) \quad (692)$$

Inoltre

$$k^\mu = (p_2 - p_1)^\mu = (0, -2\vec{p}') \quad (693)$$

per cui

$$\epsilon_\lambda(p) \cdot p_2 = \frac{1}{2} \epsilon_\lambda(p) \cdot k = \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{p}' \quad (694)$$

cioè

$$\epsilon_{\pm 1}(p) \cdot p_2 = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} |\vec{p}'| \sin \theta \quad \epsilon_0(p) \cdot p_2 = |\vec{p}'| \cos \theta \quad (695)$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 (1 + \gamma_5) \epsilon \cdot \gamma v_2 &= i \left(\sqrt{\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1}^\dagger e^{\frac{i}{2}\theta\hat{\sigma}_2} \quad \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1}^\dagger e^{\frac{i}{2}\theta\hat{\sigma}_2} \right) \times \\ &\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2\vec{\epsilon}_\lambda \cdot \sigma & 0 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} -\sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} e^{-\frac{i}{2}\theta\hat{\sigma}_2} w_{\sigma_2} & \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_2 |\vec{p}'|} e^{-\frac{i}{2}\theta\hat{\sigma}_2} w_{\sigma_2} \end{pmatrix} = \\ &= i \left(\sqrt{\omega_{p'} - \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1}^\dagger e^{\frac{i}{2}\theta\hat{\sigma}_2} \quad \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1}^\dagger e^{\frac{i}{2}\theta\hat{\sigma}_2} \right) \times \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & 2\vec{\epsilon}_\lambda \cdot \sigma \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} e^{-\frac{i}{2}\theta\hat{\sigma}_2} w_{\sigma_2} \end{pmatrix} = \\ &= 2i \sqrt{\omega_{p'} + \sigma_1 |\vec{p}'|} \sqrt{\omega_{p'} - \sigma_2 |\vec{p}'|} w_{\sigma_1}^\dagger \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \sigma w_{\sigma_2} \end{aligned} \quad (696)$$

dove $\vec{\epsilon}_\lambda$ è il vettore di polarizzazione ruotato di un angolo θ intorno all'asse delle y . Converrà calcolare dapprima le ampiezze a $\theta = 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\pm\pm}(\theta = 0, \lambda = 0) &= \pm 2 g i m \\ \mathcal{M}_{\pm\mp}(\theta = 0, \lambda = \pm 1) &= \mp 2 g i \sqrt{2} (\omega_{p'} \pm |\vec{p}'|) \end{aligned} \quad (697)$$

Si noti che per $\theta = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{i,f} |\mathcal{M}_{if}|^2 &= \frac{1}{3} \left[|\mathcal{M}_{+1;+-}|^2 + |\mathcal{M}_{-1;-+}|^2 + \right. \\ &+ |\mathcal{M}_{0;++}|^2 + |\mathcal{M}_{0;--}|^2 \left. \right] = \\ &= 8 g^2 \left[(\omega_{p'} + |\vec{p}'|)^2 + (\omega_{p'} - |\vec{p}'|)^2 + m^2 \right] = \\ &= 8 g^2 \left[4 |\vec{p}'|^2 + 3 m^2 \right] = 8 g^2 \left[M^2 - m^2 \right] \end{aligned} \quad (698)$$

in accordo con la risposta al punto precedente.

Per l'invarianza per rotazione, l'ampiezza tra lo stato del vettore $\epsilon(\lambda)$ e uno stato generico f di spin dei fermioni a $\theta \neq 0$ si scrive in termini delle ampiezze a $\theta = 0$ come

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\lambda,f\sigma_1,\sigma_2}(\theta) &= \sum_{\lambda'} (R_y^{-1}(\theta))_{\lambda'\lambda} \mathcal{M}_{\lambda',f\sigma_1,\sigma_2}(\theta = 0) = \\ &= (R_y^{-1}(\theta))_{0\lambda} \mathcal{M}_{0,f\sigma_1,\sigma_2}(\theta = 0) + (R_y^{-1}(\theta))_{1\lambda} \mathcal{M}_{1,f\sigma_1,\sigma_2}(\theta = 0) + \\ &+ (R_y^{-1}(\theta))_{-1\lambda} \mathcal{M}_{-1,f\sigma_1,\sigma_2}(\theta = 0)\end{aligned}\quad (699)$$

dove $(R_y^{-1}(\theta))_{\lambda'\lambda}$ è la matrice 3×3 che implementa le rotazioni su uno spin 1:

$$R_y^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} & \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\ \sin^2 \frac{\theta}{2} & \cos^2 \frac{\theta}{2} & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \cos \theta \end{pmatrix}\quad (700)$$

Le distribuzioni angolari sono proporzionali a $|\mathcal{M}_{\lambda,f\sigma_1,\sigma_2}(\theta)|^2$. Abbiamo⁹

