

Corso di Elettromagnetismo ed Ottica

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 09/04/2008

Problema 1

Si considerino i campi, scalare e vettoriale,

$$f(\vec{x}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{x})$$

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{x})$$

Calcolare:

- il gradiente di $f(\vec{x})$;
- la divergenza di $\vec{v}(\vec{x})$;
- il rotore di $\vec{v}(\vec{x})$;
- il flusso di $\vec{v}(\vec{x})$ attraverso la sfera di centro in $\vec{x} = 0$ e raggio $|\vec{a}|$;
- la circuitazione di $\vec{v}(\vec{x})$ lungo la circonferenza che giace sul piano (x, y) con centro nell'origine e raggio $|\vec{a}|$.

Problema 2

Si consideri la distribuzione di carica $\rho(\vec{x})$

$$\rho(\vec{x}) = \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{x} & \text{per } |\vec{x}| \leq R \\ 0 & \text{per } |\vec{x}| > R \end{cases} \quad (1)$$

dove \vec{a} è un vettore costante e R reale positivo. Si calcoli la componente del campo elettrico prodotto dalla distribuzione di carica $\rho(\vec{x})$ a distanze $|\vec{x}|$ grandi rispetto a R , parallela ad \vec{a} .

Prova Scritta del 9/4/2008: Soluzione

Problema 1

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \epsilon_{ijk} a^i b^j x^k \\ \partial_i f(\vec{x}) &= \epsilon_{jki} a^j b^k \\ \vec{\nabla} f(\vec{x}) &= \vec{a} \wedge \vec{b} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} v^i &= \epsilon^{ijk} a_j \epsilon_{klm} b^l x^m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{lj}) a^j b^l x^m \\ &= b^i a_j x^j - x^i a_j b^j \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \partial_i v^i = \vec{a} \cdot \vec{b} - 3 \vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \epsilon^{ijk} \partial_j v^k &= \epsilon^{ijk} b^k a_j \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{v} &= \vec{a} \wedge \vec{b} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \int_S d^2 \sigma \hat{r} \cdot \vec{v} &= -\frac{8\pi}{3} |\vec{a}|^3 \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \int_C \vec{v} \cdot d\vec{s} &= (\vec{a} \wedge \vec{b})_z \pi |\vec{a}|^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Problema 2

Prendiamo l'asse delle z lungo \vec{a} . Il momento di dipolo $\vec{p} = p \hat{z}$ della distribuzione di carica è parallelo ad \vec{a} :

$$\begin{aligned} p &= \int_0^R dr \int_0^\pi a (r \cos \theta)^2 2\pi \sin \theta d\theta r^2 dr \\ &= 2\pi a \int_0^R dr r^4 \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{4\pi a R^5}{15} \end{aligned}$$

Il potenziale a grandi distanze è quello di un dipolo

$$4\pi \epsilon_0 \phi(\vec{x}) = \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (5)$$

Il campo elettrico è

$$4\pi \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) = \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{p}}{|\vec{x}|^3} = \frac{3p \cos \theta \hat{r} - p \hat{z}}{|\vec{x}|^3} \quad (6)$$

La componente parallela ad \vec{a} è

$$4 \pi \epsilon_0 E_z(\vec{x}) = p \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{|\vec{x}|^3} \quad (7)$$

Corso di Elettromagnetismo ed Ottica

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 17/04/2008

Problema 1

Si consideri il campo vettoriale,

$$\vec{v}(\vec{x}) = \frac{\vec{a} \wedge \vec{x}}{|\vec{x}|^2}$$

Si calcoli:

- la divergenza di $\vec{v}(\vec{x})$;
- il rotore di $\vec{v}(\vec{x})$;
- la circuitazione di \vec{v} lungo un cerchio C , di centro in $\vec{x} = 0$, raggio R e giacente nel piano ortogonale al vettore \vec{a} attraverso la sua definizione come integrale di linea.
- Calcolare il flusso del rotore di \vec{v} attraverso un disco D il cui bordo è C . Confrontare con il risultato di c) e discutere.

Problema 2

Si calcoli la carica indotta sulla superficie di un conduttore piano infinito in presenza di un dipolo elettrico \vec{p} , parallelo al piano e posto a distanza d da esso.

Problema 3

Dimostrare che se $\phi_1(\vec{x})$ e $\phi_2(\vec{x})$ sono due funzioni armoniche su una regione compatta di R^3 con bordo S , le cui derivate *normali* sul bordo coincidono

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla} \phi_1 \Big|_S = \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \phi_2 \Big|_S \quad (8)$$

$\phi_1(\vec{x})$ e $\phi_2(\vec{x})$ differiscono per una costante.

Prova Scritta del 17/4/2008: Soluzione

Problema 1

$$\begin{aligned}
 v^i &= \frac{\epsilon^{ijk} a_j x_k}{r^2} \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \partial_i v^i = \frac{\epsilon^{ijk} a_j \delta_{ik}}{r^2} - \frac{\epsilon^{ijk} a_j 2 x_k x_i}{r^4} = 0 \\
 (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})_i &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{kmn} a^m \partial_j \frac{x^n}{r^2} = \\
 &= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) a^m \left(\frac{\delta_{jn}}{r^2} - \frac{2 x^n x^j}{r^4} \right) = \\
 &= \frac{2 a_i}{r^2} - \frac{2 a_i}{r^2} + \frac{2 x_i \vec{a} \cdot \vec{x}}{r^4} = \frac{2 x_i \vec{a} \cdot \vec{x}}{r^4} \quad (9)
 \end{aligned}$$

Prendiamo l'asse delle z lungo \vec{a} . In questo sistema di coordinate

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= \frac{a}{r^2} (-y, x, 0) \\
 d\vec{s} &= d\theta (-y, x, 0)
 \end{aligned}$$

Consideriamo un cerchio C_z posto ad un'altezza z rispetto al piano (x, y) .

$$\oint_{C_z} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \frac{a}{r^2} \int_0^{2\pi} d\theta (x^2 + y^2) = \frac{2\pi a R^2}{R^2 + z^2} \quad (10)$$

dunque

$$\oint_{C_0} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 2\pi a \quad (11)$$

Calcoliamo il flusso del rotore attraverso D_z il disco posto ad altezza z rispetto al piano (x, y)

$$\begin{aligned}
 \int_{D_z} (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \cdot \hat{z} d^2\sigma &= \int_{D_z} \frac{2(\vec{a} \cdot \vec{x})^2}{a r^4} \rho d\rho d\theta = 2\pi \int_0^R \frac{2 a z^2 \rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^2} = \\
 &= 2\pi a z^2 \int_0^{R^2} \frac{dt}{(t + z^2)^2} = 2\pi a z^2 \left[-\frac{1}{t + z^2} \right]_0^{R^2} = \\
 &= 2\pi a z^2 \left[\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2 + R^2} \right] = 2\pi a \frac{R^2}{z^2 + R^2} \quad (12)
 \end{aligned}$$

in accordo con il calcolo dell'integrale di linea. Notiamo però che se avessimo calcolato il flusso direttamente su $D_{z=0}$ avremmo ottenuto come integrando

$$\vec{v} \cdot \hat{z} \Big|_{z=0} = \frac{2 a z^2}{(\rho^2 + z^2)^2} \Big|_{z=0} = 0 \quad (13)$$

La ragione è dovuta al fatto che \vec{v} ha una singolarità per $r = 0$.

Problema 2

Prendiamo il piano conduttore nel piano (x, y) , e la posizione del dipolo in $\vec{d} = d \hat{z}$, $\vec{p} = p \hat{x}$: il potenziale nel semispazio $z > 0$ è

$$4 \pi \epsilon_0 \phi(\vec{x}) = \frac{\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{d})}{|\vec{x} - \vec{d}|^3} - \frac{\vec{p} \cdot (\vec{x} + \vec{d})}{|\vec{x} + \vec{d}|^3} \quad (14)$$

Il campo elettrico

$$4 \pi \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) = \frac{3 \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{d}) (\vec{x} - \vec{d}) - \vec{p} (\vec{x} - \vec{d})^2}{|\vec{x} - \vec{d}|^5} + \frac{3 \vec{p} \cdot (\vec{x} + \vec{d}) (\vec{x} + \vec{d}) - \vec{p} (\vec{x} + \vec{d})^2}{|\vec{x} + \vec{d}|^5} \quad (15)$$

La densità di carica superficiale indotta sul piano conduttore è

$$\begin{aligned} 4 \pi \epsilon_0 E_z(\vec{x}) \Big|_{z=0} = 4 \pi \sigma(x, y) &= \frac{-3 p x d}{(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3 p x d}{(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{5}{2}}} = \\ &= -\frac{6 p x d}{(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned} \quad (16)$$

Problema 3

Sia

$$\varphi = \phi_1 - \phi_2 \quad (17)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \varphi) &= (\vec{\nabla} \varphi) \cdot (\vec{\nabla} \varphi) + \varphi \vec{\nabla}^2 \varphi = \\ &= (\vec{\nabla} \varphi) \cdot (\vec{\nabla} \varphi) \end{aligned} \quad (18)$$

Inoltre

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi \Big|_S = 0 \quad (19)$$

Dunque, se V è il dominio in cui $\phi_{1,2}$ sono armoniche ed $S = \partial V$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_V d^3\vec{x} (\vec{\nabla}\phi) \cdot (\vec{\nabla}\phi) &= \int_V d^3\vec{x} \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla}\phi) = \\ &= \int_S d^2a \phi \hat{n} \cdot \vec{\nabla}\phi = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

da cui

$$\vec{\nabla}\phi = 0 \quad (21)$$

in V , ovvero

$$\phi_1 = \phi_2 + C \quad (22)$$

con C costante.

Corso di Elettromagnetismo ed Ottica

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 11/06/2008

Problema 1

Si considerino due semipiani conduttori ortogonali, posti a potenziale nullo, uno giacente nel semipiano (x, z) con $x > 0$ e l'altro nel semipiano (y, z) con $y > 0$. Una carica q è collocata in $(d, d, 0)$, con $d > 0$.

Domanda 1

Si determini il potenziale nella regione $x > 0$ $y > 0$ e la densità di carica superficiale indotta sui due conduttori.

Problema 2

Un guscio sferico di raggio a e densità di carica superficiale uniforme σ ruota intorno ad un asse fissato a velocità angolare costante ω .

Domanda 1

Si calcoli il momento di dipolo magnetico della distribuzione di corrente data. Si calcoli il campo magnetico in un punto P posto a grande distanza dalla sfera.

Domanda 2

Si determini il campo magnetico esatto in un punto P generico. (*Suggerimento*: Si scelga un sistema di coordinate sferico con l'asse delle z passante per P).

Prova Scritta del 11/06/2008: Soluzione

Problema 1

Dobbiamo usare 3 cariche immagine:

$$\begin{array}{lll} -q & \text{in} & (-d, d, 0) \\ -q & \text{in} & (d, -d, 0) \\ q & \text{in} & (-d, -d, 0) \end{array}$$

Il potenziale nella regione $x > 0, y > 0$ è

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\epsilon_0}{q}\phi(x, y, z) &= \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + (y-d)^2 + z^2}} + \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + (y-d)^2 + z^2}} + \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + (y+d)^2 + z^2}} + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + (y+d)^2 + z^2}} \end{aligned} \quad (23)$$

La carica superficiale sulla superficie $x = 0, y > 0$ è

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{q}\sigma &= -\frac{4\pi\epsilon_0}{q}\partial_x\phi(x, y, z)|_{x=0} = \left[\frac{x-d}{((x-d)^2 + (y-d)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{x+d}{((x+d)^2 + (y-d)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{x-d}{((x-d)^2 + (y+d)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x+d}{((x+d)^2 + (y+d)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right]_{x=0} = \\ &= \frac{-d}{(d^2 + (y-d)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{d}{(d^2 + (y-d)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ &\quad - \frac{-d}{(d^2 + (y+d)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{d}{(d^2 + (y+d)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{2d}{(d^2 + (y+d)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2d}{(d^2 + (y-d)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (24)$$

La densità di carica su $y = 0, x > 0$ è data dalla stessa espressione con la sostituzione di y con x .

Problema 2

Domanda 1

Prendiamo l'asse delle z lungo l'asse di rotazione, cioè $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$. Poiché la distribuzione di corrente è la somma di spire di corrente circolari giacenti su piani ortogonali a z il momento di dipolo magnetico è diretto lungo z

$$\vec{\mu} = \mu \hat{z} \quad (25)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^\pi dI \pi a^2 \sin^2 \theta = \int_0^\pi \sigma a d\theta (\omega a \sin \theta) \pi a^2 \sin^2 \theta = \\ &= \pi a^4 \sigma \omega \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta = \\ &= \pi a^4 \sigma \omega \int_{-1}^1 dt (1 - t^2) = \frac{4 \pi a^4 \sigma \omega}{3} \end{aligned} \quad (26)$$

Dunque

$$\vec{\mu} = \frac{4 \pi a^4 \sigma \omega}{3} \hat{z} \quad (27)$$

Il campo vettore a grandi distanze è pertanto

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4 \pi c^2 \epsilon_0} \frac{\vec{\mu} \wedge \vec{x}}{|\vec{x}|^3} = \frac{a^4 \sigma}{3 c^2 \epsilon_0} \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{x}}{|\vec{x}|^3} \quad (28)$$

ed il campo magnetico

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\sigma a^4}{3 \epsilon_0 c^2} \frac{3 \vec{\omega} \cdot \vec{x} \vec{x} - |\vec{x}|^2 \vec{\omega}}{|\vec{x}|^5}$$

Domanda 2

Scegliamo il sistema di coordinate in modo che le coordinate del punto P siano

$$\vec{x} = (0, 0, z) \quad z > 0 \quad (29)$$

e

$$\vec{\omega} = \omega (\sin \alpha \hat{x} + \cos \alpha \hat{z}) \quad (30)$$

è la velocità angolare della sfera carica. La densità di corrente superficiale in un punto sulla superficie della sfera di coordinate

$$\vec{x}' = a (\sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}) \quad (31)$$

è

$$\begin{aligned} \vec{k}(\vec{x}') &= \sigma \vec{v}' = \sigma \vec{\omega} \wedge \vec{x}' = \\ &= \sigma \omega (\sin \alpha \hat{x} + \cos \alpha \hat{z}) \wedge a (\sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}) = \\ &= \sigma \omega a (\sin \alpha \sin \theta \sin \phi \hat{z} - \sin \alpha \cos \theta \hat{y} + \cos \alpha \sin \theta \cos \phi \hat{y} + \\ &\quad - \cos \alpha \sin \theta \sin \phi \hat{x}) = \\ &= \sigma \omega a (\sin \alpha \sin \theta \sin \phi \hat{z} + (\cos \alpha \sin \theta \cos \phi - \sin \alpha \cos \theta) \hat{y} + \\ &\quad - \cos \alpha \sin \theta \sin \phi \hat{x}) \end{aligned}$$

La distanza del punto \vec{x}' da P è

$$|\vec{x}' - \vec{x}|^2 = a^2 \sin^2 \theta + (a \cos \theta - z)^2 \quad (32)$$

Il potenziale vettore nel punto P

$$\begin{aligned} 4 \pi \epsilon_0 c^2 \vec{A}(P) &= \int_S d^2 a' \frac{\vec{k}(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|} = \\ &= a^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\vec{k}(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|} = \\ &= \sigma \omega a^3 \hat{y} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{(\cos \alpha \sin \theta \cos \phi - \sin \alpha \cos \theta)}{\sqrt{a^2 + z^2 - 2 a z \cos \theta}} = \\ &= 2 \pi \sigma \omega a^3 \hat{y} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{-\sin \alpha \cos \theta}{\sqrt{a^2 + z^2 - 2 a z \cos \theta}} = \\ &= -2 \pi \sigma \omega a^3 \sin \alpha \hat{y} \int_{-1}^1 dt \frac{t}{\sqrt{a^2 + z^2 - 2 a z t}} \quad (33) \end{aligned}$$

Posto

$$\eta = a^2 + z^2 - 2 a z t \quad (34)$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
4 \pi \epsilon_0 c^2 \vec{A}(P) &= -\frac{\pi \sigma \omega a}{2 z^2} \sin \alpha \hat{y} \int_{(a-z)^2}^{(a+z)^2} d\eta \frac{a^2 + z^2 - \eta}{\sqrt{\eta}} = \\
&= -\frac{\pi \sigma \omega a}{2 z^2} \sin \alpha \hat{y} \left[2(a^2 + z^2) \sqrt{\eta} - \frac{2}{3} \eta^{\frac{3}{2}} \right]_{(a-z)^2}^{(a+z)^2} = \\
&= -\frac{\pi \sigma \omega a}{2 z^2} \sin \alpha \hat{y} \left[2(a^2 + z^2) (|a+z| - |a-z|) + \right. \\
&\quad \left. -\frac{2}{3} (|a+z|^3 - |a-z|^3) \right]
\end{aligned}$$

Per un punto *esterno* alla sfera con $z > a > 0$ otteniamo

$$\begin{aligned}
4 \pi \epsilon_0 c^2 \vec{A}(P) &= -\frac{\pi \sigma \omega a}{2 z^2} \sin \alpha \hat{y} \left[2(a^2 + z^2) 2a - \frac{2}{3} (6z^2 a + 2a^3) \right] = \\
&= -\frac{\pi \sigma \omega a}{2 z^2} \sin \alpha \hat{y} \left[\frac{8}{3} a^3 \right] = -\frac{4 \pi \sigma \omega a^4}{3 z^2} \sin \alpha \hat{y} = \frac{4 \pi \sigma a^4}{3 z^3} \vec{\omega} \wedge \vec{x}
\end{aligned}$$

ovvero

$$A_i(x^j) = \frac{\sigma a^4}{3 \epsilon_0 c^2} \epsilon_{ijk} \frac{\omega^j x^k}{|\vec{x}|^3} \quad (35)$$

dove (x^i) sono le coordinate del punto P in un sistema di coordinate generico. Il campo magnetico in un punto P esterno alla sfera è pertanto quello di un dipolo magnetico

$$\vec{B}(P) = \frac{\sigma a^4}{3 \epsilon_0 c^2} \frac{3 \vec{\omega} \cdot \vec{x} \vec{x} - |\vec{x}|^2 \vec{\omega}}{|\vec{x}|^5}$$

Nel sistema di coordinate scelto

$$\vec{B}(P) = \frac{\sigma \omega a^4}{3 \epsilon_0 c^2} \frac{2 \cos \alpha \hat{z} - \sin \alpha \hat{x}}{z^3} \quad (36)$$

Per un punto *interno* alla sfera con $a > z > 0$ otteniamo

$$\begin{aligned}
4 \pi \epsilon_0 c^2 \vec{A}(P) &= -\frac{\pi \sigma \omega a}{2 z^2} \sin \alpha \hat{y} \left[2(a^2 + z^2) 2z - \frac{2}{3} (6a^2 z + 2z^3) \right] = \\
&= -\frac{\pi \sigma \omega a}{2 z^2} \sin \alpha \hat{y} \left[\frac{8}{3} z^3 \right] = -\frac{4 \pi \sigma \omega a z}{3} \sin \alpha \hat{y} = \frac{4 \pi \sigma a}{3} \vec{\omega} \wedge \vec{x}
\end{aligned}$$

ovvero

$$A_i(x^j) = \frac{\sigma a}{3 \epsilon_0 c^2} \epsilon_{ijk} \omega^j x^k \quad (37)$$

Il campo magnetico in un punto P interno alla sfera è pertanto costante

$$\vec{B}(P) = \frac{2 \sigma a \vec{\omega}}{3 \epsilon_0 c^2}$$

Corso di Elettromagnetismo ed Ottica

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 23/06/2008

Problema 1

Un filo di lunghezza infinita e di densità di carica uniforme λ è posto parallelamente ad un cilindro conduttore di raggio a . Sia d la distanza del filo dall'asse del cilindro. Si determini il potenziale elettrostatico all'esterno del conduttore e la densità di carica sulla sua superficie nel caso in cui:

- a) il conduttore sia posto a potenziale costante e finito rispetto all'infinito;
- b) il conduttore sia isolato e abbia una carica nulla.

Problema 2

Una sfera di raggio a ha una densità di carica elettrica data da

$$\rho(r, \theta) = A \frac{a}{r^2} (a - 2r) \cos^3 \theta \quad (38)$$

dove (r, θ, ϕ) sono le coordinate sferiche con centro nel centro della sfera. Determinare il potenziale ed il campo elettrico in un punto P posto a distanza grande dal centro della sfera.

Prova Scritta del 23/06/2008: Soluzione

Problema 1

Scegliamo l'asse delle z lungo l'asse del cilindro conduttore. Le coordinate di un punto generico del filo carico siano $(d, 0, z)$. Poniamo un filo carico immagine con densità di carica per unità di lunghezza uguale a λ' all'interno del cilindro conduttore, in posizione $(d', 0, z)$. Imponiamo la condizione che il potenziale sia costante sulla superficie del conduttore, i cui punti hanno coordinate

$$x = a \cos \theta \quad y = a \sin \theta \quad (39)$$

Il potenziale creato dal filo carico e dall'immagine sulla superficie del conduttore è

$$4 \pi \epsilon_0 \phi(\theta) = -\lambda \log[(a \cos \theta - d)^2 + a^2 \sin^2 \theta] + \\ -\lambda' \log[(a \cos \theta - d')^2 + a^2 \sin^2 \theta] \quad (40)$$

per tutti i θ . Derivando rispetto a $\cos \theta$ otteniamo

$$\frac{2 \lambda a d}{a^2 + d^2 - 2 a d \cos \theta} + \frac{2 \lambda' a d'}{a^2 + (d')^2 - 2 a d' \cos \theta} = 0$$

ovvero

$$\lambda d (a^2 + (d')^2 - 2 a d' \cos \theta) + \lambda' d' (a^2 + d^2 - 2 a d \cos \theta) = \\ = (\lambda d (a^2 + (d')^2) + \lambda' d' (a^2 + d^2) - 2 a d' d (\lambda + \lambda') \cos \theta = 0$$

Quindi

$$\lambda' = -\lambda \quad (41)$$

e

$$d (d')^2 - d' (a^2 + d^2) + d a^2 = 0 \quad (42)$$

La soluzione di quest'ultima equazione con $d' < a$ è

$$d' = \frac{a^2}{d} \quad (43)$$

Il potenziale più generale costante sulla superficie del conduttore e che soddisfa l'equazione di Poisson all'esterno di questo è pertanto

$$4 \pi \epsilon_0 \phi(x, y) = -\lambda \log \frac{(x - d)^2 + y^2}{(x - \frac{a^2}{d})^2 + y^2} - \lambda_0 \log(x^2 + y^2) + C \quad (44)$$

dove λ_0 e C sono costanti. Il valore del potenziale sul conduttore è

$$4 \pi \epsilon_0 \phi(a \cos \theta, a \sin \theta) = -\lambda \log \frac{d^2}{a^2} - \lambda_0 \log a^2 + C \quad (45)$$

Se il conduttore è tenuto ad un potenziale costante (che possiamo prendere come nullo) rispetto all'infinito dobbiamo prendere $\lambda_0 = 0$ e

$$4 \pi \epsilon_0 \phi_{V=0}(x, y) = -\lambda \log \frac{(x-d)^2 + y^2}{(x-\frac{a^2}{d})^2 + y^2} \frac{a^2}{d^2} \quad (46)$$

In questo caso il potenziale all'infinito è $\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \frac{d^2}{a^2}$.

Se invece il conduttore è isolato ed ha carica lineare λ_{cond} nulla dobbiamo prendere $\lambda_0 = \lambda$ ed il potenziale è

$$4 \pi \epsilon_0 \phi_{\lambda_{cond}=0}(x, y) = -\lambda \log \frac{(x-d)^2 + y^2}{(x-\frac{a^2}{d})^2 + y^2} - \lambda \log \frac{x^2 + y^2}{d^2} \quad (47)$$

La densità di carica sulla superficie del conduttore nel caso di potenziale costante rispetto all'infinito è

$$\begin{aligned} \sigma_{V=0}(\theta) &= -\epsilon_0 \partial_r \phi_{V=0}(r \cos \theta, r \sin \theta) \Big|_{r=a} = \\ &= \frac{\lambda}{2\pi} \left[\frac{a-d \cos \theta}{a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta} - \frac{d^2(a - \frac{a^2}{d} \cos \theta)}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta) a^2} \right] = \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi a} \frac{d^2 - a^2}{a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta} \end{aligned} \quad (48)$$

Nel caso del conduttore isolato con carica lineare nulla

$$\sigma_{\lambda_{cond}=0}(\theta) = -\frac{\lambda}{2\pi a} \frac{d^2 - a^2}{a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta} + \frac{\lambda}{2\pi a} \quad (49)$$

Problema 2

La carica totale è nulla

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi d\theta \sin \theta A \cos^3 \theta \frac{a(a-2r)}{r^2} = \\ &= 2A\pi \int_0^a dr a(a-2r) \int_{-1}^1 dt t^3 = \\ &= 2A\pi (a^3 - a^3) \times 0 = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

Il campo elettrico a grandi distanze è pertanto determinato dal momento di dipolo \vec{p} . Poiché la distribuzione di carica ha simmetria assiale, il momento di dipolo della distribuzione di carica è diretto lungo l'asse delle z

$$\vec{p} = p \hat{z} \quad (51)$$

e

$$\begin{aligned} p &= 2\pi \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi d\theta \sin\theta A \cos^3\theta \frac{a(a-2r)}{r^2} r \cos\theta = \\ &= 2A\pi \int_0^a dr a(a-2r)r \int_{-1}^1 dt t^4 = \\ &= 2A\pi a^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) \frac{2}{5} = -\frac{2A\pi a^4}{15} \end{aligned} \quad (52)$$

Il potenziale a grandi distanze è pertanto

$$\phi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2A\pi a^4}{15} \frac{z}{r^3} \quad (53)$$

ed il campo elettrico

$$\vec{E}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2A\pi a^4}{15} \frac{3z\vec{x} - r^2\hat{z}}{r^5} \quad (54)$$

Corso di Elettromagnetismo ed Ottica

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 24/07/2008

Problema 1

Un tubo conduttore di lunghezza infinita e di sezione quadrata di lato a ha tre lati posti ad un potenziale $V = 0$ ed un quarto lato posto ad un potenziale costante V_0 .

Domanda 1

Si determini il potenziale all'interno del tubo conduttore.

Domanda 2

Si stimi il valore numerico del rapporto $\phi(P)/V_0$ dove P è un punto sull'asse centrale del conduttore.

Problema 2

Due fili conduttori cilindrici di sezione circolare di raggio a sono collocati con i loro assi paralleli all'asse delle z , a distanza d tra loro, con $d < 2a$. Siano $C_{\pm} = (\pm d/2, 0, z)$ le posizioni dei due assi dei cilindri. La regione di sovrapposizione dei due cilindri costituita dai punti $P = (x, y, z)$ con

$$(x \pm d/2)^2 + y^2 \leq a^2 \quad (55)$$

è rimossa e sostituita con un materiale isolante. Nei due cilindri scorrono delle correnti lungo z in senso opposto stazionarie ed uniformi lungo la sezione trasversa.

Domanda 1

Si calcoli il campo magnetico generato dalle correnti nella regione isolante (dove non scorrono correnti) (55).

Domanda 2

Si calcoli il potenziale vettore nella regione isolante (55).

