

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 15/06/2005

Problema

Si consideri l'elettrone di un idrogenoide di carica nucleare Ze (cioè un elettrone in un campo coulombiano $V_0(r) = -\frac{Ze^2}{r}$). Si denoti con H_0 l'hamiltoniana corrispondente.

Domanda 1

Per tenere conto dell'estensione finita del nucleo si prenda come potenziale cui è soggetto l'elettrone il potenziale elettrostatico generato da una sfera uniformemente carica di raggio a_n e carica totale Ze . Si dimostri che

$$V_1(r) = \begin{cases} -\frac{Ze^2}{r} & \text{per } r \geq a_n \\ \frac{Ze^2}{a_n} \left(\frac{r^2}{2a_n^2} - \frac{3}{2} \right) & \text{per } r \leq a_n \end{cases} \quad (1)$$

Si calcoli l'effetto al primo ordine in teoria delle perturbazioni sui livelli e sugli autostati di H_0 con $n = 1, 2$ della perturbazione

$$\Delta_1 V \equiv V_1(r) - V_0(r) \quad (2)$$

In un modello realistico $a_n/a_B \ll 1$ (a_B raggio di Bohr): pertanto è sufficiente calcolare gli spostamenti dei livelli all'ordine più basso nel rapporto a_n/a_B . Si determini, in questa approssimazione, lo splitting $2\delta_1 = E_{2,0,0} - E_{2,1,0}$ del primo livello eccitato dell'idrogenoide (quello con $n = 2$). Si fornisca il valore numerico di $2\delta_1$ in elettronvolts per $Z = 10$ e $a_n = 3 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$.

Domanda 2

Il sistema della domanda 1 viene posto in un campo elettrico uniforme e costante $\vec{\mathcal{E}}_2$ diretto lungo l'asse delle z . L'intensità del campo elettrico $\vec{\mathcal{E}}_2$ è $\leq 10^5 \text{ volts/cm}$. Spiegare perché la teoria delle perturbazioni del primo ordine (caso degenere) è applicabile ai livelli con $n = 1$ ed $n = 2$. Determinare autovalori ed autovettori di questi livelli in questa approssimazione.

Domanda 3

Sul sistema della domanda 2 viene inviata al tempo $t = 0$ radiazione elettromagnetica di frequenza $\omega \approx \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$ (dove $E_{2,1}$ sono i livelli imperturbati di H_0) descritta dalla perturbazione dipendente dal tempo

$$V_3(t) = -e \vec{x} \cdot \vec{\mathcal{E}}_3(t) \quad \text{per } t \geq 0 \quad (3)$$

(campo elettrico uniforme dipendente dal tempo) dove

$$\vec{\mathcal{E}}_3(t) = \vec{\mathcal{E}}_\omega \cos \omega t \quad (4)$$

Si calcoli, al primo ordine in teoria delle perturbazioni, le probabilità che al tempo t l'elettrone sia transitato dallo stato fondamentale ad uno dei (due) livelli con $n = 2$ e $m = 0$, nel caso in cui:

- a) La radiazione si propaga lungo l'asse delle z .
- b) $\vec{\mathcal{E}}_\omega$ è parallelo all'asse delle z .

Nel caso b), si fornisca il valore numerico del rapporto tra le popolazioni dei due livelli con $n = 2$ ed $m = 0$ per $|\vec{\mathcal{E}}_2| = 10^4 \text{ volts/cm}$, $Z = 10$ e $a_n = 3 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$.

(*Suggerimenti:*

- 1) può essere utile ricordare le espressioni per le funzioni radiali dell'atomo di idrogeno ($Z = 1$): $R_{10}(\rho) = 2e^{-\rho}$, $R_{20}(\rho) = \frac{1-\rho/2}{\sqrt{2}} e^{-\rho/2}$ e $R_{21}(\rho) = \frac{\rho}{2\sqrt{6}} e^{-\rho/2}$, dove $\rho \equiv \frac{r}{a_B}$.
- 2) Nel caso non si riesca a completare il calcolo di $2\delta_1$ in funzione di a_n , (Domanda 1), si provi a rispondere alle domande 2 e 3 considerando $2\delta_1$ come un parametro dato.)

Prova Scritta del 15/06/2005: Soluzione

Domanda 1

Il campo elettrico per $r \leq R$ è quello prodotto da una sfera uniformemente carica di raggio r , con densità di carica $\frac{Z e r^3}{R^3}$, cioè

$$E(r) = -\frac{Z e r^3}{R^3} \frac{1}{r^2} \quad \text{per} \quad r \leq R \quad (5)$$

da cui deriviamo l'espressione per V_1 data nel testo. L'hamiltoniana del sistema si scrive dunque

$$H_1 = H_0 + (V_1 - V_0) \equiv H_0 + \Delta_1 V \quad (6)$$

con

$$\Delta_1 V = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad r \geq R \\ \frac{Z e^2}{r} + \frac{Z e^2}{R} \left(\frac{r^2}{2 R^2} - \frac{3}{2} \right) & \text{per} \quad r \leq R \end{cases} \quad (7)$$

dove $\Delta_1 V$ sarà trattata come una perturbazione di H_0 .

Calcoliamo l'effetto di $\Delta_1 V$ sui livelli con $n = 1$ ed $n = 2$ al primo ordine in teoria delle perturbazioni:

$$\begin{aligned} \Delta_1 E_{1,0,0} &= \langle 1, 0, 0 | \Delta_1 V | 1, 0, 0 \rangle = \\ &= \int_0^R dr r^2 |R_{10}(r)|^2 \left[\frac{Z e^2}{r} + \frac{Z e^2}{R} \left(\frac{r^2}{2 R^2} - \frac{3}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{4 Z^3}{a_B^3} \int_0^{\frac{Z R}{a_B}} d\rho e^{-2\rho} \left[\frac{a_B^2 e^2 \rho}{Z} + \frac{a_B^5 e^2 \rho^4}{2 Z^4 R^3} - \frac{3 e^2 a_B^3 \rho^2}{2 Z^2 R} \right] = \\ &= \frac{4 Z^2 e^2}{a_B} \int_0^{\frac{Z R}{a_B}} d\rho e^{-2\rho} \left[\rho + \frac{\rho^4}{2 \hat{R}^3} - \frac{3 \rho^2}{2 \hat{R}^2} \right] = \end{aligned} \quad (8)$$

dove abbiamo introdotto il parametro adimensionale

$$\hat{R} \equiv \frac{Z R}{a_B} \quad (9)$$

che misura la dimensione del nucleo rispetto a quella dell'orbita dell'elettrone. Nelle situazioni realistiche

$$\hat{R} \ll 1 \quad (10)$$

Pertanto è lecito espandere (8) all'ordine più basso in \hat{R} , usando l'approssimazione $e^{-2\rho} \approx 1$:

$$\Delta_1 E_{1,0,0} = \frac{Z^2 e^2}{a_B} \hat{R}^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{10} - \frac{1}{2} \right] + O(\hat{R}^3) \approx \frac{Z^2 e^2}{a_B} \frac{2 \hat{R}^2}{5} \quad (11)$$

Per il livello $n = 2$ abbiamo similmente

$$\begin{aligned}
\Delta_1 E_{2,0,0} &= \langle 2, 0, 0 | \Delta_1 V | 2, 0, 0 \rangle = \\
&= \int_0^R dr r^2 |R_{20}(r)|^2 \left[\frac{Z e^2}{r} + \frac{Z e^2}{R} \left(\frac{r^2}{2 R^2} - \frac{3}{2} \right) \right] = \\
&= \frac{Z^3}{2 a_B^3} \int_0^{\frac{ZR}{a_B}} d\rho e^{-\rho} \left(1 - \frac{\rho}{2} \right)^2 \left[\frac{a_B^2 e^2 \rho}{Z} + \frac{a_B^5 e^2 \rho^4}{2 Z^4 R^3} - \frac{3 e^2 a_B^3 \rho^2}{2 Z^2 R} \right] = \\
&= \frac{Z^2 e^2}{2 a_B} \int_0^{\frac{ZR}{a_B}} d\rho e^{-\rho} \left(1 - \frac{\rho}{2} \right)^2 \left[\rho + \frac{\rho^4}{2 \hat{R}^3} - \frac{3 \rho^2}{2 \hat{R}} \right] = \\
&\approx \frac{Z^2 e^2}{2 a_B} \hat{R}^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{10} - \frac{1}{2} \right] = \frac{Z^2 e^2}{a_B} \frac{\hat{R}^2}{20}
\end{aligned} \tag{12}$$

e

$$\begin{aligned}
\Delta_1 E_{2,1,m} &= \langle 2, 1, m | \Delta_1 V | 2, 1, m \rangle = \\
&= \int_0^R dr r^2 |R_{21}(r)|^2 \left[\frac{Z e^2}{r} + \frac{Z e^2}{R} \left(\frac{r^2}{2 R^2} - \frac{3}{2} \right) \right] = \\
&= \frac{Z^3}{24 a_B^3} \int_0^{\frac{ZR}{a_B}} d\rho e^{-\rho} \rho^2 \left[\frac{a_B^2 e^2 \rho}{Z} + \frac{a_B^5 e^2 \rho^4}{2 Z^4 R^3} - \frac{3 e^2 a_B^3 \rho^2}{2 Z^2 R} \right] = \\
&= \frac{Z^2 e^2}{24 a_B} \int_0^{\frac{ZR}{a_B}} d\rho e^{-\rho} \left[\rho^3 + \frac{\rho^6}{2 \hat{R}^3} - \frac{3 \rho^4}{2 \hat{R}} \right] = \\
&\approx \frac{Z^2 e^2}{24 a_B} \hat{R}^4 \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{14} - \frac{3}{10} \right] = \\
&= \frac{Z^2 e^2}{a_B} \frac{\hat{R}^4}{1120}
\end{aligned} \tag{13}$$

Da cui

$$2 \delta_1 = \Delta_1 E_{2,0,0} - \Delta_1 E_{2,1,m} \approx \Delta_1 E_{2,0,0} \approx \frac{Z^2 e^2}{a_B} \frac{\hat{R}^2}{20} \tag{14}$$

Domanda 2

$$H_2 = H_1 + \Delta_2 V \tag{15}$$

dove

$$\Delta_2 V = -e \hat{z} \mathcal{E}_2 \tag{16}$$

La condizione di applicabilità della teoria delle perturbazioni (degenere) è

$$\frac{e a_B \mathcal{E}_2}{Z} \ll \frac{Z^2 e^2}{a_B} \quad (17)$$

cioè

$$\mathcal{E}_2 \ll 5.4 Z^3 10^9 \frac{volt}{cm} \quad (18)$$

che è soddisfatta nel caso indicato nel testo. Per $\mathcal{E} = 10^4 \text{ volts/cm}$ abbiamo

$$\frac{e a_B \mathcal{E}_2}{Z} \approx 0.5 10^{-5} \text{ ev} \sim \Delta_1 V \quad (19)$$

In queste condizioni è legittimo applicare la teoria delle perturbazioni degenere del primo ordine separatamente allo stato fondamentale ed ai 4 stati intorno ad $E_2^{(0)}$.

Sappiamo che

$$\langle 1, 0, 0 | \Delta_2 V | 1, 0, 0 \rangle = \langle 2, l, m | \Delta_2 V | 2, l, m \rangle = \langle 2, 0, 0 | \Delta_2 V | 2, 1, \pm 1 \rangle = 0 \quad (20)$$

per le note regole di selezione per \hat{z} ($\Delta m = 0$ e $\Delta l = 1$). Inoltre

$$\langle 2, 0, 0 | \Delta_2 V | 2, 1, 0 \rangle = -\frac{3 e a_B \mathcal{E}}{Z} \equiv \delta_2 \quad (21)$$

(Cfr. analisi effetto Stark “usuale”, senza tenere conto della dimensione finita del nucleo). Quindi gli unici stati che vengono mescolati dalla perturbazione sono $|2, 0, 0\rangle$ e $|2, 1, 0\rangle$. Gli autostati di H_2 sono pertanto

$$|2, \pm\rangle = x_{\pm} |2, 0, 0\rangle + y_{\pm} |2, 1, 0\rangle \quad (22)$$

dove

$$\begin{pmatrix} E_{2,1,0} + 2\delta_1 & \delta_2 \\ \delta_2 & E_{2,1,0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\pm} \\ y_{\pm} \end{pmatrix} = E_2^{(\pm)} \begin{pmatrix} x_{\pm} \\ y_{\pm} \end{pmatrix} \quad (23)$$

Da cui

$$E_2^{(\pm)} = E_{2,1,0} + \delta_1 \pm \sqrt{\delta_1^2 + |\delta_2|^2} \quad (24)$$

Dunque

$$\frac{y_{\pm}^2}{x_{\pm}^2} = \frac{(\sqrt{1 + \eta^2} \mp 1)^2}{\eta^2} \quad (25)$$

dove abbiamo posto

$$\eta \equiv \frac{|\delta_2|}{\delta_1} \quad (26)$$

La condizione di normalizzazione:

$$y_{\pm}^2 + x_{\pm}^2 = 1 = x_{\pm}^2 \left(1 + \frac{(\sqrt{1+\eta^2} \mp 1)^2}{\eta^2} \right) = x_{\pm}^2 \frac{2\sqrt{1+\eta^2}(\sqrt{1+\eta^2} \mp 1)}{\eta^2} \quad (27)$$

da cui

$$x_{\pm}^2 = \frac{\sqrt{1+\eta^2} \pm 1}{2\sqrt{1+\eta^2}} \quad y_{\pm}^2 = \frac{\sqrt{1+\eta^2} \mp 1}{2\sqrt{1+\eta^2}} \quad (28)$$

Lo splitting dei livelli E_2^{\pm} è

$$\Delta E_2^{\pm} \equiv E_2^+ - E_2^- = 2\sqrt{\delta_1^2 + |\delta_2|^2} \quad (29)$$

Domanda 3

$$H_3 = H_2 + \Delta_3 V(t) \quad (30)$$

con

$$\Delta_3 V(t) = -e \vec{x} \cdot \vec{\mathcal{E}}_3(t) \quad (31)$$

a) Se la radiazione si propaga lungo l'asse delle z (quello definito dal campo elettrico statico) allora sono possibili solo transizioni con $\Delta m = \pm 1$ in quanto

$$\vec{x} \cdot \vec{\mathcal{E}}_3(t) = (x \pm iy) \mathcal{E}_3^{(\pm)}(t) \quad (32)$$

In questo caso verranno popolati solo gli stati $|2, 1, \pm 1\rangle$ e le probabilità di transizione indicate nel testo sono nulle.

b) Supponiamo invece che la radiazione si propaghi in direzione ortogonale al campo elettrico statico e che

$$\Delta_3 V(t) = -e z \mathcal{E}_3(t) = -\frac{e z \mathcal{E}_3}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \equiv V_3 (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (33)$$

Siamo interessati alle transizioni $n = 1 \rightarrow n = 2$. L'unico elemento di matrice di V_3 non nullo per questo tipo di transizioni è

$$\langle 2, 1, 0 | V_3 | 1, 0, 0 \rangle = \frac{\xi e a_B \mathcal{E}_3}{2 Z} \equiv \delta_3 \quad (34)$$

dove il fattore numerico ξ è dato dall'integrale

$$\begin{aligned}\xi &= 2\pi \int_{-1}^1 d\cos\theta \cos\theta Y_{00} Y_{10}^* \int_0^\infty d\rho e^{-\frac{3\rho}{2}} \frac{\rho^4}{\sqrt{6}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{256}{81} = \frac{128\sqrt{2}}{243}\end{aligned}\quad (35)$$

Pertanto

$$\langle 2, \pm | V_3 | 1, 0, 0 \rangle = \frac{3 e a_B \mathcal{E}_3}{2 Z} y_\pm \quad (36)$$

Sia dunque

$$\omega_{20}^\pm \equiv \frac{E_2^{(\pm)} - E_{1,0,0}}{\hbar} \quad (37)$$

La probabilità di transizione per unità di tempo per il processo $|1, 0, 0\rangle \rightarrow |2, \pm\rangle$ al primo ordine in teoria delle perturbazioni è

$$P_{|1,0,0\rangle \rightarrow |2,\pm\rangle}(t) = \frac{\delta_3^2 y_\pm^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2 \frac{(\omega_{20}^\pm - \omega)t}{2}}{\frac{(\omega_{20}^\pm - \omega)^2}{4}} \approx \frac{\delta_3^2 y_\pm^2}{\hbar^2} t^2 \quad (38)$$

per $\omega \approx \omega_{20}^\pm$ e $t \ll 1/(\omega - \omega_{20}^\pm)$. In queste condizione il rapporto tra le popolazioni dei due livelli è dato da

$$\begin{aligned}\frac{P_{|1,0,0\rangle \rightarrow |2,+ \rangle}(t)}{P_{|1,0,0\rangle \rightarrow |2,- \rangle}(t)} &= \frac{y_+^2}{y_-^2} \frac{\sin^2 \frac{(\omega_{20}^+ - \omega)t}{2}}{\sin^2 \frac{(\omega_{20}^- - \omega)t}{2}} \frac{(\omega_{20}^- - \omega)^2}{(\omega_{20}^+ - \omega)^2} \approx \\ &\approx \frac{y_+^2}{y_-^2} = \left[\frac{1 - \sqrt{1 + \eta^2}}{\eta} \right]^2\end{aligned}\quad (39)$$

dove

$$\eta = \frac{|\delta_2|}{\delta_1} \approx \frac{\frac{3 e a_B \mathcal{E}_2}{Z}}{\frac{Z^2 e^2 \hat{R}^2}{a_B}} = \frac{120}{Z \hat{R}^2} \frac{e a_B \mathcal{E}_2}{\frac{Z^2 e^2}{a_B}} \quad (40)$$

Per $\mathcal{E} = 10^4$ volts/cm, $Z = 10$, $a_n = 3 \cdot 10^{-13}$ cm, abbiamo $\hat{R} = 6 \cdot 10^{-4}$ e

$$\begin{aligned}2\delta_1 &\approx \frac{Z^2 e^2 \hat{R}^2}{a_B} \frac{1}{20} \approx 2.7 \cdot 10^3 \cdot 1.8 \cdot 10^{-8} \text{ ev} \approx 4.86 \cdot 10^{-5} \text{ ev} \\ 2\delta_2 &= \frac{6 e a_B \mathcal{E}_2}{Z} \approx 3 \cdot 10^{-8} \cdot 10^4 \cdot 10^{-1} \text{ ev} \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ ev} \\ \eta &= \frac{2\delta_2}{2\delta_1} \approx 0.62\end{aligned}\quad (41)$$

e per questo valore di η ,

$$\frac{P_{|1,0,0\rangle \rightarrow |2,+ \rangle}(t)}{P_{|1,0,0\rangle \rightarrow |2,- \rangle}(t)} \approx 0.08 \quad (42)$$

quindi l'intensità di una delle due righe di assorbimento è circa 12 volte quella dell'altra. La differenza in frequenza delle due righe è

$$\Delta E_2^\pm \approx 5.7 \cdot 10^{-5} \text{ eV} \quad (43)$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 29/06/2005

Problema

Un elettrone è soggetto al potenziale di una buca tridimensionale

$$V(r) = -V_0 \quad \text{per } r \leq a \quad \text{e} \quad V(r) = 0 \quad \text{per } r \geq a \quad (44)$$

con $V_0 > 0$. Al tempo $t = 0$ l'elettrone si trova nello stato legato $1p$, cioè nello stato legato con momento angolare $l = 1$ e con energia $-E_0 < 0$ più bassa. Al tempo $t = 0$ viene accesa la perturbazione

$$V_1(t) = -\frac{e \mathcal{E}_\omega z}{2} \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right) \quad \text{per } t \geq 0 \quad (45)$$

Domanda 1

Per quale valore della proiezione del momento angolare m lungo l'asse delle z dello stato iniziale la probabilità di transizione in uno stato dello spettro continuo con $l = 0$ è diversa da zero?

Domanda 2

Si supponga che la buca sia molto profonda, cioè si consideri il caso

$$v \equiv \frac{2 m a^2 V_0}{\hbar^2} \gg 1 \quad (46)$$

Calcolare all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni la probabilità di transizione per unità di tempo dallo stato $1p$ ad uno stato del continuo con energia $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = -E_0 + \hbar\omega > 0$ e momento angolare $l = 0$.