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{0;\pm\pm}(\theta) &= (R_y^{-1}(\theta))_{00} \mathcal{M}_{0;\pm\pm}(\theta = 0) = \pm \cos \theta 2 g i m \\ \mathcal{M}_{0;\pm\mp}(\theta) &= (R_y^{-1}(\theta))_{\pm 10} \mathcal{M}_{\pm 1;\pm\mp}(\theta = 0) = -2 \sin \theta i g (\omega_{p'} \pm |\vec{p}'|) \\ \mathcal{M}_{+1;\pm\pm}(\theta) &= (R_y^{-1}(\theta))_{0+1} \mathcal{M}_{0;\pm\pm}(\theta = 0) = \mp \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} 2i g m \\ \mathcal{M}_{-1;\pm\pm}(\theta) &= (R_y^{-1}(\theta))_{0-1} \mathcal{M}_{0;\pm\pm}(\theta = 0) = \pm \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} 2i g m \\ \mathcal{M}_{\pm 1;\pm\mp}(\theta) &= (R_y^{-1}(\theta))_{\pm 1,\pm 1} \mathcal{M}_{\pm 1;\pm\mp}(\theta = 0) = \\ &= \mp 2 g i \sqrt{2} (\omega_{p'} \pm |\vec{p}'|) \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ \mathcal{M}_{\pm 1;\mp\pm}(\theta) &= (R_y^{-1}(\theta))_{\mp 1,\pm 1} \mathcal{M}_{\mp 1;\mp\pm}(\theta = 0) = \\ &= \mp 2 g i \sqrt{2} (\omega_{p'} \pm |\vec{p}'|) \sin^2 \frac{\theta}{2}\end{aligned}\quad (701)$$

⁹Check the signs in brackets, as they come from mathematica

Corso di Teoria dei Campi

Prof. Camillo Imbimbo

Esame scritto del 25/06/2019

Problema 1

Un fermione di Dirac ψ di massa m_ψ , un campo scalare ϕ reale di massa m ed un vettore reale V_μ di massa M interagiscono attraverso la densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_I = g \phi \bar{\psi} \psi + G \phi \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu}(V) F^{\rho\sigma}(V)$$

dove $F_{\mu\nu}(V) = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$.

Domanda 1

Si calcoli all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni la sezione d'urto integrata per l'annichilazione nel centro di massa di una coppia fermione-antifermione ($\psi, \bar{\psi}$) non polarizzata in una coppia di vettore-antivettore (V, \bar{V}) in qualunque stato di polarizzazione, in funzione dell'energia della coppia particella-antiparticella nel centro di massa.

Domanda 2

Si determinino le sezioni d'urto differenziali polarizzate, per stati di elicità definita dei fermioni entranti e dei vettori uscenti.

Soluzione dell' esame scritto del 25/06/2019

Problema 1

Domanda 1

Indichiamo con p_1 e p_2 i quadri-impulsi del fermione e dell'anti-fermione e con k_1 e k_2 i quadri-impulso del vettore e antivettore. Abbiamo

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 = k_1 + k_2 \\ m_\psi^2 + p_1 \cdot p_2 &= M^2 + k_1 \cdot k_2 \end{aligned} \quad (702)$$

L'ampiezza di transizione invariante è

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} &= g G \bar{v}(p_2, \lambda_2) u(p_1, \lambda_1) \frac{i}{p^2 - m^2} \times \\ &2 \times 4 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_2^\mu \bar{\epsilon}^\nu(k_2, \sigma_2) k_1^\rho \bar{\epsilon}^\sigma(k_1, \sigma_1) \end{aligned} \quad (703)$$

L'ampiezza mediata sugli stati iniziali e sommata su quelli finali

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{if} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{1}{4} 64 \frac{g^2 G^2}{(p^2 - m^2)^2} \sum_{i,f} \bar{v}(p_2, \lambda_2) u(p_1, \lambda_1) \bar{u}(p_1) v(p_2) \times \\ &\times \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{\epsilon}^\sigma(k_1, \sigma_1) \epsilon^\delta(k_1, \sigma_1) \bar{\epsilon}^\nu(k_2, \sigma_2) \epsilon^\beta(k_2, \sigma_2) k_2^\mu k_1^\rho k_2^\alpha k_1^\gamma = \\ &= \frac{16 g^2 G^2}{(p^2 - m^2)^2} \text{Tr}(\not{p}_1 + m_\psi)(\not{p}_2 - m_\psi) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\alpha\gamma}{}^{\nu\sigma} k_2^\mu k_1^\rho k_2^\alpha k_1^\gamma = \\ &= \frac{16 g^2 G^2}{(p^2 - m^2)^2} \text{Tr}(\not{p}_1 + m_\psi)(\not{p}_2 - m_\psi) (-2) (g_{\mu\alpha} g_{\rho\gamma} - g_{\mu\gamma} g_{\rho\alpha}) k_2^\mu k_1^\rho k_2^\alpha k_1^\gamma = \\ &= \frac{16 \cdot 8 g^2 G^2}{(p^2 - m^2)^2} (p_1 \cdot p_2 - m_\psi^2) ((k_2 \cdot k_1)^2 - M^4) \end{aligned} \quad (704)$$