Prova Scritta del 24/07/2008: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Scegliamo un sistema di assi cartesiani il cui asse delle z è nella direzione longitudinale del tubo conduttore, con i lati del conduttore posti in $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ e $y = a$. Sia il lato a potenziale V_0 quello con $x = a$. Il potenziale all'interno del conduttore si scrive

$$\phi(x, y) = \sum_{n>0} C_n \sin \frac{\pi y n}{a} (e^{\frac{\pi n x}{a}} - e^{-\frac{\pi n x}{a}}) \quad (56)$$

con n intero positivo, dove abbiamo imposto le condizioni al contorno

$$\phi(0, y) = \phi(x, 0) = \phi(x, a) = 0 \quad (57)$$

per il potenziale. Imponiamo ora la condizione

$$\phi(a, y) = \sum_{n>0} C_n \sin \frac{\pi y n}{a} (e^{\pi n} - e^{-\pi n}) = V_0 \quad (58)$$

Moltiplicando ambo i membri per $\sin \frac{\pi m y}{a}$ con m intero positivo, ed integrando rispetto a y nell'intervallo $[0, a]$ otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{n>0} C_n (e^{n\pi} - e^{-n\pi}) \int_0^a dy \sin \frac{\pi y n}{a} \sin \frac{\pi y m}{a} &= \frac{a C_m}{2} (e^{m\pi} - e^{-m\pi}) = \\ &= V_0 \int_0^a dy \sin \frac{\pi y m}{a} = \frac{a V_0}{\pi m} (1 - (-1)^m) \end{aligned} \quad (59)$$

ovvero

$$C_m = \begin{cases} 0 & m \text{ pari} \\ \frac{4 V_0}{\pi m} \frac{1}{e^{m\pi} - e^{-m\pi}} & m \text{ dispari} \end{cases} \quad (60)$$

In definitiva

$$\phi(x, y) = \frac{4 V_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi y (2k+1)}{a}}{2k+1} \frac{e^{\frac{\pi (2k+1) x}{a}} - e^{-\frac{\pi (2k+1) x}{a}}}{e^{\pi (2k+1)} - e^{-\pi (2k+1)}} \quad (61)$$

Domanda 2

Il punto P al centro del conduttore ha coordinate $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ nel piano (x, y) .
Abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{\phi(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})}{V_0} &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi(2k+1)}{2}}{2k+1} \frac{e^{\frac{\pi(2k+1)}{2}} - e^{-\frac{\pi(2k+1)}{2}}}{e^{\pi(2k+1)} - e^{-\pi(2k+1)}} = \\
&= \frac{4e^{-\frac{\pi}{2}}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{e^{-\pi k}}{1 + e^{-\pi(2k+1)}} = \\
&= \frac{4e^{-\frac{\pi}{2}}}{\pi} \left[\frac{1}{1 + e^{-\pi}} - \frac{1}{3} \frac{e^{-\pi}}{1 + e^{-3\pi}} + \frac{1}{5} \frac{e^{-2\pi}}{1 + e^{-5\pi}} + \dots \right] = \\
&\approx 0.265 \times [0.9586 - 0.0144 + 0.000373 + \dots] \approx 0.250 \quad (62)
\end{aligned}$$

NOTA: Il valore esatto della serie è $\phi(P)/V_0 = \frac{1}{4}$.

Problema 2

Domanda 1

Il campo magnetico prodotto dalla configurazione indicata è uguale alla somma dei campi magnetici prodotti da due conduttori cilindrici nei quali scorrono delle correnti opposte. Il campo magnetico prodotto da un conduttore cilindrico nel quale scorre una corrente I uniforme e stazionaria è per ragioni di simmetria normale ai raggi del cilindro e funzione della distanza dall'asse del cilindro ρ . Applichiamo la legge di Ampère per $\rho > a$

$$B(\rho) 2\pi\rho = \frac{I}{\epsilon_0 c^2} \quad (63)$$

ovvero

$$B(\rho) = \frac{I}{\epsilon_0 c^2 2\pi\rho} \quad \rho > a \quad (64)$$

mentre per $\rho < a$ otteniamo

$$B(\rho) 2\pi\rho = \frac{I}{\epsilon_0 c^2} \frac{\rho^2}{a^2} \quad (65)$$

ovvero

$$B(\rho) = \frac{I\rho}{\epsilon_0 c^2 2\pi a^2} \quad \rho < a \quad (66)$$

In termini vettoriali

$$\vec{B} = \frac{I \hat{z} \wedge \vec{\rho}}{\epsilon_0 c^2 2\pi a^2} \quad \rho < a \quad (67)$$

dove

$$\vec{\rho} = x \hat{x} + y \hat{y} \quad (68)$$

è il raggio misurato rispetto all'asse del cilindro.

Applichiamo questo risultato alla situazione considerata, il campo nella regione (55) è

$$\begin{aligned} \vec{B}(x, y) &= \frac{I_{eff}}{2 \pi \epsilon_0 c^2 a^2} \left(\hat{z} \wedge \left(\vec{\rho} + \frac{d}{2} \hat{x} \right) - \hat{z} \wedge \left(\vec{\rho} - \frac{d}{2} \hat{x} \right) \right) = \\ &= \frac{I_{eff} d}{2 \pi \epsilon_0 c^2 a^2} \hat{z} \wedge \hat{x} = \frac{I_{eff} d}{2 \pi \epsilon_0 c^2 a^2} \hat{y} = \frac{j d}{2 \epsilon_0 c^2} \hat{y} \end{aligned} \quad (69)$$

j è la densità di corrente che attraversa uno dei due fili conduttori. I_{eff} non è la corrente totale I che passa in uno dei due conduttori bensì la corrente che, a parità di j , passerebbe nel filo conduttore se la sua sezione fosse cilindrica:

$$I_{eff} = I \frac{\pi a^2}{S} \quad (70)$$

dove S è l'area della sezione del conduttore:

$$S = \pi a^2 \left[1 - \frac{2}{\pi} \left(\arccos \frac{d}{2a} - \frac{d}{2a} \sqrt{1 - \frac{d^2}{4a^2}} \right) \right] \quad (71)$$

Dunque

$$I_{eff} = \frac{I}{1 - \frac{2}{\pi} \left(\arccos \frac{d}{2a} - \frac{d}{2a} \sqrt{1 - \frac{d^2}{4a^2}} \right)} \quad (72)$$

Domanda 2

Il potenziale vettore all'interno di un cilindro nel quale scorre una corrente uniforme I ha come unica componente non nulla

$$A_z = -\frac{I}{2 \pi \epsilon_0 c^2} \frac{\rho^2 - a^2}{2 a^2} \quad \rho < a \quad (73)$$

Pertanto nella situazione considerata il potenziale vettore nella regione (55) ha come unica componente non nulla

$$\begin{aligned} A_z(x, y) &= -\frac{j}{4 \epsilon_0 c^2} \left[\left(\left(x + \frac{d}{2} \right)^2 + y^2 - a^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. - \left(\left(x - \frac{d}{2} \right)^2 + y^2 - a^2 \right) \right] = \\ &= -\frac{j}{4 \epsilon_0 c^2} \left[\left(x + \frac{d}{2} \right)^2 - \left(x - \frac{d}{2} \right)^2 \right] = -\frac{j d x}{2 \epsilon_0 c^2} \end{aligned} \quad (74)$$

Corso di Elettromagnetismo ed Ottica

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 2/10/2008

Problema 1

Un cilindro conduttore di raggio a è posto perpendicolarmente ad un campo elettrico uniforme di intensità E_0 . Si determini il potenziale fuori dal conduttore e la densità di carica indotta sulla superficie del cilindro.

Problema 2

Una sfera di raggio a ha una densità di carica elettrica data da

$$\rho(r, \phi, \theta) = \rho_0 \frac{a(a - 2r)}{r^2} \sin \theta \quad (75)$$

dove (r, θ, ϕ) sono le coordinate sferiche con centro nel centro della sfera.

Domanda 1

Calcolare la carica totale della sfera.

Domanda 2

Calcolare il momento di dipolo della distribuzione di carica

Domanda 3

Determinare il potenziale in un punto P posto *lungo l'asse delle z* a distanza grande dal centro della sfera al primo ordine non nullo nello sviluppo di multipolo.

Prova Scritta del 2/10/2008: Soluzione

Problema 1

Metodo 1

Usiamo coordinate cilindriche con asse delle z coincidente con l'asse del conduttore. Il potenziale $V(\rho, \theta)$ non dipende da z per la simmetria del problema. Prendiamo il campo elettrico esterno diretto lungo l'asse delle x :

$$\vec{E}_0 = E_0 \hat{x} \quad (76)$$

$\phi(\rho, \theta)$ soddisfa l'equazione di Laplace fuori dal cilindro

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)\phi(r, \theta) = \left(\frac{1}{\rho}\partial_\rho \rho \partial_\rho + \frac{1}{\rho^2}\partial_\theta^2\right)\phi(r, \theta) = 0 \quad (77)$$

Consideriamo una particolare soluzione di questa equazione fattorizzata

$$\phi_{sep}(\rho, \theta) = R(\rho)\Theta(\theta) \quad (78)$$

Otteniamo

$$\frac{\rho \partial_\rho (\rho \partial_\rho R(\rho))}{R(\rho)} + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = 0 \quad (79)$$

Deduciamo

$$\begin{aligned} \rho \partial_\rho (\rho \partial_\rho R(\rho)) - k^2 R(\rho) &= 0 \\ \Theta''(\theta) + k^2 \Theta(\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (80)$$

dove k è una costante. La soluzione dell'equazione angolare dà

$$\Theta(\theta) = A \cos k\theta + B \sin k\theta \quad (81)$$

Deduciamo che k è un intero positivo

$$k = 0, 1, 2, \dots \quad (82)$$

L'equazione per R diventa a coefficienti costanti se si opera la sostituzione

$$\rho = e^\eta \quad (83)$$

in quanto

$$\rho \partial_\rho = \partial_\eta \quad (84)$$

Dunque

$$\frac{d^2 R(\eta)}{d\eta^2} - k^2 R(\eta) = 0 \quad (85)$$

ovvero per $k = 1, 2, \dots$

$$R(\eta) = C e^{k\eta} + D e^{-k\eta} = C \rho^k + D \rho^{-k} \quad (86)$$

mentre per $k = 0$

$$R(\eta) = c + d\eta = c + d \log \rho \quad (87)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \phi(\rho, \theta) = & c + d \log \rho + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k} (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (C_k \cos k\theta + D_k \sin k\theta) \end{aligned} \quad (88)$$

soddisfa l'equazione di Laplace. Cerchiamo la soluzione del nostro problema in questa forma. Per grandi $\rho \gg a$ $\phi(\rho, \theta)$ deve ridursi al potenziale relativo ad un campo elettrico costante:

$$\phi_0(\rho, \theta) = -E_0 x = -E_0 \rho \cos \theta \quad (89)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} C_k = D_k = d = c = 0 & \quad \text{per } k > 1 \\ C_1 = -E_0 \quad D_1 = 0 & \end{aligned} \quad (90)$$

ovvero

$$\phi(\rho, \theta) = -E_0 \rho \cos \theta + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k} (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) \quad (91)$$

Imponiamo ora la condizione che il cilindro sia un conduttore:

$$\phi(a, \theta) = 0 \quad (92)$$

Quindi

$$\phi(a, \theta) = -E_0 a \cos \theta + \sum_{k=1}^{\infty} a^{-k} (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) = 0 \quad (93)$$

Deduciamo che

$$\begin{aligned} A_k = B_k = 0 & \quad \text{per } k > 1 \\ \frac{A_1}{a} = E_0 a & \end{aligned} \quad (94)$$

In definitiva

$$\phi(\rho, \theta) = -E_0 \rho \cos \theta + \frac{E_0}{\rho} a^2 \cos \theta \quad (95)$$

La densità di carica sulla superficie del conduttore è

$$\sigma = -\epsilon_0 \partial_\rho \phi(\rho, \theta) \Big|_{\rho=a} = 2 \epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (96)$$

Metodo 2

Risolviamo il problema col metodo delle immagini. Consideriamo dapprima un filo infinito con densità di carica per unità di lunghezza λ perpendicolare al piano (x, y) , passante per l'asse x e posto a distanza d dall'asse del cilindro conduttore. Il potenziale creato da tale filo è

$$\begin{aligned} \phi_{filo}(\rho, \theta) &= -\frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0} \log \left[(d - \rho \cos \theta)^2 + \rho^2 \sin^2 \theta \right] = \\ &= -\frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0} \log \left[d^2 + \rho^2 - 2 \rho d \cos \theta \right] \end{aligned} \quad (97)$$

Cerchiamo la posizione d' sull'asse x del filo immagine di carica lineare λ' dentro il conduttore

$$\phi_{immagine}(\rho, \theta) = -\frac{\lambda'}{4 \pi \epsilon_0} \log \left[(d')^2 + \rho^2 - 2 \rho d' \cos \theta \right] \quad (98)$$

dalla condizione che il potenziale sia costante sulla superficie del cilindro:

$$-\lambda \frac{2 a d \sin \theta}{d^2 + a^2 - 2 a d \cos \theta} = \lambda' \frac{2 a d' \sin \theta}{(d')^2 + a^2 - 2 a d' \cos \theta} \quad (99)$$

La soluzione è

$$\lambda' = -\lambda \quad d' = \frac{a^2}{d} \quad (100)$$

Consideriamo ora due fili paralleli a z con densità di cariche opposte $\pm\lambda$ collocati nelle posizioni $\mp d$ sull'asse delle x in presenza del conduttore. Il

potenziale sarà

$$\begin{aligned}\phi(\rho, \theta) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \frac{d^2 + \rho^2 - 2\rho d \cos \theta}{d^2 + \rho^2 + 2\rho d \cos \theta} + \\ &\quad - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \frac{\frac{a^4}{d^2} + \rho^2 - 2\rho \frac{a^2}{d} \cos \theta}{\frac{a^4}{d^2} + \rho^2 + 2\rho \frac{a^2}{d} \cos \theta}\end{aligned}\quad (101)$$

Consideriamo ora il limite di quest'espressione per $d \gg \rho \geq a$:

$$\begin{aligned}\phi(\rho, \theta) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \frac{1 + \frac{\rho^2}{d^2} - 2\frac{\rho}{d} \cos \theta}{1 + \frac{\rho^2}{d^2} + 2\frac{\rho}{d} \cos \theta} + \\ &\quad - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \frac{1 + \frac{a^4}{d^2\rho^2} - 2\frac{a^2}{\rho d} \cos \theta}{1 + \frac{a^4}{d^2\rho^2} + 2\frac{a^2}{\rho d} \cos \theta} = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[-4\frac{\rho}{d} \cos \theta + 4\frac{a^2}{\rho d} \cos \theta + O\left(\frac{\rho^2}{d^2}\right) \right]\end{aligned}\quad (102)$$

Identificando il campo elettrico all'infinito con :

$$E_0 = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 d}\quad (103)$$

otteniamo per la soluzione del problema dato

$$\phi(\rho, \theta) = E_0 \left[-\rho \cos \theta + \frac{a^2}{\rho} \cos \theta \right]\quad (104)$$

Problema 2

Calcoliamo la carica ed il momento di dipolo della distribuzione data

$$\begin{aligned}Q &= 2\pi \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \rho(r, \phi, \theta) = \\ &= 2\pi \rho_0 a \int_0^a dr (a - 2r) \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta = 0\end{aligned}\quad (105)$$

Il momento di dipolo elettrico è per ragioni di simmetria orientato lungo z . La sua intensità è:

$$\begin{aligned}d_z &= 2\pi \int_0^a r^3 dr \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta \rho(r, \phi, \theta) = \\ &= 2\pi \rho_0 a \int_0^a dr (ar - 2r^2) \int_0^\pi d\theta \cos \theta \sin^2 \theta = \\ &= 2\pi \rho_0 a \left(-\frac{a^3}{6}\right) \times 0 = 0\end{aligned}\quad (106)$$

Dobbiamo pertanto calcolare il termine di quadrupolo. Sia \vec{x} la posizione di P e \vec{x}' la posizione di un punto generico dentro la distribuzione di carica. Il potenziale in P è

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (107)$$

Abbiamo

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}'|} \left[1 + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{x^2} + \frac{3}{2} \frac{(\vec{x} \cdot \vec{x}')^2}{(x^2)^2} - \frac{1}{2} \frac{(x')^2}{x^2} + \dots \right] \quad (108)$$

Gli ultimi due termini corrispondono al contributo di quadrupolo. Posto

$$\vec{x} = (0, 0, z_P) \quad \vec{x}' = r (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta) \quad (109)$$

abbiamo

$$\left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{x^2} \right)^2 = \frac{r^2 \cos^2\theta}{z_P^2} \quad (110)$$

ed il termine di quadrupolo del potenziale è

$$\begin{aligned} \phi_{quad}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\rho_0 a}{z_P^3} \int_0^a dr \int_0^\pi d\theta \left[\sin\theta \left(\frac{3}{2} r^2 \cos^2\theta - \frac{1}{2} r^2 \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times (a - 2r) \sin\theta \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\rho_0 a^5}{z_P^3} \int_0^\pi d\theta \left[\frac{3}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2} \right] \sin^2\theta \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-\pi\rho_0 a^5}{6z_P^3} \int_0^\pi d\theta \left[\frac{3}{4} \sin^2 2\theta - \sin^2\theta \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi^2\rho_0 a^5}{48z_P^3} \end{aligned} \quad (111)$$

che non è nullo e quindi è il termine dominante a grandi distanze.

Corso di Elettromagnetismo ed Ottica

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 26/02/2009

Problema 1

Si consideri un filo percorso da una corrente i posto lungo la direzione positiva dell'asse delle z di un sistema di assi cartesiani (x, y, z) . Si consideri la curva C giacente nel piano $z = 0$ determinata dall'equazione

$$\frac{y}{d} = \frac{3}{4} + \left(\frac{x}{d} - \frac{1}{2}\right)^2 \quad (112)$$

dove d è una distanza data.

Domanda 1

Si calcoli il valore della circuitazione del campo magnetico \vec{B} generato dal filo di corrente lungo il tratto di curva C che va dal punto $A = (0, d, 0)$ a $B = (d, d, 0)$.

Problema 2

Si consideri un cilindro conduttore cavo di lunghezza infinita e raggio a , con l'asse coincidente con l'asse delle z di un sistema di coordinate cilindriche (z, ρ, ϕ) . Il conduttore è diviso in due metà isolate tra loro nella direzione della lunghezza, una posta a potenziale V_0 e l'altra a potenziale $-V_0$:

$$V(z, a, \phi) = \begin{cases} V_0, & \text{per } 0 < \phi < \pi \\ -V_0, & \text{per } -\pi < \phi < 0 \end{cases} \quad (113)$$

Domanda 1

Si calcoli il valore del potenziale elettrostatico all'interno del cilindro (cioè per $\rho < a$), fino al 5° ordine incluso in $\frac{\rho}{a}$.

Domanda 2

Si determini la distribuzione di carica sulle pareti del conduttore.

Prova Scritta del 26/02/2009: Soluzione

Problema 1

Sia P un punto che dista d dall'origine posto sulla retta passante per l'origine e per B . Scegliamo un cammino C' che va da A a B costituito da un arco di cerchio AP di raggio d e di un segmento rettilineo PB lungo la retta passante per l'origine. Il cammino chiuso $C \cup (-C')$ non è attraversato da correnti e pertanto la circuitazione di \vec{B} lungo C e lungo C' coincidono. D'altra parte la circuitazione di \vec{B} lungo AP è

$$\int_A^P d\vec{l} \cdot \vec{B} = -\frac{i}{2\pi c^2 \epsilon_0} \frac{\pi}{4} = -\frac{i}{8\pi c^2 \epsilon_0} \quad (114)$$

in quanto il campo è tangente in ogni punto all'arco di cerchio AP . La circuitazione di \vec{B} lungo PB è nulla in quanto \vec{B} è normale alla segmento PB

$$\int_P^B d\vec{l} \cdot \vec{B} = 0 \quad (115)$$

In definitiva

$$\int_C d\vec{l} \cdot \vec{B} = \int_{C'} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \int_A^P d\vec{l} \cdot \vec{B} = -\frac{i}{8c^2 \epsilon_0} \quad (116)$$

Naturalmente è possibile effettuare direttamente il calcolo, più complesso, della circuitazione lungo C . Le componenti del campo magnetico sono

$$\vec{B} = \frac{i}{2\pi c^2 \epsilon_0} \left(\frac{-y}{r^2}, \frac{x}{r^2}, 0 \right) \quad (117)$$

dove $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$. L'elemento di lunghezza lungo la tangente alla curva è

$$d\vec{l} = (dx, y'(x) dx, 0) \quad (118)$$

dove $y'(x)$ è la derivata di $y(x)$ rispetto a x . Dunque

$$\begin{aligned} \int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \frac{i}{2\pi c^2 \epsilon_0} \int_0^d dx \frac{-y(x) + x y'(x)}{x^2 + y^2(x)} = \\ &= \frac{i}{2\pi c^2 \epsilon_0} \int_0^d dx \frac{d}{dx} \arctan \frac{y(x)}{x} = \\ &= \frac{i}{2\pi c^2 \epsilon_0} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{i}{2\pi c^2 \epsilon_0} \frac{\pi}{4} = -\frac{i}{8c^2 \epsilon_0} \end{aligned} \quad (119)$$

in accordo col metodo più elementare.

Problema 2

Domanda 1

Data la simmetria del problema, il potenziale $V(z, \rho, \phi)$ è indipendente da z . Abbiamo visto in un esercizio precedente che una generica funzione armonica indipendente da z si scrive in coordinate cilindriche

$$V(\rho, \phi) = c + d \log \rho + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k} (A_k \cos k \phi + B_k \sin k \phi) + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (C_k \cos k \phi + D_k \sin k \phi) \quad (120)$$

Nel nostro caso la funzione deve essere regolare per $\rho \rightarrow 0$. Pertanto

$$A_k = B_k = d = 0 \quad (121)$$

e

$$V(\rho, \phi) = c + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (C_k \cos k \phi + D_k \sin k \phi) \quad (122)$$

Moltiplicando per $\sin k' \phi$ e $\cos k' \phi$ ed integrando in ϕ e facendo uso delle relazioni

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \cos k' \phi \cos k \phi = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sin k' \phi \sin k \phi = \pi \delta_{kk'} \quad (123)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} c &= \int_{-\pi}^{\pi} d\phi V(a, \phi) = \int_0^{\pi} d\phi V_0 - \int_{-\pi}^0 d\phi V_0 = 0 \\ \pi a^k C_k &= \int_{-\pi}^{\pi} d\phi V(a, \phi) \cos k \phi = \\ &= \int_0^{\pi} d\phi V_0 \cos k \phi - \int_{-\pi}^0 d\phi V_0 \cos k \phi = 0 \\ \pi a^k D_k &= \int_{-\pi}^{\pi} d\phi V(a, \phi) \sin k \phi = \\ &= 2 V_0 \int_0^{\pi} d\phi \sin k \phi = \begin{cases} 0 & \text{per } k = \text{pari} \\ \frac{4V_0}{k} & \text{per } k = \text{dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

In definitiva

$$\begin{aligned}
V(\rho, \phi) &= \frac{4V_0}{\pi} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^k \frac{\sin k\phi}{k} = \\
&= \frac{4V_0}{\pi} \left[\left(\frac{\rho}{a}\right) \sin \phi + \left(\frac{\rho}{a}\right)^3 \frac{\sin 3\phi}{3} + \left(\frac{\rho}{a}\right)^5 \frac{\sin 5\phi}{5} + \dots \right] \quad (124)
\end{aligned}$$

Domanda 2

Per $\rho < a$, la serie ottenuta converge uniformemente in ϕ : può essere risommata ed espressa in forma chiusa:

$$\begin{aligned}
V(\rho, \phi) &= \frac{4V_0}{\pi} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^k \frac{e^{ik\phi} - e^{-ik\phi}}{2ik} = \\
&= \frac{2V_0}{i\pi} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \left[\frac{1}{k} \left(\frac{\rho}{a} e^{i\phi}\right)^k - \frac{1}{k} \left(\frac{\rho}{a} e^{-i\phi}\right)^k \right] = \\
&= \frac{V_0}{i\pi} \left[\log \frac{1 + \frac{\rho}{a} e^{i\phi}}{1 - \frac{\rho}{a} e^{i\phi}} - \log \frac{1 + \frac{\rho}{a} e^{-i\phi}}{1 - \frac{\rho}{a} e^{-i\phi}} \right] = \\
&= \frac{V_0}{\pi i} \log \left[\frac{1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 + 2\frac{\rho}{a} i \sin \phi}{1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 - 2\frac{\rho}{a} i \sin \phi} \right] = \\
&= \frac{2V_0}{\pi} \arctan \left[\frac{\frac{2\rho}{a} \sin \phi}{1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^2} \right] \quad (125)
\end{aligned}$$

È possibile pertanto calcolare la distribuzione di carica sul conduttore

$$\begin{aligned}
\sigma(\phi) = \epsilon_0 E_\rho(a, \phi) &= -\frac{4\epsilon_0 V_0}{a\pi} \left[\frac{\sin \phi}{1 + \left[\frac{\frac{2\rho}{a} \sin \phi}{1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^2} \right]^2} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{\rho}{a}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right)^2} \right]_{\rho=a^-} = \\
&= -\frac{8\epsilon_0 V_0}{a\pi} \frac{\sin \phi}{4 \sin^2 \phi} = -\frac{2\epsilon_0 V_0}{a\pi} \frac{1}{\sin \phi} \quad (126)
\end{aligned}$$

Corso di Elettromagnetismo ed Ottica

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta Parziale del 20/04/2009

Problema 1

Si consideri il campo vettoriale

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x} e^{-\frac{|\vec{x}|}{a}}$$

Domanda 1 (punti 0.5)

Si calcolino rotore e divergenza di $\vec{v}(\vec{x})$.

Domanda 2 (punti 0.25)

Si calcoli l'integrale della divergenza di \vec{v}

$$\int_{B_a} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d^3\vec{x}$$

in una palla sferica B_a con centro nell'origine e raggio a .

Domanda 3 (punti 0.75)

Sia $P = (0, 0, a)$ un punto sulla superficie di B_a . Si calcoli l'integrale di linea di \vec{v}

$$\int_{C_{OP}} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

lungo un arco di circonferenza C_{OP} che va dall'origine O al punto P , con centro in $Q = (0, 0, \frac{a}{2})$, raggio $\frac{a}{2}$ e giacente nel piano x, z .

Problema 2

Si consideri un disco circolare piano di raggio a uniformemente carico con densità di carica superficiale costante σ , posto nel piano (x, y) con centro nell'origine.

Domanda 1 (punti 0.5)

Si determini potenziale e campo elettrostatico generato dal disco in un punto P_0 posto sull'asse z ortogonale al disco e passante per il suo centro.

Domanda 2 (punti 0.25)

Si determini, nell'approssimazione più bassa non nulla dell'espansione di multipolo elettrico, il potenziale elettrostatico in un punto P generico, posto ad una distanza $d \gg a$ dal centro del disco ed angolo θ rispetto all'asse z .

Domanda 3 (punti 0.75)

Si determini la correzione non nulla successiva a quella più bassa nell'espansione di multipolo elettrico del potenziale nel punto P della Domanda 2.

Prova Scritta del 24/04/2009: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Posto $|\vec{x}| = r$ abbiamo

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \left(3 - \frac{r}{d}\right) e^{-\frac{r}{d}} \\ (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j (x_k e^{-\frac{r}{d}}) = \epsilon_{ijk} \left(\delta_{kj} - \frac{x_k x_j}{dr}\right) e^{-\frac{r}{d}} = 0\end{aligned}$$

Domanda 2

$$\int_{B_a} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d^3\vec{x} = \int_{\partial B_a} d^2a r e^{-\frac{r}{d}} = 4\pi a^3 e^{-\frac{a}{d}}$$

Domanda 3

Poiché il rotore di \vec{v} è nullo esiste un potenziale ϕ di cui \vec{v} è il gradiente:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \phi(\vec{x})$$

Consideriamo un percorso rettilineo radiale da O ad un punto generico \vec{x}

$$\phi(\vec{x}) = \int_0^r dr' r' e^{-\frac{r'}{d}} = -d(d+r) e^{-\frac{r}{d}}$$

L'integrale di linea di \vec{x} lungo l'arco C_{OP} dipende solo dai punti iniziali e finali

$$\int_{C_{OP}} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \phi(P) - \phi(O) = -d(d+a) e^{-\frac{a}{d}} + d^2$$

Problema 2

Domanda 1

Consideriamo un sistema di assi cartesiani con l'origine nel centro del disco e asse delle z lungo l'asse ortogonale al disco. Siano $P_0 = (0, 0, d)$ le coordinate del punto P_0 . Il potenziale elettrostatico in P_0 è

$$\begin{aligned}\phi(P_0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a dr \frac{r\sigma}{\sqrt{d^2+r^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^a dr \frac{r}{\sqrt{d^2+r^2}} = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{d^2+a^2} - |d|)\end{aligned}$$

Il campo elettrico in P_0 è

$$\vec{E} = \hat{z} \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \left(\frac{|d|}{d} - \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2}} \right)$$

Domanda 2

Siano $P = (d \sin \theta, 0, d \cos \theta)$, con $d > 0$, le coordinate del punto P . La carica totale del disco è

$$Q = \pi a^2 \sigma \quad (127)$$

A grandi distanze il potenziale in P sarà

$$\phi(P) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\pi a^2 \sigma}{d} = \frac{\sigma a^2}{4 \epsilon_0 d} \quad (128)$$

Domanda 3

Il potenziale in P è

$$\begin{aligned} \phi(P) &= \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a dr \frac{r \sigma}{\sqrt{d^2 + r^2 - 2 d r \sin \theta \cos \phi}} = \\ &= \frac{\sigma}{4 \pi \epsilon_0 d} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a dr \frac{t}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2} - 2 \frac{r}{d} \sin \theta \cos \phi}} \\ &= \frac{\sigma}{4 \pi \epsilon_0 d} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a dr r \left[1 + \frac{r}{d} \sin \theta \cos \phi + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{3}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \phi - \frac{1}{2} \right) \frac{r^2}{d^2} + O\left(\frac{r^3}{d^3}\right) \right] = \\ &= \frac{\sigma}{4 \pi \epsilon_0 d} \left[\frac{2 \pi a^2}{2} + \left(\frac{3}{2} \sin^2 \theta \pi - \pi \right) \frac{a^4}{4 d^2} + O\left(\frac{a^5}{d^3}\right) \right] = \\ &= \frac{\sigma a^2}{4 \epsilon_0 d} \left[1 + \left(\frac{3}{8} \sin^2 \theta - \frac{1}{4} \right) \frac{a^2}{d^2} + O\left(\frac{a^3}{d^3}\right) \right] \end{aligned}$$

Il primo termine è il termine di monopolo elettrico (la carica totale del disco essendo $Q = \pi a^2 \sigma$). Il secondo termine è il termine di quadrupolo, il termine di dipolo essendo nullo.