Domanda 3

Determinare il limite della probabilità di transizione del punto 2 nei casi

a) $a k \ll v$

b) $a k \gg v$

Suggerimenti:

(i) Si indichi con \bar{X} la soluzione dell'equazione $\bar{X} \cot \bar{X} = 1$ compresa tra π e 2π . $\bar{X} \approx 4.49$

(ii) Può essere utile ricordare i seguenti integrali elementari:

$$\int_0^X dx \left(\frac{2 \cos x \sin x}{x} - \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) = \frac{\sin^2 X}{X}$$
$$\int_0^X dx \sin \alpha x (x \cos x - \sin x) = \frac{1}{(\alpha^2 - 1)^2} \left[((\alpha^2 - 3) \sin X + \right. \\ \left. - (\alpha^2 - 1) X \cos X) \alpha \cos \alpha X + (2 \cos X - (\alpha^2 - 1) X \sin X) \sin \alpha X \right]$$

Prova Scritta del 29/06/2005: Soluzione

(a) Stato legato con $l = 1$

Sia $\chi_{E_0,1}(r) = r R_{E_0,1}$ la funzione d'onda radiale di energia $-E_0$ con $E_0 > 0$ e $l = 1$. Introduciamo i parametri adimensionali

$$X \equiv \sqrt{\frac{2 m a^2 (V_0 - E_0)}{\hbar^2}} \quad Y \equiv \sqrt{\frac{2 m a^2 E_0}{\hbar^2}} \quad (47)$$

e corrispondentemente le coordinate radiali riscalate

$$x \equiv X \frac{r}{a} \quad y \equiv Y \frac{r}{a} \quad (48)$$

Allora

$$\chi_{E_0,1}(r) = \begin{cases} N_1 j_1(x) = N_1 \left(\cos x - \frac{\sin x}{x} \right) & \text{per } r \leq a \\ N_2 h_1(y) = N_2 e^{-y} \frac{1+y}{y} & \text{per } r \geq a \end{cases} \quad (49)$$

dove $j_1(x)$ e $h_1(y)$ sono legate alle funzioni di Bessel (sferiche)

$$\begin{aligned} j_l(x) &= x^{l+1} \left(\frac{d}{x dx} \right)^l \frac{\sin x}{x} & n_l(x) &= x^{l+1} \left(\frac{d}{x dx} \right)^l \frac{\cos x}{x} \\ h_l(x) &= -x^{l+1} \left(\frac{d}{x dx} \right)^l \frac{e^{-x}}{x} \end{aligned} \quad (50)$$

L'equazione che esprime la continuità della derivata logaritmica a $r = a$ determina gli autovalori dell'energia:

$$\frac{X \cot X + (X^2 - 1)}{1 - X \cot X} = -\frac{1 + Y + Y^2}{1 + Y} \quad (51)$$

con

$$X^2 + Y^2 = \frac{2 m a^2 V_0}{\hbar^2} \equiv v \quad (52)$$

La (51) dà

$$(1 - X \cot X) Y^2 + X^2 Y + X^2 = 0 \quad (53)$$

Sostituendo in questa equazione la (52), otteniamo che gli autovalori con $l = 1$ sono dati dall'intersezione delle curve

$$\begin{aligned} Y &= \frac{X \cot X - 1}{X^2} v - X \cot X \\ Y &= \sqrt{v - X^2} \end{aligned} \quad (54)$$

con le condizioni

$$0 \leq X \leq \sqrt{v} \quad 0 \leq Y \leq \sqrt{v} \quad (55)$$

Le due curve ammettono intersezioni nella regione (55) per

$$v \geq \pi^2 \quad (56)$$

Le curve hanno n intersezioni (X_i, Y_i) con $i = 1, \dots, n$ e

$$i \pi \leq X_i \leq (i + 1) \pi \quad (57)$$

dove n è determinato dalla condizione

$$(n \pi)^2 \leq v \leq (n + 1)^2 \pi^2 \quad (58)$$

Determiniamo X_1 corrispondente all'autovalore più basso nel limite di buca molto profonda

$$v \gg 1 \quad (59)$$

In questo caso $X_1 \ll Y_1$, pertanto

$$Y_1 \approx \sqrt{v} - \frac{X_1^2}{2\sqrt{v}} \quad (60)$$

Dunque

$$\sqrt{v} \approx v \frac{X_1 \cot X_1 - 1}{X_1^2} \quad (61)$$

cioè

$$X_1 \cot X_1 - 1 \approx \frac{X_1^2}{\sqrt{v}} \quad (62)$$

Posto

$$\bar{X} \cot \bar{X} = 1 \quad \pi < \bar{X} < 2\pi \quad (63)$$

abbiamo in definitiva

$$X_1 \approx \bar{X} - \frac{\bar{X}}{\sqrt{v}} \quad Y_1 \approx \sqrt{v} - \frac{\bar{X}^2}{2\sqrt{v}} \quad (64)$$

Il valore numerico di \bar{X} è

$$\bar{X} \approx 4.49 \quad (65)$$

In conclusione per

$$v \gg \bar{X}^2 \approx 20 \quad (66)$$

abbiamo

$$V_0 - E_0 \approx \frac{\hbar^2}{2m a^2} 20 \quad (67)$$

Calcoliamo ora il rapporto dei fattori di normalizzazione $N_{1,2}$ per lo stato con $n = 1$, nel limite (59)

$$\begin{aligned} \frac{N_1}{N_2} &= e^{-Y_1} \frac{Y_1 + 1}{Y_1} \frac{X_1}{\sin X_1} \frac{1}{(X_1 \cot X_1 - 1)} \approx e^{-\sqrt{v}} \frac{\bar{X}}{\sin \bar{X}} \frac{\sqrt{v}}{\bar{X}^2} \approx \\ &\approx e^{-\sqrt{v}} \frac{\sqrt{v}}{\bar{X} \sin \bar{X}} \end{aligned} \quad (68)$$

Normalizziamo inoltre la funzione d'onda dello stato legato ad uno. Poiché

$$\begin{aligned} N_1^2 \int_0^a dr j_1(x)^2 &= \frac{a N_1^2}{X_1} \int_0^{X_1} dx \left(\cos^2 x - \frac{2 \cos x \sin x}{x} + \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) = \\ &= \frac{a N_1^2}{2 X_1} \left(X_1 + \cos X_1 \sin X_1 - \frac{2 \sin^2 X_1}{X_1} \right) \approx \\ &= \frac{a N_1^2}{2} \left(1 + \cos^2 \bar{X} - 2 \cos^2 \bar{X} \right) = \frac{a N_1^2 \sin^2 \bar{X}}{2} \end{aligned} \quad (69)$$

e

$$\begin{aligned} N_2^2 \int_a^\infty dr h_1(y)^2 &= \frac{a N_2^2}{Y_1} \int_{Y_1}^\infty dy e^{-2y} \frac{1 + 2y + y^2}{y^2} = \\ &= \frac{a N_2^2}{Y_1} e^{-2Y_1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{Y_1} \right) \approx \frac{a N_2^2}{2 \sqrt{v}} e^{-2\sqrt{v}} \approx \frac{a N_1^2}{2 v^{\frac{3}{2}}} \bar{X}^2 \sin^2 \bar{X} \end{aligned} \quad (70)$$

abbiamo che solo la regione interna alla buca contribuisce significativamente alla norma della funzione d'onda

$$1 = \frac{a N_1^2 \sin^2 \bar{X}}{2} + \frac{a N_1^2}{2} v^{-\frac{3}{2}} \bar{X}^2 \sin^2 \bar{X} \approx \frac{a N_1^2 \sin^2 \bar{X}}{2} \quad (71)$$

cioè

$$N_1^2 \approx \frac{2}{a \sin^2 \bar{X}} \quad N_2^2 \approx \frac{2 \bar{X}^2}{a v} e^{2\sqrt{v}} \quad (72)$$

(b) Stati del continuo con $l = 0$

Sia $\chi_{E,0}(r) = r R_{E,0}$ la funzione d'onda radiale di energia E con $E > 0$ e $l = 0$. Introduciamo i parametri adimensionali

$$\begin{aligned} X' &\equiv \sqrt{\frac{2m a^2 (V_0 + E)}{\hbar^2}} = \sqrt{v + (Y')^2} \\ Y' &\equiv \sqrt{\frac{2m a^2 E}{\hbar^2}} = a k \end{aligned} \quad (73)$$

e corrispondentemente

$$x' \equiv X' \frac{r}{a} \quad y' \equiv Y' \frac{r}{a} \quad (74)$$

Allora

$$\chi_{E,0}(r) = \begin{cases} N'_1 j_0(x') = N'_1 \sin x' & \text{per } r \leq a \\ \cos \delta_1 j_0(y') + \sin \delta_1 n_0(y') = \sin(y' + \delta_1) & \text{per } r \geq a \end{cases} \quad (75)$$

La condizione di continuità della derivata logaritmica dà

$$X' \cot X' = Y' \cot(Y' + \delta_1) \quad (76)$$

che è l'equazione che determina δ_1 in funzione di E . L'equazione di continuità della funzione d'onda dà pertanto

$$N'_1 = \frac{\sin(Y' + \delta_1)}{\sin X'} \quad (77)$$

per cui

$$(N'_1)^2 = \frac{(Y')^2}{(Y')^2 \sin^2 X' + (X')^2 \cos^2 X'} \quad (78)$$

La normalizzazione degli stati $\chi_{E,0}$

$$(\chi_{E',0}, \chi_{E,0}) = \rho(E) \delta(E - E') \quad (79)$$

è determinata dalla condizione

$$\begin{aligned} (\chi_{E',0}, \chi_{E,0}) &= \frac{1}{4} \int_0^\infty dr e^{i(k-k')r} + \frac{1}{4} \int_0^\infty dr e^{-i(k-k')r} = \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty dr e^{i(k-k')r} = \frac{\pi}{2} \delta(k - k') = \frac{\hbar^2 k \pi}{2m} \delta(E - E') \end{aligned} \quad (80)$$

e dunque

$$\rho(E) = \frac{\hbar^2 k \pi}{2m} \quad (81)$$

(c) L'elemento di matrice della perturbazione

La perturbazione commuta con L_z e dunque l'ampiezza di transizione è diversa da zero solo se lo stato iniziale ha $m = 0$

$$\langle E, 0, 0 | z | E_0, 1, 0 \rangle = (\chi_{E,0}, r \chi_{E_0,1}) (Y_{00}, \cos \theta Y_{10}) \quad (82)$$

Abbiamo

$$(Y_{00}, \cos \theta Y_{10}) = 2\pi \int_{-1}^1 d \cos \theta \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \cos^2 \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (83)$$

Nel limite $v \gg 1$ all'elemento di matrice $(\chi_{E,0}, r \chi_{E_0,1})$ contribuisce solo la regione con $r \leq a$, a causa del fattore $1/\sqrt{v}$ nel coefficiente N_2 . Pertanto

$$\begin{aligned} (\chi_{E,0}, r \chi_{E_0,1}) &\approx \frac{a^2 N_1 N'_1}{\bar{X}^2} \int_0^{\bar{X}} dx \sin \frac{x X'}{\bar{X}} (x \cos x - \sin x) \approx \\ &\approx a^2 \bar{X}^2 N_1 N'_1 \times \\ &\quad \times \frac{\cos \bar{X} \sin X'(2 - (X')^2 + \bar{X}^2) - 2 \frac{X'}{\bar{X}} \sin \bar{X} \cos X'}{(\bar{X}^2 - (X')^2)^2} \end{aligned} \quad (84)$$

dove abbiamo utilizzato la formula per l'integrale ricordata nel testo. Dunque

$$\begin{aligned} \frac{2\pi \left| \langle E, 0, 0 | V_\omega | E_0, 1, 0 \rangle \right|^2}{\hbar \rho(E)} &= \frac{2m e^2 \mathcal{E}_\omega^2 a^4}{3 \hbar^3} \frac{\bar{X}^2 Y'}{(Y')^2 \sin^2 X' + (X')^2 \cos^2 X'} \times \\ &\times \left[\frac{\sin X'(2 - (X')^2 + \bar{X}^2) - 2 X' \cos X'}{(\bar{X}^2 - (X')^2)^2} \right]^2 \end{aligned} \quad (85)$$

Tenendo conto che stiamo considerando il caso di buca profonda

$$X' \geq \sqrt{v} \gg \bar{X} \quad (86)$$

otteniamo la formula finale per la probabilità di transizione per unità di tempo dallo stato $1p$ della buca di potenziale molto profonda ad uno stato del continuo con $l = 0$ ed energia E :

$$\begin{aligned} \frac{2\pi \left| \langle E, 0, 0 | V_\omega | E_0, 1, 0 \rangle \right|^2}{\hbar \rho(E)} &\approx \frac{16\pi m \alpha I_\omega a^4}{3 \hbar^2} \times \\ &\times \frac{\bar{X}^2 Y'}{(Y')^2 \sin^2 X' + (X')^2 \cos^2 X'} \frac{\sin^2 X'}{(X')^4} \end{aligned} \quad (87)$$

dove abbiamo introdotto l'intensità di energia della radiazione incidente

$$I_\omega = \frac{c \mathcal{E}_\omega^2}{8\pi} \quad (88)$$

e la costante di struttura fine $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$.

Il limite di bassa energia della particella emessa $ak \ll \sqrt{v}$ corrisponde alla situazione in cui

$$Y' \ll X' \approx \sqrt{v} \quad (89)$$

In questo caso

$$\frac{2\pi \left| \langle E, 0, 0 | V_\omega | E_0, 1, 0 \rangle \right|^2}{\hbar \rho(E)} \approx \frac{16\pi m \alpha I_\omega^2 a^4 \bar{X}^2}{3\hbar^2} \frac{ak \tan^2 \sqrt{v}}{v^3} \quad (90)$$

Il limite di alta energia ($ak \gg \sqrt{v}$) corrisponde invece alla situazione in cui

$$Y' \approx X' \quad (91)$$

In questo caso la formula per la probabilità di transizione per unità di tempo si riduce a

$$\frac{2\pi \left| \langle E, 0, 0 | V_\omega | E_0, 1, 0 \rangle \right|^2}{\hbar \rho(E)} \approx \frac{16\pi m \alpha I_\omega^2 a^4 \bar{X}^2}{3\hbar^2} \frac{\sin^2 ak}{(ak)^5} \quad (92)$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 21/07/2005

Problema

Una particella in tre dimensioni si muove nel seguente potenziale centrale $V(r)$

$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} m \omega^2 (r^2 - R^2) & \text{per } r \leq a \\ 0 & \text{per } r > a \end{cases} \quad (93)$$

Domanda 1

Calcolare in approssimazione di Born l'ampiezza di diffusione $f_{Born}(\theta)$ per una particella di impulso k .

(*Suggerimento:* si esprima il risultato in termini di k , dell'angolo di diffusione θ , delle lunghezze a , R e $\lambda \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ che caratterizzano il potenziale.)

Domanda 2

Si calcoli la sezione d'urto integrata in approssimazione di Born nel limite di piccoli impulsi ($a k \ll 1$).

Domanda 3

Si consideri il caso *speciale* in cui $R^2 = 3\lambda^2$. Si dimostri che in questo caso uno stato del continuo con $l = 0$ ed energia piccola ($a k \ll 1$) è descritto all'interno della buca dalla funzione d'onda

$$\chi(r) = r e^{-\frac{r^2}{2\lambda^2}} \quad (94)$$

dove, come al solito, $\chi(r) = r R_{k0}(r)$. Si utilizzi questo risultato per calcolare in questo caso la sezione d'urto di bassa energia con il metodo delle ampiezze parziali. Si confronti il risultato ottenuto con quello perturbativo.

Domanda 4

Prendendo sempre $R^2 = 3\lambda^2$, si supponga che la particella sia un elettrone, di energia $E = 3.4 \text{ eV}$ e la buca abbia un raggio $a = 10^{-10} \text{ cm}$. Per ciascuna delle seguenti situazioni dire se sono applicabili l'approssimazione di Born e/o quella di bassa energia :

a) $\frac{\omega}{2\pi} = 10^{10} \text{ Hz}$; b) $\frac{\omega}{2\pi} = 10^{20} \text{ Hz}$; c) $\frac{\omega}{2\pi} = 1.8 \cdot 10^{19} \text{ Hz}$

Valutate la sezione d'urto nei tre casi nell'approssimazione che considerate migliore.

Prova Scritta del 21/07/2005: Soluzione

Domanda 1

Posto

$$q = 2k \sin \frac{\theta}{2} \quad (95)$$

abbiamo

$$\begin{aligned} f_{Born}(\theta) &= -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^a dr r V(r) \sin q r = \\ &= -\frac{\omega^2 m^2}{\hbar^2 q^5} \int_0^{aq} d\rho (\rho^3 - \rho R^2 q^2) \sin \rho = \\ &= -\frac{\omega^2 m^2}{\hbar^2 q^5} \int_0^x d\rho (\rho^3 - \rho r^2 x^2) \sin \rho \end{aligned} \quad (96)$$

dove abbiamo introdotto i parametri adimensionali

$$r \equiv \frac{R}{a} \quad x \equiv a q \quad (97)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_0^x d\rho \rho \sin \rho &= \sin x - x \cos x \\ \int_0^x d\rho \rho^3 \sin \rho &= (3x^2 - 6) \sin x + (6x - x^3) \cos x \end{aligned} \quad (98)$$

da cui

$$\begin{aligned} f_{Born}(\theta) &= -a \frac{a^4}{\lambda^4} \frac{[(3 - r^2)x^2 - 6] \sin x + [(r^2 - 1)x^2 + 6] x \cos x}{x^5} = \\ &= -a \frac{a^4}{\lambda^4} \left(\frac{1}{5} - \frac{r^2}{3} \right) + O(x^2) \end{aligned} \quad (99)$$

Domanda 2

Tenendo conto della relazione

$$x dx = (ak)^2 \sin \theta d\theta \quad (100)$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \sigma_{Born} &= \frac{2\pi}{(ak)^2} a^2 \frac{a^8}{\lambda^8} \left(\frac{1}{5} - \frac{r^2}{3} \right)^2 \int_0^{2ak} dx x (1 + O(x^2)) = \\ &= 4\pi a^2 \frac{a^8}{\lambda^8} \left(\frac{1}{5} - \frac{r^2}{3} \right)^2 + O((ak)^2) \end{aligned} \quad (101)$$

Domanda 3

Per $R^2 = 3\lambda^2$, il potenziale all'interno della buca si scrive

$$V(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 - \frac{3}{2} \hbar \omega \quad (102)$$

La funzione d'onda $\chi(r)$ è la funzione d'onda per lo stato eccitato con $n = 1$ di un oscillatore armonico con potenziale $\frac{1}{2} m \omega^2 r^2$, la cui energia è $\frac{3}{2} \hbar \omega$. Pertanto la $\chi(r)$ soddisfa l'equazione d'onda con potenziale $V(r)$ ed energia $E = 0$ all'interno della buca:

$$\begin{aligned} \chi'(r) &= \left(1 - \frac{r^2}{\lambda^2}\right) e^{-\frac{r^2}{2\lambda^2}} \\ \chi''(r) &= \left(-3\frac{r}{\lambda^2} + \frac{r^3}{\lambda^4}\right) e^{-\frac{r^2}{2\lambda^2}} \\ \frac{\chi''(r)}{\chi(r)} &= -\frac{3}{\lambda^2} + \frac{r^2}{\lambda^4} = \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \end{aligned} \quad (103)$$

Inoltre

$$\chi(0) = 0 \quad (104)$$

come richiesto dalla condizioni al contorno per $\chi(r) = r R_{k0}(r)$. Dunque $\chi(r)$ è la funzione d'onda per $E \approx 0$ all'interno della buca. All'esterno della buca abbiamo come al solito

$$\chi(r) = N \sin(kr + \delta_0(k)) \quad (105)$$

Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} \frac{r \chi'(r)}{\chi(r)} \Big|_{r \rightarrow a^-} &= 1 - \frac{a^2}{\lambda^2} + \beta_0 (ak)^2 + O((ak)^2) \\ \frac{r \chi'(r)}{\chi(r)} \Big|_{r \rightarrow a^+} &= ak \cot(ka + \delta_0) \end{aligned} \quad (106)$$

dove il coefficiente β_0 è determinato dalla formula generale

$$\beta_0 = -\frac{1}{a} \frac{\int_0^a dr r^2 \chi^2(r)}{\chi^2(a)} \quad (107)$$

Le condizioni di continuità danno pertanto

$$\begin{aligned} ak \cot \delta_0 &= \frac{\left(1 - \frac{a^2}{\lambda^2}\right) \cot ak + ak}{\cot ak - \frac{1 - \frac{a^2}{\lambda^2}}{ak}} = \\ &= \frac{\lambda^2}{a^2} - 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda^4}{a^4} + (1 + 3\beta_0) \frac{\lambda^2}{a^2} + 1 \right) (ak)^2 + O((ak)^4) \end{aligned} \quad (108)$$

L'ampiezza di diffusione parziale con $l = 0$ a bassa energia è dunque

$$f_0 \approx \frac{a}{\frac{\lambda^2}{a^2} - 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{(1+3\beta_0)\lambda^4}{a^4} + \frac{\lambda^2}{a^2} + 1 \right) (a k)^2 - i a k} \quad (109)$$

Lontano dalla “risonanza” (cioè lontano da $\lambda \approx a$) la sezione d'urto è controllata dalla lunghezza di diffusione

$$\sigma_0 \approx \frac{4 \pi a^2}{\left(\frac{\lambda^2}{a^2} - 1\right)^2} \quad (110)$$

Nella regione $\lambda \approx a$ dobbiamo tener conto del termine di raggio effettivo. Per $\lambda = a$ abbiamo

$$\beta_0^{ris} \equiv -\frac{\int_0^1 dx x^2 e^{-x^2}}{e^{-1}} \approx -0.52 \quad (111)$$

Pertanto per $\lambda \approx a$ abbiamo

$$\begin{aligned} \sigma_0 &\approx \frac{4 \pi a^2}{\left[\frac{\lambda^2}{a^2} - 1 + (1 + \beta_0^{ris})(a k)^2 \right]^2 + (a k)^2} \approx \\ &\approx \frac{4 \pi a^2}{\left(\frac{\lambda^2}{a^2} - 1\right)^2 + \left[(2\left(\frac{\lambda^2}{a^2} - 1\right)(1 + \beta_0^{ris}) + 1) (a k)^2 \right]} \approx \\ &\approx \frac{4 \pi a^2}{\left(\frac{\lambda^2}{a^2} - 1\right)^2 + (a k)^2} \end{aligned} \quad (112)$$

Il limite perturbativo corrisponde alla situazione $\frac{\lambda}{a} \gg 1$: in questo limite la sezione d'urto parziale diventa

$$\sigma_0 \approx 4 \pi a^2 \frac{a^4}{\lambda^4} \quad (113)$$

D'altra parte il risultato perturbativo, nel limite di bassa energia e per $R^2 = 3\lambda^2$ diventa

$$\sigma_{Born} = 4 \pi a^2 \frac{a^8}{\lambda^8} \left(\frac{1}{5} - \frac{\lambda^2}{a^2} \right)^2 \approx 4 \pi a^2 \frac{a^4}{\lambda^4} \quad (114)$$

in accordo con (113).