La sezione d'urto differenziale nel sistema del baricentro

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega} &= \frac{1}{64 \pi^2} \frac{|\vec{k}|}{|\vec{p}| E^2} \frac{1}{4} \sum_{if} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \\ &= \frac{2 |\vec{k}|}{\pi^2 |\vec{p}| E^2} \frac{g^2 G^2}{(p^2 - m^2)^2} (p_1 \cdot p_2 - m_\psi^2) ((k_2 \cdot k_1)^2 - M^4) \end{aligned} \quad (705)$$

Nel baricentro

$$\begin{aligned}
p_1 &= \left(\frac{E}{2}, \vec{p}\right) & p_2 &= \left(\frac{E}{2}, -\vec{p}\right) & p^2 &= E^2 \\
k_1 &= \left(\frac{E}{2}, \vec{k}\right) & k_2 &= \left(\frac{E}{2}, -\vec{k}\right) \\
|\vec{p}|^2 &= \frac{1}{4}(E^2 - 4m_\psi^2) & |\vec{k}|^2 &= \frac{1}{4}(E^2 - 4M^2) \\
p_1 \cdot p_2 &= \frac{E^2}{4} + \vec{p}^2 = \frac{E^2}{2} - m_\psi^2 \\
k_1 \cdot k_2 &= \frac{E^2}{4} + \vec{k}^2 = \frac{E^2}{2} - M^2
\end{aligned} \tag{706}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega} &= \frac{\sqrt{E^2 - 4M^2}}{\sqrt{(E^2 - 4m_\psi^2)E^2}} \frac{2g^2 G^2}{\pi^2 (E^2 - m^2)^2} (p_1 \cdot p_2 - m_\psi^2) (k_2 \cdot k_1 - M^2) (k_2 \cdot k_1 + M^2) = \\
&= \frac{\sqrt{E^2 - 4M^2}}{\sqrt{(E^2 - 4m_\psi^2)E^2}} \frac{2g^2 G^2}{\pi^2 E^2 (E^2 - m^2)^2} \frac{1}{2}(E^2 - 4m_\psi^2) \frac{1}{2}(E^2 - 4M^2) \frac{E^2}{2} = \\
&= \frac{g^2 G^2}{4\pi^2} \sqrt{(E^2 - 4M^2)(E^2 - 4m_\psi^2)} \frac{E^2 - 4M^4}{(E^2 - m^2)^2}
\end{aligned} \tag{707}$$

La sezione d'urto totale

$$\sigma_{fi} = \frac{1}{2} \frac{g^2 G^2}{\pi} \sqrt{(E^2 - 4M^2)(E^2 - 4m_\psi^2)} \frac{E^2 - 4M^4}{(E^2 - m^2)^2} \tag{708}$$

Domanda 2

Scriviamo l'ampiezza

$$\mathcal{M}_{fi}(\lambda, \sigma) = \frac{8gGi}{p^2 - m^2} \bar{v}(p_2, \lambda) u(p_1, \lambda) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_2^\mu \bar{\epsilon}^\nu(k_2, \sigma) k_1^\rho \bar{\epsilon}^\sigma(k_1, \sigma) \tag{709}$$

nel sistema del centro di massa. I vettori di polarizzazione dei fermioni soddisfano¹⁰

$$\bar{v}(p_2, \lambda) u(p_1, \lambda) = i\lambda \sqrt{E^2 - 4m_\psi^2} \tag{710}$$

¹⁰Si noti che poiché $\bar{\psi}\psi$ è un vero scalare, le ampiezze con $\lambda = \pm 1$ sono uguali.

I vettori di polarizzazione dei vettori sono prendendo l'asse di propagazione dei vettori lungo z

$$\begin{aligned}
k^\mu &= \left(\frac{E}{2}, \vec{k}\right) & \bar{k}^\mu &= \left(\frac{E}{2}, -\vec{k}\right) & \vec{k} &= k \hat{z} \\
\epsilon^\mu(k, \pm) &= (0, \vec{\epsilon}_\pm, 0) & \epsilon^\mu(\bar{k}, \pm) &= (0, \vec{\epsilon}_\mp, 0) & (\epsilon^\mu(\bar{k}, \pm))^* &= (0, \vec{\epsilon}_\pm, 0) \\
\epsilon^\mu(k, 0) &= \left(\frac{|k|}{M}, 0, 0, \frac{\omega}{M}\right) & \epsilon^\mu(\bar{k}, 0)^* &= \left(\frac{|k|}{M}, 0, 0, -\frac{\omega}{M}\right)
\end{aligned}$$