Corso di Elettromagnetismo ed Ottica

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 17/06/2009

Problema 1

Due semipiani conduttori infiniti ortogonali all'asse delle z sono collocati in $z = 0$ e $z = d$, con il loro bordo, parallelo a y , in $x = 0$. I semipiani sono posti ad un potenziale $V = 0$. La striscia che connette i due semipiani, a $x = 0$, con $0 < z < d$ è posta ad un potenziale fisso V_0 ,

Domanda 1 (Punti 6)

Si calcoli il potenziale fra i due semipiani, per $x > 0$.

Domanda 2 (Punti 8)

Si calcoli la densità di carica indotta sui due semipiani e sulla striscia che li connette.

Domanda 3 (Punti 4)

Tracciare schematicamente le linee equipotenziali e le linee di forza del campo elettrostatico all'interno della regione tra i conduttori.

Problema 2

Un solenoide cilindrico di lunghezza finita L e raggio a è percorso da una corrente per unità di lunghezza i , diretta nel piano ortogonale all'asse del solenoide. Sia z l'asse del solenoide e si scelga l'origine del sistema coordinate cartesiane nel punto mediano dell'asse del solenoide.

Domanda 1 (Punti 20)

Si calcoli il campo magnetico in un punto $P = (x, y, 0)$ sul piano (x, y) posto all'esterno del solenoide, nell'ipotesi che

$$a \ll L \quad \text{e} \quad a < \rho \quad (129)$$

dove $\rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$.

Prova Scritta del 17/06/2009: Soluzione

Problema 1

Soluzione

Il potenziale $V(x, y, z)$ non dipende da y e soddisfa l'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 V(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (130)$$

nella regione tra i due conduttori. $V(x, z)$ soddisfa anche le condizioni

$$\begin{aligned} V(x, 0) &= V(x, d) = 0 \\ V(0, z) &= V_0, \quad \text{per } 0 < z < d \\ V(x, z) &\rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (131)$$

Questo porta alla seguente forma per $V(x, z)$

$$V(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n \pi z}{d} e^{-\frac{n \pi x}{d}} \quad (132)$$

Moltiplicando ambo i membri per $\sin \frac{n' \pi z}{d}$, integrando su z da 0 a d , e prendendo $x = 0$ otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{2} C_n &= \int_0^d dz V(0, z) \sin \frac{n \pi z}{d} = \frac{d V_0}{n \pi} (1 - (-1)^n) = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{per } n = \text{pari} \\ \frac{2dV_0}{n\pi} & \text{per } n = \text{dispari} \end{cases} \end{aligned} \quad (133)$$

In definitiva

$$V(x, z) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin \frac{n \pi z}{d}}{n} e^{-\frac{n \pi x}{d}} \quad (134)$$

Per $x > 0$ questa serie converge uniformemente nell'intervallo $z \in [0, d]$. La

somma della serie è

$$\begin{aligned}
V(x, z) &= \frac{2V_0}{\pi i} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \left[e^{-\frac{n\pi}{d}(x-iz)} - e^{-\frac{n\pi}{d}(x+iz)} \right] = \\
&= \frac{V_0}{\pi i} \left[\log \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{d}(x-iz)}}{1 - e^{-\frac{\pi}{d}(x-iz)}} - \log \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{d}(x+iz)}}{1 - e^{-\frac{\pi}{d}(x+iz)}} \right] = \\
&= \frac{V_0}{\pi i} \log \frac{1 - e^{-\frac{2\pi x}{d}} + 2i e^{-\frac{\pi x}{d}} \sin \frac{\pi z}{d}}{1 - e^{-\frac{2\pi x}{d}} - 2i e^{-\frac{\pi x}{d}} \sin \frac{\pi z}{d}} = \\
&= \frac{2V_0}{\pi} \arctan \frac{2e^{-\frac{\pi x}{d}} \sin \frac{\pi z}{d}}{1 - e^{-\frac{2\pi x}{d}}} =
\end{aligned} \tag{135}$$

Domanda 2

La densità di carica superficiale sulla striscia $x = 0, z \in (0, d)$ è

$$\begin{aligned}
\sigma(z)|_{x=0} &= -\epsilon_0 \partial_x V(x, z)|_{x=0} = -\frac{4V_0 \epsilon_0}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi z}{d}}{4e^{-\frac{2\pi x}{d}} \sin^2 \frac{\pi z}{d}} \times \\
&\times \left(-\frac{\pi}{d} (1 - e^{-\frac{2\pi x}{d}}) e^{-\frac{\pi x}{d}} - 2\frac{\pi}{d} e^{-3\frac{\pi x}{d}} \right) \Big|_{x=0} = \\
&= \frac{2V_0 \epsilon_0}{d} \frac{1}{\sin \frac{\pi z}{d}}
\end{aligned} \tag{136}$$

La densità di carica lungo il conduttore a $z = 0$ e $z = d$ è invece

$$\sigma(x)|_{z=0,d} = -\epsilon_0 \partial_z V(x, z)|_{z=0} = -\frac{4V_0 \epsilon_0}{d} \frac{e^{-\frac{\pi x}{d}}}{1 - e^{-\frac{2\pi x}{d}}} \tag{137}$$

Problema 2

Sappiamo che per $L \rightarrow \infty$ il campo magnetico nel punto $P = (x, y, 0)$ con $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > a$ è nullo. Pertanto il campo $\vec{B}_L(P)$ prodotto dal solenoide di lunghezza L nel punto P è uguale in valore assoluto ed opposto alla somma dei campi $\vec{B}_\pm(P)$ prodotti da due solenoidi semi-cilindrici con l'asse coincidente con l'asse z e con $z \in (\pm L/2, \pm\infty)$:

$$\vec{B}_L(P) = -\vec{B}_+(P) - \vec{B}_-(P) \tag{138}$$

Inoltre è evidente per la simmetria del problema per $z \rightarrow -z$ che

$$\begin{aligned}(\vec{B}_+(P))_z &= (\vec{B}_-(P))_z \\ (\vec{B}_+(P))_x &= -(\vec{B}_-(P))_x \quad (\vec{B}_+(P))_y = -(\vec{B}_-(P))_y\end{aligned}$$

Pertanto

$$\vec{B}_L(P) = (B_L(P))_z \hat{z} = -2(\vec{B}_+(P))_z \hat{z} \quad (139)$$

Poiché per ipotesi

$$\rho \ll L \quad (140)$$

calcoliamo il campo prodotto dal solenoide semi-cilindrico nell'approssimazione di dipolo magnetico.

Il problema ha simmetria cilindrica. Prendiamo pertanto il punto P sull'asse delle x

$$P = x \hat{x} = (x, 0, 0) \quad (141)$$

Se $\vec{A}_+(P)$ è il campo vettore associato a $\vec{B}_+(P)$ abbiamo

$$\vec{A}_+(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{\frac{L}{2}}^{\infty} \frac{d\vec{\mu} \wedge \vec{R}}{|\vec{R}|^3} \quad (142)$$

dove

$$\vec{R} = x \hat{x} - z \hat{z} = (x, 0, -z) \quad (143)$$

è la distanza tra P ed un punto sull'asse del solenoide semi-cilindrico, e

$$d\vec{\mu} = \pi a^2 i dz \hat{z} \quad (144)$$

è il momento di dipolo magnetico associato ad un elemento dz del semi-cilindro infinito. Dunque

$$\vec{A}_+(P) = A_y^{(+)}(P) \hat{y} \quad (145)$$

e

$$\begin{aligned}A_y^{(+)}(P) &= \frac{a^2 i}{4\epsilon_0 c^2} \int_{\frac{L}{2}}^{\infty} dz \frac{x}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2 i}{4\epsilon_0 c^2 |x|} \int_{\frac{L}{2|x|}}^{\infty} \frac{dt}{(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{a^2 i}{4\epsilon_0 c^2 |x|} \left[\frac{t}{(t^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right]_{\frac{L}{2|x|}}^{+\infty} = \\ &= \frac{a^2 i}{4\epsilon_0 c^2 |x|} \left[1 - \frac{1}{(1 + \frac{4x^2}{L^2})^{\frac{1}{2}}} \right]\end{aligned} \quad (146)$$

Per la simmetria cilindrica del problema deduciamo che il potenziale in un punto generico del piano (x, y) è

$$\begin{aligned} A_y^{(+)}(P) &= \frac{a^2 i}{4 \epsilon_0 c^2 \rho} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{4\rho^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \frac{x}{\rho} \\ A_x^{(+)}(P) &= -\frac{a^2 i}{4 \epsilon_0 c^2 \rho} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{4\rho^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \frac{y}{\rho} \\ A_z^{(+)}(P) &= 0 \end{aligned} \quad (147)$$

Il campo magnetico corrispondente è, come ci aspettavamo, diretto lungo l'asse delle z

$$B_z^{(+)}(P) = \frac{a^2 i}{4 \epsilon_0 c^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{4\rho^2}{L^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{4}{L^2} + O\left(\frac{a^4}{L^4}\right) \quad (148)$$

dove abbiamo indicato che l'approssimazione di dipolo magnetico trascura in ogni caso termini dell'ordine di $O\left(\frac{a^4}{L^4}\right)$.

Nell'ipotesi ulteriore che $a < \rho \ll L$ possiamo approssimare questo risultato come segue

$$B_z^{(+)}(P) = \frac{i}{\epsilon_0 c^2} \frac{a^2}{L^2} + O\left(\frac{a^4}{L^4}\right) \quad (149)$$

In conclusione il campo magnetico all'esterno del solenoide è

$$\vec{B}_L(P) = -\frac{i}{\epsilon_0 c^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{4\rho^2}{L^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{2a^2}{L^2} \hat{z} + O\left(\frac{a^4}{L^4}\right) \quad (150)$$

ed immediatamente all'esterno del solenoide $a < \rho \ll L$

$$\vec{B}_L(P) = -\frac{i}{\epsilon_0 c^2} \frac{2a^2}{L^2} \hat{z} + O\left(\frac{a^4}{L^4}\right) \quad (151)$$

Corso di Elettromagnetismo ed Ottica

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 01/07/2009

Problema 1

Un conduttore ideale, posto a potenziale nullo, è descritto dalla superficie

$$S = \{z = 0, x^2 + y^2 > a^2\} \cup \{z > 0, z^2 + x^2 + y^2 = a^2\} \quad (152)$$

dove $a > 0$ è un numero reale. Una carica q viene posta sopra il conduttore in $P = (0, 0, d)$ con $d > a$.

Domanda 1 (Punti 8)

Si calcoli, attraverso il metodo delle immagini, il potenziale ed il campo elettrico in un punto generico della regione

$$M \equiv \{z \geq 0, x^2 + y^2 > a^2\} \cup \{z \geq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq a^2\} \quad (153)$$

Domanda 2 (Punti 7)

Si calcoli il campo elettrico in un punto $P' = (0, 0, z)$ posto sull'asse delle z con $z \gg d > a$, all'ordine più basso non nullo in $\frac{1}{z}$.

Domanda 3 (Punti 13)

Si calcoli la carica indotta sull'emisfera $\{z > 0, x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ del conduttore.

Suggerimento: Può essere utile ricordare la primitiva

$$\int dt \frac{1+t}{(1+\eta^2+2t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\eta^2+t}{\sqrt{1+\eta^2+2t}} \quad (154)$$

Problema 2

Un'onda elettromagnetica proveniente dal vuoto incide su un materiale con indice di rifrazione $n = 2.5$, la cui superficie giace nel piano (x, y) . Sia (x, z) il piano di incidenza, θ_i l'angolo di incidenza e θ_r l'angolo di riflessione. Si supponga inoltre che il campo elettrico dell'onda incidente giaccia nel piano di incidenza.

Domanda 1 (Punti 12)

Si calcoli per quali valori dell'angolo di incidenza l'onda riflessa si annulla. Si spieghi perché.

Prova Scritta del 01/07/2009: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Il potenziale totale si può ottenere col metodo delle immagini ed è la somma di quattro contributi corrispondenti alla carica fisica ed alle 3 cariche immagine:

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{a=1}^4 \phi_a(\vec{x}) \quad (155)$$

dove

$$\begin{aligned} \phi_1(\vec{x}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - d\hat{z}|} \\ \phi_2(\vec{x}) &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{d} \frac{1}{|\vec{x} - \frac{a^2}{d}\hat{z}|} \\ \phi_3(\vec{x}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{d} \frac{1}{|\vec{x} + \frac{a^2}{d}\hat{z}|} \\ \phi_4(\vec{x}) &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} + d\hat{z}|} \end{aligned} \quad (156)$$

Corrispondentemente, il campo elettrico in un punto $\vec{x} \in M$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum_{a=1}^4 \vec{E}_a(\vec{x}) \quad (157)$$

è dato dalla somma dei quattro campi elettrici

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(\vec{x}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - d\hat{z}}{|\vec{x} - d\hat{z}|^3} \\ \vec{E}_2(\vec{x}) &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{d} \frac{\vec{x} - \frac{a^2}{d}\hat{z}}{|\vec{x} - \frac{a^2}{d}\hat{z}|^3} \\ \vec{E}_3(\vec{x}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{d} \frac{\vec{x} + \frac{a^2}{d}\hat{z}}{|\vec{x} + \frac{a^2}{d}\hat{z}|^3} \\ \vec{E}_4(\vec{x}) &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} + d\hat{z}}{|\vec{x} + d\hat{z}|^3} \end{aligned} \quad (158)$$

Domanda 2

Il potenziale nel punto $P = (0, 0, z)$ con $z > d$ è

$$\begin{aligned}
 \phi(z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{z-d} - \frac{1}{z+d} + \frac{a}{d} \left(\frac{1}{z+\frac{a^2}{d}} - \frac{1}{z-\frac{a^2}{d}} \right) \right] = \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 2d \left[\frac{1}{z^2-d^2} - \frac{a^3}{d^3} \frac{1}{z^2-\frac{a^4}{d^2}} \right] = \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d}{z^2} \left[\frac{1}{1-\frac{d^2}{z^2}} - \frac{a^3}{d^3} \frac{1}{1-\frac{a^4}{d^2 z^2}} \right] = \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d}{z^2} \left[1 - \frac{a^3}{d^3} \right] + O\left(\frac{1}{z^4}\right) \tag{159}
 \end{aligned}$$

Il campo elettrico è diretto lungo z ed ha intensità

$$E_z(z) = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \frac{d}{z^3} \left[1 - \frac{a^3}{d^3} \right] + O\left(\frac{1}{z^5}\right) \tag{160}$$

Un modo alternativo per derivare queste espressioni è notare che la carica fisica e le sue 3 immagini formano due dipoli elettrici, ambedue diretti lungo z : il primo, formato dalla carica fisica e dalla sua immagine in $-d\hat{z}$, ha intensità

$$q \times 2d = 2dq \tag{161}$$

Il secondo dipolo è formato dalle cariche immagine in $\pm\frac{a^2}{d}\hat{z}$ ed ha intensità

$$-q\frac{a}{d} \times 2\frac{a^2}{d} = -2qd\frac{a^3}{d^3} \tag{162}$$

Il potenziale in (159) è proprio il potenziale corrispondente alla somma dei due dipoli in (161) ed (162).

Domanda 3

Presentiamo due metodi per calcolare la carica $Q_{emisfera}$ indotta sulla parte sferica del conduttore.

Il primo metodo, leggermente più semplice ma più indiretto è il seguente. La carica indotta sull'emisfera è la carica indotta totale su tutto il conduttore meno la carica indotta sulla parte piana del conduttore. Inoltre la carica totale indotta sul conduttore è la somma delle cariche immagine. Dunque

$$Q_{emisfera} = -q - Q_{piano} \tag{163}$$

La carica indotta sulla parte piana del conduttore è a sua volta la somma di due contributi: $Q_{q;d}$, la carica indotta sulla parte piana del conduttore dalla coppia di cariche $\pm q$ poste in $z = \pm d$ e $Q_{-q \frac{a}{d}; \frac{a^2}{d}}$, la carica indotta sulla stessa parte piana dalla coppia di cariche $\mp q \frac{a}{d}$ poste in $z = \pm \frac{a^2}{d}$:

$$Q_{piano} = Q_{q;d} + Q_{-q \frac{a}{d}; \frac{a^2}{d}} \quad (164)$$

La carica $Q_{q;d}$ si ottiene dall'espressione per la densità di carica indotta da una carica q posta a distanza d da un piano conduttore:

$$Q_{q;d} = -q d \int_a^\infty \frac{d\rho \rho}{(\rho^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{q d}{\sqrt{a^2 + d^2}} \quad (165)$$

Pertanto

$$Q_{-q \frac{a}{d}; \frac{a^2}{d}} = \frac{q \frac{a}{d} \frac{a^2}{d}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^4}{d^2}}} = \frac{q a^2}{d \sqrt{d^2 + a^2}} \quad (166)$$

La (163) dà dunque:

$$Q_{emisfera} = -q + \frac{q d}{\sqrt{a^2 + d^2}} - \frac{q a^2}{d \sqrt{d^2 + a^2}} \quad (167)$$

Il secondo metodo è quello diretto e consiste nell'integrare sull'emisfera le distribuzioni di carica indotte da ciascuna delle 4 cariche. Sia

$$\vec{x} = a (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (168)$$

con

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad (169)$$

un punto sull'emisfera. Le componenti normali all'emisfera dei campi elettrici $\vec{E}_a(\vec{x})$ sono proporzionali alle densità di carica indotta σ_a , ($a = 1, \dots, 4$):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \epsilon_0 \hat{x} \cdot \vec{E}_1(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi} \frac{a - d \cos \theta}{|\vec{x} - d \hat{z}|^3} = \frac{q}{4\pi} \frac{a - d \cos \theta}{(a^2 + d^2 - 2da \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \\ \sigma_2 &= \epsilon_0 \hat{x} \cdot \vec{E}_2(\vec{x}) = -\frac{q}{4\pi} \frac{a}{d} \frac{a - \frac{a^2}{d} \cos \theta}{(a^2 + \frac{a^4}{d^2} - \frac{a^3}{d} \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \\ \sigma_3 &= \epsilon_0 \hat{x} \cdot \vec{E}_3(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi} \frac{a}{d} \frac{a + \frac{a^2}{d} \cos \theta}{(a^2 + \frac{a^4}{d^2} + \frac{a^3}{d} \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \\ \sigma_4 &= \epsilon_0 \hat{x} \cdot \vec{E}_4(\vec{x}) = -\frac{q}{4\pi} \frac{a + d \cos \theta}{(a^2 + d^2 + 2da \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (170)$$

dove:

$$\cos \theta = \hat{x} \cdot \hat{z} \quad (171)$$

La carica indotta sull'emisfera è la somma delle cariche associate a ciascuna di queste densità

$$\begin{aligned} q_1 &= 2 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta a^2 \sigma_1 = \frac{q}{2} \int_0^1 dt a^2 \frac{a - dt}{(a^2 + d^2 - 2 d a t)^{\frac{3}{2}}} \\ q_2 &= -\frac{q}{2} \int_0^1 dt a^2 \frac{a}{d} \frac{a - \frac{a^2}{d} t}{(a^2 + \frac{a^4}{d^2} - \frac{a^3}{d} t)^{\frac{3}{2}}} \\ q_3 &= \frac{q}{2} \int_0^1 dt a^2 \frac{a}{d} \frac{a + \frac{a^2}{d} t}{(a^2 + \frac{a^4}{d^2} + \frac{a^3}{d} t)^{\frac{3}{2}}} \\ q_4 &= -\frac{q}{2} \int_0^1 dt a^2 \frac{a + dt}{(a^2 + d^2 + 2 d a t)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (172)$$

Queste cariche sono esprimibili tutte in termini dell'integrale definito elementare:

$$\begin{aligned} I(\eta) &= \int_0^1 dt \frac{1 + \eta t}{(1 + \eta^2 + 2 \eta t)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \begin{cases} 1 - \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} & \eta > -1 \\ -1 - \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} & \eta < -1 \end{cases} \end{aligned} \quad (173)$$

In definitiva la carica indotta sull'emisfera è

$$\begin{aligned} Q_{emisfera} &= \sum_{a=1}^4 q_a = \frac{q}{2} \left[I\left(-\frac{d}{a}\right) - I\left(\frac{d}{a}\right) - \frac{a}{d} I\left(-\frac{a}{d}\right) + \frac{a}{d} I\left(\frac{a}{d}\right) \right] = \\ &= \frac{q}{2} \left[-1 + \frac{d}{\sqrt{a^2 + d^2}} - 1 + \frac{d}{\sqrt{a^2 + d^2}} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{a}{d} \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + d^2}}\right) + \frac{a}{d} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + d^2}}\right) \right] = \\ &= q \left[-1 + \frac{d}{\sqrt{a^2 + d^2}} - \frac{a^2}{d \sqrt{a^2 + d^2}} \right] \end{aligned} \quad (174)$$

in accordo col risultato ottenuto col primo metodo.

Problema 2

Il coefficiente di riflessione per polarizzazione nel piano di incidenza è

$$R = \left| \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \right|^2 \quad (175)$$

R si annulla dunque se

$$\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2} \quad (176)$$

ovvero quando

$$\cos \theta_t = \sin \theta_i \quad \cos \theta_i = \sin \theta_t \quad (177)$$

D'altra parte la legge di Snell impone

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (178)$$

Dunque il coefficiente di riflessione si annulla per

$$n_1 \tan \theta_i = n_2 \quad (179)$$

Nella situazione del problema questo significa

$$\tan \theta_i = 2.5 \quad (180)$$

ovvero

$$\theta_i \approx 1.19 \text{ rad} \quad (181)$$

Corso di Elettromagnetismo ed Ottica

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 22/07/2009

Problema 1

Un'onda elettromagnetica di frequenza $\omega = 2\pi\nu = 10^{10} \text{Hertz}$ incide perpendicolarmente su una superficie di un mezzo dielettrico conduttore di permittività dielettrica ϵ (statica) e conducibilità σ .

Domanda 1 (Punti 8)

Si consideri il caso in cui il mezzo conduttore è l'argento, per il quale

$$\sigma = 6.3 \cdot 10^7 (\text{ohm} \cdot \text{metri})^{-1} \quad \epsilon = \epsilon_0 \quad \rho = 10.5 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} \quad M_a = 107.9 \text{ u.a.}$$

dove ρ è la densità e M_a la massa atomica¹. Si ipotizzi che ci sia un elettrone di conduzione per atomo. Si calcoli la profondità di penetrazione dell'onda.

Domanda 2 (Punti 10)

Si consideri il caso dell'acqua marina, per la quale:

$$\sigma = 5.0 (\text{ohm} \times \text{metri})^{-1} \quad \epsilon = 80.1 \epsilon_0$$

Si assuma che la conducibilità dell'acqua marina sia dovuta principalmente agli ioni di sale in essa sciolti (Na^+ e Cl^-). Si supponga che la densità degli ioni sia di $N_{\text{Avogadro}} = 6.02 \times 10^{23}$ ioni per kilogrammo di acqua marina e che la loro massa (media) sia circa uguale a $M \approx 5 \times 10^4 m_e$ dove m_e è la massa dell'elettrone. Si calcoli la profondità di penetrazione dell'onda elettromagnetica. (*Suggerimento:* Si scriva la polarizzabilità dell'acqua marina come la somma di un contributo dovuto alla polarizzabilità molecolare, che per la frequenza considerata è quello statico, ed un contributo "metallico" dovuto agli ioni di conduzione del sale sciolto.)

Problema 2

Due conduttori ideali cilindrici infiniti di raggi a e b sono disposti con gli assi paralleli a distanza $d > a + b$ tra loro.

Domanda 1 (Punti 20)

Si calcoli la capacità per unità di lunghezza del sistema.

(*Suggerimento:* Si risolva il problema col metodo dei fili immagine)

¹Questo significa che in 107.9 grammi di argento ci sono un numero $N_{\text{Avogadro}} = 6.02 \times 10^{23}$ di atomi.

Prova Scritta del 22/07/2009: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Usiamo la formula per l'indice di rifrazione n per un metallo

$$n^2 = 1 + \frac{\omega_{pl}^2}{-\omega^2 + i \omega_{pl}^2 \frac{\omega}{\omega_\sigma}} \quad (182)$$

dove ω_{pl} è la frequenza di plasma associata agli elettroni di conduzione

$$\omega_{pl}^2 = \frac{N q^2}{m \epsilon_0} \quad (183)$$

e ω_σ è la frequenza associata alla conduttività

$$\omega_\sigma = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \approx 7.11 \times 10^{18} \text{ Hertz} \quad (184)$$

Il numero di cariche conduttrici per unità di volume N è

$$N = \frac{\rho}{M_a} N_{Avogadro} \approx \frac{10.490 \frac{gr}{cm^3}}{107.9 \text{ gr}} 6.02 \cdot 10^{23} \approx 5.85 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3} \quad (185)$$

La frequenza di plasma corrispondente è pertanto

$$\omega_{pl} \approx 1.37 \times 10^{16} \text{ Hertz} \quad (186)$$

Dunque

$$\frac{\omega_{pl}^2}{\omega_\sigma} \approx 2.63 \times 10^{13} \text{ Hertz} \quad (187)$$

Siamo dunque nelle condizioni di “bassa frequenza”

$$\omega \ll \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_\sigma} \quad (188)$$

per cui, approssimativamente,

$$n^2 \approx 1 - i \frac{\omega_\sigma}{\omega} \quad (189)$$

Siamo anche in presenza di un buon conduttore

$$\omega \ll \omega_\sigma \quad (190)$$

per cui vale l'ulteriore approssimazione

$$n^2 \approx -i \frac{\omega_\sigma}{\omega} \quad (191)$$

da cui

$$n \approx (1 - i) \sqrt{\frac{\omega_\sigma}{2\omega}} \quad (192)$$

La lunghezza di penetrazione è determinata dalla parte immaginaria dell'indice di rifrazione

$$\delta = \frac{c}{\text{Im}(n)\omega} \approx c \sqrt{\frac{2}{\omega_\sigma \omega}} \approx 1.59 \times 10^{-6} \text{ metri} \quad (193)$$

Domanda 2

Poiché la densità dell'acqua è circa di 1 gr/cm^3 , il numero di cariche ioniche per unità di volume N dell'acqua marina è di

$$N \approx \frac{6.02 \times 10^{23}}{10^3 \text{ cm}^3} \approx 6.02 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3} \quad (194)$$

La frequenza di plasma è proporzionale alla radice di N ed inversamente proporzionale alla radice della massa: pertanto

$$\omega_{pl} \approx \sqrt{\frac{6.02 \times 10^{20}}{5.85 \times 10^{22}}} \frac{1}{\sqrt{5 \times 10^4}} 1.37 \times 10^{16} \text{ Hertz} \approx 6.2 \times 10^{12} \text{ Hertz}$$

La frequenza associata alla conducibilità è invece

$$\omega_\sigma \approx 5.65 \times 10^{11} \text{ Hertz} \quad (195)$$

Dunque

$$\frac{\omega_{pl}^2}{\omega_\sigma} \approx 6.81 \times 10^{13} \text{ Hertz} \quad (196)$$

Anche in questo caso siamo dunque nelle condizioni di "bassa frequenza", ovvero

$$\omega \ll \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_\sigma} \quad (197)$$

per cui il contributo a n^2 degli ioni è

$$n_{ioni}^2 \approx 1 - i \frac{\omega_\sigma}{\omega} \quad (198)$$

A questo contributo va aggiunta la polarizzabilità molecolare χ_{mol} che supponiamo indipendente dalla frequenza (per radiofrequenze come quelle in considerazione) ed uguale al suo valore statico. In definitiva

$$n^2 = 1 + \chi_{mol} - i \frac{\omega_\sigma}{\omega} = \epsilon_r \left(1 - i \frac{\omega_\sigma}{\omega \epsilon_r}\right) \approx 80.1 - 56.55 i \quad (199)$$

l'indice di rifrazione diventa

$$n \approx 9.44 - 2.99 i \quad (200)$$

La lunghezza di penetrazione è

$$\delta = \frac{c}{\text{Im}(n) \omega} \approx 1.00 \text{ cm} \quad (201)$$

Questo spiega perché comunicare con le onde radio tra sottomarini sia difficile: bisognerebbe usare frequenze estremamente basse.