Domanda 4

Determiniamo k e λ nei casi indicati.

$$k = \frac{1}{2 a_{Bohr}} \sqrt{\frac{8 E}{E_0}} \quad (115)$$

dove $a_{Bohr} \approx 0.53 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ e $E_0/8 \approx 27.2/8 \text{ ev} = 3.4 \text{ ev}$. Dunque

$$k = 0.94 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-1} \quad \text{per } E \approx 3.4 \text{ ev} \quad (116)$$

Corrispondentemente

$$a k = 0.94 \cdot 10^{-2} \quad (117)$$

Pertanto siamo nel limite di bassa energia e possiamo applicare il metodo delle ampiezze parziali. Per quanto riguarda λ

$$\lambda^2 = \frac{h}{m c} \frac{c}{\nu} \frac{1}{(2 \pi)^2} \approx 2.4 \cdot 10^{-10} \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 2.5 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\nu(\text{Hz})} \text{ cm}^2 = \frac{0.182}{\nu(\text{Hz})} \text{ cm}^2 \quad (118)$$

Pertanto

$$\lambda \approx 0.43 \cdot 10^{-5} \text{ cm} \Rightarrow \frac{\lambda}{a} = 0.43 \cdot 10^5 \quad \text{caso a)}$$

$$\lambda \approx 0.43 \cdot 10^{-10} \text{ cm} \Rightarrow \frac{\lambda}{a} = 0.43 \quad \text{caso b)} \quad (119)$$

$$\lambda \approx 1.006 \cdot 10^{-10} \text{ cm} \Rightarrow \frac{\lambda}{a} = 1.006 \quad \text{caso c)} \quad (120)$$

In conclusione possiamo usare il risultato di Born nel caso a) ma non in quelli b) e c). Nel caso c) dobbiamo utilizzare la formula che tiene conto del raggio effettivo in quanto siamo vicini alla risonanza.

$$\begin{aligned} \sigma_a &\approx 4 \pi a^2 \frac{a^4}{\lambda^4} \approx 3.7 \cdot 10^{-38} \text{ cm}^2 \\ \sigma_b &\approx 1.9 \cdot 10^{-19} \text{ cm}^2 \\ \sigma_c &\approx 5.4 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2 \end{aligned} \quad (121)$$

Si noti che se non avessimo incluso la correzione di raggio effettivo avremmo ottenuto per σ_c il valore più grande 8.710^{-16} cm^2 .

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 07/09/2005

Problema

Una particella in tre dimensioni si muove nel seguente potenziale centrale $V(r)$

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\hbar^2}{2mL^2} \left[1 - \frac{4L}{r} \right] & \text{per } r \leq a \\ 0 & \text{per } r > a \end{cases} \quad (122)$$

Domanda 1

Calcolare in approssimazione di Born l'ampiezza di diffusione $f_{Born}(\theta)$ per una particella di impulso k .

Domanda 2

Si dimostri che la funzione

$$\chi(r) = r R_{kl}(r) = r^2 e^{-\frac{r}{L}} \quad (123)$$

coincide per $r \leq a$ con la funzione d'onda radiale di un autostato con energia e momento angolare determinati. Si determini il momento angolare l e l'energia $E \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ di questa soluzione. Si utilizzi questo risultato per calcolare l'ampiezza di diffusione parziale f_l di momento angolare l nel limite di bassa energia ($ak \ll 1$).

Domanda 3

Si ottenga l'espressione di f_l nel limite perturbativo: si verifichi la compatibilità dell'espressione ottenuta col metodo delle ampiezze parziali con quella derivata in approssimazione di Born.

Prova Scritta del 07/09/2005: Soluzione

Domanda 1

Posto come al solito, $q = 2k \sin \frac{\theta}{2}$, con $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ energia della particella incidente, abbiamo per l'ampiezza di diffusione

$$\begin{aligned}
 f_{Born}(\theta) &= -\frac{1}{q} \int_0^a \frac{dr r}{L^2} \left(1 - \frac{4L}{r}\right) \sin q r = \\
 &= -\frac{1}{q^3 L^2} \int_0^{aq} dx (x - 4Lq) \sin x = \\
 &= \frac{1}{q^3 L^2} (aq \cos aq - \sin aq) - \frac{4}{q^2 L} (\cos aq - 1) = \\
 &= a \left[(\mu^2 - 4\mu) \frac{\cos aq}{q^2 a^2} - \mu^2 \frac{\sin aq}{q^3 a^3} + \frac{4\mu}{q^2 a^2} \right] = \\
 &= 4a\mu \frac{1 - \cos aq}{q^2 a^2} + O(\mu^2)
 \end{aligned} \tag{124}$$

dove abbiamo introdotto il parametro adimensionale

$$\mu \equiv \frac{a}{L} \tag{125}$$

che controlla l'espansione perturbativa. Poiché la correzione successiva a quella di Born è di ordine μ^2 abbiamo, nell'ultima riga della (124) trascurato i termini di ordine μ^2 nell'approssimazione del primo ordine.

Domanda 2

$\chi(r)$ si annulla per $r = 0$ come richiesto per le autofunzioni dell'energia. Inoltre $\chi(r) \rightarrow r^2$ per $r \rightarrow 0$: pertanto, se $\chi(r)$ è un'autofunzione dell'energia avrà momento angolare orbitale $l = 1$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
 \chi'(r) &= r e^{-\frac{r}{L}} \left(2 - \frac{r}{L}\right) \\
 \chi''(r) &= e^{-\frac{r}{L}} \left(2 - \frac{4r}{L} + \frac{r^2}{L^2}\right)
 \end{aligned} \tag{126}$$

Pertanto

$$\frac{\chi''(r)}{\chi(r)} = \frac{2}{r^2} - \frac{4}{Lr} + \frac{1}{L^2} = \frac{2mV(r)}{\hbar^2} + \frac{2}{r^2} \tag{127}$$

Da cui deduciamo che, in effetti $l = 1$ e $E = 0$.

Consideriamo allora la derivata logaritmica di $\chi(r)$ per $r = a^-$:

$$\frac{r \chi''(r)}{\chi(r)} \Big|_{r \rightarrow a^-} = 2 - \frac{a}{L} = 2 - \mu \quad (128)$$

L'espansione di bassa energia dell'ampiezza parziale con $l = 1$ ha la forma

$$(ak)^3 \cot \delta_l = A_1 + B_1 (ak)^2 + O(a^4 k^4) \quad (129)$$

La (128) implica

$$\frac{A_1}{3} = \frac{3 - \mu}{\mu} \quad (130)$$

Dunque

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{a}{ak \cot \delta_1 - iak} = \frac{a(ak)^2}{A_1} \left(1 + O(a^2 k^2)\right) = \\ &= \frac{1}{3} \frac{a\mu(ak)^2}{3 - \mu} \left(1 + O(a^2 k^2)\right) \end{aligned} \quad (131)$$

Domanda 3

L'espansione in ampiezze parziali dell'ampiezza di diffusione ha la forma seguente

$$f(\theta) = f_0 + 3 f_1 P_1(\cos \theta) + 5 f_2 P_2(\cos \theta) + \dots \quad (132)$$

dove

$$\begin{aligned} \frac{f_0}{a} &= \frac{1}{A_0} + \frac{iak}{A_0^2} - \left(\frac{B_0}{A_0^2} + \frac{1}{A_0^3}\right) a^2 k^2 + O(a^3 k^3) \\ \frac{f_1}{a} &= \frac{(ak)^2}{A_1} + O(a^4 k^4) \\ \frac{f_2}{a} &= \frac{(ak)^4}{A_2} + O(a^6 k^6) \end{aligned} \quad (133)$$

e cosí via. Pertanto all'ordine quadratico in ak abbiamo che l'ampiezza di diffusione è data da un termine costante in θ (che non abbiamo potuto determinare col metodo delle onde parziali perché richiede la conoscenza dell'ampiezza parziale con momento angolare $l = 0$) più un termine proporzionale a $\cos \theta$:

$$f(\theta) = a \left[\frac{1}{A_0} + \frac{iak}{A_0^2} - \left(\frac{B_0}{A_0^2} + \frac{1}{A_0^3}\right) (ak)^2 + \frac{\mu(ak)^2}{3 - \mu} \cos \theta + O((ak)^3) \right] \quad (134)$$

Per confrontare il risultato ottenuto col metodo delle ampiezze parziali (cioè il coefficiente A_1) col risultato perturbativo dobbiamo pertanto espandere quest'ultimo all'ordine quadratico in $a k$. Abbiamo

$$f_{Born}(\theta) = 4 a \mu \frac{1 - \cos a q}{q^2 a^2} + O(\mu^2) = a \left(2 \mu - \frac{\mu (a q)^2}{6} + \dots \right) \quad (135)$$

dove adesso siamo trascurando oltre ai termini di ordine quadratico in μ anche quelli lineari in μ ma di ordine quartico in $a q$. Tenendo conto che

$$a^2 q^2 = 4 a^2 k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2 a^2 k^2 (1 - \cos \theta) \quad (136)$$

abbiamo

$$f_{Born}(\theta) = a \left(2 \mu - \frac{\mu a^2 k^2}{3} + \frac{\mu a^2 k^2}{3} \cos \theta + \dots \right) \quad (137)$$

Confrontando la (137) con la (134) vediamo che il termine proporzionale a $\cos \theta$ di ordine quadratico in $a k$ nella (137) coincide, a meno di termini quadratici in μ , con il termine corrispondente ottenuto dall'ampiezza parziale con momento angolare $l = 1$, in quanto

$$\frac{\mu}{3 - \mu} = \frac{\mu}{3} + O(\mu^2) \quad (138)$$

Dal confronto della (137) con la (134) otteniamo anche la lunghezza di diffusione ed il raggio effettivo dell'ampiezza parziale con $l = 0$ all'ordine più basso nell'espansione perturbativa

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_0} &= 2 \mu + O(\mu^2) \\ B_0 &= \frac{1}{12 \mu} + O(\mu^0) \end{aligned} \quad (139)$$

L'assenza del termine lineare in $a k$ e di ordine μ nell'approssimazione di Born è consistente con lo sviluppo in ampiezze parziali: la (134) mostra che il termine lineare in $a k$ è proporzionale a $1/A_0^2$ e quindi è di ordine quadratico in μ .

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 23/01/2006

Problema

Si consideri un atomo d'idrogeno descritto dalla Hamiltoniana (iperfine)

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + f \vec{s}_e \cdot \vec{s}_p \quad (140)$$

dove \hat{H}_0 dipende dalle sole variabili dinamiche elettroniche, \vec{s}_e è spin dell'elettrone, \vec{s}_p quello del protone, f è una certa costante reale positiva. Si denoti con E_0 l'energia dello stato fondamentale di \hat{H}_0 , con momento angolare orbitale $l = 0$, spin $s = 1/2$ e momento angolare totale elettronico $j_e = 1/2$. Nello spazio che include gli stati di spin dell'elettrone e del protone questo stato è degenere quattro volte. L'interazione iperfine rimuove questa degenerazione.

Domanda 1

Si determini in quanti livelli si separa E_0 , il momento angolare totale (elettronico e protonico) $\vec{F} = \vec{j}_e + \vec{s}_p$ di questi livelli e la loro separazione in funzione di f .

Domanda 2

Al tempo $t = 0$ viene acceso un campo magnetico uniforme $\vec{B}(t) = \hat{z} B_0 e^{-\alpha t}$ che interagisce col sistema attraverso l'Hamiltoniana

$$\hat{V}(t) = \frac{e}{m c} \vec{B}(t) \cdot \vec{s}_e \quad (141)$$

Si supponga che l'atomo si trovi nello stato fondamentale di \hat{H} al tempo $t = 0$. Si trascurino gli stati diversi da quelli associati a E_0 . Si calcoli, al primo ordine in teoria delle perturbazioni la probabilità che a tempi grandi $t \rightarrow \infty$ l'atomo sia transitato in uno stato diverso dal fondamentale.

Domanda 3

Si calcoli l'ordine successivo non nullo in teoria delle perturbazioni alla probabilità di transizione del punto precedente. Si determini la condizione di validità del risultato perturbativo.

Domanda 4

Si supponga che $\hbar f \ll \alpha$. Si calcoli in questo caso la probabilità di transizione a tutti gli ordini in teoria delle perturbazioni. (*Indicazione.* Può essere utile, ma non necessario, sapere che la soluzione dell'equazione differenziale lineare $\ddot{y} + \dot{y} + a^2 e^{-2t} y = 0$ è $y(t) = C_1 \sin(a e^{-t}) + C_2 \cos(a e^{-t})$).

Prova Scritta del 23/1/2006: Soluzione

Domanda 1

I quattro livelli si separano in un singoletto con $F = 0$ ed un tripletto con $F = 1$. Poiché l'interazione iperfine si può scrivere

$$f \vec{s}_e \cdot \vec{s}_p = \frac{f}{2} \left(\vec{F}^2 - \vec{s}_e^2 - \vec{s}_p^2 \right) \quad (142)$$

i due livelli hanno energie $E_{F=0} = E_0 - \frac{3\hbar^2}{4} f$ e $E_{F=1} = E_0 + \frac{\hbar^2}{4} f$, e la separazione è $\Delta E = \hbar^2 f$.

Domanda 2

L'interazione può indurre transizioni tra lo stato con $F = 0$ e quello con $F = 1$ e $F_z = 0$. Introduciamo la notazione

$$b \equiv \frac{e B_0}{2 m c} \quad \omega_f \equiv \hbar f \quad (143)$$

per le frequenze associate al campo magnetico e alla separazione iperfine dei livelli. L'ampiezza di transizione $a_{1,0;0,0}(t)$ per questo processo è al primo ordine

$$a_{1,0;0,0}^{(1)}(t) = -\frac{i e B_0}{\hbar m c} \int_0^t dt' \langle 1, 0 | \hat{s}_e^z | 0, 0 \rangle e^{(i\omega_f - \alpha)t'} \quad (144)$$

Poiché

$$\begin{aligned} |0, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\frac{1}{2}\rangle_e |-\frac{1}{2}\rangle_p - |-\frac{1}{2}\rangle_e |+\frac{1}{2}\rangle_p \right) \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\frac{1}{2}\rangle_e |-\frac{1}{2}\rangle_p + |-\frac{1}{2}\rangle_e |+\frac{1}{2}\rangle_p \right) \end{aligned} \quad (145)$$

abbiamo

$$\langle 1, 0 | \hat{s}_e^z | 0, 0 \rangle = \frac{\hbar}{2} \quad (146)$$

Dunque

$$a_{1,0;0,0}^{(1)}(t) = -i b \int_0^t dt' e^{(i\omega_f - \alpha)t'} = -\frac{i b (1 - e^{(i\omega_f - \alpha)t})}{(\alpha - i\omega_f)} \quad (147)$$

Per tempi grandi $t \rightarrow \infty$,

$$a_{1,0;0,0}^{(1)}(\infty) = -\frac{i b}{(\alpha - i\omega_f)} \quad (148)$$

e la probabilità di transizione

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{1,0;0,0}^{(1)}(t) = \frac{b^2}{\alpha^2 + \omega_f^2} \quad (149)$$

Domanda 3

La perturbazione $V(t)$ conserva lo spin F_z e dunque gli unici elementi di matrice non nulli nello spazio degli stati del multipletto iperfine sono:

$$\langle 1, 0 | \hat{s}_e^z | 0, 0 \rangle = \langle 0, 0 | \hat{s}_e^z | 1, 0 \rangle = \frac{\hbar}{2} \quad (150)$$

Pertanto gli ordini della teoria delle perturbazioni che danno un contributo non nullo sono quelli dispari. L'ordine successivo al primo non nullo è il terzo:

$$\begin{aligned} a_{1,0;0,0}^{(3)}(\infty) &= (-ib)^3 \int_0^\infty dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 e^{(i\omega_f - \alpha)t_1} e^{-(i\omega_f + \alpha)t_2} e^{(i\omega_f - \alpha)t_3} = \\ &= (-ib)^3 \int_0^\infty dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{(i\omega_f - \alpha)t_1} \frac{e^{-2\alpha t_2} - e^{-(i\omega_f + \alpha)t_2}}{i\omega_f - \alpha} = \\ &= \frac{(-ib)^3}{i\omega_f - \alpha} \int_0^\infty dt_1 e^{(i\omega_f - \alpha)t_1} \frac{1 - e^{-2\alpha t_1}}{2\alpha} - \frac{1 - e^{-(i\omega_f + \alpha)t_1}}{i\omega_f + \alpha} = \\ &= \frac{(-ib)^3}{i\omega_f - \alpha} \int_0^\infty dt_1 \left[\frac{e^{(i\omega_f - \alpha)t_1} - e^{(i\omega_f - 3\alpha)t_1}}{2\alpha} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{(i\omega_f - \alpha)t_1} - e^{-2\alpha t_1}}{i\omega_f + \alpha} \right] = \\ &= \frac{(-ib)^3}{i\omega_f - \alpha} \left[\frac{1}{2\alpha(\alpha - i\omega_f)} - \frac{1}{2\alpha(3\alpha - i\omega_f)} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(i\omega_f + \alpha)(\alpha - i\omega_f)} + \frac{1}{2\alpha(i\omega_f + \alpha)} \right] = \\ &= \frac{(-ib)^3}{i\omega_f - \alpha} \left[-\frac{1}{2\alpha(\alpha + i\omega_f)} - \frac{1}{2\alpha(3\alpha - i\omega_f)} + \frac{1}{2\alpha(i\omega_f + \alpha)} \right] = \\ &= \frac{(-ib)^3}{(\alpha - i\omega_f)2\alpha(3\alpha - i\omega_f)} \quad (151) \end{aligned}$$

Abbiamo quindi per l'ampiezza di transizione:

$$a_{1,0;0,0}(\infty) = -\frac{ib}{(\alpha - i\omega_f)} + \frac{(-ib)^3}{(\alpha - i\omega_f)2\alpha(3\alpha - i\omega_f)} + O(b^5) \quad (152)$$

e per la probabilità

$$\begin{aligned}
P_{1,0;0,0}(\infty) &= \frac{b^2}{(\alpha^2 + \omega_f^2)} \left[1 - \frac{b^2}{2\alpha} \left(\frac{1}{3\alpha - i\omega_f} + \frac{1}{3\alpha + i\omega_f} \right) + O(b^4) \right] = \\
&= \frac{b^2}{(\alpha^2 + \omega_f^2)} \left[1 - \frac{3b^2}{9\alpha^2 + \omega_f^2} + O(b^4) \right] \tag{153}
\end{aligned}$$

Domanda 4

Diamo due procedimenti diversi per ottenere il risultato.