Quindi¹¹

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_2^\mu \bar{\epsilon}^\nu(k_2, \pm) k_1^\rho \bar{\epsilon}^\sigma(k_1, \pm) &= \epsilon_{0ijk} k_2^0 \bar{\epsilon}^i(k_2, \pm) k_1^j \bar{\epsilon}^k(k_1, \pm) + \\
&+ \epsilon_{ji0k} k_2^j \bar{\epsilon}^i(k_2, \pm) k_1^0 \bar{\epsilon}^k(k_1, \pm) = \\
&= \epsilon_{ijk} E k^j \bar{\epsilon}^i(k_2, \pm) \bar{\epsilon}^k(k_1, \pm) = (\vec{\bar{\epsilon}}(k_1, \pm) \times \vec{\bar{\epsilon}}(k_2, \pm)) \cdot \vec{k} E = \\
&= \pm i |\vec{k}| E
\end{aligned} \tag{711}$$

e

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_2^\mu \bar{\epsilon}^\nu(k_2, 0) k_1^\rho \bar{\epsilon}^\sigma(k_1, 0) &= \epsilon_{i3j0} k_2^i \bar{\epsilon}^3(k_2, 0) k_1^j \bar{\epsilon}^0(k_1, 0) + \\
&+ \epsilon_{i0j3} k_2^i \bar{\epsilon}^0(k_2, 0) k_1^j \bar{\epsilon}^3(k_1, 0) = \\
&= \epsilon_{0ij3} k_2^i \bar{\epsilon}^3(k_2, 0) k_1^j \bar{\epsilon}^0(k_1, 0) - \epsilon_{0ij3} k_2^i \bar{\epsilon}^0(k_2, 0) k_1^j \bar{\epsilon}^3(k_1, 0) = 0
\end{aligned} \tag{712}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{fi}(\lambda, \pm) &= \frac{8gGi}{E^2 - m^2} i \sqrt{E^2 - 4m_\psi^2} (\pm i |\vec{k}| E) = \\
&= \mp \frac{4gGi}{E^2 - m^2} \sqrt{E^2 - 4m_\psi^2} \sqrt{E^2 - 4M^2} E \\
\mathcal{M}_{fi}(\lambda, 0) &= 0
\end{aligned} \tag{713}$$

Si noti che $\mathcal{M}_{fi}(\lambda_1, -\lambda_2, \sigma_1, \sigma_2) = 0$. Pertanto tutte le altre ampiezze sono nulle. Quindi

$$\frac{1}{4} \sum_{if} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{16g^2G^2}{(E^2 - m^2)^2} (E^2 - 4m_\psi^2) (E^2 - 4M^2) E^2 \tag{714}$$

in accordo col calcolo nella sezione precedente.

¹¹Si noti che poiché $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}$ è uno pseudo-scalare le ampiezze con elicità $\sigma = \pm$ opposte hanno segni opposti.

Corso di Teoria dei Campi

Prof. Camillo Imbimbo

Esame scritto del 22/07/2019

Problema 1

Un fermione di Dirac ψ di massa m_ψ , un campo vettoriale V_μ reale di massa m ed uno scalare complesso ϕ di massa M interagiscono attraverso la densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_I = g V_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + i G V_\mu (\phi^\dagger \partial^\mu \phi - \partial \phi^\dagger \phi)$$

Domanda 1

Si calcoli all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni la sezione d'urto integrata per l'annichilazione nel centro di massa di una coppia fermione-antifermione $(\psi, \bar{\psi})$ non polarizzata in una coppia $(\phi, \bar{\phi})$ in funzione dell'energia della coppia particella-antiparticella nel centro di massa.

Domanda 2

Si determinino le sezioni d'urto differenziali polarizzate per stati di elicità definita dei fermioni.

Soluzione dell' esame scritto del 22/07/2019

Problema 1

Domanda 1

Indichiamo con p_1 e p_2 i quadri-impulsi del fermione e dell'anti-fermione e con k_1 e k_2 i quadri-impulso dello scalare e antiscalare carichi. Abbiamo

$$\begin{aligned}
 p &= p_1 + p_2 = k_1 + k_2 \\
 m_\psi^2 + p_1 \cdot p_2 &= M^2 + k_1 \cdot k_2 \\
 k_1 \cdot p_1 &= k_2 \cdot p_2 \\
 k_1 \cdot p_2 &= k_2 \cdot p_1
 \end{aligned} \tag{715}$$

L'ampiezza di transizione invariante è

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{fi} &= g G J_{f;12}^\mu \frac{i}{p^2 - m^2} \left(\frac{p^\mu p^\nu}{m^2} - g^{\mu\nu} \right) J_{s;12}^\nu = \\
 &= -\frac{i}{p^2 - m^2} g G J_{f;12}^\mu J_{s;\mu 12} = \\
 &= \frac{i 2}{p^2 - m^2} g G \bar{v}_2 \gamma^\mu u_1 k_{1\mu}
 \end{aligned} \tag{716}$$

dove

$$J_{f;12}^\mu = \bar{v}(p_2, \lambda_2) \gamma^\mu u(p_1, \lambda_1) \equiv \bar{v}_2 \gamma^\mu u_1 \tag{717}$$

è l'elemento di matrice della corrente dei fermioni e

$$J_{s;12}^\mu = (k_2 - k_1)^\mu = (p - 2 k_1)^\mu \tag{718}$$

quello degli scalari, e dove abbiamo usato la conservazione delle correnti.