Problema 2

Risolviamo il problema attraverso il metodo delle immagini. Scegliamo l'asse delle z coincidente con l'asse del cilindro di raggio a . Prendiamo l'asse delle x in modo che passi per il centro dell'altro cilindro di raggio b . Cerchiamo una soluzione del problema di Laplace corrispondente a due fili immagine carichi, paralleli all'asse delle z e passanti per l'asse delle x nei punti di coordinate x_+ ed x_- . Siano λ e $-\lambda$ le cariche per unità di lunghezza dei due fili. Dobbiamo determinare x_\pm e λ imponendo che la differenza di potenziale tra i due cilindri sia V e che i due fili immagine siano uno interno al primo cilindro e l'altro interno al secondo:

$$x_+ < a \quad x_- > d - b \quad (202)$$

Sappiamo, dal problema del filo carico in presenza di un conduttore cilindrico, che affinché la superficie cilindro di raggio a sia equipotenziale è necessario che

$$x_+ x_- = a^2 \quad (203)$$

Per la stessa ragione, affinché la superficie del cilindro di raggio b sia equipotenziale è anche necessario che

$$(d - x_-)(d - x_+) = b^2 \quad (204)$$

Queste due equazioni determinano x_\pm in termini di d , a e b :

$$\begin{aligned}
x_+ &= \frac{a^2 + d^2 - b^2 - \sqrt{(a^2 + d^2 - b^2)^2 - 4 a^2 d^2}}{2 d} \\
x_- &= \frac{a^2 + d^2 - b^2 + \sqrt{(a^2 + d^2 - b^2)^2 - 4 a^2 d^2}}{2 d}
\end{aligned} \tag{205}$$

Il potenziale è dato da

$$\phi(x, y) = -\frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0} \log \frac{(x - x_+)^2 + y^2}{(x - x_-)^2 + y^2} \tag{206}$$

Il potenziale sul cilindro di raggio a vale:

$$\phi_a = -\frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0} \log \frac{(a - x_+)^2}{(a - x_-)^2} = -\frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0} \log \frac{x_+^2}{a^2} \tag{207}$$

quello sul cilindro di raggio b è

$$\phi_b = -\frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0} \log \frac{(d - b - x_+)^2}{(d - b - x_-)^2} = -\frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0} \log \frac{(d - x_+)^2}{b^2} \tag{208}$$

La differenza di potenziale è

$$\begin{aligned}
V = \phi_a - \phi_b &= -\frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0} \log \frac{x_+^2 b^2}{(d - x_+)^2 a^2} = \\
&= -\frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \log \frac{x_+ (d - x_-)}{a b} = \\
&= -\frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \log \frac{\frac{a^2 + d^2 - b^2 - \sqrt{(a^2 + d^2 - b^2)^2 - 4 a^2 d^2}}{2} - a^2}{a b} \\
&= -\frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \log \frac{d^2 - b^2 - a^2 - \sqrt{(a^2 + d^2 - b^2)^2 - 4 a^2 d^2}}{2 a b} = \\
&= -\frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \log \frac{d^2 - b^2 - a^2 - \sqrt{(d^2 - b^2 - a^2)^2 - 4 a^2 b^2}}{2 a b} = \\
&= -\frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \log \left[\frac{d^2 - b^2 - a^2}{2 a b} - \sqrt{\left(\frac{d^2 - b^2 - a^2}{2 a b} \right)^2 - 1} \right] = \\
&= \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \log \left[\frac{d^2 - b^2 - a^2}{2 a b} + \sqrt{\left(\frac{d^2 - b^2 - a^2}{2 a b} \right)^2 - 1} \right] \tag{209}
\end{aligned}$$

La capacità per unità di lunghezza è

$$C = \frac{\lambda}{V} = \frac{2 \pi \epsilon_0}{\log \left[\frac{d^2 - b^2 - a^2}{2 a b} + \sqrt{\left(\frac{d^2 - b^2 - a^2}{2 a b} \right)^2 - 1} \right]} \quad (210)$$

Corso di Elettromagnetismo ed Ottica

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 09/09/2009

Problema 1

Un'onda elettromagnetica piana sinusoidale di frequenza ω si propaga lungo l'asse delle z in un mezzo materiale che ha indice di rifrazione n_1 (n_2) e permeabilità magnetica μ_1 (μ_2) per $z < 0$ ($z > 0$). Sia:

$$\vec{E}_i(\vec{x}, t) = E_i \hat{x} e^{ikz - i\omega t} \quad z < 0 \quad (211)$$

il campo elettrico dell'onda incidente in $z < 0$, dove \hat{x} è il versore lungo l'asse delle x , e E_i la sua ampiezza.

Domanda 1 (Punti 6)

Si determini il campo elettrico dell'onda riflessa.

Domanda 2 (Punti 8)

Si calcolino i coefficienti di riflessione e di trasmissione (cioè i rapporti tra la potenza media riflessa o trasmessa e quella incidente), dimostrando preliminarmente che il vettore di Poynting in un mezzo di permeabilità magnetica μ si scrive

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu} \quad (212)$$

Problema 2

Domanda 1 (Punti 4)

Si dimostri che il campo elettrostatico esercita su un punto P della superficie di un conduttore chiuso una pressione diretta verso l'esterno pari a

$$\vec{f}(P) = \frac{1}{2} \sigma(P) \vec{E}(P) \quad (213)$$

dove $\vec{E}(P)$ e $\sigma(P)$ sono il campo elettrico e la densità di carica in quel punto.

Domanda 2 (Punti 5)

Si applichi il risultato precedente ad un conduttore sferico isolato e scarico di raggio a che si trova in un campo elettrico uniforme $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$. Si supponga di tagliare la sfera in due emisfere lungo un piano ortogonale a \vec{E}_0 passante per il centro della sfera. Si determini se le due emisfere tenderanno a separarsi od a restare incollate. Si calcoli la forza necessaria a separare o a tenere insieme le due emisfere.

Domanda 3 (Punti 8)

Si risponda alla stessa domanda del punto precedente nel caso in cui il conduttore sferico ha carica Q .

Prova Scritta del 09/09/2009: Soluzione

Problema 1

Poiché l'onda incide normalmente sulla superficie $z = 0$, gli stessi argomenti svolti nella discussione riportata, per esempio, negli appunti implicano che le onde riflesse e trasmesse hanno la forma

$$\begin{aligned}\vec{E}_r(\vec{x}, t) &= E_r \hat{x} e^{-ikz - i\omega t} \\ \vec{E}_t(\vec{x}, t) &= E_t \hat{x} e^{ik_t z - i\omega t}\end{aligned}$$

dove

$$k_t = \frac{\omega}{v_2} = \frac{\omega n_2}{c} \quad (214)$$

e

$$v_2 = \frac{c}{n_2} \quad (215)$$

è la velocità di fase nel mezzo con indice di rifrazione n_2 .

La condizione di continuità per la componente tangente al bordo del campo elettrico dà

$$E_r + E_i = E_t \quad (216)$$

Il campo magnetico di un'onda piana è dato da

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\hat{k} \wedge \vec{E}}{v} \quad (217)$$

dove v è la velocità di fase e \hat{k} è il versore lungo \vec{k} . Pertanto i campi magnetici delle onde incidenti riflesse e trasmesse sono diretti lungo l'asse delle y

$$\begin{aligned}\vec{B}_i(\vec{x}, t) &= \frac{E_i}{v_1} \hat{y} e^{ikz - i\omega t} \\ \vec{B}_r(\vec{x}, t) &= -\frac{E_r}{v_1} \hat{y} e^{-ikz - i\omega t} \\ \vec{B}_t(\vec{x}, t) &= \frac{E_t}{v_2} \hat{y} e^{ik_t z - i\omega t}\end{aligned}$$

La condizione di continuità della componente tangenziale di $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$ dà pertanto

$$\frac{1}{\mu_1 v_1} (E_i - E_r) = \frac{1}{\mu_2 v_2} E_t \quad (218)$$

Sostituendo nella (216) otteniamo

$$E_r + E_i = \frac{\mu_2 n_1}{\mu_1 n_2} (E_i - E_r) \quad (219)$$

ovvero

$$E_r = E_i \frac{\frac{n_1}{\mu_1} - \frac{n_2}{\mu_2}}{\frac{n_1}{\mu_1} + \frac{n_2}{\mu_2}} \quad (220)$$

e

$$E_t = E_i \frac{2 \frac{n_1}{\mu_1}}{\frac{n_1}{\mu_1} + \frac{n_2}{\mu_2}} \quad (221)$$

Domanda 2

L'espressione per il vettore di Poynting per un mezzo di permeabilità magnetica μ

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu} \quad (222)$$

si ottiene dalle equazioni di Maxwell in presenza di materia in maniera del tutto analoga al caso del vuoto: il lavoro fatto sulle cariche libere si scrive

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{j}_{cond} &= \epsilon_0 c^2 \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) - \dot{\vec{D}} \cdot \vec{E} = \\ &= \epsilon_0 c^2 \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{E} - \epsilon_0 c^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) - \dot{\vec{D}} \cdot \vec{E} = \\ &= -\epsilon_0 c^2 \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} - \epsilon_0 c^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) - \dot{\vec{D}} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

Posto

$$\vec{B} = \mu_r \vec{H} = \epsilon c^2 \mu \vec{H} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (223)$$

con

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad (224)$$

otteniamo

$$\vec{E} \cdot \vec{j}_{cond} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \left[\epsilon_0 c^2 \vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{D} \cdot \vec{E} \right] - \vec{\nabla} \cdot \frac{(\vec{E} \wedge \vec{B})}{\mu}$$

Identifichiamo pertanto la densità di energia immagazzinata nel campo elettromagnetico nel mezzo materiale con l'espressione

$$u = \frac{1}{2} \left[\epsilon_0 c^2 \vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{D} \cdot \vec{E} \right] \quad (225)$$

ed il flusso di energia con il vettore \vec{S} nella (222).

In particolare, per un'onda elettromagnetica, \vec{S} diventa

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}^2}{\mu v} \hat{k} = \frac{n \vec{E}^2}{\mu c} \hat{k} \quad (226)$$

I coefficienti di riflessione e trasmissione sono quindi

$$R = \frac{|E_r|^2}{|E_i|^2} = \frac{\left(\frac{n_1}{\mu_1} - \frac{n_2}{\mu_2}\right)^2}{\left(\frac{n_1}{\mu_1} + \frac{n_2}{\mu_2}\right)^2}$$

$$T = \frac{\mu_1 n_2}{n_1 \mu_2} \frac{|E_t|^2}{|E_i|^2} = \frac{\mu_1 n_2}{n_1 \mu_2} \frac{4 \frac{n_1^2}{\mu_1^2}}{\left(\frac{n_1}{\mu_1} + \frac{n_2}{\mu_2}\right)^2} = \frac{4 \frac{n_1}{\mu_1} \frac{n_2}{\mu_2}}{\left(\frac{n_1}{\mu_1} + \frac{n_2}{\mu_2}\right)^2}$$

Problema 2

Domanda 1

Si può derivare l'espressione (213) per la pressione su un conduttore in un campo elettrostatico in diverse maniere (si vedano, per esempio, i vari testi di riferimento del corso.) Un modo è il seguente: si consideri un elemento infinitesimo di superficie $d\Sigma_P$ del conduttore intorno al punto P . La densità di carica superficiale su $d\Sigma_P$ è approssimativamente costante ed uguale a $\sigma(P)$. Pertanto il campo elettrico generato dalla carica presente in $d\Sigma_P$ in un punto P_{est} (P_{int}) esterno (rispettivamente, interno) a S , ed infinitamente vicino a P , coincide con quello di un piano uniformemente carico:

$$\lim_{P_{est} \rightarrow P} \vec{E}'(P_{est}) = \frac{\sigma(P)}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

$$\lim_{P_{int} \rightarrow P} \vec{E}'(P_{int}) = -\frac{\sigma(P)}{2\epsilon_0} \hat{n} \quad (227)$$

dove \hat{n} è il versore normale a $d\Sigma_P$ in P che *fuoriesce* da S . Siano $\vec{E}''(P_{est})$ e $\vec{E}''(P_{int})$ i valori del campo elettrostatico generato dal resto del conduttore $S/d\Sigma_P$ nei punti P_{est} e P_{int} . Il campo $\vec{E}''(P)$ è continuo in P in quanto la distribuzione di carica che lo genera è nulla nell'intorno di P . Pertanto

$$\lim_{P_{est} \rightarrow P} \vec{E}''(P_{est}) = \lim_{P_{int} \rightarrow P} \vec{E}''(P_{int}) = \vec{E}''(P) \quad (228)$$

Sappiamo infine che il campo totale in P_{int} è nullo:

$$0 = \lim_{P_{int} \rightarrow P} \vec{E}(P_{int}) = \lim_{P_{int} \rightarrow P} \left(\vec{E}'(P_{int}) + \vec{E}''(P_{int}) \right) = -\frac{\sigma(P)}{2 \epsilon_0} \hat{n} + \vec{E}''(P) \quad (229)$$

Dunque

$$\vec{E}''(P) = \frac{\sigma(P)}{2 \epsilon_0} \hat{n} \quad (230)$$

La forza esercitata dal campo elettrostatico sul disco $d\Sigma_P$ è dunque

$$d\vec{F}(P) = \vec{E}''(P) \sigma(P) d\Sigma_P = \frac{\sigma^2(P)}{2 \epsilon_0} d\Sigma_P \hat{n} \quad (231)$$

Da questa espressione ricaviamo per la pressione

$$\vec{p}(P) = \frac{1}{2 \epsilon_0} \sigma^2(P) \hat{n} = \frac{1}{2} \sigma(P) \vec{E}(P) \quad (232)$$

in accordo con la (213).

Domanda 2

Scegliamo il campo elettrico all'infinito lungo la direzione delle z ed usiamo un sistema di coordinate sferico (r, θ, ϕ) con centro nella sfera conduttrice. La densità di carica superficiale su un punto della sfera è

$$\sigma(\theta) = 3 \epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (233)$$

per cui la pressione, diretta lungo il raggio, è

$$p = \frac{9 \epsilon_0 E_0^2}{2} \cos^2 \theta \quad (234)$$

Siamo interessati al calcolo delle componenti z delle forze esercitate su ciascuna delle due emisfere conduttrici: queste forze saranno dirette verso l'esterno della sfera e per ragioni di simmetria queste saranno uguali ed opposte. La forza necessaria a separare le due emisfere sarà dunque negativa: cioè, affinché queste non si separino, sarà necessario esercitare su *ciascuna* emisfera una forza lungo z che compensi la pressione diretta verso l'esterno. Il valore assoluto di questa forza è

$$\begin{aligned} F_z &= \int_{emisfera} p \cos \theta a^2 d\Omega = 2 \pi \frac{9 \epsilon_0 E_0^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = \\ &= 9 \pi \epsilon_0 E_0^2 \int_0^1 t^3 dt = \frac{9 \pi \epsilon_0 E_0^2}{4} \end{aligned} \quad (235)$$

Domanda 2

Nel caso della sfera carica la densità di carica superficiale è

$$\sigma_Q(\theta) = 3 \epsilon_0 E_0 \cos \theta + \frac{Q}{4 \pi a^2} = \sigma(\theta) + \frac{Q}{4 \pi a^2} \quad (236)$$

e dunque la pressione è

$$p_Q = \frac{1}{2 \epsilon_0} \sigma_Q^2(\theta) = \frac{1}{2 \epsilon_0} \sigma^2(\theta) + \frac{Q^2}{32 \pi^2 \epsilon_0 a^4} + \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\theta) \frac{Q}{4 \pi a^2} \quad (237)$$

I primi due termini sono positivi: corrispondono a pressioni dirette verso l'esterno le cui componenti z sono uguali ed opposte nelle due emisfere. Il terzo termine è positivo in una delle due emisfere e negativo nell'altra: le forze lungo z a questo associate sono dirette nella direzione positiva di z per ambedue le emisfere. Questa è una forza netta lungo z che corrisponde alla forza che il campo esterno E_0 esercita sulla sfera carica. In conclusione la forza che è necessario esercitare su ciascuna emisfera per tenerle insieme è quella associata ai primi due termini positivi:

$$\begin{aligned} F_z^{(Q)} &= F_z + \frac{Q^2}{16 \pi \epsilon_0 a^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta = \\ &= F_z + \frac{Q^2}{16 \pi \epsilon_0 a^2} \int_0^1 t dt = \frac{9 \pi \epsilon_0 E_0^2}{4} + \frac{Q^2}{32 \pi \epsilon_0 a^2} \end{aligned} \quad (238)$$

Corso di Elettromagnetismo ed Ottica

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 22/01/2010

Problema 1

In un solenoide cilindrico di raggio a e lunghezza *finita* L scorre una corrente per unità di lunghezza, diretta parallelamente al piano ortogonale all'asse del solenoide, uniforme e pari a i . Si prenda l'asse del solenoide come asse delle z e l'origine del sistema di coordinate nel punto mediano dell'asse.

Domanda 1 (Punti 12)

Si calcoli esattamente il campo magnetico in un punto sull'asse del solenoide di coordinata z . Si verifichi che nel limite in cui $L \gg a$ e $L \gg |z|$ il campo magnetico si riduce a quello ben noto di un solenoide infinitamente lungo, ovvero a $\vec{B} = \frac{i}{\epsilon_0 c^2} \hat{z}$.

Domanda 2 (Punti 12)

Si calcoli il campo magnetico lungo l'asse del solenoide a distanze *grandi* dal solenoide, facendo uso dell'approssimazione di dipolo magnetico. Si verifichi esplicitamente che l'approssimazione di dipolo magnetico è in accordo con il limite del risultato esatto derivato alla Domanda 1 per $z \gg L$ e $z \gg a$.

Problema 2

Si consideri il campo elettrico $\vec{E}(\vec{x})$ creato da una distribuzione di carica $\rho(\vec{x})$ contenuta dentro una sfera di raggio a .

Domanda 1 (Punti 12)

Si dimostri che la media del campo $\vec{E}(x)$ all'interno della sfera

$$\vec{E}_{medio} = \frac{3}{4\pi a^3} \int_{|\vec{x}'| \leq a} d^3 \vec{x}' \vec{E}(\vec{x}')$$

dipende da $\rho(\vec{x})$ soltanto attraverso il momento di dipolo elettrico della distribuzione, $\vec{p} \equiv \int_{|\vec{x}'| \leq a} d^3 \vec{x}' \rho(\vec{x}') \vec{x}'$. Si derivi la formula che dà \vec{E}_{medio} in termini di \vec{p}

Prova Scritta del 22/01/2010: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Vogliamo calcolare il campo magnetico del solenoide come sovrapposizione del campo magnetico creato dalle spire circolari di spessore infinitesimo che lo compongono. Determiniamo pertanto, *preliminarmente*, il campo prodotto da una spira circolare di raggio a , nella quale circola una corrente I in senso antiorario, in un punto posto sull'asse della spira. Prendiamo l'asse della spira come asse delle z e l'origine nel centro della spira. Sia

$$\vec{x}_P = z \hat{z} \quad (239)$$

il vettore coordinata del punto P sull'asse della spira in cui vogliamo calcolare il campo magnetico. Per ragioni di simmetria il campo magnetico in P è diretto lungo l'asse delle z . Sia

$$\vec{x}' = a (\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}) \quad (240)$$

il vettore coordinate di un punto P' sulla spira. Sia

$$d\vec{l} = a (-\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}) d\theta \quad (241)$$

l'elemento di lunghezza tangente lungo la spira preso in senso antiorario. La formula di Biot-Savart per il campo magnetico dà

$$\vec{B}(P) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 c^2} \oint \frac{I d\vec{l} \wedge (\vec{x}_P - \vec{x}')}{|\vec{x}_P - \vec{x}'|^3} \quad (242)$$

dove l'integrale è preso lungo la spira. Abbiamo pertanto

$$\begin{aligned} d\vec{l} \wedge (\vec{x}_P - \vec{x}') &= \\ &= a d\theta (z \sin \theta \hat{y} + a \sin^2 \theta \hat{z} + z \cos \theta \hat{x} + a \cos^2 \theta \hat{z}) = \\ &= a d\theta (z \sin \theta \hat{y} + z \cos \theta \hat{x} + a \hat{z}) \end{aligned} \quad (243)$$

e

$$|\vec{x}_P - \vec{x}'|^3 = (z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} \quad (244)$$

In definitiva

$$\vec{B}_{spira}(P) = \frac{I}{4 \pi \epsilon_0 c^2} \frac{a^2 2 \pi}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} = \frac{I}{2 \epsilon_0 c^2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} \quad (245)$$

Applichiamo questo risultato al solenoide cilindrico di lunghezza L , nel quale scorre una corrente per unità di lunghezza i . Prendiamo l'asse delle z coincidente con l'asse del solenoide e l'origine nel punto mediano del solenoide. Vogliamo calcolare il campo magnetico in un punto P sull'asse del solenoide con vettore coordinata

$$\vec{x}_P = z \hat{z} \quad (246)$$

Nella spira, posta ad altezza z' , di spessore infinitesimo dz' scorre una corrente $dI = i dz'$. Il campo da essa prodotta nel punto P è pertanto diretto lungo z ed ha intensità

$$dB_z(P) = \frac{i dz'}{2 \epsilon_0 c^2} \frac{a^2}{((z - z')^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (247)$$

Il campo generato dal solenoide in P è dunque

$$\begin{aligned} B_z(P) &= \frac{i}{2 \epsilon_0 c^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{a^2 dz'}{((z - z')^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{i}{2 \epsilon_0 c^2} \int_{-\frac{\frac{L}{2}+z}{a}}^{\frac{\frac{L}{2}-z}{a}} \frac{ds}{(s^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{i}{2 \epsilon_0 c^2} \left[\frac{s}{(s^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right]_{-\frac{\frac{L}{2}+z}{a}}^{\frac{\frac{L}{2}-z}{a}} = \\ &= \frac{i}{2 \epsilon_0 c^2} \left[\frac{\frac{L}{2} - z}{[(\frac{L}{2} - z)^2 + a^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{L}{2} + z}{[(\frac{L}{2} + z)^2 + a^2]^{\frac{1}{2}}} \right] \end{aligned} \quad (248)$$

Nel limite di solenoide infinitamente lungo $L \gg a$ e $L \gg z$ otteniamo il ben noto risultato

$$B_z(P) \approx \frac{i}{2 \epsilon_0 c^2} [1 + 1] = \frac{i}{\epsilon_0 c^2} \quad (249)$$

Domanda 2

Il momento di dipolo magnetico del solenoide è la somma dei momenti di dipolo delle spire che lo compongono. Poiché il momento di dipolo di una spira circolare di raggio a attraversata dalla corrente I è diretto lungo l'asse ortogonale alla spira e ha intensità $\pi a^2 I$, concludiamo che il momento di dipolo del solenoide è

$$\vec{m} = L i \pi a^2 \hat{z} \quad (250)$$

Il campo magnetico di un dipolo magnetico \vec{m} è dato dalla formula

$$\vec{B}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{3\vec{m} \cdot \vec{x} \vec{x} - \vec{x}^2 \vec{m}}{|\vec{x}|^5} \quad (251)$$

Pertanto il campo magnetico a distanze grandi dal solenoide in un punto P sull'asse vale

$$\vec{B}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2\vec{m}}{|\vec{x}|^3} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{4\pi a^2 i L}{|z|^3} \hat{z} = \frac{i}{2\epsilon_0 c^2} \frac{a^2 L}{|z|^3} \hat{z} \quad (252)$$

Confrontiamo questo risultato col risultato esatto, valutato nel limite $z \gg L$ e $z \gg a$. Possiamo scegliere, senza perdita di generalità, $z > 0$: data la simmetria del problema, il valore del campo in $z < 0$ è identico a quello in $-z$. Il valore esatto del campo in P , con $z > 0$, è

$$B_z(P) = \frac{i}{2\epsilon_0 c^2} \left[\frac{\frac{L}{2z} - 1}{\left[\left(\frac{L}{2z} - 1\right)^2 + \frac{a^2}{z^2}\right]^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{L}{2z} + 1}{\left[\left(\frac{L}{2z} + 1\right)^2 + \frac{a^2}{z^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (253)$$

Vogliamo espandere questa espressione in potenze di $1/z$. Il risultato (252) ci suggerisce che sarà necessario includere i termini di ordine cubico in $1/z$. Ricordando lo sviluppo di Taylor:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots \quad (254)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{L}{2z}\right)^2 + \frac{a^2}{z^2}\right]^{\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{\left[1 + \frac{L}{z} + \frac{L^2}{4z^2} + \frac{a^2}{z^2}\right]^{\frac{1}{2}}} = \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{L}{z} + \frac{L^2}{4z^2} + \frac{a^2}{z^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{L}{z} + \frac{L^2}{4z^2} + \frac{a^2}{z^2}\right)^2 - \frac{5}{16}\frac{L^3}{z^3} + \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{L}{z} + \frac{L^2}{4z^2} + \frac{a^2}{z^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{L^2}{z^2} + \frac{L^3}{2z^3} + 2\frac{a^2 L}{z^3}\right) - \frac{5}{16}\frac{L^3}{z^3} + \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{2}\frac{L}{z} + \frac{L^2}{4z^2} - \frac{a^2}{2z^2} + \frac{3a^2 L}{4z^3} - \frac{1}{8}\frac{L^3}{z^3} + \dots = \end{aligned}$$

dove abbiamo incluso i termini di ordine $1/z^3$ ed i puntini indicano termini

di ordine $1/z^4$ o più alto. Otteniamo dunque, all'ordine in $1/z^3$

$$\begin{aligned} \frac{1 + \frac{L}{2z}}{\left[\left(1 + \frac{L}{2z}\right)^2 + \frac{a^2}{z^2}\right]^{\frac{1}{2}}} &= \left(1 + \frac{L}{2z}\right) \left(1 - \frac{L}{2z} + \frac{L^2}{4z^2} - \frac{a^2}{2z^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3a^2L}{4z^3} - \frac{L^3}{8z^3} + \dots\right) = \\ &= 1 - \frac{L}{2z} + \frac{L^2}{4z^2} - \frac{a^2}{2z^2} + \frac{3a^2L}{4z^3} - \frac{L^3}{8z^3} + \\ &\quad + \frac{L}{2z} - \frac{L^2}{4z^2} + \frac{L^3}{8z^3} - \frac{a^2L}{4z^3} + \dots = \end{aligned} \quad (255)$$

$$= 1 - \frac{a^2}{2z^2} + \frac{a^2L}{2z^3} + \dots \quad (256)$$

Mandando z in $-z$, otteniamo l'espressione analoga

$$\frac{1 - \frac{L}{2z}}{\left[\left(1 - \frac{L}{2z}\right)^2 + \frac{a^2}{z^2}\right]^{\frac{1}{2}}} = 1 - \frac{a^2}{2z^2} - \frac{a^2L}{2z^3} + \dots \quad (257)$$

In definitiva l'espressione (253) diventa:

$$B_z(P) = \frac{i}{2\epsilon_0 c^2} \left[\frac{a^2 L}{z^3} + \dots \right] \quad (258)$$

in accordo con il campo di dipolo magnetico (252).