Primo procedimento

Il termine di ordine n (con n dispari) dello sviluppo perturbativo è

$$\begin{aligned}
a_{1,0;0,0}^{(n)}(\infty) &= (-ib)^n \int_0^\infty dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \times \\
&\times e^{(i\omega_f - \alpha)t_1} e^{-(i\omega_f + \alpha)t_2} e^{(i\omega_f - \alpha)t_3} \dots e^{(i\omega_f - \alpha)t_n} \tag{154}
\end{aligned}$$

Nel caso in cui $\omega_f \ll \alpha$ possiamo trascurare $\pm i\omega_f$ negli esponenti ed ottenere l'espressione

$$\begin{aligned}
a_{1,0;0,0}^{(n)}(\infty) &= (-ib)^n \int_0^\infty dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \times \\
&\times e^{-\alpha t_1} e^{-\alpha t_2} e^{-\alpha t_3} \dots e^{-\alpha t_n} = \\
&= \frac{(-ib)^n}{n!} \int_0^\infty dt_1 \int_0^\infty dt_2 \cdots \int_0^\infty dt_n \times \\
&\times e^{-\alpha t_1} e^{-\alpha t_2} e^{-\alpha t_3} \dots e^{-\alpha t_n} = \\
&= \frac{(-ib)^n}{\alpha^n n!} \tag{155}
\end{aligned}$$

Pertanto

$$a_{1,0;0,0}(\infty) = \frac{(-ib)}{\alpha} + \frac{(-ib)^3}{\alpha^3 3!} + \dots + \frac{(-ib)^n}{\alpha^n n!} + \dots = -i \sin \frac{b}{\alpha} \tag{156}$$

e la probabilità di transizione a tutti gli ordini diventa

$$P_{1,0;0,0}(\infty) = \sin^2 \frac{b}{\alpha} \tag{157}$$

Secondo procedimento

Partiamo dall'equazioni di Schrödinger per le ampiezze di transizione nella rappresentazione dell'interazione. Quelle non nulle soddisfano il sistema

$$\begin{aligned}\dot{a}_{1,0;0,0}(t) &= -i b e^{(i\omega_f - \alpha)t} a_{0,0;0,0}(t) \\ \dot{a}_{0,0;0,0}(t) &= -i b e^{(-i\omega_f - \alpha)t} a_{1,0;0,0}(t)\end{aligned}\quad (158)$$

con le condizioni iniziali

$$a_{1,0;0,0}(0) = 0 \quad a_{0,0;0,0}(0) = 1 \quad (159)$$

Questo sistema porta all'equazione differenziale lineare del secondo ordine:

$$\ddot{a}_{1,0;0,0} + (\alpha - i\omega_f) \dot{a}_{1,0;0,0} + b^2 e^{-2\alpha t} a_{1,0;0,0} = 0 \quad (160)$$

con le condizioni iniziali

$$a_{1,0;0,0}(0) = 0 \quad \dot{a}_{1,0;0,0}(0) = -i b \quad (161)$$

Per $\omega_f \ll \alpha$ possiamo approssimare trascurare il termine proporzionale a ω_f nell'equazione (160) ed ottenere

$$\ddot{a}_{1,0;0,0} + \alpha \dot{a}_{1,0;0,0} + b^2 e^{-2\alpha t} a_{1,0;0,0} = 0 \quad (162)$$

la cui soluzione generale (si veda l'indicazione data nel testo) è

$$a_{1,0;0,0}(t) = C_1 \sin\left(\frac{b}{\alpha} e^{-\alpha t}\right) + C_2 \cos\left(\frac{b}{\alpha} e^{-\alpha t}\right) \quad (163)$$

Dalle condizioni iniziali ricaviamo

$$a_{1,0;0,0}(t) = i \cos\left(\frac{b}{\alpha}\right) \sin\left(\frac{b}{\alpha} e^{-\alpha t}\right) - i \sin\left(\frac{b}{\alpha}\right) \cos\left(\frac{b}{\alpha} e^{-\alpha t}\right) \quad (164)$$

da cui

$$a_{1,0;0,0}(\infty) = -i \sin\left(\frac{b}{\alpha}\right) \quad (165)$$

in accordo col risultato ottenuto precedentemente.

NOTA

La soluzione dell'equazione "esatta" (160) si può scrivere in termini della funzione di Bessel $J_n(z)$. Introducendo i parametri

$$\hat{b} \equiv \frac{b}{\alpha} \quad \hat{\omega} = \frac{\omega_f}{\alpha} \quad (166)$$

la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali richieste è

$$a_{1,0;0,0}(t) = \frac{i \hat{b} \pi e^{-\frac{1}{2} \alpha t (1-i\hat{\omega}) t}}{2 \cosh \frac{\hat{\omega} \pi}{2}} \left[J_{-\frac{1}{2}(1-i\hat{\omega})}(\hat{b}) J_{\frac{1}{2}(1-i\hat{\omega})}(\hat{b} e^{-\alpha t}) + \right. \\ \left. - J_{\frac{1}{2}(1-i\hat{\omega})}(\hat{b}) J_{-\frac{1}{2}(1-i\hat{\omega})}(\hat{b} e^{-\alpha t}) \right] \quad (167)$$

Tenendo conto dell'espansione della funzione di Bessel $J_n(z)$ per piccoli valori di z

$$J_n(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^n}{\Gamma(1+n)} \left[1 - \frac{z^2}{4(1+n)} + \dots + \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! (1+n) \dots (k+n)} + \dots \right] \quad (168)$$

otteniamo l'espressione "esatta" per l'ampiezza di transizione a tempi grandi

$$a_{1,0;0,0}(\infty) = \frac{-i \pi \left(\frac{\hat{b}}{2}\right)^{\frac{1}{2}(1+i\hat{\omega})} J_{\frac{1}{2}(1-i\hat{\omega})}(\hat{b})}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1+i\hat{\omega})\right) \cosh \frac{\hat{\omega} \pi}{2}} = \\ = -i \Gamma\left(\frac{1}{2}(1-i\hat{\omega})\right) \left(\frac{\hat{b}}{2}\right)^{\frac{1}{2}(1+i\hat{\omega})} J_{\frac{1}{2}(1-i\hat{\omega})}(\hat{b}) = \\ = -i \left(\frac{\hat{b}}{2}\right)^{\frac{1}{2}(1+i\hat{\omega})} \frac{\left(\frac{\hat{b}}{2}\right)^{\frac{1}{2}(1-i\hat{\omega})}}{\frac{1}{2}(1-i\hat{\omega})} \left[1 - \frac{\hat{b}^2}{2(3-i\hat{\omega})} + O(\hat{b}^4) \right] = \\ = -i \frac{\hat{b}}{1-i\hat{\omega}} \left[1 - \frac{\hat{b}^2}{2(3-i\hat{\omega})} + O(\hat{b}^4) \right] =$$

in accordo con la risposta alla domanda 3.

Dall'espansione (168) otteniamo per il contributo di ordine $2k+1$ (dispari) all'ampiezza di transizione:

$$a_{1,0;0,0}^{(2k+1)}(\infty) = -i \frac{(-1)^k \hat{b}^{2k+1}}{2^k k! (1-i\hat{\omega}) (3-i\hat{\omega}) \dots (2k+1-i\hat{\omega})} \quad (169)$$

Confrontando con la (154) ricaviamo la seguente espressione per un integrale multiplo che appare sovente negli sviluppi perturbativi:

$$\int_0^\infty dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{2k}} dt_{2k+1} e^{(i\omega_f - \alpha)t_1} e^{-(i\omega_f + \alpha)t_2} e^{(i\omega_f - \alpha)t_3} \cdots e^{(i\omega_f - \alpha)t_{2k+1}} =$$

$$= \frac{1}{2^k k! \alpha^k (\alpha - i\omega_f) (3\alpha - i\omega_f) \cdots ((2k + 1)\alpha - i\omega_f)} \quad (170)$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 07/04/2006

Problema

Una particella di massa m in una dimensione è soggetta al potenziale

$$V(x) = -\lambda [\delta(x - a) + \delta(x + a)] \quad (171)$$

con $\lambda > 0$ e $a > 0$.

Domanda 1

Si determini la relazione tra λ , a ed m per la quale esistono *due* stati legati ψ_1 e ψ_2 . Per questi valori dei parametri si risolva l'equazione agli autovalori in maniera grafica e si determinino le funzioni d'onda $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ in termini degli autovalori dell'energia. Si calcolino analiticamente gli autovalori dell'energia nel limite di buca molto profonda: $\lambda \gg \frac{\hbar^2}{ma}$

Domanda 2

Si supponga che la particella si trovi nello stato fondamentale ψ_1 al tempo $t = 0$, quando viene accesa la perturbazione dipendente dal tempo

$$\hat{V}(t) = -\frac{1}{2} K \hat{x} (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) \quad (172)$$

Per valori dei parametri per i quali esistono due stati legati, si calcoli, al primo ordine in teoria delle perturbazioni, la probabilità che al tempo t il sistema sia transitato al primo livello eccitato.

Domanda 3

Si calcoli la probabilità di transizione tra i due livelli a tutti gli ordini in teoria delle perturbazioni nel limite di buca molto profonda ($\lambda \gg \frac{\hbar^2}{ma}$) e in condizione quasi risonante.

Prova Scritta del 07/04/2006: Soluzione

Domanda 1

Il potenziale è simmetrico per $x \leftrightarrow -x$. Pertanto le autofunzioni hanno parità definita. L'autofunzione dello stato fondamentale $\psi_1(x)$ è pari e data da

$$\psi_1(x) = \begin{cases} A_+ \cosh k_+ x & \text{per } |x| \leq a \\ B_+ e^{-k_+ x} & \text{per } x > a \end{cases} \quad (173)$$

L'autofunzione dello stato fondamentale $\psi_2(x)$ è dispari e data da

$$\psi_2(x) = \begin{cases} A_- \sinh k_- x & \text{per } |x| \leq a \\ B_- e^{-k_- x} & \text{per } x > a \end{cases} \quad (174)$$

Gli autovalori dell'energia sono $E_{\pm} = -\frac{\hbar^2 k_{\pm}^2}{2m}$ con k_{\pm} determinati dalle equazioni che esprimono la continuità delle derivate logaritmiche delle autofunzioni

$$k_{\pm} L = 1 \pm e^{-2k_{\pm} a} \quad (175)$$

dove il parametro con dimensioni di una lunghezza L è

$$L = \frac{\hbar^2}{m \lambda} \quad (176)$$

La relazione tra A_{\pm} e B_{\pm} è

$$\frac{B_{\pm}}{A_{\pm}} = \frac{e^{2a k_{\pm}} \pm 1}{2} \quad (177)$$

Imponendo la condizione di normalizzazione all'unità otteniamo:

$$A_{\pm}^2 = \frac{2 k_{\pm}}{\pm 1 \pm 2 a k_{\pm} + e^{2 a k_{\pm}}} \quad (178)$$

L'equazione per k_+ ammette sempre una soluzione con $k_+ > \frac{1}{L}$ per qualunque valore di λ .

L'equazione per k_- ammette una soluzione con $k_- < \frac{1}{L}$ per valori di λ sufficientemente grandi:

$$L < 2 a \iff \lambda > \frac{\hbar^2}{2 m a} \quad (179)$$

Nel limite di buca profonda $L \ll a$: in questo limite $k_{\pm} \rightarrow \infty$ e dunque

$$k_{\pm} \approx \frac{1 \pm e^{-\frac{2a}{L}}}{L} \approx \frac{1}{L} \quad (180)$$

e

$$k_+ - k_- \approx \frac{2e^{-\frac{2a}{L}}}{L} \quad (181)$$

La differenza di energia tra i due livelli è dunque in questo limite

$$E_- - E_+ = \frac{\hbar^2 (k_+^2 - k_-^2)}{2m} \approx \frac{2\hbar^2 e^{-\frac{2a}{L}}}{mL^2} \quad (182)$$

Poniamo

$$ak_{\pm} \equiv \mu_{\pm} \equiv \mu + \Delta_{\pm} \quad (183)$$

e

$$\mu = \frac{a}{L} \quad (184)$$

Il limite di buca profonda è dunque $\mu \gg 1$ ed in questo limite

$$\mu_{\pm} \approx \mu \pm \Delta \quad (185)$$

dove

$$\Delta \approx \mu e^{-\mu} \quad (186)$$

Domanda 2

L'ampiezza di transizione al primo ordine in teoria delle perturbazioni è

$$a_{1 \rightarrow 2}(t) = \frac{K}{2\hbar} (\psi_2, \hat{x} \psi_1) \left[\frac{e^{i(\omega_{21}-\omega)t} - 1}{\omega_{21} - \omega} + \frac{e^{i(\omega_{21}+\omega)t} - 1}{\omega_{21} + \omega} \right] \quad (187)$$

dove

$$\omega_{21} = \frac{E_- - E_+}{\hbar} = \frac{\hbar(k_+^2 - k_-^2)}{2m} \quad (188)$$

e

$$(\psi_2, \hat{x} \psi_1) = \frac{1}{2} A_+ A_- a^2 (I_1 + I_2) \quad (189)$$

con

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 y (e^{2\mu y} - e^{-2\mu y} + e^{-2\Delta y} - e^{2\Delta y}) = \\ &= \frac{(2\mu - 1)e^{2\mu} + 1}{4\mu^2} + \frac{(2\mu + 1)e^{-2\mu} - 1}{4\mu^2} - \frac{(2\Delta - 1)e^{2\Delta} + 1}{4\Delta^2} + \frac{(2\Delta + 1)e^{-2\Delta} - 1}{4\Delta^2} \\ I_2 &= (e^{2\mu+} + 1)(e^{2\mu-} - 1) \int_1^{\infty} y e^{-2\mu y} = (e^{2\mu+} + 1)(e^{2\mu-} - 1) \frac{(2\mu + 1)e^{-2\mu}}{4\mu^2} \end{aligned}$$

dove per semplicità abbiamo utilizzato l'approssimazione $\mu_{\pm} \approx \mu \pm \Delta$. Pertanto:

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= \frac{(2\mu - 1)e^{2\mu}}{4\mu^2} + (e^{2\mu} - e^{2\Delta} + e^{-2\Delta}) \frac{(2\mu + 1)}{4\mu^2} + \\
&\quad - \frac{(2\Delta - 1)e^{2\Delta}}{4\Delta^2} + \frac{(2\Delta + 1)e^{-2\Delta}}{4\Delta^2} = \\
&= \frac{e^{2\mu}}{\mu} - (e^{2\Delta} - e^{-2\Delta}) \frac{(2\mu + 1)}{4\mu^2} + \\
&\quad - \frac{(2\Delta - 1)e^{2\Delta}}{4\Delta^2} + \frac{(2\Delta + 1)e^{-2\Delta}}{4\Delta^2}
\end{aligned} \tag{190}$$

Nel limite di buca profonda $\mu \gg 1$, $\Delta \ll 1$ otteniamo

$$I_1 + I_2 \approx \frac{e^{2\mu}}{\mu} \tag{191}$$

Inoltre

$$A_+^2 A_-^2 a^2 = \frac{4\mu_+ \mu_-}{(e^{2\mu_+} + 2\mu_+ + 1)(e^{2\mu_-} - 2\mu_- - 1)} \tag{192}$$

che diventa per $\mu \gg 1$, $\Delta \ll 1$

$$A_+^2 A_-^2 a^2 \approx 4\mu^2 e^{-4\mu} \tag{193}$$

In conclusione nel limite di buca profonda

$$(\psi_2, \hat{x} \psi_1) \approx a \tag{194}$$

Domanda 3

Nel limite di buca profonda ed in cui la frequenza $\omega = \frac{E_- - E_+}{\hbar} - \epsilon \approx \frac{E_- - E_+}{\hbar}$ possiamo applicare il risultato per la transizione in un sistema a due livelli:

$$P_{1 \rightarrow 2}(t) = \frac{|A_{21}|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2 \Omega t}{\Omega^2} \tag{195}$$

con

$$A_{21} = \frac{1}{2} K (\psi_2, \hat{x} \psi_1) \approx \frac{1}{2} K a \tag{196}$$

e

$$\Omega = \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon^2 + \frac{K^2 a^2}{\hbar^2}} \tag{197}$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 08/06/2006

Problema

Una particella di massa m e numero d'onda k è diffusa da un potenziale

$$V(\vec{x}) = \lambda \delta(|\vec{x}| - a) \quad (198)$$

Domanda 1

Si calcoli l'ampiezza di diffusione in approssimazione di Born. Si calcoli anche la sezione d'urto di Born integrata nel limite di bassa energia e di alta energia.

Domanda 2

Si calcoli l'ampiezza di diffusione nell'espansione delle onde parziali fino all'ordine $(ak)^2$ *incluso*. Si verifichi la consistenza delle risposte alle domande 1 ed 2.

Domanda 3

Si calcoli l'ampiezza parziale con momento angolare generico l all'ordine più basso in ak .

Domanda 4

Si supponga che la particella sia un elettrone e che $a = 10^{-8} \text{cm}$. Si valutino l'ampiezza di diffusione all'indietro ($\theta = \pi$) per i seguenti valori di λ e dell'energia E dell'elettrone, indicando per ciascuno caso quale approssimazione è appropriata:

- a) $\lambda = 1.7 \cdot 10^{-8} \text{ ev} \times \text{cm}; \quad E = 3.4 \cdot 10^{-4} \text{ ev}$
- b) $\lambda = -3.1 \cdot 10^{-8} \text{ ev} \times \text{cm}; \quad E = 0.85 \text{ ev}$
- c) $\lambda = 3.4 \cdot 10^{-10} \text{ ev} \times \text{cm}; \quad E = 13.6 \text{ ev}$

Prova Scritta del 08/06/2006: Soluzione

Domanda 1

Introduciamo il parametro adimensionale

$$b \equiv \frac{2 m \lambda a}{\hbar^2} \quad (199)$$

L'ampiezza di Born è:

$$f_{Born}(\theta, k) = -\frac{a b}{2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{-i q a \cos \theta} = -a b \frac{\sin a q}{a q} \quad (200)$$

dove abbiamo posto $q \equiv 2 k \sin \frac{\theta}{2}$. Lo sviluppo di bassa energia dell'ampiezza è

$$\begin{aligned} f_{Born}(\theta, k) &= -a b \left[1 - \frac{(a q)^2}{3!} + O((a q)^4) \right] = \\ &= -a b \left[1 - \frac{2 (a k)^2}{3} + \frac{\cos \theta (a k)^2}{3} + O((a q)^4) \right] \end{aligned} \quad (201)$$

La sezione d'urto integrata

$$\sigma_{Born}/a^2 = \int d\Omega |f_{Born}|^2 = \frac{2 \pi b^2}{(a k)^2} \int_0^{2 k a} dx \frac{\sin^2 x}{x} \quad (202)$$

Nel limite di bassa energia

$$\sigma_{Born}/a^2 = 4 \pi b^2 \left[1 - \frac{(a k)^2}{3} + O((a k)^4) \right] \quad (203)$$

Nel limite di alta energia

$$\sigma_{Born}/a^2 = \pi b^2 \frac{\log(a k)}{(a k)^2} + O(1/(a k)^2) \quad (204)$$

Domande 2 e 3

Le condizioni di discontinuità della derivata della funzione d'onda radiale χ_l a $r = a$ sono

$$\frac{y \chi_l'(y)}{\chi_l(y)} \Big|_{y=a k^+} = \frac{y \chi_l'(y)}{\chi_l(y)} \Big|_{y=a k^-} + b \quad (205)$$

dove abbiamo introdotto la coordinata radiale adimensionale $y \equiv ar$. La funzione d'onda radiale vale

$$\chi_l = \begin{cases} j_l(y) & y < a \\ \cos \delta_l j_l(y) + \sin \delta_l n_l(y) & y > a \end{cases} \quad (206)$$

dove abbiamo introdotto le funzioni

$$\begin{aligned} j_l(y) &= y^{l+1} \left(\frac{d}{y dy} \right)^l \frac{\sin y}{y} = (-1)^l \frac{2l!!}{(2l+1)!} y^{l+1} (1 + O(y^2)) \\ n_l(y) &= y^{l+1} \left(\frac{d}{y dy} \right)^l \frac{\cos y}{y} = (-1)^l \frac{(2l-1)!!}{y^l} (1 + O(y^2)) \end{aligned} \quad (207)$$

L'equazione di discontinuità dà pertanto

$$\frac{\cot \delta_l y j_l'(y) + y n_l'(y)}{\cot \delta_l j_l(y) + n_l(y)} = b + \frac{y j_l'(y)}{j_l(y)} \quad (208)$$

da cui otteniamo l'espressione per lo sfasamento δ_l per l generico

$$\cot \delta_l = -\frac{n_l}{j_l} - \frac{y}{b j_l^2} (j_l n_l' - n_l' j_l) = -\frac{n_l}{j_l} - \frac{y}{b j_l^2} \quad (209)$$

Abbiamo utilizzato il fatto che il wronskiano delle soluzioni j_l e n_l è una costante che può essere valutata per esempio per piccoli y : dalle espansioni (207) si ottiene facilmente che $(j_l n_l' - n_l' j_l) = 1$.