L'ampiezza mediata sugli stati iniziali

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \sum_i |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{g^2 G^2}{4(p^2 - m^2)^2} \text{Tr} \gamma_\mu (\not{p}_1 + m_\psi) \gamma_\nu (\not{p}_2 - m_\psi) \times \\
 &\times J_{s;12}^\mu J_{s;12}^{*\nu} = \\
 &= \frac{4 g^2 G^2}{(p^2 - m^2)^2} \left(\frac{1}{4} \text{Tr} \gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_2 - m_\psi^2 g_{\mu\nu} \right) k_1^\mu k_1^\nu = \\
 &= \frac{4 g^2 G^2}{(p^2 - m^2)^2} (p_{1\mu} p_{2\nu} - g_{\mu\nu} (m_\psi^2 + p_1 \cdot p_2) + p_{2\mu} p_{1\nu}) k_1^\mu k_1^\nu = \\
 &= \frac{4 g^2 G^2}{(p^2 - m^2)^2} (2 p_1 \cdot k_1 p_2 \cdot k_1 - M^2 (M^2 + k_1 \cdot k_2))
 \end{aligned} \tag{719}$$

dove abbiamo usato

$$\frac{1}{4} \text{Tr} \gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_2 = p_{1\mu} p_{2\nu} - g_{\mu\nu} p_1 \cdot p_2 + p_{2\mu} p_{1\nu} \quad (720)$$

La sezione d'urto differenziale nel sistema del baricentro

$$\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{|\vec{k}|}{|\vec{p}| E^2} \frac{1}{4} \sum_{if} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \quad (721)$$

Nel baricentro

$$\begin{aligned} p_1 &= \left(\frac{E}{2}, \vec{p}\right) & p_2 &= \left(\frac{E}{2}, -\vec{p}\right) & p^2 &= E^2 \\ k_1 &= \left(\frac{E}{2}, \vec{k}\right) & k_2 &= \left(\frac{E}{2}, -\vec{k}\right) \\ |\vec{p}|^2 &= \frac{1}{4} (E^2 - 4m_\psi^2) & |\vec{k}|^2 &= \frac{1}{4} (E^2 - 4M^2) \\ p_1 \cdot p_2 &= \frac{E^2}{4} + \vec{p}^2 = \frac{E^2}{2} - m_\psi^2 \\ k_1 \cdot k_2 &= \frac{E^2}{4} + \vec{k}^2 = \frac{E^2}{2} - M^2 \\ p_1 \cdot k_1 &= \frac{E^2}{4} - \vec{p} \cdot \vec{k} \\ p_2 \cdot k_1 &= \frac{E^2}{4} + \vec{p} \cdot \vec{k} \end{aligned} \quad (722)$$

Dunque

$$\begin{aligned} 2p_1 \cdot k_1 p_2 \cdot k_1 - M^2 (M^2 + k_1 \cdot k_2) &= \frac{1}{4} (E^2 - 4M^2) \frac{E^2}{2} - 2(\vec{p} \cdot \vec{k})^2 = \\ &= \frac{1}{8} (E^2 - 4M^2) \left[E^2 \sin^2 \theta + 4m_\psi^2 \cos^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (723)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega} &= \frac{1}{64 \cdot 8\pi^2} \frac{4g^2 G^2}{(E^2 - m^2)^2} \sqrt{\frac{E^2 - 4M^2}{E^2 - 4m_\psi^2}} \times \\ &\times \left(1 - \frac{4M^2}{E^2}\right) \left[E^2 \sin^2 \theta + 4m_\psi^2 \cos^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (724)$$

La sezione d'urto totale

$$\sigma_{fi} = \frac{1}{48\pi} \frac{g^2 G^2}{(E^2 - m^2)^2} \sqrt{\frac{E^2 - 4M^2}{E^2 - 4m_\psi^2}} \left(1 - \frac{4M^2}{E^2}\right) \left[E^2 + 2m_\psi^2\right] \quad (725)$$