Problema 2

Dalla formula di Coulomb per il campo elettrico otteniamo

$$\begin{aligned} \vec{E}_{medio} &= \frac{3}{4\pi a^3} \int_{|\vec{x}|\leq a} d^3\vec{x} \vec{E}(x) = \\ &= \frac{3}{4\pi a^3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{|\vec{x}|\leq a} d^3\vec{x} \int_{|\vec{x}'|\leq a} d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \\ &= \frac{3}{4\pi a^3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{|\vec{x}'|\leq a} d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') \int_{|\vec{x}|\leq a} d^3\vec{x} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \end{aligned} \quad (259)$$

dove abbiamo scambiato l'ordine d'integrazione. Notiamo ora che

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{4\pi a^3} \int_{|\vec{x}|\leq a} d^3\vec{x} \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad (260)$$

è il campo elettrico prodotto nel punto \vec{x} da una sfera di raggio a uniformemente carica con carica totale uguale ad -1 . Poiché il punto \vec{x} si trova all'interno della sfera, è un risultato ben noto che tale campo elettrico è

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{4\pi a^3} \int_{|\vec{x}'|\leq a} d^3\vec{x}' \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{a^3} \quad (261)$$

Sostituendo nella (259) otteniamo

$$\vec{E}_{medio} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{|\vec{x}'|\leq a} d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{a^3} \quad (262)$$

Corso di Elettromagnetismo ed Ottica

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 19/02/2010

Problema 1

Un conduttore cilindrico di lunghezza infinita e di raggio a ha un foro di forma cilindrica di raggio b parallelo al suo asse. L'asse del foro è a distanza d dall'asse del conduttore, e $d + b < a$. Nel conduttore cilindrico scorre una corrente I distribuita uniformemente lungo la sua sezione.

Domanda 1 (Punti 15)

Si calcoli il campo magnetico (direzione ed intensità) all'interno del foro.

Problema 2

Due sfere concentriche conduttrici di raggio a e b con $a < b$, hanno cariche, rispettivamente, Q e $-Q$.

Domanda 1 (Punti 5)

Si supponga che il guscio sferico compreso tra le due sfere conduttrici sia vuoto. Qual'è il campo elettrico all'interno e all'esterno del guscio?

Domanda 2 (Punti 5)

Si supponga ora che il guscio sferico sia riempito con un dielettrico di costante dielettrica ϵ . Qual'è il campo elettrico all'interno e all'esterno del guscio in questo caso?

Domanda 3 (Punti 15)

Si supponga ora che il guscio sferico sia riempito per metà da un dielettrico di costante dielettrica ϵ , una delle metà delimitate da un piano passante per il centro delle sfere. Si *assuma* che il campo all'interno del guscio sia ottenibile attraverso una carica immagine posta nel centro delle sfere, cioè sia della forma

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad a < r < b \quad (263)$$

Si verifichi che questa assunzione è corretta e si determini q .

Prova Scritta del 19/02/2010: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Sia $\vec{B}(\vec{x})$ il campo creato in un punto \vec{x} da un cilindro di raggio a nel quale scorre una densità di corrente uniforme j lungo l'asse del cilindro. Prendiamo l'asse del cilindro lungo l'asse delle z di un sistema di coordinate cartesiano. Sappiamo che per punti \vec{x} interni al cilindro

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{j}{2 \epsilon_0 c^2} \hat{z} \wedge \vec{x} \quad (264)$$

dove \hat{z} è il versore diretto lungo l'asse del cilindro. Possiamo scrivere

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}_1(\vec{x}) + \vec{B}_2(\vec{x}) \quad (265)$$

dove $\vec{B}_1(\vec{x})$ è il campo generato da un cilindro conduttore di raggio a , con un foro di raggio b , con nel quale scorre una densità di corrente uniforme j , e $\vec{B}_2(\vec{x})$ quello generato da un cilindro conduttore di raggio b , posto all'interno del foro, nel quale scorre la stessa densità di corrente j .

Sia $\vec{d} = d \hat{x}$ il vettore che definisce distanza dell'asse del foro di raggio b dall'asse del cilindro di raggio a . Il campo $\vec{B}_2(\vec{x})$ per \vec{x} interno al foro è

$$\vec{B}_2(\vec{x}) = \frac{j}{2 \epsilon_0 c^2} \hat{z} \wedge (\vec{x} - \vec{d}) \quad (266)$$

Concludiamo che il campo magnetico in un punto nel foro è

$$\begin{aligned} \vec{B}_1(\vec{x}) &= \frac{j}{2 \epsilon_0 c^2} \hat{z} \wedge \vec{x} - \frac{j}{2 \epsilon_0 c^2} \hat{z} \wedge (\vec{x} - \vec{d}) = \\ &= \frac{j}{2 \epsilon_0 c^2} d \hat{y} \end{aligned} \quad (267)$$

La corrente che scorre nel cilindro cavo è

$$I = j \pi (a^2 - b^2) \quad (268)$$

In definitiva il campo nel foro è

$$\vec{B}_1(\vec{x}) = \frac{I}{2 \pi \epsilon_0 c^2} \frac{d \hat{y}}{a^2 - b^2} \quad (269)$$

Problema 2

Domanda 1

Il problema ha simmetria sferica: possiamo supporre che il campo elettrico sia radiale e dipendente solo dalla distanza r dal centro:

$$\vec{E} = E(r) \hat{r} \quad (270)$$

Consideriamo una sfera S_2 di raggio r con $a < r < b$ e applichiamo la legge di Gauss:

$$\int_{S_2} \vec{E} \cdot \hat{r} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (271)$$

Otteniamo

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad a \leq r \leq b \quad (272)$$

Considerando sfere di raggio $r > b$ o $r < a$ otteniamo:

$$E(r) = 0 \quad a < r \quad \text{o} \quad r > b \quad (273)$$

Domanda 2

Applichiamo lo stesso ragionamento della domanda precedente. In questo caso però la legge di Gauss si scrive, per una sfera all'interno del guscio

$$\int_{S_2} \vec{D} \cdot \hat{r} = Q \quad (274)$$

dove

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (275)$$

Dunque

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \quad a \leq r \leq b \quad (276)$$

e

$$E(r) = 0 \quad a < r \quad \text{o} \quad r > b \quad (277)$$

Domanda 3

In questo caso l'assunzione che \vec{E} abbia simmetria radiale non è evidente in quanto il problema non gode di questa simmetria. Verifichiamo dunque esplicitamente che la soluzione proposta effettivamente verifica le equazioni di Maxwell e le condizioni al contorno appropriate.

La legge del flusso applicata a superfici sferiche di raggio maggiore di b o minore di a impongono che il campo elettrico sia nullo all'esterno ed all'interno del guscio sferico.

Consideriamo allora una superficie sferica S_2 di raggio r con $a < r < b$. Siano S_2^+ e S_2^- le due emisfere che compongono S_2 , la prima nella regione riempita di dielettrico e l'altra nella regione vuota. La legge del flusso applicata a questa superficie dà:

$$Q = \int_{S_2} \vec{D} \cdot \hat{r} = \epsilon \int_{S_2^+} \vec{E} \cdot \hat{r} + \epsilon_0 \int_{S_2^-} \vec{E} \cdot \hat{r} = \frac{2\pi q}{4\pi\epsilon_0} (\epsilon + \epsilon_0) = q \frac{\epsilon + \epsilon_0}{2\epsilon_0} \quad (278)$$

ovvero la carica immagine q deve essere

$$q = Q \frac{2\epsilon_0}{\epsilon_0 + \epsilon} \quad (279)$$

In definitiva il campo elettrico nel guscio sferico deve essere

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_0 + \epsilon)} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad a < r < b \quad (280)$$

Discutiamo ora le condizioni al bordo. La superficie del dielettrico è composta dalle due emisfere di raggio a e b e dall'anello circolare piano di spessore $b - a$. Il campo è normale alle due emisfere. Dunque la componente parallela di \vec{E} attraverso queste superfici è banalmente continua. La condizione sulla componente normale di \vec{D} sull'emisfera di raggio a al bordo del dielettrico dà

$$\sigma_+(a) = D_n = \frac{Q\epsilon}{2\pi(\epsilon_0 + \epsilon)a^2} \quad (281)$$

dove σ_+ è la densità di carica sull'emisfera del conduttore a contatto col dielettrico. La densità di carica sull'altra emisfera di raggio a , quella che separa il conduttore dal vuoto, è invece

$$\sigma_-(a) = \epsilon_0 E_n = \frac{Q\epsilon_0}{2\pi(\epsilon_0 + \epsilon)a^2} \quad (282)$$

La carica totale sul conduttore sferico di raggio a è dunque

$$2\pi a^2 (\sigma_+(a) + \sigma_-(a)) = Q \frac{\epsilon + \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} = Q \quad (283)$$

come richiesto. Analogamente le densità di carica sulle emisfere che compongono il conduttore di raggio b saranno

$$\begin{aligned}\sigma_+(b) &= D_n = -\frac{Q \epsilon}{2 \pi (\epsilon_0 + \epsilon) b^2} \\ \sigma_-(b) &= \epsilon_0 E_n = -\frac{Q \epsilon_0}{2 \pi (\epsilon_0 + \epsilon) b^2}\end{aligned}$$

che danno correttamente una carica $-Q$ sul conduttore di raggio b .

Il campo elettrico, essendo radiale, è invece parallelo all'anello circolare che separa il dielettrico dal vuoto all'interno del guscio sferico. Inoltre il campo elettrico, dipendendo soltanto da r e non dagli angoli polari, è continuo attraverso questa superficie. Quindi il campo elettrico proposto (280) soddisfa le condizioni al bordo corrette anche su questa parte della superficie del dielettrico.

In definitiva la (280), soddisfacendo sia le equazioni di Maxwell che le equazioni al contorno corrette, è la soluzione del problema posto.

Corso di Elettromagnetismo ed Ottica

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 20/04/2010

Problema 1 (Punti 1)

Siano

$$\vec{v}_1(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \quad \vec{v}_2(\vec{x}) = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{x}) \quad (284)$$

due campi vettoriali, con \vec{a} e \vec{b} vettori costanti, e $\vec{x} = (x, y, z)$. Si calcoli il campo vettoriale

$$\vec{w}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \quad (285)$$

Problema 2 (Punti 1)

Si consideri un sistema di assi cartesiani (x, y, z) e si supponga che sulla superficie piana infinita $x = 0$ scorra una corrente uniforme e costante diretta lungo l'asse delle y , tale che

$$\frac{dI}{dz} = j \quad (286)$$

è la corrente per *unità di lunghezza* che scorre lungo la direzione y . Si determini il campo magnetico generato da tale corrente in un punto arbitrario dello spazio.

Problema 3 (Punti 1)

Si consideri una situazione analoga alla precedente, in cui sono presenti *due* piani infiniti paralleli, posti rispettivamente in $x = d$ e $x = 0$: nei piani scorrono delle correnti lungo y , uniformi e costanti, le cui densità per unità di lunghezza sono, rispettivamente, $\pm j$. Si determini il campo magnetico in un punto arbitrario dello spazio.

Prova Scritta del 20/04/2010: Soluzione

Problema 1

Conviene riscrivere il secondo campo vettoriale:

$$\vec{v}_2(\vec{x}) = (\vec{x} \cdot \vec{a}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{x} \quad (287)$$

Pertanto

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = (\vec{a} \cdot \vec{x}) \frac{\vec{x} \wedge \vec{b}}{r^3} \quad (288)$$

dove $r \equiv \frac{1}{|\vec{x}|}$. Il rotore di questo campo è quindi

$$\begin{aligned} w_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j \left(\epsilon_{kmn} \frac{x_m b_n a_p x_p}{r^3} \right) = \\ &= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) b_n a_p \partial_j \left(\frac{x_m x_p}{r^3} \right) = \\ &= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) b_n a_p \left(\frac{\delta_{jm} x_p + x_m \delta_{jp}}{r^3} - 3 \frac{x_m x_p x_j}{r^5} \right) = \\ &= (\delta_{im} b_j a_p - \delta_{jm} b_i a_p) \left(\frac{\delta_{jm} x_p + x_m \delta_{jp}}{r^3} - 3 \frac{x_m x_p x_j}{r^5} \right) = \\ &= b_i \frac{a_p x_p}{r^3} - b_i 3 \frac{a_p x_p}{r^3} + x_i \frac{a_p b_p}{r^3} - b_i \frac{a_p x_p}{r^3} + \\ &\quad - 3 (\delta_{im} b_j a_p - \delta_{jm} b_i a_p) \frac{x_m x_p x_j}{r^5} = \\ &= x_i \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{r^3} - 3 x_i \frac{(\vec{a} \cdot \vec{x})(\vec{b} \cdot \vec{x})}{r^5} = \end{aligned} \quad (289)$$

ovvero

$$\vec{w} = \vec{x} \left[\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{r^3} - 3 \frac{(\vec{a} \cdot \vec{x})(\vec{b} \cdot \vec{x})}{r^5} \right] \quad (290)$$

Problema 2

Il problema è invariante per traslazioni sia lungo z che lungo y : dunque il campo \vec{B} dipende solo x , e *non* da y o z :

$$\vec{B}(x, y, z) = (B_x(x), B_y(x), B_z(x)) \quad (291)$$

Possiamo inoltre pensare alla distribuzione di corrente data nel piano $x = 0$ come la sovrapposizione di un numero infinito di correnti lineari rettilinee,

di spessore infinitesimo e tutte dirette lungo y . Sappiamo che il campo magnetico prodotto da un filo di corrente infinito rettilineo giace nel piano ortogonale al filo. Pertanto il campo generato dalla distribuzione piana del problema giace necessariamente nel piano ortogonale a y :

$$\vec{B}(x, y, z) = (B_x(x), 0, B_z(x)) \quad (292)$$

La condizione che la divergenza di $\vec{B}(x, y, z)$ si annulli

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (293)$$

implica quindi che

$$\partial_x B_x(x) = 0 \quad (294)$$

Dunque $B_x(x) \equiv B_x$ è una costante indipendente da x .

Il problema, inoltre, è anche invariante se ruotiamo gli assi di π intorno all'asse delle y :

$$R_y(\pi) : (x, y, z) \rightarrow (x', y', z') = (-x, y, -z) \quad (295)$$

Infatti sotto una tale rotazione il piano della corrente va in se stesso. Ricordiamo che la relazione tra una campo vettoriale \vec{B} e quello \vec{B}' in un sistema di coordinate ruotato $\vec{x}' = R\vec{x}$, dove R è una generica matrice di rotazione, è

$$\vec{B}'(R\vec{x}) = R\vec{B}(\vec{x}) \quad (296)$$

Dunque, per $R = R_y(\pi)$

$$\vec{B}'(x', y', z') = (-B_x, 0, -B_z(x)) = (-B_x, 0, -B_z(-x')) \quad (297)$$

D'altra parte, il fatto che il problema si invariante sotto $R_y(\pi)$ significa che, nel nostro caso, i campi magnetici nei due sistemi di riferimento coincidono:

$$\vec{B}'(x, y, z) = \vec{B}(x, y, z) \quad (298)$$

ovvero che

$$\vec{B}'(x, y, z) = (B_x, 0, B_z(x)) \quad (299)$$

Confrontando (297) con (299) deduciamo che

$$B_x = -B_x \quad B_z(x) = -B_z(-x) \quad (300)$$

In definitiva, deve essere

$$B_x = 0 \quad (301)$$

e

$$\vec{B}(x, y, z) = \begin{cases} (0, 0, B_z(x)) & x > 0 \\ (0, 0, -B_z(-x)) & x < 0 \end{cases} \quad (302)$$

Consideriamo ora il circuito chiuso Γ rettangolare giacente nel piano (z, x) i cui lati paralleli a z sono posti in $\pm x$ e quelli paralleli a x in $z = \pm \frac{h}{2}$, con $h > 0$ e $x > 0$. Scegliamo l'orientamento di Γ in modo che il vettore normale al piano del rettangolo sia diretto lungo y . La legge integrata di Ampère per Γ dà

$$\int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = -2 B_z(x) h = \frac{j h}{\epsilon_0 c^2} \quad (303)$$

ovvero

$$B_z(x) = -\frac{j}{2 \epsilon_0 c^2} \quad x > 0 \quad (304)$$

e quindi

$$B_z(x) = \frac{j}{2 \epsilon_0 c^2} \quad x < 0 \quad (305)$$

Possiamo dedurre lo stesso risultato, senza far ricorso ad argomenti di simmetria, in maniera algebricamente un po' più complessa, decomponendo il piano dove scorre la corrente in filamenti rettilinei, orientati lungo y e di altezza infinitesima Δz e sommando i corrispondenti campi magnetici. Ricordiamo l'espressione per il campo magnetico prodotto in un punto (x, y, z) da un filo rettilino, posto sull'asse $x = z = 0$, percorso da una corrente I nella direzione positiva delle y :

$$\begin{aligned} B_y(x, y, z) &= 0 \\ B_z(x, y, z) &= -\frac{I}{2 \pi \epsilon_0 c^2} \frac{x}{x^2 + z^2} \\ B_x(x, y, z) &= \frac{I}{2 \pi \epsilon_0 c^2} \frac{z}{x^2 + z^2} \end{aligned}$$

Il campo generato nello stesso punto da un filo posto sull'asse $x = 0$ e $z = z'$

è quindi

$$\begin{aligned}
 B_y(x, y, z) &= 0 \\
 B_z(x, y, z) &= -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{x}{x^2 + (z - z')^2} \\
 B_x(x, y, z) &= \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{(z - z')}{x^2 + (z - z')^2}
 \end{aligned} \tag{306}$$

In ciascun dei filamento in cui è decomposto il piano scorre una corrente lungo y di intensità

$$\Delta I = j \Delta z \tag{307}$$

Pertanto il campo prodotto dal piano di corrente in un punto (x, y, z) è

$$\begin{aligned}
 B_y(x, y, z) &= 0 \\
 B_z(x, y, z) &= -\frac{j}{2\pi\epsilon_0 c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dz'}{x^2 + (z - z')^2} = \\
 &= -\frac{j x}{2\pi\epsilon_0 c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{x^2 + (z')^2} = -\frac{j x}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\pi}{|x|} = -\frac{j}{2\epsilon_0 c^2} \frac{x}{|x|} \\
 B_x(x, y, z) &= \frac{j}{2\pi\epsilon_0 c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(z - z') dz'}{x^2 + (z - z')^2} = \\
 &= -\frac{j}{2\pi\epsilon_0 c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z' dz'}{x^2 + (z')^2} = 0
 \end{aligned}$$

in accordo col risultato ottenuto più sopra.

Problema 3

Sovrapponendo i campi generati da ciascun singolo piano otteniamo per il campo magnetico il risultato:

$$\vec{B}(x, y, z) = \begin{cases} (0, 0, 0) & x > d \\ (0, 0, \frac{j}{\epsilon_0 c^2}) & 0 < x < d \\ (0, 0, 0) & x < 0 \end{cases} \tag{308}$$

Corso di Elettromagnetismo ed Ottica

Prof. Camillo Imbimbo

Esercitazione guidata del 10/06/2010

Problema 1

Sia $\phi(\vec{x})$ una funzione armonica in \mathbb{R}^3 :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{x}) = 0$$

Si dimostri che la funzione

$$\tilde{\phi}(\vec{x}) \equiv \frac{\phi\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2}\right)}{|\vec{x}|}$$

è pure armonica (in $\mathbb{R}^3/\{0\}$).

Problema 2

Si consideri una superficie sferica di raggio a , sulla quale è presente una distribuzione di carica superficiale $\sigma(\vec{x})$. Sia Q la carica totale della distribuzione e \vec{p} il suo momento di dipolo elettrico.

Domanda 1

Si calcoli il potenziale elettrostatico ed il campo elettrico per punti \vec{x} vicini al *centro* della sfera, ovvero per punti per i quali

$$|\vec{x}| \ll a$$

Domanda 2

Facendo uso del risultato precedente, si calcoli il campo elettrostatico in punti vicino al centro della sfera per le distribuzioni di carica superficiale seguenti

$$\sigma_n(\theta, \phi) = \sigma_0 \cos^n \theta \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

dove θ, ϕ sono le coordinate angolari di un sistema di coordinate sferico con centro posto nel centro della sfera.

Problema 1

Sia

$$y^i(\vec{x}) = \frac{x^i}{|\vec{x}|^2}$$

Abbiamo

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^i} = \frac{1}{|\vec{x}|^2} \left(\delta^{ji} - \frac{2x^j x^i}{|\vec{x}|^2} \right)$$

Ricordiamo anche che

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{1}{|\vec{x}|} = -\frac{x^i}{|\vec{x}|^3}$$

e

$$-\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{x^i}{|\vec{x}|^3} = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{1}{|\vec{x}|} = 0$$

Dunque

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\phi}(\vec{x})}{\partial x^i} &= -\frac{x^i}{|\vec{x}|^3} \phi(y) + \frac{1}{|\vec{x}|} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial \phi(y)}{\partial y^j} = \\ &= -\frac{x^i}{|\vec{x}|^3} \phi(y) + \frac{1}{|\vec{x}|^3} \left(\delta^{ji} - \frac{2x^j x^i}{|\vec{x}|^2} \right) \frac{\partial \phi(y)}{\partial y^j} = \\ &= -\frac{x^i}{|\vec{x}|^3} \phi(y) + \frac{1}{|\vec{x}|^3} \frac{\partial \phi(y)}{\partial y^i} - \frac{2x^j}{|\vec{x}|^2} \frac{x^i}{|\vec{x}|^3} \frac{\partial \phi(y)}{\partial y^j} \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{\phi}(\vec{x})}{\partial x^i} &= -\frac{x^i}{|\vec{x}|^3} \frac{\partial \phi(y)}{\partial x^i} - \frac{3x^i}{|\vec{x}|^5} \frac{\partial \phi(y)}{\partial y^i} - \frac{2\delta^{ij} x^i}{|\vec{x}|^5} \frac{\partial \phi(y)}{\partial y^j} + \\
&+ \frac{4x^j x^i x^i}{|\vec{x}|^7} \frac{\partial \phi(y)}{\partial y^j} + \frac{1}{|\vec{x}|^3} \left(\delta^{ji} - \frac{2x^j x^i}{|\vec{x}|^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \phi(y)}{\partial y^j} = \\
&= -\frac{x^i}{|\vec{x}|^3} \frac{1}{|\vec{x}|^2} \left(\delta^{ji} - \frac{2x^j x^i}{|\vec{x}|^2} \right) \frac{\partial \phi(y)}{\partial y^j} - \frac{x^i}{|\vec{x}|^5} \frac{\partial \phi(y)}{\partial y^i} + \\
&+ \frac{1}{|\vec{x}|^3} \left(\delta^{ji} - \frac{2x^j x^i}{|\vec{x}|^2} \right) \frac{1}{|\vec{x}|^2} \left(\delta^{ki} - \frac{2x^k x^i}{|\vec{x}|^2} \right) \frac{\partial^2 \phi(y)}{\partial y^k \partial y^j} = \\
&= \frac{1}{|\vec{x}|^5} \left(\delta^{jk} - \frac{2x^j x^k}{|\vec{x}|^2} - \frac{2x^k x^j}{|\vec{x}|^2} + \frac{4x^k x^j}{|\vec{x}|^2} \right) \frac{\partial^2 \phi(y)}{\partial y^k \partial y^j} = \\
&= \frac{1}{|\vec{x}|^5} \frac{\partial^2 \phi(y)}{\partial y^j \partial y^j} = 0
\end{aligned}$$

Problema 2

Domanda 1

Il potenziale in un punto \vec{x} all'interno della sfera è

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega' a^2 \frac{\sigma(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

dove $a^2 d\Omega'$ è l'elemento di area sulla superficie sferica nel punto \vec{x}' . Per $|\vec{x}| \ll a$ possiamo usare l'approssimazione

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}'|} \left(1 + \frac{\vec{x}' \cdot \vec{x}}{|\vec{x}'|^2} + \dots \right)$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int d\Omega' a^2 \frac{\sigma(\vec{x}')}{a} + \int d\Omega' a^2 \frac{\sigma(\vec{x}') \vec{x}' \cdot \vec{x}}{a^3} + \dots \right) = \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{a^3} + \dots
\end{aligned}$$

dove Q è la carica totale della distribuzione e \vec{p} il suo momento di dipolo elettrico. Per distribuzioni di carica neutre il primo termine si annulla.

Il campo elettrico è dato, in ogni caso, per punti vicini al centro dalla seguente espressione:

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \phi(x) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{a^3} + \dots$$

Domanda 2

La distribuzione di carica data ha carica totale nulla per n dispari. La carica totale per n pari è

$$\begin{aligned} Q_n &= 2\pi a^2 \sigma_0 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos^n\theta = 2\pi a^2 \sigma_0 \int_{-1}^1 dt t^n = \\ &= \frac{4\pi a^2 \sigma_0}{n+1} \quad n = 0, 2, 4, \dots \end{aligned}$$

Il momento di dipolo elettrico della distribuzione data è evidentemente diretto lungo l'asse delle z

$$\vec{p} = p\hat{z}$$

dove

$$\begin{aligned} p &= 2\pi a^2 \sigma_0 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos^n\theta a \cos\theta = \\ &= 2\pi a^3 \sigma_0 \int_{-1}^1 dt t^{n+1} = \frac{2\pi a^3 \sigma_0}{n+2} (1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

Il campo elettrico è pertanto nullo (al primo ordine) per n pari, mentre per n dispari è

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0(n+2)} + \dots \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Corso di Elettromagnetismo ed Ottica

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 21/06/2010

Problema 1

Due piani carichi infiniti paralleli sono posti ad una distanza d , il primo in $x = 0$ ed il secondo in $x = d$. Sia σ_1 la densità di carica superficiale libera sul primo piano, σ_2 quella sul secondo piano. Sia $a \in (0, d)$. Si supponga che la regione $0 < x < a$ sia occupata da un materiale di costante dielettrica ϵ_1 e la regione $a < x < d$ da un materiale di costante dielettrica ϵ_2 . Si supponga inoltre che le regioni $x < 0$ e $x > d$ siano vuote e che il campo elettrico si annulli per $x \rightarrow -\infty$.

Domanda 1 (Punti 12)

Si calcoli il campo elettrico in tutto lo spazio. Si calcolino inoltre le densità di polarizzazione sui piani $x = 0$, $x = a$ e $x = d$.

Problema 2

Due cilindri infiniti concentrici di raggio a e b ($b > a$) hanno l'asse coincidente con l'asse delle z . La superficie cilindrica di raggio a è posta ad un potenziale dato dalla seguente espressione

$$\phi(a, \theta) = V_0 \cos^2 \theta$$

dove θ è la coordinata angolare di un sistema di coordinate cilindriche (ρ, θ, z) , e V_0 una costante non nulla. Il cilindro di raggio b è un conduttore posto a potenziale nullo.

Domanda 1 (Punti 14)

Si calcoli il potenziale elettrostatico nella regione di spazio compresa tra le due superfici cilindriche, con $\rho \in [a, b]$.

Domanda 2 (Punti 8)

Si calcoli la densità di carica superficiale e la carica superficiale per unità di lunghezza indotta sulla superficie del conduttore a potenziale nullo, a $\rho = b$.