Per $l = 0$ otteniamo

$$y \cot \delta_0 = -y \cot y - \frac{y^2}{b \sin^2 y} = -\frac{1+b}{b} + \frac{b-1}{3b} y^2 + O(y^4) \quad (210)$$

e dunque l'ampiezza parziale con $l = 0$ è

$$f_0 = -\frac{1}{y \cot y + \frac{y^2}{b \sin^2 y} + i y} = -\frac{1}{\frac{1+b}{b} - \frac{b-1}{3b} y^2 + i y + O(y^4)} \quad (211)$$

Per l generico sappiamo che

$$y^{2l+1} \cot \delta_l = A_l + B_l y^2 + O(y^4) \quad (212)$$

L'espressione per A_l con l generico si ottiene dall'espressione esatta (209) e dalle espansioni (207) all'ordine più basso:

$$\begin{aligned} y^{2l+1} \cot \delta_l &= -\frac{(2l-1)!!(2l+1)!}{2l!!} - \frac{1}{b} \left(\frac{(2l+1)!}{2l!!} \right)^2 + O(y^2) = \\ &= -(2l-1)!!^2 (2l+1) \left(1 + \frac{2l+1}{b} \right) + O(y^2) \end{aligned} \quad (213)$$

Cioè

$$A_l = -(2l-1)!!^2 (2l+1) \left(1 + \frac{2l+1}{b} \right) \quad (214)$$

Per $l = 1$ ricaviamo

$$y^3 \cot \delta_1 = -3 \left(1 + \frac{3}{b} \right) + O(y^2) \quad (215)$$

e

$$3 \frac{f_1}{a} = -\frac{b y^2}{b+3} + O(y^4) \quad (216)$$

In conclusione, l'ampiezza di diffusione a meno di termini dell'ordine di y^4 è

$$f(k, \theta) = f_0 + 3 f_1 \cos \theta + O(y^4) \quad (217)$$

con f_0 e f_1 dati da (211) e (216) rispettivamente.

Per confrontare con il risultato di Born dobbiamo espandere le ampiezze parziali in potenze di b e limitarci al primo ordine:

$$\frac{f_0}{a} = -\frac{1}{y \cot y + \frac{y^2}{b \sin^2 y} + i y} = -b \frac{\sin^2 y}{y^2} + O(b^2) \quad (218)$$

e per l generico

$$\frac{f_l}{a} = -\frac{b j_l^2}{y^2} + O(b^2) \quad (219)$$

Quindi, all'ordine y^2

$$\frac{f_1}{a} = -\frac{b y^2}{9} + O(b^2, y^4) \quad (220)$$

In conclusione all'ordine y^2 l'ampiezza di diffusione totale è

$$f/a = f_0/a + 3 f_1/a \cos \theta + \dots = -b \left(1 - \frac{y^2}{3} + \frac{y^2}{3} \cos \theta \right) + \dots \quad (221)$$

in accordo col risultato della domanda 1.

Domanda 4

Determiniamo i parametri $y = k a$ e $b = \frac{2m\lambda a}{\hbar^2}$ per i casi a)-c) Introduciamo le unità di energia $E_H = \frac{e^4 m^2}{2\hbar^2} \approx 13.6 \text{ ev}$ e di lunghezza $a_B = \frac{\hbar^2}{e^2 m} \approx 0.5 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$.

Il raggio del potenziale è dunque $a \approx 2 a_B$. Inoltre

$$y = \sqrt{\frac{E}{E_H}} \frac{a}{a_B} \quad b = \frac{\lambda}{E_H a_B} \frac{a}{a_B} \approx \frac{\lambda}{3.4 \cdot 10^{-8} \text{ ev} \times \text{cm}} \quad (222)$$

Dunque

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad b &\approx 0.5 & y &\approx \sqrt{\frac{1}{4}} 2 \cdot 10^{-2} = 10^{-2} \\ \text{b)} \quad b &\approx -\frac{3.1}{3.4} \approx -0.91 & y &\approx \sqrt{\frac{0.85}{13.6}} 2 = 0.5 \\ \text{c)} \quad b &\approx 10^{-2} & y &\approx 2 \end{aligned}$$

Nella situazione a) possiamo applicare l'approssimazione di bassa energia con $l = 0$ all'ordine più basso in y (lunghezza di diffusione). Nella situazione c) possiamo applicare l'approssimazione di Born. Nel caso b) siamo nella vicinanza della risonanza con $l = 0$ e $b = -1$ e quindi dobbiamo usare l'ampiezza parziale con $l = 0$ nell'approssimazione di raggio effettivo (conservare i termini di ordine y^2 in $k \cot \delta_0$) ed includere l'ordine più basso nell'ampiezza con $l = 1$.

Dunque nel caso a):

$$f/a \approx f_0/a \approx -b/(1+b) \approx -0.33 \quad (223)$$

Nel caso b), il contributo con $l = 0$ è

$$\begin{aligned} f_0/a &\approx \frac{1}{-\frac{1+b}{b} + \frac{b-1}{3b} y^2 - i y} \approx \frac{1}{9.9 \cdot 10^{-2} + 1.75 \cdot 0.5^2 - i 0.5} \approx \\ &\approx \frac{1}{0.274 - i 0.5} \approx 0.84 + i 1.5 \end{aligned} \quad (224)$$

mentre quello con $l = 1$ all'ordine y^2 è

$$3 f_1/a \approx -\frac{b}{b+3} y^2 \approx 0.11 \quad (225)$$

Per cui

$$f/a(\theta = \pi) \approx 0.84 + i 1.5 + (-1) \cdot 0.11 \approx 0.73 + i 1.5 \quad (226)$$

Nel caso c)

$$f/a \approx f_{Born}(\theta = \pi)/a \approx -10^{-2} \frac{\sin 4}{4} \approx 1.9 \cdot 10^{-3} \quad (227)$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 29/06/2006

Problema

Una particella di massa M , soggetta ad un potenziale armonico tridimensionale ed immersa in un campo magnetico lungo l'asse delle z di intensità B è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2M} + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 + \mu B L_z \quad (228)$$

dove L_z è il momento angolare lungo l'asse z e $\mu > 0$ è associato al momento magnetico della particella.

Al tempo $t = 0$ viene acceso un campo elettrico che interagisce col sistema attraverso il potenziale dipendente dal tempo

$$V(t) = -e \vec{\mathcal{E}}(t) \cdot \vec{x} \quad (229)$$

dove

$$\vec{\mathcal{E}}(t) = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-\alpha t} \quad (230)$$

con $\alpha > 0$.

Domanda 1

Determinare lo spettro di H . Specificare in particolare i valori l ed m del momento angolare totale della proiezione lungo l'asse delle z del momento angolare dei primi 9 livelli del sistema ed eventuali degenerazioni (si supponga, per semplicità, che $\mu B \ll \omega$).

Domanda 2

Si calcoli la *probabilità* di transizione al tempo $t = +\infty$ dallo stato fondamentale agli stati eccitati di energia più bassa con $l = 1$, all'ordine più basso non nullo in teoria delle perturbazioni.

Applicazione: Si supponga che al tempo $t = 0$ un certo numero di particelle si trovino nel fondamentale e che $V(t)$ corrisponda a radiazione elettromagnetica che si propaga lungo l'asse delle z . Qual'è al tempo $t = +\infty$ il rapporto tra le popolazioni dei livelli eccitati con $m = -1, 0, 1$?

Domanda 3

Calcolare, all'ordine più basso non nullo in teoria delle perturbazioni, l'*ampiezza* transizione dallo stato fondamentale al primo stato eccitato con $l = 0$ al tempo $t = +\infty$.

Domanda 4

Calcolare al primo ordine in teoria delle perturbazioni le *ampiezze* di transizione dai primi stati eccitati con $l = 1$ al primo stato eccitato con $l = 0$ al tempo $t = +\infty$.

Prova Scritta del 29/06/2006: Soluzione

Domanda 1

Prendiamo la base degli oscillatori autostati del momento angolare

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x + i a_y) & a_1^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x^\dagger - i a_y^\dagger) \\ a_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x - i a_y) & a_{-1}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x^\dagger + i a_y^\dagger) \\ a_0 &= a_z & a_0^\dagger &= a_z^\dagger \end{aligned}$$

Gli stati

$$|n_1, n_{-1}, n_0\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{n_1} (a_{-1}^\dagger)^{n_{-1}} (a_0^\dagger)^{n_0}}{\sqrt{n_1! n_{-1}! n_0!}} |0\rangle \quad (231)$$

sono autostati simultanei di H e di L_z . Posto $n \equiv n_1 + n_{-1} + n_0$ e $m = n_1 - n_{-1}$, l'autovalore dell'energia di $|n_1, n_{-1}, n_0\rangle$ è

$$E_{n,m} = \hbar\omega \left(n + \frac{3}{2}\right) + \mu B m \quad (232)$$

e quello di L_z è m .

Lo stato fondamentale $|0, 0, 0\rangle$ ha dunque $E_{0,0} = \frac{3}{2} \hbar\omega$ e momento angolare $l = m = 0$:

$$|0, 0, 0\rangle = |n = 0, l = 0, m = 0\rangle \quad (233)$$

Gli stati con $n = 1$ formano un tripletto con $l = 1$:

$$\begin{aligned} |1, 0, 0\rangle &= |n = 1, l = 1, m = 1\rangle \\ |0, 1, 0\rangle &= |n = 1, l = 1, m = -1\rangle \\ |0, 0, 1\rangle &= |n = 1, l = 1, m = 0\rangle \end{aligned}$$

I sei stati con $n = 2$ hanno $l = 2$ e $l = 0$:

$$\begin{aligned} |2, 0, 0\rangle &= |n = 2, l = 2, m = 2\rangle & |0, 2, 0\rangle &= |n = 2, l = 2, m = -2\rangle \\ |1, 0, 1\rangle &= |n = 2, l = 2, m = 1\rangle & |0, 1, 1\rangle &= |n = 2, l = 2, m = -1\rangle \\ |n = 2, l = 2, m = 0\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} |1, 1, 0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |0, 0, 2\rangle \\ |n = 2, l = 0, m = 0\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 1, 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |0, 0, 2\rangle \end{aligned} \quad (234)$$

Scriviamo

$$H = \sum_{m=-1}^1 \hbar \omega (a_m^\dagger a_m + \frac{1}{2}) + \mu B L_z \equiv \sum_{m=-1}^1 H_\omega^{(m)} + \mu B L_z \quad (235)$$

dove $H_\omega^{(m)}$ è l'hamiltoniana di un oscillatore armonico di frequenza ω unidimensionale. Gli $H_\omega^{(m)}$ commutano tra loro e con la parte magnetica dell'hamiltoniana $\mu B L_z$. Siano x_m con $m = -1, 0, 1$ gli operatori coordinata auto-stati di L_z :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (x + i y) \\ x_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (x - i y) \\ x_0 &= z \end{aligned} \quad (236)$$

Il potenziale dipendente dal tempo si scrive allora

$$V(t) = -e \sum_{m=-1}^1 \mathcal{E}^{(m)}(t) x_m \quad (237)$$

dove $\mathcal{E}^{(1)}(t) = (\mathcal{E}^{(-1)}(t))^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{E}_x(t) - i \mathcal{E}_y(t))$ e $\mathcal{E}^{(0)}(t) = \mathcal{E}_z(t)$.

La perturbazione dipendente dal tempo nella pittura dell'interazione si scrive pertanto

$$\begin{aligned} V^{int}(t) &= e^{\frac{i}{\hbar} t H} V(t) e^{-\frac{i}{\hbar} t H} = \\ &= \prod_m e^{\frac{i}{\hbar} t H_\omega^{(m)}} e^{\frac{i \mu B}{\hbar} t L_z} V(t) e^{-\frac{i \mu B}{\hbar} t L_z} \prod_{m'} e^{-\frac{i}{\hbar} t H_\omega^{(m')}} = \\ &= -e \sum_{m''=-1}^1 \mathcal{E}^{(m'')}(t) \prod_m e^{\frac{i}{\hbar} t H_\omega^{(m)}} e^{\frac{i \mu B}{\hbar} t L_z} x_{m''} e^{-\frac{i \mu B}{\hbar} t L_z} \prod_{m'} e^{-\frac{i}{\hbar} t H_\omega^{(m')}} = \\ &= -e \sum_{m=-1}^1 \mathcal{E}^{(m)}(t) e^{i t m \mu B} e^{\frac{i}{\hbar} t H_\omega^{(m)}} x_m e^{-\frac{i}{\hbar} t H_\omega^{(m)}} = \\ &= -e \sum_{m=-1}^1 \mathcal{E}^{(m)}(t) e^{i t m \mu B} x_m^{(\omega)}(t) \end{aligned} \quad (238)$$

dove

$$x_m^{(\omega)}(t) \equiv -i (a_m^\dagger e^{i \omega t} - a_m e^{-i \omega t}) \quad (239)$$

è l'operatore posizione nella pittura di interazione corrispondente ad un hamiltoniana dell'oscillatore armonico in assenza di campo magnetico. La (238) mostra che l'effetto del campo magnetico è quello di modificare le componenti di momento angolare definito del campo elettrico:

$$\mathcal{E}_B^{(m)}(t) = \mathcal{E}^{(m)}(t) e^{i t m \mu B} = \mathcal{E}_0^{(m)} e^{-(\alpha - i \mu B m) t} \quad (240)$$

In questo modo il problema col campo magnetico è ridotto a quello in assenza di campo magnetico con un campo elettrico le cui diverse componenti hanno diverse dipendenze temporali.

Domanda 2: Transizioni $n = 0 \rightarrow n = 1$

L'ampiezza di transizione di un oscillatore armonico unidimensionale di frequenza ω forzato si esprime in termini della funzione

$$f_\omega(t) = \frac{\lambda}{\hbar} \int_0^t dt' e^{i \omega t'} F(t') \quad (241)$$

dove $F(t)$ è la forza esterna e

$$\lambda = \frac{\hbar}{2 M \omega} \quad (242)$$

è la lunghezza caratteristica dell'oscillatore. Nel nostro caso quindi dobbiamo considerare le tre funzioni corrispondenti alle componenti del campo elettrico di momento angolare definito

$$f_\omega^{(m)}(t) = \frac{e \lambda}{\hbar} \int_0^t dt' e^{i \omega t'} \mathcal{E}_B^{(m)}(t') = \frac{e \mathcal{E}_0^{(m)} \lambda}{\hbar} \int_0^t dt' e^{(i(\omega + \mu m B) - \alpha) t'} \quad (243)$$

Per $t \rightarrow \infty$ otteniamo

$$A^{(m)} \equiv f_\omega^{(m)}(\infty) = \frac{e \mathcal{E}_0^{(m)} \lambda}{\hbar (\alpha - i(\omega + \mu m B))} \quad (244)$$

L'ampiezza di transizione dallo stato con $n = 0$ al tripletto con $n = 1, l = 1$ è all'ordine più basso

$$A_{n=0 \rightarrow n=1; l=1; m} = A^{(m)} \quad (245)$$

Le probabilità che di transizione nei corrispondenti stati è dunque

$$P_{n=0 \rightarrow n=1; l=1; m} = \frac{e^2 |\mathcal{E}_0^{(m)}|^2 \lambda^2}{\hbar^2 (\alpha^2 + (\omega + \mu m B)^2)} \quad (246)$$

Il rapporto tra le popolazioni degli stati con $m = \pm 1$ è dunque

$$\frac{P_{n=0 \rightarrow n=1; l=1; m=1}}{P_{n=0 \rightarrow n=1; l=1; m=-1}} = \frac{\alpha^2 + (\omega - \mu B)^2}{\alpha^2 + (\omega + \mu B)^2} \quad (247)$$

mentre quello tra gli stati $m = \pm 1$ e $m = 0$ è

$$\frac{P_{n=0 \rightarrow n=1; l=1; m=\pm 1}}{P_{n=0 \rightarrow n=1; l=1; m=0}} = \frac{I_+}{I_0} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + (\omega \pm \mu B)^2} \quad (248)$$

dove I_+ è intensità della radiazione polarizzata circolarmente e I_0 quella di quella polarizzata longitudinalmente.

Domanda 3 : Transizioni $n = 0 \rightarrow n = 2$

Il primo contributo non nullo alle ampiezze di transizione è del secondo ordine in teoria delle perturbazioni. Le ampiezze sono, all'ordine più basso non nullo

$$A_{n=0 \rightarrow n=2; l=2; m=\pm 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A^{(\pm)})^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{e \mathcal{E}_0^{(\pm)} \lambda}{\hbar(\alpha - i(\omega \mp \mu B))} \right]^2 \quad (249)$$

$$A_{n=0 \rightarrow n=2; l=2; m=\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A^{(\pm)})^2 = \frac{e \mathcal{E}_0^{(\pm)} \lambda}{\hbar(\alpha - i(\omega \mp \mu B))} \frac{e \mathcal{E}_0^{(0)} \lambda}{\hbar(\alpha - i\omega)} \quad (250)$$

$$\begin{aligned} A_{n=0 \rightarrow n=2; l=2; m=0} &= \sqrt{\frac{1}{3}} A_{n=0 \rightarrow |1,1,0\rangle} - \sqrt{\frac{2}{3}} A_{n=0 \rightarrow |0,0,2\rangle} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{e \mathcal{E}_0^{(+)} \lambda}{\hbar(\alpha - i(\omega - \mu B))} \frac{e \mathcal{E}_0^{(-)} \lambda}{\hbar(\alpha - i(\omega + \mu B))} + \\ &\quad - \sqrt{\frac{1}{3}} \left[\frac{e \mathcal{E}_0^{(0)} \lambda}{\hbar(\alpha - i\omega)} \right]^2 \end{aligned} \quad (251)$$

$$\begin{aligned} A_{n=0 \rightarrow n=2; l=0; m=0} &= +\sqrt{\frac{2}{3}} A_{n=0 \rightarrow |1,1,0\rangle} + \sqrt{\frac{1}{3}} A_{n=0 \rightarrow |0,0,2\rangle} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{e \mathcal{E}_0^{(+)} \lambda}{\hbar(\alpha - i(\omega - \mu B))} \frac{e \mathcal{E}_0^{(-)} \lambda}{\hbar(\alpha - i(\omega + \mu B))} + \\ &\quad + \sqrt{\frac{1}{6}} \left[\frac{e \mathcal{E}_0^{(0)} \lambda}{\hbar(\alpha - i\omega)} \right]^2 \end{aligned} \quad (252)$$

Domanda 4 : Transizioni $n = 1 \rightarrow n = 2$

Le ampiezze non nulle all'ordine uno in teoria delle perturbazioni sono 10, le altre 8 sono del terzo ordine. Quelle del primo ordine valgono

$$A_{n=1,l=1,m=\pm 1 \rightarrow n=2;l=2;m=\pm 2} = \sqrt{2} \frac{e \mathcal{E}_0^{(\pm)} \lambda}{\hbar(\alpha - i(\omega \mp \mu m B))}$$

$$A_{n=1,l=1,m=\pm 1 \rightarrow n=2;l=2;m=\pm 1} = \frac{e \mathcal{E}_0^{(0)} \lambda}{\hbar(\alpha - i\omega)}$$

$$\begin{aligned} A_{n=1,l=1,m=\pm 1 \rightarrow n=2;l=2;m=0} &= \sqrt{\frac{1}{3}} A_{n=1,l=1,m=\pm 1 \rightarrow |1,1,0\rangle} + \\ &\quad - \sqrt{\frac{2}{3}} A_{n=1,l=1,m=\pm 1 \rightarrow |0,0,2\rangle} = \\ &\quad \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{e \mathcal{E}_0^{(\mp)} \lambda}{\hbar(\alpha - i(\omega \mp \mu m B))} + O(\lambda^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{n=1,l=1,m=\pm 1 \rightarrow n=2;l=0;m=0} &= + \sqrt{\frac{2}{3}} A_{n=1,l=1,m=\pm 1 \rightarrow |1,1,0\rangle} + \\ &\quad + \sqrt{\frac{1}{3}} A_{n=1,l=1,m=\pm 1 \rightarrow |0,0,2\rangle} = \\ &= + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{e \mathcal{E}_0^{(\mp)} \lambda}{\hbar(\alpha - i(\omega \mp \mu m B))} + O(\lambda^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{n=1,l=1,m=0 \rightarrow n=2;l=2;m=0} &= \sqrt{\frac{1}{3}} A_{n=1,l=1,m=0 \rightarrow |1,1,0\rangle} + \\ &\quad - \sqrt{\frac{2}{3}} A_{n=1,l=1,m=0 \rightarrow |0,0,2\rangle} = \\ &\quad - \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{e \mathcal{E}_0^{(0)} \lambda}{\hbar(\alpha - i\omega)} + O(\lambda^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{n=1,l=1,m=0 \rightarrow n=2;l=0;m=0} &= + \sqrt{\frac{2}{3}} A_{n=1,l=1,m=0 \rightarrow |1,1,0\rangle} + \\ &\quad + \sqrt{\frac{1}{3}} A_{n=1,l=1,m=0 \rightarrow |0,0,2\rangle} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{e \mathcal{E}_0^{(0)} \lambda}{\hbar(\alpha - i\omega)} + O(\lambda^3) \end{aligned}$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 20/07/2006

Problema

Una particella di massa m , impulso \vec{k} e spin $1/2$ è diffusa da un potenziale dipendente dallo spin

$$V(\vec{x}) = e^{-\alpha|\vec{x}|^2} (a + b \vec{\sigma} \cdot \vec{x}) \quad (253)$$

dove $\alpha > 0$, a e b sono delle costanti, e $\vec{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ sono le matrici di spin di Pauli.