Domanda 2

Scriviamo l'ampiezza

$$\mathcal{M}_{fi}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{i2}{p^2 - m^2} g G \bar{v}_2 \gamma^\mu u_1 k_{1\mu} \quad (726)$$

nel sistema del centro di massa, in cui

$$\vec{k} = |k| (\sin \theta, 0, \cos \theta) \quad \vec{p} = |\vec{p}| (0, 0, 1) \quad (727)$$

$$\bar{v}_2 \gamma^\mu u_1 k_{1\mu} = \frac{E}{2} v_2^\dagger u_1 - |\vec{k}| \bar{v}_2 (\sin \theta \gamma^1 + \cos \theta \gamma^3) u_1 \quad (728)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \bar{v}_2(\pm) \gamma^\mu u_1(\pm) k_{1\mu} &= \mp i \sqrt{E^2 - 4M^2} m_\psi \cos \theta \\ \bar{v}_2(\pm) \gamma^\mu u_1(\mp) k_{1\mu} &= -\frac{i}{2} \sqrt{E^2 - 4M^2} E \sin \theta \end{aligned} \quad (729)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi}(\pm, \pm) &= \pm \frac{gG}{E^2 - m^2} \sqrt{E^2 - 4M^2} 2m_\psi \cos \theta \\ \mathcal{M}_{fi}(\pm, \mp) &= \frac{gG}{E^2 - m^2} \sqrt{E^2 - 4M^2} E \sin \theta \end{aligned} \quad (730)$$

Quindi

$$\frac{1}{4} \sum_i |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{1}{2} \frac{g^2 G^2}{(E^2 - m^2)^2} (E^2 - 4M^2) (E^2 \sin^2 \theta + 4m_\psi \cos^2 \theta) \quad (731)$$

in accordo con il risultato della sezione precedente. Le sezioni d'urto polar-

izzate sono

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{\pm\pm}}{d\Omega} &= \frac{1}{128\pi^2} \frac{g^2 G^2}{(E^2 - m^2)^2} \sqrt{\frac{E^2 - 4M^2}{E^2 - 4m_\psi^2}} \times \\
&\quad \times \left(1 - \frac{4M^2}{E^2}\right) 4m_\psi^2 \cos^2 \theta \\
\frac{d\sigma_{\pm\mp}}{d\Omega} &= \frac{1}{128\pi^2} \frac{g^2 G^2}{(E^2 - m^2)^2} \sqrt{\frac{E^2 - 4M^2}{E^2 - 4m_\psi^2}} \times \\
&\quad \times \left(1 - \frac{4M^2}{E^2}\right) E^2 \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{732}$$

Corso di Teoria dei Campi
Prof. Camillo Imbimbo

Esame scritto del 17/09/2019

Problema 1

Un campo vettoriale V_μ reale di massa m ed un vettore complesso W_μ di massa M interagiscono attraverso la densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_I = i G V_\mu (W_\nu^\dagger F^{\mu\nu}(W) - F^{\dagger\mu\nu}(W) W_\nu)$$

dove $F_{\mu\nu}(W) = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$.

Domanda 1

Si calcoli all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni il tempo di decadimento del processo $V \rightarrow W + \bar{W}$.

Domanda 2

Si determini la distribuzione angolare nel sistema del centro di massa delle particelle W e \bar{W} prodotte nel decadimento nei vari stati di elicità definita, prendendo come asse delle z la direzione dello stato di spin λ della particella V che decade.

Soluzione dell' esame scritto del 17/09/2019

Problema 1

Domanda 1

Indichiamo con p il quadri-impulso del vettore V e con k_1 e k_2 i quadri-impulso del vettore e antivettore (W, \bar{W}) carichi:

$$\begin{aligned} p &= k_1 + k_2 \\ m^2 &= 2 M^2 + 2 k_1 \cdot k_2 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = \frac{m^2}{2} - M^2 \end{aligned} \quad (733)$$

L'ampiezza invariante è

$$\mathcal{M}_{fi} = G \epsilon_\mu(p) J_{v;12}^\mu \quad (734)$$

dove $\epsilon^\mu(p)$ è il vettore di polarizzazione del vettore V e

$$\begin{aligned} J_{v;12}^\mu &= (k_2 - k_1)^\mu \epsilon_1^* \cdot \epsilon_2^* + k_1 \cdot \epsilon_2^* \epsilon_1^{*\mu} - k_2 \cdot \epsilon_1^* \epsilon_2^{*\mu} = \\ &= \epsilon_1^{*\alpha} \epsilon_2^{*\beta} [(k_2 - k_1)^\mu g_{\alpha\beta} + k_{1\beta} \delta_\alpha^\mu - k_{2\alpha} \delta_\beta^\mu] = \\ &\equiv \epsilon_1^{*\alpha} \epsilon_2^{*\beta} J_{\alpha\beta}^\mu \end{aligned} \quad (735)$$

è l'elemento di matrice della corrente dei vettori carichi (W, \bar{W}) i cui vettori di polarizzazione sono $\epsilon_{1,2}^\mu = \epsilon^\mu(k_{1,2}, \sigma_{1,2})$. Nel baricentro

$$\begin{aligned} k_1 &= \left(\frac{m}{2}, \vec{k}\right) & k_2 &= \left(\frac{m}{2}, -\vec{k}\right) \\ |\vec{k}|^2 &= \frac{1}{4} (m^2 - 4 M^2) \end{aligned} \quad (736)$$

La corrente è conservata

$$p_\mu J_{v;12}^\mu = p \cdot (k_2 - k_1) \epsilon_1^* \cdot \epsilon_2^* + k_1 \cdot \epsilon_2^* \epsilon_1^* \cdot p - k_2 \cdot \epsilon_1^* \epsilon_2^* \cdot p = 0 \quad (737)$$

grazie a $p = k_1 + k_2$ e $k_1 \cdot \epsilon_1 = k_2 \cdot \epsilon_2 = 0$.