Prova Scritta del 21/06/2010: Soluzione

Problema 1

Per ragioni di simmetria il campo dipende solo da x ed è diretto lungo l'asse delle x :

$$\vec{E} = E(x) \hat{x}$$

Il campo deve essere costante in ciascuna delle regioni in cui il mezzo è omogeneo, come conseguenza della legge di Gauss:

$$\partial_x E(x) = 0 \quad x \neq 0, a, d$$

Sia dunque E_- il campo per $x < 0$, E_1 il campo per $x \in (0, a)$, E_2 il campo per $x \in (a, d)$ e E_+ il campo per $x > d$. Per ipotesi

$$E_- = 0$$

La continuità della componente normale di \vec{D} alla superficie $x = a$ impone

$$\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$$

Inoltre la legge del flusso attraverso le superfici $x = 0$ e $x = d$ implica

$$\epsilon_1 E_1 = \sigma_1 \quad \epsilon_0 E_+ - \epsilon_2 E_2 = \sigma_2$$

Quindi

$$\epsilon_0 E_+ = \sigma_2 + \sigma_1$$

ovvero

$$\begin{aligned} E_+ &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\epsilon_0} \\ E_1 &= \frac{\sigma_1}{\epsilon_1} \\ E_2 &= -\frac{\sigma_2}{\epsilon_2} + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} E_+ = \frac{\sigma_1}{\epsilon_2} \end{aligned}$$

Il vettore densità di polarizzazione è quindi

$$\begin{aligned} P_+ &= P_- = 0 \\ P_1 &= \epsilon_0 \chi_1 E_1 = \frac{\chi_1 \sigma_1}{1 + \chi_1} \\ P_2 &= \epsilon_0 \chi_2 E_2 = \frac{\chi_2 \sigma_1}{1 + \chi_2} \end{aligned}$$

La densità di carica di polarizzazione sono

$$\begin{aligned}\sigma_P(x=0) &= P_- - P_1 = -P_1 = -\frac{\chi_1 \sigma_1}{1 + \chi_1} \\ \sigma_P(x=a) &= P_1 - P_2 = \frac{\chi_1 \sigma_1}{1 + \chi_1} - \frac{\chi_2 \sigma_1}{1 + \chi_2} \\ \sigma_P(x=d) &= P_2 - P_+ = P_2 = \frac{\chi_2 \sigma_1}{1 + \chi_2}\end{aligned}$$

Problema 2

Il potenziale è indipendente da z ed armonico nella regione anulare. Può pertanto essere descritto nella forma

$$\begin{aligned}\phi(\rho, \theta) &= c + c' \log \rho + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k} (A_k \cos k \theta + C_k \sin k \theta) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (B_k \cos k \theta + D_k \sin k \theta)\end{aligned}$$

Le condizioni al contorno del problema sono simmetriche per inversione del segno di θ :

$$V(\theta) = V(-\theta)$$

Pertanto anche $\phi(\rho, \theta)$ deve essere simmetrica per la stessa inversione. Quindi

$$C_k = D_k = 0$$

e

$$\phi(\rho, \theta) = c + c' \log \rho + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \rho^{-k} + B_k \rho^k) \cos k \theta$$

La condizione che il potenziale si annulli sul cilindro esterno si scrive

$$\phi(b, \theta) = 0 = c + c' \log(b) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k b^{-k} + B_k b^k) \cos k \theta$$

e quindi

$$0 = c + c' \log(b) = A_k b^{-k} + B_k b^k$$

Dunque

$$\phi(\rho, \theta) = c' \log \frac{\rho}{b} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \left(\frac{b^k}{\rho^k} - \frac{\rho^k}{b^k} \right) \cos k \theta$$

Infine, la condizione sul bordo $\rho = a$ dà

$$\begin{aligned} \tilde{A}_k \left(\frac{b^k}{a^k} - \frac{a^k}{b^k} \right) \pi &= \int_0^{2\pi} d\theta \cos k \theta \phi(a, \theta) = V_0 \int_0^{2\pi} d\theta \cos k \theta \cos^2 \theta = \\ &= \frac{V_0}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \cos k \theta (1 + \cos 2\theta) = \frac{V_0 \pi}{2} \delta_{k,2} \quad k \geq 1 \\ 2\pi c' \log \frac{a}{b} &= V_0 \int_0^{2\pi} d\theta \cos^2 \theta = V_0 \pi \end{aligned}$$

In definitiva

$$\begin{aligned} \phi(\rho, \theta) &= \frac{V_0}{2} \left[\frac{\log \frac{\rho}{b}}{\log \frac{a}{b}} + \frac{\frac{b^2}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{b^2}}{\frac{b^2}{a^2} - \frac{a^2}{b^2}} \cos 2\theta \right] = \\ &= \frac{V_0}{2} \left[\frac{\log \frac{\rho}{b}}{\log \frac{a}{b}} + \frac{a^2}{b^4 - a^4} \frac{b^4 - \rho^4}{\rho^2} \cos 2\theta \right] \end{aligned}$$

Il campo elettrico è

$$\begin{aligned} E_\rho(\rho, \theta) &= \frac{V_0}{2} \left[-\frac{1}{\log \frac{a}{b}} \frac{1}{\rho} + \frac{2a^2}{b^4 - a^4} \frac{b^4 + \rho^4}{\rho^3} \cos 2\theta \right] \\ E_\theta(\rho, \theta) &= V_0 \frac{a^2}{b^4 - a^4} \frac{b^4 - \rho^4}{\rho^3} \sin 2\theta \end{aligned}$$

La densità di carica sul bordo a $\rho = b$ è

$$\sigma(\theta) = -\epsilon_0 E_\rho(b, \theta) = \frac{\epsilon_0 V_0}{2} \left[\frac{1}{\log \frac{a}{b}} \frac{1}{b} - \frac{4a^2 b}{b^4 - a^4} \cos 2\theta \right]$$

La carica per unità di lunghezza indotta sulla superficie conduttrice è

$$\lambda = \int_0^{2\pi} d\theta b \sigma(\theta) = \frac{\epsilon_0 \pi V_0}{\log \frac{a}{b}}$$

Problema 1

Si consideri un mezzo materiale con costante dielettrica ϵ e permeabilità magnetica μ reali e costanti, nel quale valga la seguente relazione (nota come “legge di Ohm”) tra la densità di corrente *libera* (o di conduzione) ed il campo elettrico

$$\vec{J}_{lib} = \sigma \vec{E} \quad (309)$$

dove σ è una costante detta “conduttività” del materiale.

Domanda 1 (Punti 10)

Sia data la densità di carica libera nel mezzo, $\rho_0(\vec{x}) = \rho_{lib}(\vec{x}, 0)$, al tempo $t = 0$. Dalla legge di conservazione della carica si determini la densità di carica libera $\rho_{lib}(\vec{x}, t)$ per tempi $t > 0$.

Domanda 2 (Punti 10)

Si assuma che $\rho_{lib} = 0$. Si derivi l’equazione d’onda per il campo elettrico nel mezzo materiale.

Domanda 3 (Punti 10)

Si consideri il campo elettrico di un’onda piana monocromatica con vettore d’onda diretto lungo l’asse delle x e che per $x > 0$ si propaga nel mezzo materiale:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{ikx - i\omega t}$$

Si determini il numero d’onda k , la lunghezza d’onda λ , e la lunghezza di penetrazione δ all’interno del mezzo in funzione di ω , σ , ϵ e μ .

Domanda 4 (Punti 5)

Si determini il rapporto tra la lunghezza di penetrazione e la lunghezza d’onda nei limiti: (a) di alta conduttività: $\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \gg 1$; (b) di bassa conduttività: $\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \ll 1$.

Prova Scritta del 29/07/2010: Soluzione

Problema 1

Domanda 1 (Punti 10)

L'equazione di continuità

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{lib} + \frac{\partial \rho_{lib}(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0$$

diventa, usando la legge di Gauss,

$$\sigma \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \frac{\partial \rho_{lib}(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{\sigma}{\epsilon} \rho_{lib}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \rho_{lib}(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0$$

Dunque

$$\rho_{lib}(\vec{x}, t) = \rho_{lib}(\vec{x}, 0) e^{-\frac{\sigma t}{\epsilon}}$$

Quindi per tempi grandi

$$t \gg \frac{\epsilon}{\sigma}$$

la densità di carica libera è asintoticamente nulla all'interno del conduttore.

Domanda 2 (Punti 10)

Consideriamo il rotore dell'equazione di Faraday

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) &= -\vec{\nabla}^2 \vec{E} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \vec{J}_{lib} + \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

ovvero, considerando che per ipotesi $\rho_{lib} = 0$:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

Domanda 3

Sostituendo

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{i k x - i \omega t}$$

nell'equazione d'onda otteniamo:

$$-k^2 + \omega^2 \epsilon \mu + i \sigma \mu \omega = 0$$

ovvero

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu + i \sigma \mu \omega$$

Posto

$$k = k_r + i k_i$$

con k_r e k_i reali positivi, otteniamo

$$k_r^2 - k_i^2 + 2i k_r k_i = \omega^2 \epsilon \mu + i \sigma \mu \omega$$

ovvero

$$\begin{aligned} k_r^2 - k_i^2 &= \omega^2 \epsilon \mu \\ 2 k_r k_i &= \sigma \mu \omega \end{aligned}$$

da cui

$$k_r^4 - \omega^2 \epsilon \mu k_r^2 - \frac{\sigma^2 \mu^2 \omega^2}{4} = 0$$

La soluzione positiva di questa equazione di secondo grado è

$$k_r^2 = \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{2} + \sqrt{\frac{\omega^4 \epsilon^2 \mu^2}{4} + \frac{\sigma^2 \mu^2 \omega^2}{4}} = \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} \right)$$

In definitiva la lunghezza d'onda λ è data da

$$k_r = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

mentre la lunghezza di penetrazione δ , ovvero l'inverso di k_i è

$$k_i = \frac{1}{\delta} = \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Domanda 4

Nel limite di grandi σ :

$$k_r = \frac{2\pi}{\lambda} \approx \sqrt{\frac{\sigma \mu \omega}{2}} \approx k_i \quad \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \gg 1$$

Dunque:

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{k_r}{2\pi k_i} \approx \frac{1}{2\pi} \quad \frac{\sigma}{\epsilon\omega} \gg 1$$

Nel limite opposto di piccoli σ :

$$\begin{aligned} k_r &\approx \omega\sqrt{\epsilon\mu} \\ k_i = \frac{1}{\delta} &\approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \frac{\sigma}{\epsilon\omega} \ll 1 \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{k_r}{2\pi k_i} \approx \frac{\omega\epsilon}{\pi\sigma} \gg 1 \quad \frac{\sigma}{\epsilon\omega} \ll 1$$

In sintesi, nel caso di buoni conduttori la lunghezza di penetrazione è dell'ordine di grandezza della lunghezza d'onda mentre nel caso di cattivi conduttori il campo penetra per una lunghezza pari a molte lunghezze d'onda.

Corso di Elettromagnetismo ed Ottica

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 08/09/2010

Problema 1

Un filo carico infinito è collocato lungo l'asse delle z di un sistema di coordinate cartesiane. La densità di carica elettrica per unità di lunghezza $\lambda(z)$ del filo è

$$\lambda(z) = \begin{cases} \lambda_0 & \text{per } z > 0 \\ -\lambda_0 & \text{per } z < 0 \end{cases}$$

con λ_0 costante reale.

Domanda 1 (Punti 10)

Si calcoli il campo elettrico generato dal filo in un punto generico dello spazio.

Domanda 2 (Punti 10)

Si utilizzi il risultato precedente per calcolare la densità di carica sulla superficie di un conduttore carico piano posto nel piano $z = 0$ in presenza di un filo semi-infinito di carica per unità di lunghezza λ_0 , posto lungo il semi-asse positivo $z > 0$.

Problema 2

Si consideri una superficie toroidale, la cui sezioni trasverse sono circonferenze di raggio a . I centri di queste circonferenze si trovano a distanza b ($b > a$) dal centro del toro, e giacciono sul piano $z = 0$ di una sistema di assi cartesiani, la cui origine coincide col centro del toro. Sia $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ l'angolo sul piano $z = 0$. Sulla superficie del toro scorre una corrente nella direzione delle circonferenze trasverse di raggio a , di intensità I , distribuita uniformemente lungo θ .

Domanda 1 (Punti 10)

Si calcoli il campo magnetico in un punto generico dello spazio.

Prova Scritta del 08/09/2010: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Usiamo un sistema di coordinate cilindrico, (θ, ρ, z) dove

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

Il campo creato ha simmetria assiale e dunque le componenti del campo non nulle non dipendono da θ . Poiché il campo elettrostatico ha circuitazione nulla, le componenti del campo non nulle sono $E_z(\rho, z)$ e $E_\rho(\rho, z)$. Calcoliamole attraverso la formula di Coulomb

$$E_z(\rho, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\lambda(z')(z-z')}{(\rho^2 + (z'-z)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_\rho(\rho, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\lambda(z')\rho}{(\rho^2 + (z'-z)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Abbiamo

$$E_z(\rho, z) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\rho} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{\lambda(z+\rho\xi)\xi}{(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0\rho} \left[\int_{-\frac{z}{\rho}}^{\infty} \frac{d\xi\xi}{(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}}} - \int_{-\infty}^{-\frac{z}{\rho}} \frac{d\xi\xi}{(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}}} \right] =$$

$$= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0\rho} \left[\left[\frac{1}{(1+\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_{-\frac{z}{\rho}}^{\infty} - \left[\frac{1}{(1+\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_{-\infty}^{-\frac{z}{\rho}} \right] =$$

$$= -\frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \eta^2}}$$

e analogamente

$$E_\rho(\rho, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\rho} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{\lambda(z+\rho\xi)}{(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0\rho} \left[\int_{-\frac{z}{\rho}}^{\infty} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}}} - \int_{-\infty}^{-\frac{z}{\rho}} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}}} \right] =$$

$$= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0\rho} \left[\left[\frac{\xi}{(1+\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_{-\frac{z}{\rho}}^{\infty} - \left[\frac{\xi}{(1+\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_{-\infty}^{-\frac{z}{\rho}} \right] =$$

$$= \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0\rho} \frac{\eta}{\sqrt{\rho^2 + \eta^2}}$$

Domanda 2

Il problema posto è risolto col metodo delle immagini collocando un semi-filo immagine di carica per unità di lunghezza $-\lambda_0$ in $\rho = 0$ e $z < 0$. Pertanto il campo nella regione $z > 0$ è identico a quello calcolato sopra. Per ottenere la densità di carica sul piano conduttore in $z = 0$ dobbiamo calcolare la componente verticale del campo elettrico in $z = 0$:

$$\sigma(\rho) = \epsilon_0 E_z(\rho, 0) = -\frac{\lambda_0}{2\pi\rho}$$

Problema 2

Il problema ha simmetria assiale. Poiché il campo magnetico ha divergenza nulla, le linee di forza del campo sono cerchi paralleli al piano $z = 0$, con centro posto sull'asse delle z . La forma generale del campo sarà quindi

$$\vec{B} = \vec{e}_\theta B_\theta(\rho, z) = (-\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y) B_\theta(\rho, z)$$

dove $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ sono le coordinate cilindriche relative all'asse z e

$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y$$

è il versore tangente alle circonferenze piane con centro sull'asse z , e $\vec{e}_{x,y}$ sono i versori lungo l'asse delle x e delle y .

Sia $C_{\rho,z}$ una linea del campo di raggio ρ e altezza z . La legge di Amperè in forma integrale stabilisce che

$$\int_{C_{\rho,z}} d\vec{l} \cdot \vec{B} = 2\pi\rho B_\theta(\rho, z) = \frac{I(\rho, z)}{\epsilon_0 c^2}$$

dove $I(\rho, z)$ è la corrente che passa attraverso il disco il cui bordo è $C_{\rho,z}$.

Se la circonferenza $C_{\rho,z}$ si trova fuori dal toro, la corrente $I(z, \rho)$ relativa è nulla e dunque il campo è nullo. Se la circonferenza $C_{\rho,z}$ si trova dentro il toro, $I(\rho, z) = I$.

In definitiva²:

$$B_\theta(\rho, z) = \begin{cases} 0 & \text{fuori dal toro} \\ \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 \rho} & \text{dentro il toro} \end{cases}$$

²Si noti che il campo dipende implicitamente anche da z oltre che da ρ , in quanto la condizione di appartenenza alla regione interna del toro dipende da z , fissato ρ .

Corso di Elettromagnetismo ed Ottica

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 17/01/2011

Problema 1

Una superficie sferica, di raggio R , uniformemente carica con densità di carica superficiale σ , è provvista di un'apertura circolare che è la base di una calotta sferica di altezza $h < R$.³

Domanda 1 (Punti 9)

Si calcoli esattamente il campo elettrostatico in un punto posto sull'asse che passa per il centro della sfera e il vertice della calotta.

Domanda 2 (Punti 8)

Si calcoli il valore approssimato del campo elettrostatico prodotto dalla distribuzione di carica in un punto generico posto a distanza d dal centro della sfera, per d grande rispetto al raggio a della base della calotta: si includano i termini di ordine $\frac{1}{d^2}$. Si verifichi l'accordo col risultato ottenuto alla domanda 1.

Domanda 3 (Punti 10)

Si calcoli il valore approssimato del campo elettrostatico in un punto generico includendo i termini di ordine $\frac{1}{d^3}$. Si verifichi l'accordo col risultato ottenuto alla domanda 1.

Problema 2

Un'onda piana monocromatica di frequenza ω si propaga lungo l'asse delle x in un mezzo che ha indice di rifrazione n_0 per $x < 0$, n_1 per $x \in (0, d)$ e n_2 per $x > d$.⁴ Sia

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = E_i \hat{z} e^{ikx - i\omega t} \quad k = \frac{\omega}{c} n_0 \quad x < 0$$

l'onda incidente.

Domanda 1 (Punti 6)

Si calcoli il rapporto tra l'ampiezza dell'onda trasmessa per $x > d$ e quella incidente in $x < 0$ in funzione degli indici di rifrazione.

³Il bordo dell'apertura circolare è cioè il cerchio ottenuto intersecando la sfera con un piano posto a distanza $R - h$ dal centro della sfera.

⁴Si suppongano le permeabilità magnetiche dei mezzi uguali a quelle del vuoto.

Problema 1

Domanda 1

Scegliamo un sistema di assi cartesiani con origine nel centro della sfera, ed asse z passante per il vertice della calotta sferica. Per ragioni di simmetria il campo in un punto $P = (0, 0, z)$ sull'asse delle z è diretto lungo z . Pertanto

$$\begin{aligned}
 E_z(0, 0, z) &= \frac{\sigma R^2}{2 \epsilon_0} \int_{\arccos \frac{R-h}{R}}^{\pi} \frac{d\theta \sin \theta (z - R \cos \theta)}{(R^2 + z^2 - 2 R z \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} = \\
 &= \frac{\sigma R^2}{2 \epsilon_0} \int_{-1}^{\frac{R-h}{R}} \frac{dt (z - R t)}{(R^2 + z^2 - 2 R z t)^{\frac{3}{2}}} = \\
 &= \frac{\sigma R}{8 z \epsilon_0} \int_{(R-z)^2+2zh}^{(R+z)^2} \frac{d\zeta (z^2 - R^2 + \zeta)}{\zeta^{\frac{3}{2}}} = \\
 &= \frac{\sigma R}{4 z \epsilon_0} \left[\frac{R^2 - z^2 + \zeta}{\sqrt{\zeta}} \right]_{(R-z)^2+2zh}^{(R+z)^2} = \\
 &= \frac{\sigma R^2}{2 z \epsilon_0} \left[\frac{z + R}{|z + R|} + \frac{z - R - \frac{zh}{R}}{\sqrt{(R - z)^2 + 2 z h}} \right] = \\
 &= \frac{\sigma R^2}{2 z^2 \epsilon_0} \left[\frac{z + R}{|z + R|} + \frac{z - R}{|z - R|} \frac{1 - \frac{zh}{R(z-R)}}{\sqrt{1 + \frac{2zh}{(z-R)^2}}} \right] \quad (310)
 \end{aligned}$$

Domande 2-3

Il campo elettrostatico $\vec{E}(\vec{x})$ prodotto dalla distribuzione di carica data in un punto \vec{x} si scrive, utilizzando il principio di sovrapposizione, come

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_R(\vec{x}) - \vec{E}'(\vec{x}) \quad (311)$$

dove $\vec{E}_R(\vec{x})$ è il campo prodotto da una distribuzione di carica sferica di raggio R e densità superficiale σ mentre $\vec{E}'(\vec{x})$ è il campo prodotto da un disco sferico uniformemente carico con densità di carica σ coincidente con la calotta sferica. Ovviamente

$$\vec{E}_R(\vec{x}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R^2}{|\vec{x}|^3} \vec{x} \quad (312)$$

Resta da calcolare $\vec{E}'(\vec{x})$. Il raggio a del cerchio che delimita la base della calotta sferica è

$$a = \sqrt{R^2 - (R - h)^2} = \sqrt{h(2R - h)} \quad (313)$$

Se

$$|\vec{x}| \gg a \quad (314)$$

il campo $\vec{E}'(\vec{x})$ può essere calcolato nell'approssimazione di multipolo elettrico. Si denoti con q la carica della calotta sferica e \vec{p} il suo momento di dipolo elettrico calcolato rispetto al vertice della calotta. $\vec{E}'(\vec{x})$ in approssimazione di dipolo è la come somma di due contributi: il campo elettrico \vec{E}_{q, \vec{x}_0} prodotto da una carica q posta nel vertice della calotta sferica $\vec{x}_0 = R \hat{z}$ ed il campo $\vec{E}_{\vec{p}, \vec{x}_0}$ prodotto da un dipolo elettrico $\vec{p} = p_z \hat{z}$ posto nello stesso punto:

$$\vec{E}'(\vec{x}) = \vec{E}_{q, \vec{x}_0}(\vec{x}) + \vec{E}_{\vec{p}, \vec{x}_0}(\vec{x}) + \dots \quad (315)$$

Il primo termine è di ordine $\frac{a^2}{a^2}$ mentre il secondo è di ordine $\frac{a^3}{a^3}$.

Sia P un punto sulla superficie sferica che delimita la calotta, θ l'angolo che il raggio passante per P forma con l'asse delle z . La carica totale sul disco sferico è proporzionale all'area della calotta

$$q = \sigma \int_0^{\arccos \frac{R-h}{R}} R d\theta 2\pi R \sin \theta = \sigma R^2 2\pi \left(1 - \frac{R-h}{R}\right) = \sigma 2\pi R h$$

Per ragioni di simmetria il momento di dipolo elettrico \vec{p} del disco sferico è diretto lungo z . La componente z del dipolo elettrico del disco sferico calcolato rispetto al vertice della calotta è

$$\begin{aligned} p_z &= \sigma \int_0^{\arccos \frac{R-h}{R}} R d\theta 2\pi R \sin \theta R (\cos \theta - 1) = \\ &= -\pi \sigma R^3 \left[2 \cos \theta - \cos^2 \theta \right]_{\theta=\arccos \frac{R-h}{R}}^{\theta=0} = \\ &= -\pi \sigma R (2hR - R^2 + (R-h)^2) = -\pi \sigma h^2 R \end{aligned} \quad (316)$$

Dunque, includendo i termini di monopolo e dipolo,

$$\begin{aligned}
\vec{E}'(\vec{x}) &= \vec{E}_{q,\vec{x}_0}(\vec{x}) + \vec{E}_{\vec{p},\vec{x}_0}(\vec{x}) = \frac{\sigma R h}{2 \epsilon_0} \frac{\vec{x} - R \hat{z}}{|\vec{x} - R \hat{z}|^3} + \\
&\quad - \frac{\sigma h^2 R}{4 \epsilon_0} \frac{3(z - R) (\vec{x} - R \hat{z}) - (\vec{x} - R \hat{z})^2 \hat{z}}{|\vec{x} - R \hat{z}|^5} = \\
&= \frac{\sigma R h}{2 \epsilon_0} \frac{\vec{x} - R \hat{z}}{|\vec{x} - R \hat{z}|^3} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{h(z - R)}{|\vec{x} - R \hat{z}|^2} \right] + \\
&\quad + \frac{\sigma h^2 R}{4 \epsilon_0} \frac{\hat{z}}{|\vec{x} - R \hat{z}|^3}
\end{aligned} \tag{317}$$

In definitiva, in questa approssimazione

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{x}) &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R^2}{|\vec{x}|^3} \vec{x} - \frac{\sigma R h}{2 \epsilon_0} \frac{\vec{x} - R \hat{z}}{|\vec{x} - R \hat{z}|^3} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{h(z - R)}{|\vec{x} - R \hat{z}|^2} \right] + \\
&\quad - \frac{\sigma h^2 R}{4 \epsilon_0} \frac{\hat{z}}{|\vec{x} - R \hat{z}|^3} + O\left(\frac{1}{|\vec{x} - R \hat{z}|^4}\right)
\end{aligned} \tag{318}$$

Per un punto $P = (0, 0, z)$ sull'asse delle z il campo è diretto lungo z :

$$E_z(0, 0, z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R^2 z}{|z|^3} - \frac{\sigma R h}{2 \epsilon_0} \frac{z - R}{|z - R|^3} + \frac{\sigma R h^2}{2 \epsilon_0 |z - R|^3} + O\left(\frac{1}{|z - R|^4}\right) \tag{319}$$

Confrontiamo con la risposta alla domanda 1. Per $|z - R| \gg h$

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \frac{zh}{R(z-R)}}{\sqrt{1 + \frac{2zh}{(z-R)^2}}} &= \left(1 - \frac{zh}{R(z-R)}\right) \left(1 - \frac{zh}{(z-R)^2} + \frac{3}{2} \frac{z^2 h^2}{(z-R)^4} + \dots\right) = \\
&= 1 - \frac{z^2 h}{(z-R)^2} + \frac{z^2 h^2}{2(z-R)^4 R} (2z + R) + \dots
\end{aligned} \tag{320}$$

e quindi il risultato esatto (310) si scrive, per $|z| > R$

$$\begin{aligned}
E_z(0, 0, z) &= \frac{\sigma R^2}{2 z^2 \epsilon_0} \left[\frac{z + R}{|z + R|} + \frac{z - R}{|z - R|} \right] - \frac{\sigma R h}{2 \epsilon_0} \frac{z - R}{|z - R|^3} + \\
&\quad + \frac{\sigma R h^2}{4 \epsilon_0} \frac{z - R}{|z - R|^5} (2z + R) + \dots = \\
&= \frac{\sigma R^2 z}{2 |z|^3 \epsilon_0} - \frac{\sigma R h}{2 \epsilon_0} \frac{z - R}{|z - R|^3} + \frac{\sigma R h^2}{2 |z - R|^3} + \\
&\quad + \frac{3 \sigma R^2 h^2}{4 \epsilon_0} \frac{z - R}{|z - R|^5} \dots
\end{aligned} \tag{321}$$

Confrontando con la (319), vediamo che questo risultato coincide col risultato ottenuto nell'approssimazione di dipolo a meno dell'ultimo termine. In effetti, ricordando che

$$a = \sqrt{h(2R-h)} \propto \sqrt{hR} \quad (322)$$

osserviamo che

$$\left| \frac{3\sigma R^2 h^2}{4\epsilon_0} \frac{z-R}{|z-R|^5} \right| \propto \frac{a^4}{|z-R|^4} \quad (323)$$

Questo è un termine di quadrupolo nell'espansione di multipolo elettrico, e quindi, correttamente, non appare nell'approssimazione di dipolo.

Problema 2

Domanda 1

L'ampiezza del campo elettrico dell'onda trasmessa nel mezzo di indice n_1 è

$$E_t^{(1)} = 2 E_i \frac{k}{k+k_1} \quad (324)$$

dove k_1 è il vettore d'onda dell'onda trasmessa. Per un'onda incidente normalmente sulla superficie di separazione dei due mezzi

$$k_1 = \frac{n_1}{n_0} k \quad (325)$$

da cui

$$E_t^{(1)} = 2 E_i \frac{n_0}{n_0+n_1} \quad (326)$$

Applicando la stessa formula per la trasmissione attraverso la superficie a $x=d$ otteniamo per l'ampiezza dell'onda trasmessa nel mezzo con indice n_2

$$E_t^{(2)} = 2 E_t^{(1)} \frac{k_1}{k_1+k_2} = 4 E_i \frac{n_0}{n_0+n_1} \frac{n_1}{n_1+n_2} \quad (327)$$

Corso di Elettromagnetismo ed Ottica

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 14/02/2011

Problema 1 (Punti 8)

Una densità di carica elettrica uniforme ρ_0 è confinata nella regione di spazio compresa tra $x = 0$ e $x = d$. Si supponga che il campo elettrico per $x \rightarrow -\infty$ sia

$$\vec{E} \rightarrow (E_0, 0, 0) \quad \text{per } x \rightarrow -\infty$$

Si calcoli il campo elettrico ovunque nello spazio.