Domanda 1

Si supponga che la particella incidente abbia spin definito $1/2$ lungo la direzione del moto. Si calcolino, all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni, la sezione di diffusione ad un angolo θ rispetto a \vec{k} senza misurazione dello stato di spin finale. Si risponda alla stessa domanda nel caso in cui lo spin dello stato incidente sia $-1/2$ lungo la direzione di incidenza.

Domanda 2

Si calcolino, all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni, le sezioni di diffusione ad angolo θ per: a) una particella incidente di spin definito $+1/2$ lungo \vec{k} e spin definito $+1/2$ nello stato finale; b) una particella incidente di spin definito $+1/2$ lungo \vec{k} e spin definito $-1/2$ nello stato finale. Si risponda alla stessa domanda nel caso in cui lo spin dello stato incidente sia $-1/2$ lungo la direzione di incidenza.

Domanda 3

Si calcoli nella stessa approssimazione la sezione d'urto integrata nel caso di particella incidente con spin definito e senza misura degli stati di spin finali.

Prova Scritta del 20/07/2006: Soluzione

Dobbiamo calcolare l'integrale

$$f_{born} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\vec{x} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} (a + b\vec{\sigma}\cdot\vec{x}) e^{-\alpha|\vec{x}|^2} \quad (254)$$

dove

$$\vec{q} \equiv \vec{k} - \vec{k}' \quad (255)$$

è l'impulso trasferito. Introduciamo dunque l'integrale gaussiano

$$I(\vec{q}, \alpha) = \int d\vec{x} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} e^{-\alpha|\vec{x}|^2} = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\vec{q}^2}{4\alpha}} \quad (256)$$

Derivando rispetto a \vec{q} otteniamo

$$\int d\vec{x} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} e^{-\alpha|\vec{x}|^2} \vec{x} = -i \frac{\partial}{\partial \vec{q}} I(\vec{q}, \alpha) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\vec{q}^2}{4\alpha}} \frac{i\vec{q}}{2\alpha} \quad (257)$$

Pertanto

$$f_{born} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\vec{q}^2}{4\alpha}} \left(a + \frac{ib}{2\alpha} \vec{\sigma}\cdot\vec{q}\right) \quad (258)$$

Prendendo l'asse delle z lungo la direzione di incidenza \vec{k} otteniamo

$$\vec{q} = k(-\sin\theta, 0, 1 - \cos\theta) \quad (259)$$

Pertanto se lo stato di spin incidente è $|\pm\rangle$ abbiamo

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{q}|\pm\rangle = \pm k(1 - \cos\theta)|\pm\rangle - k\sin\theta|\mp\rangle \quad (260)$$

Dunque

$$f_{born}|+\rangle = -\frac{m\pi^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\vec{q}^2}{4\alpha}}}{2\alpha^{\frac{3}{2}}\hbar^2} \left[\left(a + \frac{ibk(1 - \cos\theta)}{2\alpha}\right)|+\rangle - \frac{ibk\sin\theta}{2\alpha}|-\rangle \right] \quad (261)$$

ed analogamente

$$f_{born}|-\rangle = -\frac{m\pi^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\vec{q}^2}{4\alpha}}}{2\alpha^{\frac{3}{2}}\hbar^2} \left[\left(a - \frac{ibk(1 - \cos\theta)}{2\alpha}\right)|-\rangle - \frac{ibk\sin\theta}{2\alpha}|+\rangle \right] \quad (262)$$

La sezione d'urto con spin incidente e finale uguale è pertanto

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{++}}{d\Omega} &= \frac{d\sigma_{--}}{d\Omega} = \frac{m^2 \pi e^{-\frac{q^2}{2\alpha}}}{4\alpha^3 \hbar^4} \left[a^2 + \frac{b^2 k^2 (1 - \cos\theta)^2}{4\alpha^2} \right] = \\ &= -\frac{m^2 \pi e^{-\frac{q^2}{2\alpha}}}{4\alpha^3 \hbar^4} \left[a^2 + \frac{b^2 q^4}{16\alpha^2 k^2} \right]\end{aligned}\quad (263)$$

mentre quella con spin incidente e finale diversi si scrive

$$\frac{d\sigma_{+-}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{-+}}{d\Omega} = \frac{m^2 \pi e^{-\frac{q^2}{2\alpha}}}{4\alpha^3 \hbar^4} \left[\frac{b^2 k^2 \sin^2\theta}{4\alpha^2} \right]\quad (264)$$

Per ottenere la sezione d'urto sommata sugli stati finali (nessuna misura dello spin finale) possiamo partire direttamente dall'espressione (258)

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{\pm}}{d\Omega} &= \frac{m^2 \pi e^{-\frac{q^2}{2\alpha}}}{4\alpha^3 \hbar^4} \left| \left(a + \frac{ib}{2\alpha} \vec{\sigma} \cdot \vec{q} \right) |\pm\rangle \right|^2 = \\ &= \frac{m^2 \pi e^{-\frac{q^2}{2\alpha}}}{4\alpha^3 \hbar^4} \langle \pm | \left(a^2 + \frac{b^2}{4\alpha^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{q})^2 \right) | \pm \rangle = \\ &= \frac{m^2 \pi e^{-\frac{q^2}{2\alpha}}}{4\alpha^3 \hbar^4} \left(a^2 + \frac{b^2 q^2}{4\alpha^2} \right)\end{aligned}\quad (265)$$

La sezione d'urto integrata è

$$\begin{aligned}\sigma_{\pm} &= \frac{m^2 \pi^2}{2\alpha^3 \hbar^4} \int_0^{2k} \frac{dq q}{k^2} \left(a^2 + \frac{b^2 q^2}{4\alpha^2} \right) e^{-\frac{q^2}{2\alpha}} = \\ &= \frac{m^2 \pi^2}{2k^2 \alpha^2 \hbar^4} \int_0^{\frac{2k^2}{\alpha}} dx \left(a^2 + \frac{b^2 x}{2\alpha} \right) e^{-x} = \\ &= \frac{m^2 \pi^2}{2k^2 \alpha^2 \hbar^4} \left[\left(a^2 + \frac{b^2}{2\alpha} \right) (1 - e^{-\frac{2k^2}{\alpha}}) - \frac{b^2 k^2}{\alpha^2} e^{-\frac{2k^2}{\alpha}} \right]\end{aligned}\quad (266)$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 01/09/2006

Problema 1

Si consideri la diffusione di un elettrone nel potenziale elettrostatico

$$V(\vec{x}) = e^2 \left[\frac{1}{|\vec{x}|} - \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] \quad (267)$$

generato da un atomo di idrogeno: $e\rho(\vec{x})$ è la densità di carica dell'elettrone dell'idrogeno che si suppone nello stato fondamentale (ed il protone è considerato puntiforme).

Domanda 1

Si calcoli l'ampiezza di diffusione in approssimazione di Born. Se ne valuti il limite di bassa energia.

Domanda 2

Per quali energie dell'elettrone incidente l'approssimazione di Born è affidabile?

Problema 2

Una particella di massa m , impulso k , spin 1 e proiezione dello spin definita lungo l'asse di incidenza, è diffusa dal potenziale

$$V(\vec{x}) = V_0 e^{-\alpha|\vec{x}|^2} \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (268)$$

dove \vec{L} è il momento angolare orbitale della particella e \vec{S} il suo spin, V_0 ed $\alpha > 0$ parametri reali.

Domanda 1

Si calcoli, all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni, la sezione di diffusione ad angolo θ rispetto alla direzione di incidenza senza misurazione dello stato di spin finale.

Domanda 2

Si calcolino le sezioni d'urto differenziali nel caso di spin definiti (lungo la direzione di incidenza) nello stato iniziale e finale.

Prova Scritta del 01/09/2006: Soluzione

Problema 1

Dobbiamo calcolare l'integrale

$$f_{born} = -\frac{e^2 m}{2 \pi \hbar^2} \int d\vec{x} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \left[\frac{1}{|\vec{x}|} - \int d^3 x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] \quad (269)$$

dove

$$\vec{q} \equiv \vec{k} - \vec{k}' \quad (270)$$

è l'impulso trasferito. Abbiamo

$$\int d\vec{x} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{|\vec{x}|} = \frac{4\pi}{q^2} \quad (271)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \int d\vec{x} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \int d^3 x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= \int d\vec{x}' \rho(\vec{x}') e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}'} \int d^3 \vec{x} \frac{e^{i\vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \\ &= \frac{4\pi}{q^2} \int d\vec{x}' \rho(\vec{x}') e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}'} \end{aligned} \quad (272)$$

Per un elettrone nello stato fondamentale dell'idrogeno

$$\rho(\vec{x}) = |\psi_{100}(\vec{x})|^2 = \frac{e^{-\frac{2|\vec{x}|}{a_B}}}{\pi a_B^3} \quad (273)$$

Dunque

$$\begin{aligned} \int d\vec{x} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \int d^3 x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= \frac{4}{a_B^3 q^2} \int d\vec{x}' e^{-\frac{2|\vec{x}'|}{a_B}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}'} = \\ &= \frac{8\pi}{i a_B^3 q^3} \int_0^\infty r dr e^{-\frac{2r}{a_B}} [e^{iqr} - e^{-iqr}] = \\ &= \frac{8\pi}{i a_B^3 q^3} \left[\frac{1}{(\frac{2}{a_B} - iq)^2} - \frac{1}{(\frac{2}{a_B} + iq)^2} \right] = \\ &= \frac{64\pi}{a_B^4 q^2} \frac{1}{(\frac{4}{a_B^2} + q^2)^2} = \frac{4\pi}{q^2} \frac{1}{(1 + \frac{a_B^2 q^2}{4})^2} \end{aligned} \quad (274)$$

In definitiva:

$$\begin{aligned} f_{born} &= -\frac{2e^2 m}{\hbar^2 q^2} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{a_B^2 q^2}{4}\right)^2} \right] = -\frac{2}{a_B q^2} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{a_B^2 q^2}{4}\right)^2} \right] = \\ &= -a_B + O(q^2) \end{aligned} \quad (275)$$

Problema 2

Le ampiezze in approssimazione di Born sono

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}', \sigma' | f_{born} | \vec{k}, \sigma \rangle &= -\frac{V_0 m}{2\pi \hbar^2} \int d\vec{x} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x} - \alpha|\vec{x}|^2} \epsilon_{ijk} x^i k^j \langle \sigma' | S^k | \sigma \rangle = \\ &= -\frac{V_0 m}{4i\pi\alpha\hbar^2} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{q^2}{4\alpha}} \epsilon_{ijk} q^i k^j \langle \sigma' | S^k | \sigma \rangle = \\ &= \frac{V_0 m}{4i\pi\alpha\hbar^2} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{q^2}{4\alpha}} \epsilon_{ijk} k'^i k^j \langle \sigma' | S^k | \sigma \rangle = \\ &= \frac{V_0 m}{4i\pi\alpha\hbar^2} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{q^2}{4\alpha}} k^2 \sin\theta \langle \sigma' | \vec{n} \cdot \vec{S} | \sigma \rangle \end{aligned} \quad (276)$$

dove \vec{n} è un versore

$$\vec{n} = \frac{\vec{k}' \times \vec{k}}{|\vec{k}' \times \vec{k}|} \quad (277)$$

La sezione d'urto di diffusione differenziale nel caso in cui non misuriamo lo spin finale è dunque

$$\frac{d\sigma_\sigma}{d\Omega} = \frac{V_0^2 m^2}{16\pi^2 \alpha^2 \hbar^4} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^3 e^{-\frac{q^2}{2\alpha}} k^4 \sin^2\theta \langle \sigma | (\vec{n} \cdot \vec{S})^2 | \sigma \rangle \quad (278)$$

Se lo stato di spin iniziale è definito lungo \vec{k} possiamo prendere come versore \vec{n} la direzione x

$$\vec{n} \cdot \vec{S} = S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) \quad (279)$$

Pertanto

$$\langle +1 | (\vec{n} \cdot \vec{S})^2 | +1 \rangle = \langle -1 | (\vec{n} \cdot \vec{S})^2 | -1 \rangle = \frac{1}{4} |S_\pm|_{\mp}^2 = \frac{\hbar^2}{2} \quad (280)$$

mentre

$$\langle 0 | (\vec{n} \cdot \vec{S})^2 | 0 \rangle = \langle 0 | S_x^2 | 0 \rangle = \frac{2}{4} |S_\pm|_0^2 = \hbar^2 \quad (281)$$

Per quanto riguarda la sezione d'urto di diffusione tra stati di spin σ e σ' , poiché

$$\langle \sigma' | \vec{n} \cdot \vec{S} | \sigma \rangle = \frac{1}{2} \langle \sigma' | S_- + S_+ | \sigma \rangle \quad (282)$$

le ampiezze non nulle sono quelle con $|\sigma - \sigma'| = 1$:

$$\langle +1 | \vec{n} \cdot \vec{S} | 0 \rangle = \langle 0 | \vec{n} \cdot \vec{S} | -1 \rangle = \langle -1 | \vec{n} \cdot \vec{S} | 0 \rangle = \langle 0 | \vec{n} \cdot \vec{S} | +1 \rangle = \sqrt{2} \hbar \quad (283)$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 9/11/2006

Problema 1

Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale di frequenza ω e massa m . Siano $|n\rangle$, con $n = 0, 1, \dots$ gli autostati del sistema imperturbato. Al tempo $t = 0$ viene accesa la perturbazione

$$V(x) = g e^{ikx} \quad (284)$$

Domanda 1

Si calcoli, al primo ordine in teoria delle perturbazioni la probabilità di transizione al tempo t dallo stato $|n\rangle$ allo stato $|m\rangle$.

Problema 2

Una particella di massa m , di energia E e di spin $1/2$ è diffusa da una particella infinitamente massiva di spin 1 . L'interazione è descritta dall'Hamiltoniana

$$V = a \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \frac{e^{-br}}{r} \quad (285)$$

dove r è la distanza tra le due particelle, \vec{S}_1 lo spin della particella incidente e \vec{S}_2 è lo spin del bersaglio.

Domanda 1

Si calcoli la sezione d'urto differenziale in approssimazione di Born per i vari possibili stati di spin delle particelle incidenti, supponendo di non misurare gli stati di spin finali.

Prova Scritta del 9/11/2006: Soluzione

Problema 1

Esprimiamo la perturbazione in termini degli operatori di creazione ed annichilazione

$$V(x) = g e^{k\lambda a^\dagger - k\lambda a} = g e^{k\lambda a^\dagger} e^{-k\lambda a} e^{-\frac{(k\lambda)^2}{2}} \quad (286)$$

Dunque

$$\begin{aligned} \langle m|V(x)|n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{m!}} \langle 0|a^m V(x) |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}} \sqrt{\langle 0|V(x)(a+k\lambda)^m |n\rangle} = \\ &= \frac{g}{\sqrt{m!n!}} e^{-\frac{(k\lambda)^2}{2}} \langle 0|e^{k\lambda a^\dagger} (a+k\lambda)^m e^{-k\lambda a} (a^\dagger)^n |0\rangle = \\ &= \frac{g}{\sqrt{m!n!}} e^{-\frac{(k\lambda)^2}{2}} \langle 0|(a+k\lambda)^m e^{-k\lambda a} (a^\dagger)^n |0\rangle = \\ &= \frac{g}{\sqrt{m!n!}} e^{-\frac{(k\lambda)^2}{2}} \langle 0|(a+k\lambda)^m (a^\dagger - k\lambda)^n |0\rangle = \\ &= \frac{g}{\sqrt{m!n!}} e^{-\frac{(k\lambda)^2}{2}} \sum_{q=0}^m \sum_{p=0}^n (k\lambda)^{q+p} (-1)^p \binom{m}{q} \binom{n}{p} \times \\ &\times \langle 0|a^{m-q} (a^\dagger)^{n-p} |0\rangle = \\ &= \frac{g}{\sqrt{m!n!}} e^{-\frac{(k\lambda)^2}{2}} \sum_{q=0}^m \sum_{p=0}^n (k\lambda)^{q+p} (-1)^p \binom{m}{q} \binom{n}{p} \times \\ &\times \delta_{m-q,n-p} (m-q)! = \\ &= \frac{g}{\sqrt{m!n!}} e^{-\frac{(k\lambda)^2}{2}} \sum_{q=\min\{0,m-n\}}^m (k\lambda)^{2q+n-m} (-1)^{n-m+q} \binom{m}{q} \times \\ &\times \binom{n}{n-m+q} (m-q)! = \\ &= g \sqrt{m!n!} e^{-\frac{(k\lambda)^2}{2}} \sum_{q=\max\{0,m-n\}}^m (k\lambda)^{2q+n-m} (-1)^{n-m+q} \times \\ &\times \frac{1}{q!(m-q)!} \frac{1}{(m-q)!(n-m+q)!} (m-q)! = \\ &= g \sqrt{m!n!} e^{-\frac{(k\lambda)^2}{2}} \sum_{q=\max\{0,m-n\}}^m \frac{(-1)^{n-m+q} (k\lambda)^{2q+n-m}}{q!(m-q)!(n-m+q)!} \equiv A_{m,n} \end{aligned}$$

(287)

Per esempio se la particella si trova nello stato fondamentale al tempo $t = 0$, $n = 0$

$$\langle m|V(x)|0\rangle = g\sqrt{m!}e^{-\frac{(k\lambda)^2}{2}}\frac{(k\lambda)^m}{m!} = \frac{g}{\sqrt{m!}}e^{-\frac{(k\lambda)^2}{2}}(k\lambda)^m \quad (288)$$

L'ampiezza di transizione al tempo t al primo ordine è quindi

$$A_{m,n}(t) = \frac{1 - e^{i(m-n)\omega t}}{(m-n)\hbar\omega} A_{m,n} \quad (289)$$

La probabilità di transizione al tempo t per $n = 0$ è

$$P_{m,0}(t) = \frac{g^2(k\lambda)^{2m}}{m!}e^{-(k\lambda)^2}\left(\frac{\sin\frac{(m-n)\omega t}{2}}{\frac{(m-n)\hbar\omega}{2}}\right)^2 \quad (290)$$

Problema 2

L' ampiezza di Born è

$$f_{Born} = -\frac{m a}{2\pi\hbar^2}\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \int d\vec{x} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}-b|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} = -\frac{2 m a}{\hbar^2(\vec{q}^2 + b^2)}\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \quad (291)$$

La sezione d'urto differenziale sommata sugli stati finali è dunque

$$\frac{d\sigma_i}{d\Omega} = \frac{4 m^2 a^2}{\hbar^4(\vec{q}^2 + b^2)^2} \langle i|(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2)^2|i\rangle \equiv \sigma \langle i|(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2)^2|i\rangle \quad (292)$$

dove $|i\rangle$ è uno dei 6 possibili stati iniziali. Sia

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 \quad (293)$$

l'operatore di spin totale. $\vec{S}^2 = S(S+1)$ assume i due possibili valori

$$S(S+1) = \frac{3}{4}, \frac{15}{4} \quad (294)$$

per $S = 1/2, 3/2$ rispettivamente. Pertanto l'operatore funzione degli spin che compare nel membro di destra (291) assume due possibili autovalori:

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2}\left(S(S+1) - \frac{11}{4}\right) = -1, \frac{1}{2} \quad (295)$$

e

$$(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2)^2 = 1, \frac{1}{4} \quad (296)$$

Dunque

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\pm\frac{1}{2}, \pm 1) = \frac{1}{4}\sigma \quad (297)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} |\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\rangle |1; 0\rangle &= a |\frac{3}{2}; +\frac{1}{2}\rangle - b |\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\rangle |1; +1\rangle &= b |\frac{3}{2}; +\frac{1}{2}\rangle + a |\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\rangle \end{aligned} \quad (298)$$

e

$$\begin{aligned} |\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\rangle |1; 0\rangle &= a |\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\rangle + b |\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\rangle |1; -1\rangle &= b |\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\rangle - a |\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\rangle \end{aligned} \quad (299)$$

con

$$a = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (300)$$

Pertanto

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\pm\frac{1}{2}, 0) = (\frac{a^2}{4} + b^2)\sigma = \frac{1}{2}\sigma \quad (301)$$

e

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mp\frac{1}{2}, \pm 1) = (\frac{b^2}{4} + a^2)\sigma = \frac{3}{4}\sigma \quad (302)$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 22/01/2007

Problema 1

Una particella di spin $1/2$, massa m e momento \vec{p} diffonde nel potenziale

$$H_I = V(r) + \frac{g}{2m^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (303)$$

dove

$$V(r) = -V_0 \theta(r_0 - r) \quad (304)$$

dove \vec{L} è il momento angolare orbitale e \vec{S} lo spin della particella. Sia \vec{p} il momento della particella diffusa e θ l'angolo di diffusione.