Mediando sugli stati iniziali e sommando su quelli finali:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{i,f} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= G^2 \left(\frac{p^\mu p^\nu}{m^2} - g^{\mu\nu} \right) \sum_f J_{v;12}^\mu J_{v;12}^{*\nu} = \\ &= -\frac{1}{3} G^2 \sum_f J_{v;12}^\mu J_{v;\mu 12}^* \end{aligned} \quad (738)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}
\sum_f J_{v;12}^\mu J_{v;\mu 12}^* &= \left(\frac{k_1^\alpha k_1^\gamma}{M^2} - g^{\alpha\gamma} \right) [(k_2 - k_1)^\mu g_{\alpha\beta} + k_{1\beta} \delta_\alpha^\mu - k_{2\alpha} \delta_\beta^\mu] \times \\
&\quad \times \left(\frac{k_2^\beta k_2^\delta}{M^2} - g^{\beta\delta} \right) [(k_2 - k_1)_\mu g_{\gamma\delta} + k_{1\delta} g_{\mu\gamma} - k_{2\gamma} g_{\mu\delta}] = \\
&= \left[\frac{k_2^\mu k_1^\beta - k_1 \cdot k_2 g^{\mu\beta}}{M^2} k_1^\gamma - (k_2 - k_1)^\mu g^{\gamma\beta} - k_1^\beta g^{\mu\gamma} + k_2^\gamma g^{\mu\beta} \right] \times \\
&\quad \times \left[\frac{-k_{2\gamma} k_{1\mu} + k_1 \cdot k_2 g_{\mu\gamma}}{M^2} k_{2\beta} - (k_2 - k_1)_\mu g_{\gamma\beta} - k_{1\beta} g_{\mu\gamma} + k_{2\gamma} g_{\mu\beta} \right] = \\
&= \frac{1}{M^4} \times 0 + \frac{1}{M^2} [-M^4 + (k_1 \cdot k_2)^2 + 0 + 0 - 3(k_1 \cdot k_2)^2 + \\
&\quad -M^4 + (k_1 \cdot k_2)^2 - 3(k_1 \cdot k_2)^2] + \\
&\quad + 12M^2 - 6k_1 \cdot k_2 = \\
&= \frac{2}{M^2} [5M^4 - 3M^2 k_1 \cdot k_2 - 2(k_1 \cdot k_2)^2] = \\
&= \frac{2}{M^2} (M^2 - k_1 \cdot k_2) (5M^2 + 2k_1 \cdot k_2) \tag{739}
\end{aligned}$$

In definitiva

$$\frac{1}{3} \sum_{i,f} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = G^2 \frac{(m^2 - 4M^2)(m^2 + 3M^2)}{3M^2} \tag{740}$$

La probabilità di decadimento per unità di tempo è pertanto

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{8\pi m^2} G^2 \frac{(m^2 - 4M^2)(m^2 + 3M^2)}{3M^2} \frac{1}{2} (m^2 - 4M^2)^{\frac{1}{2}} \tag{741}$$

Domanda 2

Nel sistema del centro di massa prendiamo come asse delle z la direzione dello stato di spin del vettore V che decade. Abbiamo

$$\begin{aligned}
k_1 &= \left(\frac{m}{2}, \vec{k} \right) & \vec{k} &= |\vec{k}| (\sin \theta, 0, \cos \theta) & |\vec{k}|^2 &= \frac{1}{4} (m^2 - 4M^2) \\
k_2 - k_1 &= (0, -2\vec{k}) & k_1 + k_2 &= (m, \vec{0}) \tag{742}
\end{aligned}$$

I vettori di polarizzazioni della particella V sono

$$\epsilon^{(\lambda=0)} = (0, 0, 0, 1) \quad \epsilon^{(\lambda=\pm 1)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, \pm i, 0) \tag{743}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\epsilon^{(\lambda=0)} \cdot (k_2 - k_1) &= 2 |\vec{k}| \cos \theta \\ \epsilon^{(\lambda=\pm 1)} \cdot (k_2 - k_1) &= \mp \sqrt{2} |\vec{k}| \sin \theta\end{aligned}\quad (744)$$