Problema 2

Si consideri un circuito filiforme in cui scorre una corrente stazionaria I , disposto su un piano lungo i lati di un quadrato di lato di lunghezza $2a$.

Domanda 1 (Punti 10)

Si calcoli il campo magnetico in un punto sull'asse perpendicolare al quadrato e passante per il suo centro.

Domanda 2 (Punti 6)

Si calcoli il momento di dipolo magnetico del circuito e si verifichi che, per punti sull'asse lontani dal circuito, il campo magnetico tende al campo di un dipolo magnetico con momento di dipolo appropriato.

Domanda 3 (Punti 8)

Si generalizzi il problema, rispondendo alla Domanda 1 nel caso in cui il circuito di corrente giaccia lungo i lati di un poligono regolare, con n lati ($n \geq 3$) e apotema a . Si verifichi che nel limite $n \rightarrow \infty$ il risultato coincide con quello di un anello di corrente circolare di raggio a .

Prova Scritta del 14/02/2011: Soluzione

Problema 1

Il problema è invariante per traslazioni lungo y e z , in quanto sia la densità di carica che le condizioni al contorno sono invarianti. Pertanto il potenziale elettrostatico dipende solamente dalla coordinata x . L'equazione di Poisson diventa allora un'equazione differenziale ordinaria

$$\phi''(x) = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} & 0 < x < d \\ 0 & x > d \end{cases}$$

La soluzione generica in ciascuna regione dello spazio è dunque

$$\phi''(x) = \begin{cases} a_1 x + a_2 & x < 0 \\ -\frac{\rho_0}{2\epsilon_0} x^2 + a_3 x + a_4 & 0 < x < d \\ a_5 x + a_6 & x > d \end{cases}$$

dove a_i , con $i = 1, \dots, 6$, sono costanti d'integrazione. Corrispondentemente, il campo elettrico è diretto lungo x e vale

$$E_x(x) = \begin{cases} -a_1 & x < 0 \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} x - a_3 & 0 < x < d \\ -a_5 & x > d \end{cases}$$

Le condizioni di continuità in $x = 0$ e $x = d$ determinano le 3 costanti di integrazione in funzione di un'unica costante

$$E_x(x) = \begin{cases} -a_1 & x < 0 \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} x - a_1 & 0 < x < d \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} d - a_1 & x > d \end{cases}$$

La condizione al contorno per $x \rightarrow -\infty$ impone infine $a_1 = -E_0$

$$E_x(x) = \begin{cases} E_0 & x < 0 \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} x + E_0 & 0 < x < d \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} d + E_0 & x > d \end{cases}$$

Problema 2

Domanda 1

Scegliamo il piano (x, y) nel piano del circuito, i lati del quadrato paralleli agli assi x e y e l'origine al centro del quadrato. Per ragioni di simmetria il campo lungo l'asse z è diretto lungo lo stesso asse.

Il campo è la somma del contributo di ciascun lato del quadrato. Poiché il problema è simmetrico per rotazioni di $\frac{\pi}{2}$ intorno all'asse la componente $B_z(P)$ in un punto $P = (0, 0, z)$ sull'asse z è 4 volte il contributo di ciascun lato del quadrato. Il campo $\vec{B}^{lato}(P)$ prodotto dal lato del quadrato con $x = a$ è, usando la formula di Biot-Savart,

$$\begin{aligned}\vec{B}^{lato}(P) &= \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{-a}^a \frac{dy \hat{y} \wedge (-a \hat{x} - y \hat{y} + z \hat{z})}{(a^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{-a}^a \frac{dy (a \hat{z} + z \hat{x})}{(a^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

La componente lungo z è dunque

$$\begin{aligned}B_z^{lato}(P) &= \frac{I a}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{-a}^a \frac{dy}{(a^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{I a}{4\pi\epsilon_0 c^2 (a^2 + z^2)} \int_{-\frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}}^{\frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{I a}{4\pi\epsilon_0 c^2 (a^2 + z^2)} \left[\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + 1}} \right]_{-\frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}}^{\frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}} = \\ &= \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2) \sqrt{2a^2 + z^2}}\end{aligned}$$

La componente lungo z del campo in P è pertanto

$$B_z(P) = 4 B_z^{lato}(P) = \frac{I}{\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2a^2}{(a^2 + z^2) \sqrt{2a^2 + z^2}}$$

Per $|z| \gg a$ questo diventa

$$B_z(P) = \frac{I}{\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2a^2}{|z|^3} + \dots \quad |z| \gg a$$

Domanda 2

Il momento di dipolo magnetico del circuito è

$$\vec{\mu} = \mu \hat{z} = 4 a^2 I \hat{z}$$

Il campo di dipolo magnetico corrispondente in un punto sull'asse z è

$$\vec{B}^{dipolo}(P) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 c^2} \frac{2 \mu \hat{z}}{|z|^3} = \frac{I}{\pi \epsilon_0 c^2} \frac{2 a^2 \hat{z}}{|z|^3}$$

in accordo col risultato ottenuto alla domanda precedente.

Domanda 3

Generalizzando i passi seguiti nella Domanda 1 al caso di un poligono regolare otteniamo per il contributo alla componente z del campo

$$\begin{aligned} B_z(P) &= n \times B_z^{lato}(P) = \frac{I a n}{4 \pi \epsilon_0 c^2} \int_{-h_n}^{h_n} \frac{dy}{(a^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{I a n}{4 \pi \epsilon_0 c^2 (a^2 + z^2)} \int_{-\frac{h_n}{\sqrt{a^2+z^2}}}^{\frac{h_n}{\sqrt{a^2+z^2}}} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{I a n}{4 \pi \epsilon_0 c^2 (a^2 + z^2)} \left[\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + 1}} \right]_{-\frac{h_n}{\sqrt{a^2+z^2}}}^{\frac{h_n}{\sqrt{a^2+z^2}}} = \\ &= \frac{I}{2 \pi \epsilon_0 c^2} \frac{a h_n n}{(a^2 + z^2) \sqrt{a^2 + h_n^2 + z^2}} \end{aligned}$$

dove $2 h_n$ è la lunghezza del lato del poligono

$$h_n = a \tan \frac{2 \pi}{2 n} = a \tan \frac{\pi}{n}$$

Prendiamo il limite $n \rightarrow +\infty$ del campo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} B_z(P) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I}{2 \pi \epsilon_0 c^2} \frac{a h_n n}{(a^2 + z^2) \sqrt{a^2 + h_n^2 + z^2}} = \\ &= \frac{I}{2 \pi \epsilon_0 c^2} \frac{a^2 \pi}{(a^2 + z^2) \sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{I}{2 \epsilon_0 c^2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

che è il campo per un'anello circolare di corrente⁵.

⁵Vedi per esempio il problema 1 della prova scritta del 22/01/2010.

Corso di Fisica Generale 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 20/04/2011

Problema 1 (Punti 1)

Si consideri il campo scalare

$$\phi(\vec{x}) = (\vec{a} \cdot \vec{x}) e^{-\alpha |\vec{x}|}$$

con $\alpha > 0$ reale e \vec{a} vettore costante. Si calcoli:

a) Il gradiente $\vec{V}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \phi(\vec{x})$;

b) Il laplaciano $D(\vec{x}) = \Delta \phi(\vec{x})$;

c) L'integrale di linea $\int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{l}$ del campo vettoriale \vec{V} lungo la curva Γ descritta da $\vec{x}(t) = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$ con $t \in [0, 1]$ e \vec{b} , \vec{c} vettori costanti.

Problema 2

Due superfici sferiche di raggio R hanno i centri \vec{x}_O e $\vec{x}_{O'}$ posti a distanza $a < R$ uno dall'altro. Si consideri la distribuzione di carica

$$\rho(\vec{x}) = \begin{cases} \rho_0 & \vec{x} \in R_1 = \{\vec{x} \mid |\vec{x} - \vec{x}_O| < R \wedge |\vec{x} - \vec{x}_{O'}| > R\} \\ -\rho_0 & \vec{x} \in R_2 = \{\vec{x} \mid |\vec{x} - \vec{x}_O| > R \wedge |\vec{x} - \vec{x}_{O'}| < R\} \\ 0 & \vec{x} \in R_i = \{\vec{x} \mid |\vec{x} - \vec{x}_O| < R \wedge |\vec{x} - \vec{x}_{O'}| < R\} \\ 0 & \vec{x} \in R_e = \{\vec{x} \mid |\vec{x} - \vec{x}_O| > R \wedge |\vec{x} - \vec{x}_{O'}| > R\} \end{cases}$$

con ρ_0 costante.

Domanda 1 (Punti 1)

Si calcoli il campo elettrico nella regione R_i .

Domanda 2 (Punti 1)

Si calcoli il campo elettrico nella regione R_e nel limite in cui $a \rightarrow 0$ e $a\rho_0 \rightarrow \sigma_0$ con σ_0 costante.

Prova Scritta del 20/04/2011: Soluzione

Problema 1

$$\begin{aligned}\vec{V}(\vec{x}) &= \left(\vec{a} - \alpha \frac{(\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{x}}{|\vec{x}|}\right) e^{-\alpha |\vec{x}|} \\ D(x) = \partial_i V_i &= \left[-\alpha \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|} - 3\alpha \frac{(\vec{a} \cdot \vec{x})}{|\vec{x}|} + \alpha \frac{\vec{a} \cdot \vec{x} |\vec{x}|^2}{|\vec{x}|^3} + \right. \\ &\quad \left. -\alpha \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|} + \alpha^2 \frac{(\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{x}^2}{|\vec{x}|^2} \right] e^{-\alpha |\vec{x}|} = \\ &= \alpha \left(\alpha - \frac{4}{|\vec{x}|} \right) \vec{a} \cdot \vec{x} e^{-\alpha |\vec{x}|} \\ \int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{l} &= \phi(\vec{c}) - \phi(\vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) e^{-\alpha |\vec{c}|} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) e^{-\alpha |\vec{b}|}\end{aligned}$$

Problema 2

Domanda 1

Il campo prodotto da $\rho(\vec{x})$ è uguale alla sovrapposizione del campo prodotto da due palle di raggio R uniformemente cariche con carica opposta. Il campo prodotto da una palla piena di raggio R è

$$\vec{E}_{palla}(\vec{x}) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \begin{cases} \vec{x} & |\vec{x}| \leq R \\ R^3 \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} & |\vec{x}| \geq R \end{cases}$$

Scegliamo $\vec{x}_O = \frac{a}{2} \vec{e}_z$, $\vec{x}_{O'} = -\frac{a}{2} \vec{e}_z$. Il campo nella regione R_i è pertanto

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(\left(\vec{x} - \frac{a}{2} \vec{e}_z \right) - \left(\vec{x} + \frac{a}{2} \vec{e}_z \right) \right) = -\frac{\rho_0 a}{3\epsilon_0} \vec{e}_z = -\frac{\rho_0 \vec{a}}{3\epsilon_0}$$

dove $\vec{a} = a \vec{e}_z$ è la distanza tra i due centri delle sfere.

Domanda 2

Il campo nella regione R_e è invece

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} \left(\frac{\vec{x} - \frac{\vec{a}}{2}}{|\vec{x} - \frac{\vec{a}}{2}|^3} - \frac{\vec{x} + \frac{\vec{a}}{2}}{|\vec{x} + \frac{\vec{a}}{2}|^3} \right)$$

Posto

$$\vec{f}(\vec{x}) \equiv \frac{\rho_0 R^3}{3 \epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

abbiamo

$$E_j(\vec{x}) = f_j(\vec{x} - \frac{\vec{a}}{2}) - f_j(\vec{x} + \frac{\vec{a}}{2}) = -\vec{a} \cdot \vec{\nabla} f_j(\vec{x}) + O(a^2)$$

Poiché

$$\partial_i \frac{x^j}{|\vec{x}|^3} = \frac{\delta_j^i |\vec{x}|^2 - 3 x^i x^j}{|\vec{x}|^5}$$

otteniamo per $a \rightarrow 0$

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\frac{\rho_0 R^3}{3 \epsilon_0} \frac{\vec{a} |\vec{x}|^2 - 3 (\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{x}}{|\vec{x}|^5} = -\frac{\sigma_0 R^3}{3 \epsilon_0} \frac{\vec{e}_z |\vec{x}|^2 - 3 (\vec{e}_z \cdot \vec{x}) \vec{x}}{|\vec{x}|^5}$$

Nel limite $\vec{a} \rightarrow 0$ le due sfere si sovrappongono. La densità di carica in un punto \vec{x} sulla superficie sferica è determinata dalla differenza tra le componenti del campo elettrico normali alla sfera nelle regioni R_e ed R_i

$$\begin{aligned} \sigma(\vec{x}) &= \epsilon_0 \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \cdot \left[-\frac{\sigma_0 R^3}{3 \epsilon_0} \frac{\vec{e}_z |\vec{x}|^2 - 3 (\vec{e}_z \cdot \vec{x}) \vec{x}}{|\vec{x}|^5} + \frac{\sigma_0 \vec{e}_z}{3 \epsilon_0} \right]_{|\vec{x}|=R} = \\ &= \sigma_0 \frac{\vec{e}_z \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|} = \sigma_0 \cos \theta \end{aligned}$$

dove θ è l'angolo tra \vec{x} e l'asse delle z .

Corso di Fisica Generale 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 07/06/2011

Problema 1

Una superficie cilindrica infinita di sezione circolare e raggio R è mantenuta ad un potenziale dato

$$V(\theta) = V_0 \sin \theta \sin 2\theta$$

dove θ è la coordinata angolare polare del piano ortogonale all'asse del cilindro. Nessuna carica è presente né all'interno né all'esterno della superficie cilindrica.

Domanda 1 (Punti 10)

Si calcolino la componente radiale e quella azimutale del campo elettrostatico $\vec{E}(\vec{x})$, per punti \vec{x} sia interni che esterni alla superficie cilindrica.

Domanda 2 (Punti 8)

Si calcoli la densità di carica superficiale $\sigma(\theta)$ sulla superficie del cilindro.

Problema 2

Un disco piano di raggio R è dotato di carica superficiale σ . Il disco ruota con velocità angolare costante ω intorno all'asse ortogonale passante per il suo centro.

Domanda 1 (Punti 5)

Si calcoli il momento magnetico di dipolo del disco ruotante.

Domanda 2 (Punti 5)

Si determini il campo magnetico esatto prodotto dal disco ruotante in un punto posto sull'asse ortogonale al piano del disco e passante per il suo centro.

Domanda 3 (Punti 5)

Si verifichi la correttezza del risultato della Domanda 2 confrontandolo con il campo magnetico in approssimazione di dipolo del sistema.

Prova Scritta del 07/06/2011: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Siano (r, θ) le coordinate polari sul piano ortogonale all'asse del cilindro. Poiché

$$V(-\theta) = V(\theta)$$

cerchiamo il potenziale $\phi(r, \theta)$ per $r < R$ o $r > R$ nella forma

$$\phi(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k r^k \cos k \theta \quad \text{per } r < R$$

$$\phi(r, \theta) = \tilde{A}_0 \log r + \tilde{B}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k r^{-k} \cos k \theta \quad \text{per } r > R$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} A_k R^k &= \tilde{A}_k R^{-k} = \frac{V_0}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \cos k \theta \sin \theta \sin 2\theta = \\ &= \frac{V_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \cos k \theta (\cos \theta - \cos 3\theta) = \\ &= \frac{V_0}{2} (\delta_{k,1} - \delta_{k,3}) \quad k \geq 1 \\ \tilde{A}_0 \log R + \tilde{B}_0 &= A_0 = 0 \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) &= \frac{V_0}{2} \left(\frac{r}{R} \cos \theta - \frac{r^3}{R^3} \cos 3\theta \right) \quad r < R \\ \phi(r, \theta) &= \tilde{A}_0 \log \frac{r}{R} + \frac{V_0}{2} \left(\frac{R}{r} \cos \theta - \frac{R^3}{r^3} \cos 3\theta \right) \quad r > R \end{aligned}$$

Le soluzioni con $\tilde{A}_0 \neq 0$ hanno una differenza di potenziale infinita tra la superficie del cilindro e i punti con $r \rightarrow +\infty$. Pertanto, se $V(\theta)$ è definito come la *differenza* tra il potenziale sulla superficie del cilindro e quello dei

punti infinitamente lontani con $r \rightarrow +\infty$, dobbiamo prendere⁶

$$\tilde{A}_0 = 0$$

Il campo elettrico è pertanto:

$$\begin{aligned}\vec{E}(r, \theta) &= -\vec{\nabla} \phi(r, \theta) = -\partial_r \phi(r, \theta) \vec{e}_r - \frac{\partial_\theta \phi}{r} \vec{e}_\theta = \\ &= -\frac{V_0}{2} \left(\frac{1}{R} \cos \theta - \frac{3r^2}{R^3} \cos 3\theta \right) \vec{e}_r + \\ &\quad + \frac{V_0}{2} \left(\frac{1}{R} \sin \theta - \frac{3r^2}{R^3} \sin 3\theta \right) \vec{e}_\theta \quad r < R \\ \vec{E}(r, \theta) &= -\vec{\nabla} \phi(r, \theta) = \frac{V_0}{2} \left(\frac{R}{r^2} \cos \theta - \frac{3R^3}{r^4} \cos 3\theta \right) \vec{e}_r + \\ &\quad + \frac{V_0}{2} \left(\frac{R}{r^2} \sin \theta - \frac{3R^3}{r^4} \sin 3\theta \right) \vec{e}_\theta \quad r > R\end{aligned}$$

Domanda 2

La densità di carica sulla superficie del cilindro è

$$\begin{aligned}\sigma(\theta) &= \epsilon_0 \left(\lim_{r \rightarrow R^+} E_r(\theta, r) - \lim_{r \rightarrow R^-} E_r(\theta, r) \right) = \\ &= \frac{\epsilon_0 V_0}{2} \left(\frac{1}{R} \cos \theta - \frac{3}{R} \cos 3\theta \right) + \frac{\epsilon_0 V_0}{2} \left(\frac{1}{R} \cos \theta - \frac{3}{R} \cos 3\theta \right) = \\ &= \epsilon_0 V_0 \left(\frac{\cos \theta}{R} - \frac{3 \cos 3\theta}{R} \right)\end{aligned}$$

Problema 2

Domanda 1

⁶Ricordiamo che il problema fisico è univocamente definito solo se si specifica il potenziale di riferimento rispetto al quale il potenziale dato $V(\theta)$ sulla superficie del cilindro è definito. La soluzione proporzionale ad \tilde{A}_0 corrisponde al campo elettrico radiale

$$\vec{E}_0(r) = -\frac{\tilde{A}_0}{r} \vec{e}_r \equiv \frac{\lambda_0}{2\pi r} \vec{e}_r$$

che è il campo generato da una distribuzione di carica superficiale sul cilindro uniforme $\sigma_0 = \frac{\lambda_0}{2\pi R} = -\frac{\tilde{A}_0}{4\pi^2 R}$. Un altro modo di specificare univocamente la soluzione del problema sarebbe dunque quello di assegnare la densità di carica per unità di lunghezza del cilindro λ_0 . La scelta fatta corrisponde a prendere $\lambda_0 = 0$.

Il momento magnetico di dipolo $\vec{\mu} = \mu \vec{e}_z$ è evidentemente diretto lungo l'asse ortogonale al piano del disco che scegliamo come asse delle z

$$\mu = \int_0^R d\rho \sigma \omega \rho \pi \rho^2 = \frac{\sigma \omega \pi R^4}{4}$$

Domanda 2

Il campo magnetico $\vec{B}(P) = B_z(z) \vec{e}_z$ in un punto $P = (0, 0, z)$ sull'asse z è diretto lungo quest'asse:

$$\begin{aligned} B_z(z) &= \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 c^2} \int_0^R d\rho \sigma \omega \rho \int_0^{2\pi} d\theta \rho \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{\sigma \omega}{2 \epsilon_0 c^2} \int_0^R d\rho \frac{\rho^3}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma \omega}{4 \epsilon_0 c^2} \int_0^{R^2} d\xi \frac{\xi}{(\xi + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{\sigma \omega}{4 \epsilon_0 c^2} \left[\frac{4z^2 + 2\xi}{(\xi + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^{R^2} = \frac{\sigma \omega}{2 \epsilon_0 c^2} \left[\frac{2z^2 + R^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 2|z| \right] \end{aligned}$$

Domanda 3

Espandiamo il risultato della Domanda 2 per $|z| \gg R$:

$$\begin{aligned} B_z(z) &= \frac{\sigma \omega |z|}{\epsilon_0 c^2} \left[\frac{1 + \frac{R^2}{2z^2}}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}} - 1 \right] = \\ &= \frac{\sigma \omega |z|}{\epsilon_0 c^2} \left[\left(1 + \frac{R^2}{2z^2}\right) \left(1 - \frac{R^2}{2z^2} + \frac{3R^4}{8z^4} + O\left(\frac{R^6}{z^6}\right)\right) - 1 \right] = \\ &= \frac{\sigma \omega |z|}{\epsilon_0 c^2} \left[\frac{1R^4}{8z^4} + O\left(\frac{R^6}{z^6}\right) \right] = \frac{\sigma \omega R^4}{8 \epsilon_0 c^2 |z|^3} \left[1 + O\left(\frac{R^2}{z^2}\right) \right] = \end{aligned}$$

Questo risultato è in accordo con l'espressione per il campo di un dipolo $\vec{\mu} = \mu \vec{e}_z$, per punti sull'asse delle z se μ è quello ottenuto alla Domanda 1:

$$B_z^{dipolo}(z) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 c^2} \frac{2 \mu}{|z|^3} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 c^2} \frac{\sigma \omega \pi R^4}{2 |z|^3} = \frac{\sigma \omega R^4}{8 \pi \epsilon_0 c^2 |z|^3}$$

Corso di Fisica Generale 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 22/06/2011

Problema 1

In una sfera di raggio R esiste una polarizzazione per unità di volume data da

$$\vec{P}(\vec{x}) = \alpha \vec{x}$$

con α costante.

Domanda 1 (10 Punti)

Si calcoli il campo elettrico dentro e fuori la sfera, la densità di carica di polarizzazione di volume all'interno della sfera e la densità di carica di polarizzazione di superficie sulla superficie della sfera.

Problema 2

Una corrente costante I scorre in un filo giacente nel piano (x, y) , lungo la curva composta dalle due semirette $y = \pm a$, $x > 0$ e dal semicerchio di raggio $a > 0$ centrato nell'origine con $x < 0$. La corrente scorre dal ramo con $y = a$ a quello con $y = -a$. Sia

$$\vec{B}(z \vec{e}_z) = (B_x(z), B_y(z), B_z(z))$$

il campo magnetico prodotto nella corrente in un punto generico sull'asse delle z .

Domanda 1 (12 Punti)

Si deduca dalle proprietà di simmetria della configurazione di corrente: (a) la parità rispetto alla riflessione $z \rightarrow -z$ delle 3 componenti del campo magnetico sull'asse; (b) quale siano le componenti nulle di $\vec{B}(z)$ sull'asse.

Domanda 2 (12 Punti)

Si calcoli $\vec{B}(z \vec{e}_z)$ esplicitamente.

Prova Scritta del 22/06/2011: Soluzione

Problema 1

La densità di carica di polarizzazione all'interno della sfera è

$$\rho_P(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -3\alpha$$

La densità di carica superficiale sulla superficie della sfera è

$$\sigma(\vec{x}) = \vec{P} \cdot \vec{n} = \alpha R$$

La carica totale nella sfera è pertanto

$$4\pi R^2 \sigma + \frac{4\pi R^3 \rho_P}{3} = 0$$

Data la simmetria radiale del problema ne consegue che fuori dalla sfera il campo elettrico è nullo. Dentro la sfera il campo è quello prodotto da una densità di carica di volume costante $\rho_P = -3\alpha$:

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\frac{\alpha}{\epsilon_0} \vec{x} \quad |\vec{x}| < R$$

Una maniera alternativa di risolvere il problema è fare uso delle equazioni per il campo \vec{D}

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Poiché non c'è carica libera in nessun punto dello spazio

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$$

ovunque, e dunque

$$\vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\frac{P}{\epsilon_0}$$

ovunque. Per $|x| > R$, poiché $\vec{P} = 0$ anche $\vec{E} = 0$. Per $|x| < R$, $\vec{E} = -\frac{\alpha}{\epsilon_0} \vec{x}$.

Problema 2

Domanda 1

La configurazione di corrente è invariante per $P_z : (x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$.
Pertanto

$$\begin{aligned} B'_x(z) &= -B_x(-z) = B_x(z) \\ B'_y(z) &= -B_y(-z) = B_y(z) \\ B'_z(z) &= B_z(-z) = B_z(z) \end{aligned}$$

Quindi $B_z(z)$ è pari e $B_{x,y}(z)$ dispari. Inoltre il sistema è invariante se oltre alla riflessione $P_y : (x, y, z) \rightarrow (x, -y, z)$ si inverte il segno della corrente $I \rightarrow -I$. Pertanto

$$\begin{aligned} B'_x(z) &= (-1)(-1)B_x(z) = B_x(z) \\ B'_y(z) &= (-1)B_y(z) = B_y(z) \\ B'_z(z) &= (-1)(-1)B_z(z) = B_z(z) \end{aligned}$$

dove il primo -1 nei membri di destra è l'effetto dell'inversione della corrente I . Da queste equazioni concludiamo che $B_y(z) = 0$.

Domanda 2

Usiamo al formula di Biot-Savart

$$\vec{B}(z \vec{e}_z) = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_C \frac{(\vec{x} - z \vec{e}_z) \wedge d\vec{x}}{|\vec{x} - z \vec{e}_z|^3}$$

Sia $\vec{x} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y$ un punto sul circuito. Sia $C = R_a \cup S_a \cup R_{-a}$ la decomposizione del circuito nelle due semirette $R_{\pm a}$ con $x > 0$ e $y = \pm a$ e nel semi-cerchio S_a di raggio a e $x < 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{R_a} \frac{(\vec{x} - z \vec{e}_z) \wedge d\vec{x}}{|\vec{x} - z \vec{e}_z|^3} &= \int_{+\infty}^0 \frac{(a \vec{e}_y - z \vec{e}_z) \wedge dx \vec{e}_x}{(x^2 + a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= (a \vec{e}_z + z \vec{e}_y) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{a \vec{e}_z + z \vec{e}_y}{a^2 + z^2} \int_0^{+\infty} \frac{d\xi}{(\xi^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a \vec{e}_z + z \vec{e}_y}{a^2 + z^2} \end{aligned}$$

Analogamente si ottiene il contributo di R_{-a}

$$\int_{R_{-a}} \frac{(\vec{x} - z \vec{e}_z) \wedge d\vec{x}}{|\vec{x} - z \vec{e}_z|^3} = \frac{a \vec{e}_z - z \vec{e}_y}{a^2 + z^2}$$

Infine il semi-cerchio dà

$$\begin{aligned}
 \int_{S_a} \frac{(\vec{x} - z \vec{e}_z) \wedge d\vec{x}}{|\vec{x} - z \vec{e}_z|^3} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{(a \vec{e}_r - z \vec{e}_z) \wedge a d\theta \vec{e}_\theta}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
 &= \vec{e}_z \frac{a^2 \pi}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{z a}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \vec{e}_r = \\
 &= \vec{e}_z \frac{a^2 \pi}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{z a}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) = \\
 &= \vec{e}_z \frac{a^2 \pi}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2 z a}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_x
 \end{aligned}$$

In definitiva

$$\vec{B}(z \vec{e}_z) = \frac{I}{4 \pi \epsilon_0 c^2} \left[\vec{e}_z \frac{a}{a^2 + z^2} \left(2 + \frac{a \pi}{(a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right) - \frac{2 z a}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_x \right]$$

Corso di Fisica Generale 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 27/07/2011

Problema 1

Un filo, in cui scorre una corrente I costante, forma una curva chiusa composta da due semicerchi di raggio a centrati nell'origine, giacenti nei due semipiani ortogonali $\{(x, y, 0) : x > 0\}$ e $\{(0, y, z) : z > 0\}$.

Domanda 1 (Punti 12)

Si calcoli il campo magnetico prodotto in un punto sull'asse delle z a grandi distanze dal circuito.