Si calcoli la sezione d'urto di diffusione differenziale ad angolo θ in approssimazione di Born per particelle con spin definito lungo la direzione perpendicolare al piano di diffusione.

Problema 2

Una particella di massa m , di spin $1/2$ si trova nello stato fondamentale del sistema descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{x}^2 \quad (305)$$

Al tempo $t = 0$ il sistema è soggetto alla perturbazione

$$V(t) = V_0 \frac{\vec{z}}{L} \vec{\sigma} \cdot \vec{\hat{x}} \theta(\tau - t) \quad (306)$$

dove $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$ è lo spin della particella, $\vec{\hat{x}} \equiv \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$, V_0 e L sono delle costanti.

Si calcolino al primo ordine in teoria delle perturbazioni le probabilità che il sistema si trovi al tempo $t = \infty$ nel primo e nel secondo livello eccitato.

Prova Scritta del 22/01/2007: Soluzione

Problema 1

Poniamo

$$\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p} \quad (307)$$

Calcoliamo gli integrali

$$\begin{aligned} I_{\vec{q}} &= \int d^3\vec{x} \theta(r_0 - r) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} = 2\pi \int_0^{r_0} dr r^2 \frac{e^{ir_0q} - e^{-ir_0q}}{iqr} = \\ &= \frac{4\pi}{q^3} \int_0^{r_0q} dy y \sin y = \frac{4\pi}{q^3} (\sin qr_0 - qr_0 \cos qr_0) \end{aligned} \quad (308)$$

$$\begin{aligned} I'_{\vec{q}} &= \int d^3\vec{x} \delta(r - r_0) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} = 2\pi r_0^2 \frac{e^{ir_0q} - e^{-ir_0q}}{iqr_0} = \\ &= \frac{4\pi}{q} r_0 \sin qr_0 \end{aligned} \quad (309)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}' | \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \vec{L} | \vec{p} \rangle &= \hbar V_0 \int d^3\vec{x} \frac{\delta(r - r_0)}{r} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \vec{x} \times \vec{p} = \\ &= \frac{i\hbar V_0}{r_0} \frac{\partial I'_{\vec{q}}}{\partial \vec{q}} \times \vec{p} = \frac{4\pi i \hbar V_0}{q^2} (qr_0 \cos qr_0 - \sin qr_0) \frac{\vec{q}}{q} \times \vec{p} \\ &= \frac{4\pi i \hbar V_0}{q^3} (qr_0 \cos qr_0 - \sin qr_0) \vec{p}' \times \vec{p} \end{aligned} \quad (310)$$

In conclusione l'ampiezza di Born come operatore nello spazio degli stati di spin è

$$f(\theta) = \frac{2mV_0}{\hbar^2 q^3} (\sin qr_0 - qr_0 \cos qr_0) \left(1 - \frac{ig\hbar^2}{4m^2} (\vec{p}' \times \vec{p}') \cdot \vec{\sigma} \right) \quad (311)$$

La sezione d'urto differenziale per particelle nello stato iniziale con spin definito lungo la direzione $\vec{p}' \times \vec{p}'$ è dunque

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{4m^2 V_0^2}{\hbar^4 q^6} (\sin qr_0 - qr_0 \cos qr_0)^2 \left(1 + \frac{g^2 \hbar^4 p^2 \sin^2 \theta}{16 m^4} \right) \quad (312)$$

Problema 2

Abbiamo

$$\begin{aligned}
z \vec{\hat{x}} \cdot \sigma &= r (\cos \theta \sin \theta e^{i\phi} \sigma_- + \cos \theta \sin \theta e^{-i\phi} \sigma_+ + \cos^2 \theta \sigma_3) = \\
&= r (\cos \theta \sin \theta e^{i\phi} \sigma_- + \cos \theta \sin \theta e^{-i\phi} \sigma_+ + \cos^2 \theta \sigma_3) = \\
&= \sqrt{\frac{8\pi}{15}} r \left[Y_{2,1} \sigma_- + Y_{2,-1} \sigma_+ + \left(\sqrt{\frac{5}{6}} Y_{0,0} - \sqrt{\frac{2}{3}} Y_{2,0} \right) \sigma_3 \right] \quad (313)
\end{aligned}$$

dove

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i \sigma_2) \quad (314)$$

Pertanto gli elementi di matrice $\langle n, l, m | V(t) | 0, 0, 0 \rangle$ sono diversi da zero solo per $l = 2, m = -1, 0, 1$ e $l = m = 0$. Poiché il primo livello eccitato con $n = 1$ ha $l = 1$, le ampiezze di transizione al primo ordine dal fondamentale al primo livello eccitato sono nulle. Gli elementi di matrice non nulli sono dunque

$$\begin{aligned}
\langle 2, 0, 0 | z \vec{\hat{x}} | 0, 0, 0 \rangle \cdot \sigma &= \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \sigma_3 \int_0^{\infty} dr r^3 R_{20} R_{00} \\
\langle 2, 2, 0 | z \vec{\hat{x}} | 0, 0, 0 \rangle \cdot \sigma &= -\frac{4}{3} \sigma_3 \sqrt{\frac{\pi}{5}} \int_0^{\infty} dr r^3 R_{22} R_{00} \\
\langle 2, 2, \pm 1 | z \vec{\hat{x}} | 0, 0, 0 \rangle \cdot \sigma &= \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \sigma_{\mp} \int_0^{\infty} dr r^3 R_{22} R_{00} \quad (315)
\end{aligned}$$

Determiniamo R_{nl} per l'oscillatore armonico isotropo partendo dalle funzioni d'onda nella base degli oscillatori ψ_{n_x, n_y, n_z} . Posto

$$\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \quad (316)$$

abbiamo

$$\begin{aligned}
\psi_{0,0,0} &= \frac{1}{\pi^{\frac{3}{4}} \lambda^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{2\lambda^2}} = R_{00} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
\psi_{2,0,0} &= \frac{1}{\pi^{\frac{3}{4}} \lambda^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{2x^2}{\lambda^2} - 1 \right] e^{-\frac{r^2}{2\lambda^2}} & \psi_{0,2,0} &= \frac{1}{\pi^{\frac{3}{4}} \lambda^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{2y^2}{\lambda^2} - 1 \right] e^{-\frac{r^2}{2\lambda^2}} \\
\psi_{0,0,2} &= \frac{1}{\pi^{\frac{3}{4}} \lambda^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{2z^2}{\lambda^2} - 1 \right] e^{-\frac{r^2}{2\lambda^2}} & \psi_{1,1,0} &= \frac{1}{\pi^{\frac{3}{4}} \lambda^{\frac{3}{2}}} \frac{2xy}{\lambda^2} e^{-\frac{r^2}{2\lambda^2}} \\
\psi_{1,0,1} &= \frac{1}{\pi^{\frac{3}{4}} \lambda^{\frac{3}{2}}} \frac{2xz}{\lambda^2} e^{-\frac{r^2}{2\lambda^2}} & \psi_{0,1,1} &= \frac{1}{\pi^{\frac{3}{4}} \lambda^{\frac{3}{2}}} \frac{2yz}{\lambda^2} e^{-\frac{r^2}{2\lambda^2}} \quad (317)
\end{aligned}$$

Da queste espressioni deduciamo

$$\begin{aligned}
|2, 0, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\psi_{2,0,0} + \psi_{0,2,0} + \psi_{0,0,2} \right) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{4}} \lambda^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\frac{2r^2}{\lambda^2} - 3 \right] e^{-\frac{r^2}{2\lambda^2}} = \\
&= R_{20} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
|2, 2, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\psi_{2,0,0} + \psi_{0,2,0} - 2\psi_{0,0,2} \right) = \\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{3}{4}} \lambda^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{12}} \frac{2(x^2 + y^2 - 2z^2)}{\lambda^2} e^{-\frac{r^2}{2\lambda^2}} = \\
&= R_{22} \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^2} \\
|2, 2, \pm 1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_{1,0,1} \pm i\psi_{0,1,1} \right) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{4}} \lambda^{\frac{3}{2}}} \frac{\sqrt{2}(x \pm iy)z}{\lambda^2} e^{-\frac{r^2}{2\lambda^2}} = \\
&= R_{22} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{(x \pm iy)z}{r^2}
\end{aligned} \tag{318}$$

In conclusione

$$\begin{aligned}
R_{00}(r) &= \frac{2}{\pi^{\frac{1}{4}} \lambda^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{2\lambda^2}} \\
R_{20}(r) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} \pi^{\frac{1}{4}} \lambda^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{2r^2}{\lambda^2} - 3 \right] e^{-\frac{r^2}{2\lambda^2}} \\
R_{22}(r) &= \frac{4}{\sqrt{15} \pi^{\frac{1}{4}} \lambda^{\frac{3}{2}}} \frac{r^2}{\lambda^2} e^{-\frac{r^2}{2\lambda^2}}
\end{aligned} \tag{319}$$

Pertanto

$$\int_0^\infty dr r^3 R_{20} R_{00} = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \lambda \quad \int_0^\infty dr r^3 R_{22} R_{00} = 8\sqrt{\frac{2}{15\pi}} \lambda \tag{320}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\langle 2, 0, 0 | z \vec{\hat{x}} | 0, 0, 0 \rangle \cdot \sigma &= \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \sigma_3 \lambda \\
\langle 2, 2, 0 | z \vec{\hat{x}} | 0, 0, 0 \rangle \cdot \sigma &= -\frac{32}{15} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_3 \lambda \\
\langle 2, 2, \pm 1 | z \vec{\hat{x}} | 0, 0, 0 \rangle \cdot \sigma &= \frac{32}{15} \sigma_{\mp} \lambda
\end{aligned} \tag{321}$$

Le ampiezze di transizione diventano

$$\begin{aligned}
 A_{000 \rightarrow 200} &= -\frac{V_0 \lambda}{L} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \sigma_3 \frac{e^{i2\omega\tau} - 1}{2\hbar\omega} \\
 A_{000 \rightarrow 220} &= \frac{V_0 \lambda}{L} \frac{32}{15} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_3 \frac{e^{i2\omega\tau} - 1}{2\hbar\omega} \\
 A_{000 \rightarrow 22\pm 1} &= \frac{V_0 \lambda}{L} \frac{32}{15} \sigma_{\mp} \frac{e^{i2\omega\tau} - 1}{2\hbar\omega}
 \end{aligned} \tag{322}$$

La probabilità di transizione nel livello $n = 2$ a partire da uno stato con spin definito con $n = 0$ è in definitiva

$$\begin{aligned}
 P_{0 \rightarrow 2} &= \frac{V_0^2 \lambda^2}{L^2} \frac{\sin^2 \omega \tau}{\omega^2 \tau^2} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{2 \cdot 32^2}{3 \cdot 15^2} + \frac{32^2}{15^2} \right) = \\
 &= \frac{V_0^2 \lambda^2}{L^2} \frac{\sin^2 \omega \tau}{\omega^2 \tau^2} \frac{448}{45}
 \end{aligned} \tag{323}$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 19/02/2007

Problema 1

Si consideri la diffusione di una particella di massa m e momento \vec{k} nel potenziale

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r > a \\ \frac{\hbar^2 \alpha}{2mr^2} & r \leq a \end{cases} \quad (324)$$

dove $\alpha > 0$ è una costante reale.

Domanda 1

Si calcolino le ampiezze parziali di diffusione f_l di momento angolare $l = 0$ ed $l = 1$ all'ordine più basso non nullo nell'espansione di bassa energia.

Domanda 2

Si calcoli l'ampiezza di Born di diffusione come serie di potenze nel parametro ak (è sufficiente esibire esplicitamente i primi due termini di questa espansione). Si verifichi la consistenza del risultato con quello della domanda 1.

Problema 2

Un atomo d'idrogeno si trova al tempo $t = -\infty$ nello stato fondamentale ($n = 1, l = m = 0$). L'elettrone è sottoposto al campo elettrico dipendente dal tempo

$$\vec{E}(t) = \frac{\hat{y} \mathcal{E}_0}{1 + \frac{t^2}{\tau^2}} \quad (325)$$

dove \hat{y} è il versore lungo l'asse delle y e $\tau > 0$ è una scala temporale.

Domanda 1

Si calcoli la probabilità che l'elettrone si trovi nel livello eccitato con $n = 2$ al tempo $t = \infty$ al primo ordine in teoria delle perturbazioni. (Può essere utile ricordare che $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx e^{i a x}}{1+x^2} = \pi e^{-|a|}$.)

Domanda 2

Quanto vale questa la probabilità se $\mathcal{E}_0 = 10^6 \text{ volt/cm}$ e $\tau = 10^{-16} \text{ sec}$? È applicabile la teoria delle perturbazioni in questo caso?

Prova Scritta del 19/02/2007: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Per $r \leq a$ l'equazione d'onda per la funzione radiale $\chi_l(r)$ è

$$\chi_l''(r) + \left(k^2 - \frac{l(l+1) + \alpha}{r^2}\right) \chi_l(r) = 0 \quad (326)$$

Per $k^2 = 0$ la soluzione di quest'equazione ha la forma r^c dove c

$$c(c-1) - (l(l+1) + \alpha) = 0 \quad (327)$$

da cui

$$c_l^\pm = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 + \alpha} \quad (328)$$

La soluzione regolare per $r = 0$ è dunque

$$\chi_l(r, k^2 = 0) = A_l r^{c_l^+} \quad r \leq a \quad (329)$$

Il valore della derivata logartimica per $r = a$ è

$$\frac{r \chi_l'(r, k)}{\chi_l(r, k)} = c_l^+ + O(k^2) \quad (330)$$

Confrontando col valore della derivata logartimica della soluzione libera per $r \geq a$ otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{(ak)^{2l+1} \cot \delta_l}{(2l-1)!! (2l+1)!!} &= \frac{l + c_l^+}{l + 1 - c_l^+} + O((ak)^2) \\ &= \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{\alpha}{(l+\frac{1}{2})^2}}}{1 - \sqrt{1 + \frac{\alpha}{(l+\frac{1}{2})^2}}} + O((ak)^2) \end{aligned} \quad (331)$$

Dunque per $l = 0$

$$ak \cot \delta_0 = \frac{c_0^+}{1 - c_0^+} + O((ak)^2) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{1 - \sqrt{1 + 4\alpha}} + O((ak)^2) \quad (332)$$

e

$$f_0 = \frac{a}{ak \cot \delta_0 - iak} = a \frac{1 - \sqrt{1 + 4\alpha}}{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}} + O(ak) \quad (333)$$

Per quanto riguarda $l = 1$

$$\frac{(a k)^3 \cot \delta_1}{3} = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4\alpha}{9}}}{1 - \sqrt{1 + \frac{4\alpha}{9}}} + O((a k)^2) \quad (334)$$

da cui

$$3 f_1 = a (a k)^2 \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{4\alpha}{9}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{4\alpha}{9}}} + O((a k)^3) \quad (335)$$

Espandendo il risultato per $\cot \delta_l$ al primo ordine in α otteniamo

$$\begin{aligned} f_l &= a \frac{(a k)^{2l}}{(2l-1)!! (2l+1)!!} \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{\alpha}{(l+\frac{1}{2})^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{\alpha}{(l+\frac{1}{2})^2}}} + O((a k)^2) = \\ &= -a \alpha \frac{(a k)^{2l}}{(2l+1)^2 (2l-1)!! (2l+1)!!} + \dots \end{aligned} \quad (336)$$

In conclusione

$$\begin{aligned} f_0 &= -a \alpha + \dots \\ 3 f_1 &= -a \alpha \frac{(a k)^2}{3^2} + \dots \end{aligned} \quad (337)$$

sono i risultati perturbativi per le ampiezze parziali.

Domanda 2

L'ampiezza di Born si scrive

$$\begin{aligned} f_{Born} &= -\alpha \int_0^a \frac{dr \sin q r}{r q} = -\frac{\alpha}{q} \int_0^{a q} \frac{dx \sin x}{x} = \\ &= -\frac{\alpha}{q} \left[a q - \frac{(a q)^3}{18} + O((a q)^5) \right] = \\ &= -a \alpha \left[1 - \frac{(a q)^2}{18} + O((a q)^4) \right] \end{aligned} \quad (338)$$

dove

$$a q = 2 a k \sin \frac{\theta}{2} \quad (339)$$

ovvero

$$(a q)^2 = 2 (a k)^2 (1 - \cos \theta) \quad (340)$$

Pertanto

$$f_{Born} = -a\alpha \left[1 - \frac{(ak)^2}{9} + \frac{(ak)^2}{9} \cos\theta + O((aq)^4) \right] \quad (341)$$

in accordo con l'espansione in ampiezze parziali

$$f = f_0 + 3f_1 \cos\theta + \dots \quad (342)$$

Problema 2

La perturbazione dell'Hamiltoniana è

$$V(t) = -ey \frac{\mathcal{E}_0}{1 + \frac{t^2}{\tau^2}} \quad (343)$$

Si tenga presente che

$$\frac{y}{r} = \sin\theta \sin\phi = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_{1,+1} + Y_{1,-1}) \quad (344)$$

L'elemento di matrice rilevante si scrive allora

$$\begin{aligned} \langle 2, 1, \pm 1 | y | 1, 0, 0 \rangle &= \int_0^\infty dr r^3 R_{21}(r) R_{10}(r) \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \times \\ &\quad \times \int d\Omega Y_{1,\pm}^* (Y_{1,+1} + Y_{1,-1}) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} = \\ &= \int_0^\infty dr r^3 R_{21}(r) R_{10}(r) \frac{1}{\sqrt{6}} = \\ &= \frac{2^8 a_B}{3^4 \sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{2^7}{3^5} a_B \end{aligned} \quad (345)$$

dove a_B è il raggio di Bohr.

Le ampiezza di transizione non nulle al primo ordine sono

$$\begin{aligned} A_{|0,0,0\rangle \rightarrow |2,1,\pm 1\rangle} &= \frac{ie a_B \mathcal{E}_0}{\hbar} \frac{2^7}{3^5} \int_{-\infty}^\infty \frac{dt e^{i\omega_{21} t}}{1 + \frac{t^2}{\tau^2}} \\ &= \frac{ie a_B \mathcal{E}_0}{\hbar} \frac{2^7}{3^5} \pi \tau e^{-\omega_{21} \tau} \end{aligned} \quad (346)$$

dove il risultato per l'integrale temporale si può ottenere, per esempio, col metodo dei residui, e

$$\omega_{21} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{e^2}{2\hbar a_B} = \frac{3e^2}{8\hbar a_B} \quad (347)$$

Pertanto la probabilità di transizione al livello $n = 2$ è

$$P_{|0,0,0\rangle \rightarrow |2,1,\pm 1\rangle} = 2 \frac{e^2 a_B^2 \mathcal{E}_0^2}{\hbar^2} \frac{2^{14}}{3^{10}} (\pi \tau)^2 e^{-2\omega_{21} \tau} \quad (348)$$

Domanda 2

Esprimiamo la probabilità di transizione in termini della scala di tempi atomica naturale τ_{Bohr}

$$\tau_{Bohr} = \frac{\hbar^3}{m e^4} = \frac{a_{Bohr}}{c \alpha} \approx \frac{0.53 \cdot 10^{-8} \times 137}{3 \cdot 10^{10}} \text{ sec} \approx 2.42 \cdot 10^{-17} \text{ sec} \quad (349)$$

Dunque, poniamo

$$x \equiv \frac{\tau}{\tau_{Bohr}} \approx 4.1 \quad (350)$$

Tenendo conto che

$$E_{Bohr} \equiv \frac{\hbar}{\tau_{Bohr}} \approx 27.21 \text{ eV} \quad (351)$$

e dunque

$$\frac{e a_B \mathcal{E}_0}{E_{Bohr}} \approx \frac{0.53 \cdot 10^{-8} 10^6}{27.21} \approx 1.95 \cdot 10^{-4} \quad (352)$$

ci aspettiamo che la teoria delle perturbazioni del primo ordine sia affidabile. In effetti la probabilità di transizione si scrive

$$\begin{aligned} P_{|0,0,0\rangle \rightarrow |2,1,\pm 1\rangle} &= \left(\frac{e a_B \mathcal{E}_0}{E_{Bohr}}\right)^2 \frac{2^{15} \pi^2}{3^{10}} x^2 e^{-\frac{3x}{4}} \approx \\ &\approx 3.79 \cdot 10^{-8} \times 5.48 \times 0.78 \approx 1.62 \cdot 10^{-7} \end{aligned} \quad (353)$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 18/04/2007

Problema 1

Un oscillatore armonico bi-dimensionale

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^2 \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}_i^2}{2} \quad (354)$$

è soggetto alla perturbazione

$$\hat{V} = gx_1^2 x_2^2 \quad (355)$$

Domanda 1

Calcolare la correzione all'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine in teoria delle perturbazioni.