I vettori di polarizzazione $\epsilon_{1,2}(\sigma_{1,2})$ del W e del \bar{W} soddisfano

$$\epsilon_{1,2}^0(\sigma_{1,2}) = \frac{2 \vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_{1,2}(\sigma_{1,2})}{m} \quad (745)$$

e quindi

$$\begin{aligned}\epsilon_{1,2}(0) &= \left(\frac{|\vec{k}|}{M}, \pm \sin \theta \frac{m}{2M}, 0, \pm \cos \theta \frac{m}{2M} \right) \\ \epsilon_1(\pm) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -\cos \theta, \mp i, \sin \theta) \\ \epsilon_2(\pm) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (0, \cos \theta, \mp i, -\sin \theta) = -(\epsilon_1(\pm))^*\end{aligned}\quad (746)$$

Come verifica, si osservi che per $\theta = 0$, i vettori $\epsilon_{1,2}(\sigma)$ diventano

$$\begin{aligned}\epsilon_{1,2}(0)|_{\theta=0} &= \left(\frac{|\vec{k}|}{M}, 0, 0, \pm \frac{m}{2M} \right) \\ \epsilon_1(\pm)|_{\theta=0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -1, \mp i, 0) \\ \epsilon_2(\pm)|_{\theta=0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, \mp i, 0) = -(\epsilon_1(\pm))^*\end{aligned}\quad (747)$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\epsilon_1^*(\sigma_1) \cdot \epsilon_2^*(\sigma_2) &= \delta_{\sigma_1, \sigma_2} n_{\sigma_1} \quad n_{\sigma_1} = \left\{ \frac{m^2 - 2M^2}{2M^2}, 1, 1 \right\} \\ k_1 \cdot \epsilon_2^*(0) &= k_2 \cdot \epsilon_1^*(0) = \frac{m |\vec{k}|}{M} \quad k_1 \cdot \epsilon_2^*(\pm) = k_2 \cdot \epsilon_1^*(\pm) = 0\end{aligned}\quad (748)$$

Infine

$$\begin{aligned}
\epsilon^{(\lambda=0)} \cdot \epsilon_1^*(0) &= -\epsilon^{(\lambda=0)} \cdot \epsilon_2^*(0) = -\frac{m}{2M} \cos \theta \\
\epsilon^{(\lambda=0)} \cdot \epsilon_1(\pm) &= -\epsilon^{(\lambda=0)} \cdot \epsilon_2^*(\pm) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \\
\epsilon^{(\lambda=\pm)} \cdot \epsilon_1^*(0) &= -\epsilon^{(\lambda=\pm)} \cdot \epsilon_2^*(0) = \pm \frac{m}{2\sqrt{2}M} \sin \theta \\
\epsilon^{(\lambda=\pm)} \cdot \epsilon_1^*(\pm) &= -\epsilon^{(\lambda=\pm)} \cdot \epsilon_2^*(\mp) = \mp \cos^2 \frac{\theta}{2} \\
\epsilon^{(\lambda=\pm)} \cdot \epsilon_1^*(\mp) &= -\epsilon^{(\lambda=\pm)} \cdot \epsilon_2^*(\pm) = \pm \sin^2 \frac{\theta}{2}
\end{aligned} \tag{749}$$

Le ampiezze

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{fi}^{\lambda; \sigma_1, \sigma_2} &= G \epsilon_\mu^{(\lambda)} J_{v;12}^\mu = \\
&= G [\epsilon^{(\lambda)} \cdot (k_2 - k_1) \epsilon_1^* \cdot \epsilon_2^* + k_1 \cdot \epsilon_2^* \epsilon^{(\lambda)} \cdot \epsilon_1^* - k_2 \cdot \epsilon_1^* \epsilon^{(\lambda)} \cdot \epsilon_2^*] \tag{750}
\end{aligned}$$

si scrivono pertanto¹²

$$\mathcal{M}_{fi}^{\lambda=0; \sigma_1, \sigma_2} = G \sqrt{m^2 - 4M^2} \begin{pmatrix} -\cos \theta & -\frac{m}{2\sqrt{2}M} \sin \theta & -\frac{m}{2\sqrt{2}M} \sin \theta \\ -\frac{m}{2\sqrt{2}M} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\frac{m}{2\sqrt{2}M} \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \tag{751}$$

e

$$\mathcal{M}_{fi}^{\lambda=-1; \sigma_1, \sigma_2} = G \sqrt{m^2 - 4M^2} \begin{pmatrix} -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \frac{m}{2M} \cos^2 \frac{\theta}{2} & -\frac{m}{2M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ -\frac{m}{2M} \sin^2 \frac{\theta}{2} & \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{m}{2M} \cos^2 \frac{\theta}{2} & 0 & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{752}$$

e

$$\mathcal{M}_{fi}^{\lambda=1; \sigma_1, \sigma_2} = G \sqrt{m^2 - 4M^2} \begin{pmatrix} \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \frac{m}{2M} \sin^2 \frac{\theta}{2} & -\frac{m}{2M} \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ -\frac{m}{2M} \cos^2 \frac{\theta}{2} & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{m}{2M} \sin^2 \frac{\theta}{2} & 0 & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{753}$$

¹²L'ordine degli indici è $\sigma = \{0, 1, -1\}$.