Problema 2

Sul piano $x = 0$ scorre una corrente superficiale, uniforme, diretta lungo l'asse delle y , e dipendente dal tempo, la cui intensità è

$$\vec{K}(t) = K_0 \cos \omega t \vec{e}_y$$

dove $\omega > 0$ e K_0 sono costanti.

Domanda 1 (Punti 12)

(a) Sia P_i la riflessione che inverte l'asse x^i e T_i la traslazione lungo x_i con $i = 1, 2, 3$. Quali tra le P_i e le T_i sono invarianze del problema? (b) Si dimostri che le soluzioni invarianti hanno $E_x = E_z = B_x = B_y = 0$. (c) Determinare la parità per riflessione delle componenti non nulle dei campi elettrici e magnetici.

Domanda 2 (Punti 12)

Si determini la soluzione delle equazioni di Maxwell invariante che corrisponde ad un'onda che fuoriesce dal piano $x = 0$.

Prova Scritta del 27/07/2011: Soluzione

Problema 1

Il momento magnetico del circuito è dato dall' integrale

$$\vec{\mu} = \frac{I}{2} \oint_C \vec{x} \wedge d\vec{l}$$

Il circuito $C = C_{xy} \cup C_{yz}$ è l'unione dei due semi-cerchi giacenti nei piani (x, y) e (y, z) . Dunque

$$\begin{aligned} \vec{\mu} &= \frac{I}{2} \oint_{C_{xy}} \vec{x} \wedge d\vec{l} + \frac{I}{2} \oint_{C_{yz}} \vec{x} \wedge d\vec{l} = \\ &= \frac{I}{2} \pi a^2 \vec{e}_z + \frac{I}{2} \pi a^2 \vec{e}_x \end{aligned}$$

Il campo magnetico in un punto $\vec{x} = z \vec{e}_z$ con $|z| \gg a$ è dato dal campo di dipolo corrispondente

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{I a^2}{8 \epsilon_0 c^2} \frac{3 \vec{e}_z - (\vec{e}_z + \vec{e}_x)}{|z|^3} = \frac{I a^2}{8 \epsilon_0 c^2} \frac{2 \vec{e}_z - \vec{e}_x}{|z|^3}$$

Problema 2

Domanda 1

P_x, P_z, T_y e T_z sono invarianze del problema. L'invarianza per traslazione implica che i campi elettrici e magnetici dipendono solamente di x e t :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}, t) &= (E_x(x, t), E_y(x, t), E_z(x, t)) \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= (B_x(x, t), B_y(x, t), B_z(x, t)) \end{aligned}$$

Le equazioni per le divergenze danno

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 = \partial_x E_x(x, t) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 = \partial_x B_x(x, t)$$

ovvero le componenti x dei campi non dipendono da x :

$$E_x(x, t) = E_x(t) \quad B_x(x, t) = B_x(t) \quad (328)$$

Siano $\vec{E}' \equiv P_x(\vec{E})$ e $\vec{B}' \equiv P_x(\vec{B})$ i campi trasformati per riflessione $x \rightarrow -x$. Una configurazione invariante soddisfa

$$\begin{aligned} E'_x(x, t) &= -E_x(-x, t) = E_x(x, t) & B'_x(x, t) &= B_x(-x, t) = B_x(x, t) \\ E'_y(x, t) &= E_y(-x, t) = E_y(x, t) & B'_y(x, t) &= -B_y(-x, t) = B_y(x, t) \\ E'_z(x, t) &= E_z(-x, t) = E_z(x, t) & B'_z(x, t) &= -B_z(-x, t) = B_z(x, t) \end{aligned}$$

Tenendo conto delle (328) otteniamo

$$E_x(t) = 0$$

L'invarianza per P_z dà, analogamente,

$$\begin{aligned} E'_x(x, t) = E_x(x, t) = E_x(x, t) & & B'_x(x, t) = -B_x(x, t) = B_x(x, t) \\ E'_y(x, t) = E_y(x, t) = E_y(x, t) & & B'_y(x, t) = -B_y(x, t) = B_y(x, t) \\ E'_z(x, t) = -E_z(x, t) = E_z(x, t) & & B'_z(x, t) = B_z(x, t) = B_z(x, t) \end{aligned}$$

Dunque

$$B_x(t) = B_y(x, t) = E_z(x, t) = 0$$

In definitiva le soluzioni invarianti hanno la forma

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = (0, E_y(x, t), 0) \quad \vec{B}(\vec{x}, t) = (0, 0, B_z(x, t))$$

dove $E_y(x, t)$ è *pari* e $B_z(x, t)$ è *dispari* per $x \rightarrow -x$.

Domanda 2

Le equazioni di Maxwell per i rotori danno, per $x \neq 0$:

$$\partial_x E_y(x, t) = -\partial_t B_z(x, t) \quad -\partial_x B_z(x, t) = \frac{1}{c^2} \partial_t E_y(x, t) \quad (329)$$

da cui le equazioni d'onda

$$\partial_x^2 E_y(x, t) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 E_y(x, t) = \partial_x^2 B_z(x, t) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 B_z(x, t) = 0 \quad x \neq 0$$

La soluzione dell'equazione d'onda che corrisponde ad un'onda che fuoriesce dal piano $x = 0$ è

$$B_z(x, t) = \begin{cases} f(x - ct) & x > 0 \\ g(x + ct) & x < 0 \end{cases}$$

L'anti-simmetria di $B_z(x, t)$ per riflessioni implica

$$B_z(x, t) = \begin{cases} f(x - ct) & x > 0 \\ -f(-x - ct) & x < 0 \end{cases}$$

Le condizioni attraverso $x = 0$ si ottengono considerando il circuito amperiano che attraversa il piano $x = 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (B_z(\epsilon, t) - B_z(-\epsilon, t)) &= -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} K_y(t) = -\frac{K_0}{\epsilon_0 c^2} \cos \omega t \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (E_y(\epsilon, t) - E_y(-\epsilon, t)) &= 0\end{aligned}$$

Dunque $E_y(x, t)$ è *continuo* in $x = 0$, mentre B_z è discontinuo. Poiché B_z è dispari per riflessioni $x \rightarrow -x$, abbiamo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} B_z(\epsilon, t) = -\frac{K_0 \cos \omega t}{2 \epsilon_0 c^2}$$

Dunque

$$f(-ct) = -\frac{K_0 \cos \omega t}{2 \epsilon_0 c^2} \Rightarrow f(\xi) = -\frac{K_0}{2 \epsilon_0 c^2} \cos \frac{\omega}{c} \xi$$

In definitiva

$$B_z(x, t) = \begin{cases} -\frac{K_0 \cos(kx - \omega t)}{2 \epsilon_0 c^2} & x > 0 \\ \frac{K_0 \cos(kx + \omega t)}{2 \epsilon_0 c^2} & x < 0 \end{cases}$$

dove $k = \frac{\omega}{c}$. Dalle (329) otteniamo il campo elettrico

$$E_y(x, t) = \begin{cases} -\frac{K_0 \cos(kx - \omega t)}{2 \epsilon_0 c} & x > 0 \\ -\frac{K_0 \cos(kx + \omega t)}{2 \epsilon_0 c} & x < 0 \end{cases}$$

Corso di Fisica Generale 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 22/09/2011

Problema 1

Una sfera metallica di raggio R ha una carica elettrica q . La sfera metallica è circondata da un guscio sferico metallico, concentrico con la sfera, di raggio interno $a > R$ e di raggio esterno $b > a$.

Domanda 1 (Punti 6)

Si supponga che il guscio esterno sia globalmente scarico. Si calcolino le densità superficiali di carica sulle tre superfici sferiche di raggio R , a e b .

Domanda 2 (Punti 9)

Nelle stesse ipotesi della Domanda 1, si calcoli il potenziale al centro della sfera metallica rispetto al potenziale all'infinito.

Domanda 3 (Punti 9)

Si risponda alle Domande 1 e 2 nell'ipotesi in cui la superficie esterna a $r = b$ sia messa a terra, cioè posta ad un potenziale nullo identico al potenziale all'infinito.

Problema 2

Si consideri un cilindro infinito di raggio R , vuoto, la cui superficie è costituita da un sottile foglio metallico, di spessore molto minore di R , che assumiamo essere un conduttore *ideale*. Il cilindro è posto in un campo magnetico uniforme, di intensità B , diretto lungo il suo asse. Si supponga che ad un dato tempo $t = 0$ il raggio della superficie cilindrica metallica diminuisca rapidamente fino a ridursi al tempo $t' > 0$ al valore $R' < R$. Lo spessore del foglio metallico rimane trascurabile anche rispetto a R' .

Domanda 1 (Punti 9)

Si calcoli il campo magnetico all'interno del nuovo cilindro di raggio R' .
Suggerimento: Si utilizzi la legge del flusso ed il fatto che la superficie metallica sia un conduttore ideale.

Prova Scritta del 22/09/2011: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Le densità di carica σ_R, σ_a e σ_b sulle superfici $r = R, a$ e b sono costanti a causa della simmetria sferica; pertanto

$$\sigma_R = \frac{q}{4\pi R^2}$$

Poiché il campo elettrico è nullo per $a < r < b$, la carica totale sulla superficie $r = a$ deve essere opposta a quella sulla sfera: quindi

$$\sigma_a = -\frac{q}{4\pi a^2} \quad (330)$$

Nel caso in cui il guscio sia globalmente scarico, la carica sulla superficie $r = b$ deve quindi essere $+q$. Pertanto

$$\sigma_b = +\frac{q}{4\pi b^2} \quad \text{guscio scarico}$$

Domanda 2

Il sistema ha simmetria sferica: pertanto il potenziale elettrostatico $V(r)$ è una funzione del raggio r dal centro della sfera, ed il campo elettrico è radiale e di intensità $E(r) = -V'(r)$. Poniamo

$$V(r) = \begin{cases} V_0(r) & 0 \leq r \leq R \\ V_1(r) & R \leq r \leq a \\ V_2(r) & a \leq r \leq b \\ V_3(r) & b \leq r \end{cases}$$

All'interno di un conduttore $V(r)$ è costante, pertanto $V_0(r) = V_0$ e $V_2(r) = V_2$, con V_0 e V_2 costanti. $V_1(r)$ e $V_3(r)$ sono funzioni armoniche a simmetria sferica, ovvero della forma

$$V_1(r) = \frac{\alpha_1}{r} + \beta_1 \quad V_3(r) = \frac{\alpha_2}{r}$$

dove abbiamo imposto $V(+\infty) = 0$. La continuità di $V(r)$ implica

$$\frac{\alpha_1}{R} + \beta_1 = V_0 \quad \frac{\alpha_1}{a} + \beta_1 = V_2 \quad \frac{\alpha_2}{b} = V_2$$

ovvero

$$V_0 = \frac{\alpha_1}{R} - \frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_2}{b}$$

Dal teorema di Gauss sappiamo che

$$E_1(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad E_2(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

dunque

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$$

Quindi

$$V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} + \frac{1}{R} \right) \quad \text{guscio scarico}$$

Inoltre

$$V_1(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad V_3(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Domanda 3

Nel caso in cui la superficie $r = b$ è posta a $V_2 = 0$, $\alpha_2 = 0$, per le equazioni precedenti. Quindi $V_3(r) \equiv 0$ e $E_3(r) = 0$. Pertanto

$$\sigma_b = 0$$

Inoltre, $\alpha_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$ perché $E_1(r)$ è lo stesso della domanda precedente. Quindi

$$V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a} \right) \quad \text{guscio messo a terra}$$

Problema 2

Domanda 1

La legge del flusso stabilisce che per un circuito C_t chiuso, dipendente dal tempo t , vale

$$\int_{C_t} \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{B}; S_t) \quad (331)$$

dove $C_t = \partial S_t$, $\phi(\vec{B}; S_t)$ è il flusso di \vec{B} attraverso S_t , \vec{F} è

$$\vec{F} = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$$

e il membro di sinistra dell'equazione (331) è la forza elettromotrice lungo il circuito in movimento C_t .

La forza elettromagnetica su ogni carica all'interno di un conduttore si annulla. Pertanto in un conduttore ideale in movimento

$$\vec{F} = 0 = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (332)$$

Questo generalizza il noto risultato $\vec{E} = 0$, valido all'interno di conduttori ideali fermi, al caso in cui questi si muovono.

Consideriamo pertanto un circuito circolare C_t , di raggio R_t , con centro lungo l'asse del cilindro, trasverso a questo, che si mantiene all'interno del foglio conduttore cilindrico durante tutto il processo attraverso la quale questo si restringe. Per $t = 0$, C_0 è un cerchio (trasverso all'asse del cilindro) che, trascurando lo spessore del foglio metallico, ha raggio R . Per $t' > 0$, $C_{t'}$ è un cerchio di raggio R' .

Poichè all'interno del conduttore \vec{F} è nullo, il flusso magnetico rimane costante per $0 \leq t \leq t'$:

$$\Phi(\vec{B}; S_t) = \text{costante} \quad t \in [0, t']$$

Al tempo $t = 0$

$$\Phi(\vec{B}; S_0) = \pi R^2 B$$

mentre tempo $t' > 0$

$$\Phi(\vec{B}; S_{t'}) = \pi (R')^2 B'$$

In definitiva

$$B' = B \frac{R^2}{(R')^2}$$

Corso di Fisica Generale 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 19/01/2012

Problema 1 (Punti 15)

Un filo infinito che giace lungo l'asse delle z di una sistema di coordinate cartesiano è percorso da una corrente I diretta nel senso positivo dell'asse delle z . Una barra rettilinea, composta di un conduttore che si suppone ideale, ha lunghezza L e spessore trascurabile, giace nel piano (x, z) ed ha il suo centro ad una distanza r dal filo di corrente, con $r > \frac{L}{2}$. La barra si muove nel piano (x, z) in direzione ortogonale alla propria lunghezza e con una velocità \vec{v} che forma un angolo θ con l'asse delle x :

$$\vec{v} = v (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_z)$$

Domanda 1 (Punti 12)

Si calcoli la forza elettromotrice $\mathcal{E} \equiv -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$, dove \vec{E} è il campo elettrico all'interno della barra conduttrice, che si crea tra i suoi estremi A e B .

Domanda 2 (Punti 3)

Si determini \mathcal{E} nel limite in cui $\theta \rightarrow 0$.

Problema 2 (Punti 18)

Un filo circolare di raggio a è posto sul piano (x, y) di un sistema di coordinate cartesiano, con il suo centro nell'origine. Il filo è carico elettricamente e la densità di carica elettrica per unità di lunghezza $\lambda(\theta)$ in un punto sul del filo di coordinate polari (a, θ) è

$$\lambda(\theta) = \lambda_0 \left(\sin^3 \theta + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Domanda 1 (Punti 6)

Si calcoli il campo elettrico in punti P situati lungo l'asse delle z .

Domanda 2 (Punti 6)

Si calcoli il campo elettrico in punti generici \vec{x} posti a distanza grande dall'anello di carica $|\vec{x}| \gg a$, includendo i termini di ordine $\frac{a^3}{|\vec{x}|^3}$.

Domanda 3 (Punti 6)

Si verifichi l'accordo tra le risposte alle Domanda 1 e 2.

Prova Scritta del 19/01/2012: Soluzione

Problema 1

Poiché il conduttore è ideale la forza elettromagnetica di Lorentz all'interno di esso deve annullarsi

$$\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = 0 \quad \text{all'interno della barra}$$

Pertanto la forza elettromotrice fra gli estremi della barra è

$$\mathcal{E} \equiv - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (333)$$

\vec{B} , \vec{v} e $d\vec{l}$ sono tra loro ortogonali: quindi

$$\mathcal{E} = v \int_A^B B(P) dl \quad (334)$$

dove $B(P)$ è il modulo del campo magnetico nel punto P lungo la barra a distanza l dal suo centro. Possiamo supporre, senza perdita di generalità, che il centro C della barra conduttrice abbia coordinate

$$C = (r, 0, 0)$$

Le coordinate del punto P sulla barra sono allora

$$P = (r - l \sin \theta, 0, l \cos \theta) \quad (335)$$

Il campo nel punto P è diretto lungo \vec{e}_y ed ha modulo

$$B(P) = \frac{I \mu_0}{2 \pi} \frac{1}{|r - l \sin \theta|} \quad (336)$$

La (334) diventa quindi

$$\mathcal{E} = \frac{I v \mu_0}{2 \pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dl}{|r - l \sin \theta|} = \frac{I v \mu_0}{2 \pi \sin \theta} \log \frac{r + \frac{l}{2} \sin \theta}{r - \frac{l}{2} \sin \theta} \quad (337)$$

Per $\theta \rightarrow 0$ questa diventa

$$\mathcal{E} \Big|_{\theta=0} = \frac{I v \mu_0}{2 \pi} \frac{r}{L} \quad (338)$$

Problema 2

Domanda 1

Il campo elettrico in un punto $P = (0, 0, z)$ situato lungo l'asse delle z è

$$\begin{aligned}\vec{E}(P) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta a \lambda(\theta)}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (-a \cos\theta \vec{e}_x - a \sin\theta \vec{e}_y + z \vec{e}_z) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{qz}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z - \frac{p_x \vec{e}_x}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{p_y \vec{e}_y}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (339)\end{aligned}$$

dove

$$q = \int_0^{2\pi} d\theta a \lambda(\theta) = \lambda_0 \pi a$$

è la carica totale della distribuzione di carica e

$$\begin{aligned}p_x &= \int_0^{2\pi} d\theta a \lambda(\theta) a \cos\theta = \frac{a^2 \lambda_0 \pi}{2} \\ p_y &= \int_0^{2\pi} d\theta a \lambda(\theta) a \sin\theta = \frac{3a^2 \lambda_0 \pi}{4} \quad (340)\end{aligned}$$

sono le componenti non nulle del suo momento di dipolo elettrico.

Domanda 2

Si calcoli il campo elettrico in punti generici \vec{x} posti a distanza grande dall'anello di carica $|\vec{x}| \gg a$ è dato dall'approssimazione di dipolo

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q\vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \frac{3\vec{p} \cdot \vec{x} \vec{x} - \vec{p} |\vec{x}|^2}{|\vec{x}|^5} \right] \quad (341)$$

Domanda 3

Valutando la (341) per $\vec{x} = (0, 0, z)$ otteniamo

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q\vec{e}_z z}{|z|^3} + \frac{-\vec{p}}{|z|^3} \right] \quad (342)$$

D'altra parte, espandendo il campo esatto sull'asse z dato dalla Eq. (339)

per $\frac{a}{z} \ll 1$ otteniamo

$$\begin{aligned}\vec{E}(P) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{qz}{|z|^3} \vec{e}_z - \frac{\vec{p}}{|z|^3} \right] \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{z^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{qz}{|z|^3} \vec{e}_z - \frac{\vec{p}}{|z|^3} \right] \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a^2}{z^2} + O\left(\frac{a^4}{z^4}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{qz}{|z|^3} \vec{e}_z - \frac{\vec{p}}{|z|^3} + O\left(\frac{a^4}{z^4}\right) \right]\end{aligned}\tag{343}$$

in accordo con la (342).

Corso di Fisica Generale 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 27/02/2012

Problema 1 (Punti 22)

Una superficie cilindrica infinita conduttrice ha l'asse parallelo all'asse delle z . La sezione trasversale è un *quadrante* di cerchio, la cui proiezione sul piano (x, y) è definita da $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2, x > 0, y > 0\}$. I lati piani della superficie cilindrica, definiti da $x = 0$ e $y = 0$, sono posti a potenziale nullo. Il lato curvo della superficie è posto a potenziale V_0 .

Domanda 1 (Punti 14)

Si calcoli il potenziale all'interno del cilindro (*Nota*: Potete lasciare risultato espresso in forma di serie).

Domanda 2 (Punti 3)

Calcolare la carica $\sigma_1(\rho)$ sui lati piani della superficie cilindrica, in funzione della distanza ρ del punto della superficie dall'asse delle z .

Domanda 3 (Punti 5)

Calcolare la carica $\sigma_2(\theta)$ sul lato curvo della superficie cilindrica, in funzione alla coordinata polare θ del punto della superficie.

Problema 2 (Punti 14)

Un filo percorso da una corrente costante I giace in un piano e forma una curva chiusa formata da una semicirconferenza di raggio a e dal diametro passante per il centro e congiungente i due estremi della semicirconferenza.

Domanda 1 (Punti 10)

Si determini il campo magnetico esatto in un punto posto sull'asse ortogonale al piano del circuito e passante per il centro della semicirconferenza.

Domanda 2 (Punti 4)

Si verifichi la correttezza del risultato della Domanda 1 confrontandolo con il campo magnetico in approssimazione di dipolo del sistema.

Prova Scritta del 27/02/2012: Soluzione

Problema 1

Il potenziale all'interno del cilindro è armonico e regolare e pertanto può essere scritto come

$$V(\theta, \rho) = \sum_k (A_k \sin k \theta + B_k \cos k \theta) \rho^k$$

dove k è un indice positivo. Poiché

$$V(0, \rho) = V\left(\frac{\pi}{2}, \rho\right) = 0 \quad (344)$$

deve essere

$$A_k \sin k \frac{\pi}{2} = 0 \quad B_k = 0 \quad (345)$$

Quindi

$$k = 2n \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (346)$$

e

$$V(\theta, \rho) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin 2n \theta \rho^{2n}$$

Inoltre

$$V(\theta, a) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin 2n \theta a^{2n} = V_0 \quad (347)$$

Poiché

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin 2n \theta \sin 2m \theta = \delta_{n,m} \frac{\pi}{4} \quad (348)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{4V_0}{\pi a^{2n}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin 2n \theta = \frac{4V_0}{2n \pi a^{2n}} (1 - \cos n \pi) = \\ &= \frac{4V_0}{2n \pi a^{2n}} (1 - (-1)^n) \end{aligned} \quad (349)$$

In conclusione

$$V(\theta, \rho) = \frac{4 V_0}{\pi} \left(\sin 2\theta \frac{\rho^2}{a^2} + \frac{\sin 6\theta}{3} \frac{\rho^6}{a^6} + \frac{\sin 10\theta}{5} \frac{\rho^{10}}{a^{10}} + \dots \right) \quad (350)$$

Domanda 2

La carica sulla superficie del conduttore a $\theta = 0$ è proporzionale alla componente del campo elettrico ortogonale $\theta = 0$

$$\sigma_1(\rho) = \epsilon_0 E_\theta(0, \rho) = -\frac{8 V_0 \epsilon_0}{\pi \rho} \left(\frac{\rho^2}{a^2} + \frac{\rho^6}{a^6} + \frac{\rho^{10}}{a^{10}} + \dots \right) = -\frac{8 V_0 \epsilon_0}{\pi} \frac{\frac{\rho}{a^2}}{1 - \frac{\rho^4}{a^4}} \quad (351)$$

Domanda 3

Dobbiamo calcolare la componente radiale del campo elettrico alla distanza $\rho = a$. Per $\rho = a$ la serie (350) non converge assolutamente: converrà risommalarla per $\rho < a$:

$$\begin{aligned} V(\theta, \rho) &= \frac{4 V_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin 2\theta (2n+1)}{2n+1} \left(\frac{\rho^2}{a^2} \right)^{2n+1} = \\ &= \frac{4 V_0}{2i\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{2i\theta})^{2n+1}}{2n+1} \left(\frac{\rho^2}{a^2} \right)^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{-2i\theta})^{2n+1}}{2n+1} \left(\frac{\rho^2}{a^2} \right)^{2n+1} \right] \quad (352) \end{aligned}$$

Ricordando che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x) \quad (353)$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \quad (354)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} V(\theta, \rho) &= \frac{4 V_0}{4i\pi} \log \frac{1 + \frac{e^{2i\theta} \rho^2}{a^2}}{1 - \frac{e^{2i\theta} \rho^2}{a^2}} \frac{1 - \frac{e^{-2i\theta} \rho^2}{a^2}}{1 + \frac{e^{-2i\theta} \rho^2}{a^2}} = \\ &= \frac{V_0}{i\pi} \log \frac{1 - \frac{\rho^4}{a^4} + 2i \frac{\rho^2}{a^2} \sin 2\theta}{1 - \frac{\rho^4}{a^4} - 2i \frac{\rho^2}{a^2} \sin 2\theta} = \frac{V_0}{i\pi} 2i \arctan \left[2 \frac{\rho^2}{a^2} \frac{\sin 2\theta}{1 - \frac{\rho^4}{a^4}} \right] = \\ &= \frac{2 V_0}{\pi} \arctan \left[\frac{2 \rho^2}{a^2} \frac{\sin 2\theta}{1 - \frac{\rho^4}{a^4}} \right] \quad (355) \end{aligned}$$

Pertanto la densità di carica sulla superficie curva è

$$\begin{aligned}
\sigma_2(\theta) &= -\epsilon_0 E_\rho(\theta, a) = \epsilon_0 \frac{\partial V_\theta(\theta, a)}{\partial \rho} = \\
&= \frac{8 \epsilon_0 V_0 \sin(2\theta)}{\pi a} \lim_{\rho \rightarrow a^-} \frac{1}{1 + \frac{4\rho^4}{a^4} \frac{\sin^2 2\theta}{(1 - \frac{\rho^4}{a^4})^2}} \frac{\rho}{a} \frac{1 + \frac{\rho^4}{a^4}}{(1 - \frac{\rho^4}{a^4})^2} = \\
&= \frac{8 \epsilon_0 V_0 \sin(2\theta)}{\pi a} \frac{1}{2 \sin^2(2\theta)} = \frac{4 \epsilon_0 V_0}{\pi a \sin(2\theta)} \quad (356)
\end{aligned}$$

Problema 2

Domanda 1

Il campo magnetico generato nel punto P sull'asse z di coordinate

$$\vec{x}_P = (0, 0, z) \quad (357)$$

è la somma dei due contributi

$$\vec{B}(P) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad (358)$$

dove B_1 è il campo prodotto dalla semicirconferenza e \vec{B}_2 dal tratto rettilineo.

$$\begin{aligned}
\vec{B}_1(P) &= \frac{\mu_0 a I}{4 \pi} \int_0^\pi d\theta \frac{(-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) \wedge (-a \cos \theta \vec{e}_x - a \sin \theta \vec{e}_y + z \vec{e}_z)}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= \frac{\mu_0 a I}{4 \pi} \int_0^\pi d\theta \frac{a \vec{e}_z + \sin \theta z \vec{e}_y + \cos \theta z \vec{e}_x}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= \frac{a^2 \mu_0 I}{4 (z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z + \frac{\mu_0 a z I}{2 \pi (z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_y \\
\vec{B}_2(P) &= \frac{\mu_0 I}{4 \pi} \int_{-a}^a dx \frac{\vec{e}_x \wedge (-x \vec{e}_x + z \vec{e}_z)}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\mu_0 z I \vec{e}_y}{4 \pi} \int_{-a}^a \frac{dx}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= -\frac{\mu_0 I \vec{e}_y}{2 \pi z} \frac{a}{(z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (359)
\end{aligned}$$

In definitiva

$$\begin{aligned}
\vec{B}(P) &= \frac{a^2 \mu_0 I}{4 (z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z + \frac{\mu_0 a z I \vec{e}_y}{2 \pi (z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu_0 I \vec{e}_y}{2 \pi z} \frac{a}{(z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} = \\
&= \frac{a^2 \mu_0 I}{4 (z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z - \frac{\mu_0 a^3 I \vec{e}_y}{2 \pi z (z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (360)
\end{aligned}$$

Domanda 2

Consideriamo punti P sull'asse delle z con

$$|z| \gg a \quad (361)$$

In questo caso il campo magnetico nel punto P (360) diventa

$$\vec{B}(P) = \frac{a^2 I \mu_0}{4 |z|^3} \vec{e}_z + O\left(\frac{1}{|z|^4}\right) \quad (362)$$

che è precisamente il campo di un dipolo magnetico $\mu = \mu \vec{e}_z$ orientato lungo l'asse z e valutato in un punto sullo stesso asse

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3 \hat{x} \vec{\mu} \cdot \hat{x} - \vec{\mu}}{|\vec{x}|^3} \Big|_{\vec{x}=(0,0,z)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{|z|^3} \vec{e}_z \quad (363)$$

con momento di dipolo μ coincidente con quello dell'anello di corrente considerato

$$\mu = \frac{\pi a^2 I}{2} \quad (364)$$