Domanda 2

Calcolare la correzione al primo livello eccitato al primo ordine in teoria delle perturbazioni.

Problema 2

Un oscillatore armonico uni-dimensionale di frequenza ω è sottoposto alla perturbazione dipendente dal tempo

$$V(t) = -\frac{i\hbar\chi}{2} \left[e^{2i\omega t} a^2 - e^{-2i\omega t} (a^\dagger)^2 \right] \quad (356)$$

dove a ed a^\dagger sono gli operatori di creazione e distruzione.

Domanda 1

Scrivere l'equazione di Schrödinger per l'evoluzione temporale della funzione d'onda $\psi(t)$ nella pittura d'interazione.

Domanda 2

Si supponga che al tempo $t = 0$ l'oscillatore si trovi in uno stato coerente $|\alpha\rangle$, con $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, dove α è un numero complesso. Si calcolino, al primo ordine in teoria delle perturbazioni, le ampiezze di transizione al tempo t , negli stati $|n\rangle$ di livello n .

Prova Scritta del 18/04/2007: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Riscriviamo l'interazione in termini dei creatori e distruttori a_i, a_i^\dagger , con $i = 1, 2$ relativi alle due coordinate

$$\begin{aligned} V &= g\lambda^4 (a_1 - a_1^\dagger)^2 (a_2 - a_2^\dagger)^2 = \\ &= g\lambda^4 (a_1^2 + (a_1^\dagger)^2 - 2\hat{N}_1 - 1) (a_2^2 + (a_2^\dagger)^2 - 2\hat{N}_2 - 1) \end{aligned} \quad (357)$$

dove \hat{N}_i , $i = 1, 2$ sono gli operatori che contano il livello. Abbiamo

$$\begin{aligned} V|0, 0\rangle &= g\lambda^4 (a_1^2 + (a_1^\dagger)^2 - \hat{N}_1 - 1) (\sqrt{2}|0, 2\rangle - |0, 0\rangle) = \\ &= g\lambda^4 (2|2, 2\rangle - \sqrt{2}|0, 2\rangle - \sqrt{2}|2, 0\rangle + |0, 0\rangle) \end{aligned}$$

Pertanto la correzione del primo ordine all'energia del fondamentale è

$$E_0^{(1)} = g\lambda^4 \quad (358)$$

e la correzione al secondo ordine

$$E_0^{(2)} = -\frac{g^2 \lambda^8}{\hbar \omega} \left[\frac{4}{4} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} \right] = -\frac{3g^2 \lambda^8}{\hbar \omega} \quad (359)$$

Domanda 2

Abbiamo

$$\begin{aligned} V|1, 0\rangle &= g\lambda^4 (a_1^2 + (a_1^\dagger)^2 - 2\hat{N}_1 - 1) (\sqrt{2}|1, 2\rangle - |1, 0\rangle) = \\ &= g\lambda^4 (\sqrt{2}\sqrt{2 \cdot 3}|3, 2\rangle - 3 \cdot \sqrt{2}|1, 2\rangle - \sqrt{2 \cdot 3}|3, 0\rangle + 3|1, 0\rangle) \end{aligned}$$

ed analogamente

$$V|0, 1\rangle = g\lambda^4 (\sqrt{2}\sqrt{2 \cdot 3}|2, 3\rangle - 3\sqrt{2}|2, 1\rangle - \sqrt{2 \cdot 3}|0, 3\rangle + 3|0, 1\rangle)$$

Pertanto la matrice di V ristretta al sottospazio degenere di livello 1 è diagonale ed al primo ordine la degenerazione non è rimossa

$$E_1^{(1)} = 3g\lambda^4 \quad (360)$$

NOTA: Il livello rimane degenere a tutti gli ordini perturbativi. Un modo di capirlo è notare che il potenziale è invariante sia per la trasformazione P_{12} che scambia a_1 con a_2 , che per la riflessione I_1 che manda $a_1 \rightarrow -a_1$, e che P_{12} non commuta con I_1 .

Problema 2

Domanda 1

Il potenziale nella pittura dell'interazione è indipendente dal tempo

$$V_{int}(t) = -\frac{i\hbar\chi}{2} [a^2 - (a^\dagger)^2] \quad (361)$$

e l'equazione di Schrödinger diventa

$$i\hbar \frac{\partial \psi_{int}(t)}{\partial t} = -\frac{i\hbar\chi}{2} [a^2 - (a^\dagger)^2] \psi_{int}(t) \quad (362)$$

Domanda 2

Sia $\psi(t=0) = |\alpha\rangle$. L'ampiezza di transizione al primo ordine in uno stato di livello n al tempo t è

$$\begin{aligned} A_{|\alpha\rangle \rightarrow |n\rangle}^{(1)}(t) &= \langle n|\alpha\rangle - \frac{\chi}{2} \int_0^t dt' \langle n|[a^2 - (a^\dagger)^2]|\alpha\rangle = \\ &= \langle n|\alpha\rangle - \frac{\chi}{2} t \langle n|[a^2 - (a^\dagger)^2]|\alpha\rangle = \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \left[\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left(1 - \frac{\chi t}{2} \alpha^2\right) + \frac{\chi t}{2} \frac{\sqrt{n(n-1)} \alpha^{n-2}}{\sqrt{(n-2)!}} \right] \end{aligned} \quad (363)$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 08/06/2007

Problema 1

Si consideri un elettrone di un atomo di idrogeno sottoposto alla seguente perturbazione

$$\hat{V}_{pert} = \lambda f(r) x y \quad (364)$$

dove $f(r) = e^{-\alpha r}$ è una funzione della coordinata radiale r .

Domanda 1

Si determini il numero di livelli in cui si separa il livello $n = 2$, al primo ordine in teoria delle perturbazioni. Si calcolino le separazioni dei livelli con $n = 2$ ed i rispettivi autostati approssimati.

Domanda 2

Si prenda $\alpha = 1/a_{Bohr}$ e si considerino i valori per λ : 1) $\lambda = 10^{10} eV/cm^2$; 2) $\lambda = 10^{16} eV/cm^2$. Si discuta la validità del calcolo del primo ordine in questi due casi. Si calcolino le separazioni dei livelli al primo ordine nel caso in cui questo sia significativo.

Problema 2

Una particella di massa m si trova dentro una cavità tri-dimensionale di raggio R :

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{per } r < R \\ \infty & \text{per } r \geq R \end{cases} \quad (365)$$

Domanda 1

Si termino i primi tre livelli del sistema, le loro degenerazioni e le corrispondenti autofunzioni. (NOTA BENE: Può essere utile sapere che i valori numerici approssimati delle soluzioni positive delle equazioni algebriche $1 - x \cot x = 0$ e $3 - x^2 - 3x \cot x = 0$ sono, rispettivamente, $\{4.49, 7.73, \dots\}$ e $\{5.76, 9.10, \dots\}$)

Domanda 2

Si supponga che al tempo $t = 0$ la particella si trovi nello stato fondamentale. Per $t > 0$ viene accesa la perturbazione

$$V(t) = \beta e^{-\alpha t} (x - y)^2 \quad (366)$$

Al primo ordine in teoria delle perturbazioni quale dei primi due livelli eccitati può essere popolato? Si calcolino i rapporti tra le probabilità di transizione nei vari stati degeneri corrispondenti ad un dato livello.

Prova Scritta del 08/06/2007: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Notiamo che

$$\hat{V}_{pert} = -i \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \lambda f(r) r^2 [Y_{2,2}(\theta, \phi) - Y_{2,-2}(\theta, \phi)] \quad (367)$$

Pertanto

$$\hat{V}_{pert}|2, 0, 0\rangle \quad (368)$$

è una combinazione lineare di stati con $l = 2$ e $m = \pm 2$. Pertanto

$$\langle 2, l, m | \hat{V}_{pert} | 2, 0, 0 \rangle = 0 \quad (369)$$

Inoltre

$$\hat{V}_{pert}|2, 1, 0\rangle \quad (370)$$

è una combinazione lineare di stati con $m = \pm 2$. Pertanto

$$\langle 2, l, m | \hat{V}_{pert} | 2, 1, 0 \rangle = 0 \quad (371)$$

Infine

$$\langle 2, l, 1 | \hat{V}_{pert} | 2, 1, 1 \rangle = \langle 2, l, -1 | \hat{V}_{pert} | 2, 1, -1 \rangle = 0 \quad (372)$$

e gli unici elementi di matrici non nulli rilevanti per il calcolo del primo ordine sono

$$\begin{aligned} \langle 2, 1, 1 | \hat{V}_{pert} | 2, 1, -1 \rangle &= \langle 2, 1, -1 | \hat{V}_{pert} | 2, 1, 1 \rangle^* = \\ &= -i \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \lambda \int_0^\infty dr f(r) r^4 |R_{21}(r)|^2 \times \\ &\times \int d\Omega Y_{1,1}^*(\theta, \phi) Y_{2,2}(\theta, \phi) Y_{1,-1}(\theta, \phi) \equiv i A \end{aligned} \quad (373)$$

con A reale. Al primo ordine, pertanto, gli stati $|2, 0, 0\rangle$ e $|2, 1, 0\rangle$ rimangono degeneri ed il corrispondente livello è quello imperturbato $E_2^{(0)}$. Gli altri due autostati sono

$$\psi_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} [|2, 1, 1\rangle \pm i |2, 1, -1\rangle] \quad (374)$$

ed i corrispondenti autovalori dell'energia sono $E_2^{(0)} \pm A$.

Calcoliamo A :

$$\begin{aligned}
\int d\Omega Y_{1,1}^*(\theta, \phi) Y_{2,2}(\theta, \phi) Y_{1,-1}(\theta, \phi) &= \\
&= 2\pi \frac{3}{8\pi} \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \sin^2\theta \sin^2\theta = \\
&= \frac{3}{4} \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \frac{16}{15} = \sqrt{\frac{3}{10\pi}}
\end{aligned} \tag{375}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty dr e^{-\alpha r} r^4 |R_{21}(r)|^2 &= \frac{a_{Bohr}^2}{24} \int_0^\infty d\rho e^{-\alpha a_{Bohr} \rho} \rho^4 \rho^2 e^{-\rho} = \\
&= \frac{30 a_{Bohr}^2}{(1 + \alpha a_{Bohr})^7}
\end{aligned} \tag{376}$$

In conclusione

$$A = \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \lambda \sqrt{\frac{3}{10\pi}} \frac{30 a_{Bohr}^2}{(1 + \alpha a_{Bohr})^7} = \frac{6 \lambda a_{Bohr}^2}{(1 + \alpha a_{Bohr})^7} \tag{377}$$

Domanda 2

$$A \approx \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^{-16}}{2^2 2^7} \lambda \times cm^2 \approx 1.2 \cdot 10^{-18} \lambda \times cm^2 \tag{378}$$

Nel caso 1)

$$A \approx 1.2 \cdot 10^{-8} eV \tag{379}$$

e nel caso 2)

$$A \approx 1.2 \cdot 10^{-2} eV \tag{380}$$

In ambedue i casi A è considerevolmente più piccolo della separazione di livelli, e quindi la teoria del primo ordine è abbastanza accurata.

Problema 2

Domanda 1

L'equazione di Schrödinger radiale è quella libera. Pertanto le soluzioni regolari in $r = 0$ sono

$$R_{kl}(r) = y^l \left(\frac{d}{y dy} \right)^l \frac{\sin y}{y} \tag{381}$$

dove $y \equiv k r$ e

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2 k_{n,l}^2}{2m} \tag{382}$$

L'equazione che determina gli autovalori dell'energia è

$$R_{k_n, l}(R) = 0 \quad (383)$$

Per $l = 0$ abbiamo

$$R_{k_0}(r) = \frac{\sin y}{y} \quad (384)$$

e dunque

$$\sin k_0 R = 0 \quad (385)$$

che ha soluzioni

$$k_0 R = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \quad (386)$$

I livelli più bassi corrispondenti sono

$$E_{10} = \frac{\hbar^2}{2m R_0^2} \pi^2$$

$$E_{20} = \frac{\hbar^2}{2m R_0^2} 4\pi^2$$

Per $l = 1$

$$R_{k_1}(r) = \cos y - \frac{\sin y}{y} \quad (387)$$

da cui

$$k_1 R \cot k_1 R = 1 \quad (388)$$

le cui prime soluzioni approssimate sono

$$k_1 R = 4.49, 7.76, \dots \quad (389)$$

Dunque il primo livello eccitato è quello con $l = 1$

$$E_{11} = \frac{\hbar^2}{2m R_0^2} y_1 \quad y_1 = 4.49\dots \quad (390)$$

Per $l = 2$

$$R_{k_2}(r) = \frac{3 \sin y}{y^3} - \frac{3 \cos y}{y^2} - \frac{\sin y}{y} \quad (391)$$

Pertanto l'equazione agli autovalori diventa

$$3 - 3y \cot y - y^2 = 0 \quad (392)$$

le cui prima soluzione positiva è

$$y_2 = 5.76 \dots \quad (393)$$

Il secondo livello eccitato è pertanto quello con $l = 2$

$$E_{12} = \frac{\hbar^2}{2mR_0^2} y_2 \quad (394)$$

La sequenza dei primi livelli è dunque

$$E_{10} < E_{11} < E_{12} < E_{20} < \dots \quad (395)$$

Domanda 2

Si noti che

$$x^2 + y^2 = \frac{r^2}{3} \left[2 + \sqrt{\frac{16\pi}{5}} Y_{20} \right] \quad (396)$$

mentre

$$2xy = -i 2 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} r^2 [Y_{2,2}(\theta, \phi) - Y_{2,-2}(\theta, \phi)] \quad (397)$$

Dunque al primo ordine sono possibili solo transizioni dal fondamentale agli stati del secondo livello eccitato con $l = 2$ e $m = 0, \pm 2$. Gli elementi di matrice rilevanti sono

$$\begin{aligned} \langle 1, 2, 0 | (x - y)^2 | 1, 0, 0 \rangle &= \frac{1}{3\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \int_0^R dr r^4 R_{12}(r) R_{10}(r) = \\ &= \frac{2}{3\sqrt{5}} \int_0^R dr r^4 R_{12}(r) R_{10}(r) \\ \langle 1, 2, \pm 2 | (x - y)^2 | 1, 0, 0 \rangle &= \mp i \frac{2}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \int_0^R dr r^4 R_{12}(r) R_{10}(r) = \\ &= \mp \frac{i 2}{\sqrt{30}} \int_0^R dr r^4 R_{12}(r) R_{10}(r) \end{aligned} \quad (398)$$

I rapporti tra la probabilità di transizione in uno dei due stati $|1, 2, \pm 2\rangle$ e lo stato $|1, 2, 0\rangle$ è dunque

$$\frac{P_{|1,0,0\rangle \rightarrow |1,2,\pm 2\rangle}}{P_{|1,0,0\rangle \rightarrow |1,2,0\rangle}} = \frac{4 \cdot 9 \cdot 5}{30 \cdot 4} = \frac{3}{2} \quad (399)$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 02/07/2007

Problema 1

Una particella uni-dimensionale di massa m si muove nell' intervallo $[-a, a]$ della retta reale, con $a > 0$. Al tempo $t = 0$ la particella si trova nello stato fondamentale. Per $0 < t < \tau$ viene accesa una perturbazione

$$V(t) = \begin{cases} -\lambda \delta(x) & \text{per } 0 < t < \tau \\ 0 & \text{per } t \geq \tau \end{cases} \quad (400)$$

Domanda 1

Si calcoli la probabilità al primo ordine in teoria delle perturbazioni che al tempo $t > \tau$ la particella si trovi in un dato stato eccitato

Problema 2

L'elettrone di un atomo di idrogeno è sottoposto ad un campo elettrico uniforme diretto lungo l'asse delle z ed ad un campo magnetico diretto lungo l'asse delle x . Si consideri l'interazione corrispondente (si trascura lo spin dell'elettrone)

$$\hat{V}_0 = \frac{eB}{2mc} \hat{L}_x + eEz \quad (401)$$

come una perturbazione.

Domanda 1

Si determini l'effetto di \hat{V}_0 al primo ordine in teoria delle perturbazioni sui livelli $n = 1$ ed $n = 2$.

Domanda 2

Al tempo $t = 0$ l'atomo si trova nello stato fondamentale. Per $t > 0$ viene accesa una perturbazione dipendente dal tempo

$$\hat{V}_1(t) = e \mathcal{E}_0 z e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (402)$$

Si calcolino le probabilità di transizione al primo ordine in \hat{V}_1 ai vari livelli nei quali il livello $n = 2$ si divide a causa dalla interazione \hat{V}_0 .

Prova Scritta del 02/07/2007: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Le autofunzioni normalizzate imperturbate si scrivono

$$\begin{aligned}\psi_0^{(+,k)} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \frac{k \pi x}{2a} & k = 1, 3, 5, \dots \\ \psi_0^{(-,k)} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{k \pi x}{2a} & k = 2, 4, 6, \dots\end{aligned}\quad (403)$$

La perturbazione è pari rispetto alla riflessione $x \rightarrow -x$: quindi le transizioni dal fondamentale, che è pari, permesse al primo ordine sono quelle in stati pari. Poniamo

$$\omega_{kn} = \frac{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}}{\hbar} = \frac{\hbar \pi^2}{8 m a^2} (k^2 - n^2) \quad (404)$$

Al primo ordine l'ampiezza di transizione è

$$\begin{aligned}A_{1^+ \rightarrow k^+}^{(1)} &= \frac{i}{\hbar} (\psi_0^{(+,k)}, \lambda \delta(x) \psi_0^{(+,1)}) \int_0^\tau dt e^{i\omega_{k1}t} = \\ &= \frac{\lambda}{\hbar a \omega_{k1}} (e^{i\omega_{k1}\tau} - 1) = \frac{8}{\pi^2} \frac{\lambda a m}{\hbar^2} \frac{e^{i\omega_{k1}\tau} - 1}{k^2 - 1}\end{aligned}\quad (405)$$

La corrispondente probabilità è

$$P_{1^+ \rightarrow k^+}^{(1)} = \frac{256}{\pi^4} \frac{\lambda^2 a^2 m^2}{\hbar^4} \frac{\sin^2 \frac{\omega_{k1}\tau}{2}}{(k^2 - 1)^2} \quad (406)$$

Problema 2

Domanda 1

L'azione di $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$ sugli stati con $n = 2$ è

$$\begin{aligned}L_x |2, 0, 0\rangle &= 0 \\ L_x |2, 1, -1\rangle &= \frac{\hbar}{2} \sqrt{1(1+1) - (-1)(-1+1)} |2, 1, 0\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} |2, 1, 0\rangle \\ L_x |2, 1, 0\rangle &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} |2, 1, 1\rangle + \frac{\hbar}{\sqrt{2}} |2, 1, -1\rangle \\ L_x |2, 1, 1\rangle &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} |2, 1, 0\rangle\end{aligned}$$

mentre gli elementi di matrici non nulli della perturbazione elettrica sono

$$\langle 2, 0, 0 | z | 2, 1, 0 \rangle = \langle 2, 1, 0 | z | 2, 0, 0 \rangle = 3 a_{Bohr} \quad (407)$$

La perturbazione sul livello fondamentale $n = 1$ è chiaramente nulla, quindi il livello non viene perturbato al primo ordine. La matrice della perturbazione sul multipletto con $n = 2$ è

$$V_0 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \beta & \beta \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (408)$$

dove

$$\alpha = -3 e E a_{Bohr} \quad \beta = \frac{e B \hbar}{2 m c \sqrt{2}} \quad (409)$$

Gli autovalori della matrice della perturbazione sono

$$\Delta E_1 = \Delta E_2 = 0 \quad \Delta E_{3,4} = \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\beta^2} \quad (410)$$

Una base (non ortonormale) del sottospazio di dimensione 2 il cui autovalore rimane imperturbato al primo ordine è

$$v_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} (\beta |2, 0, 0\rangle - \alpha |2, 1, \pm 1\rangle) \quad (411)$$

mentre gli autostati corrispondenti agli autovalori $E_2^{(0)} \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\beta^2}$ sono

$$v_{3,4} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha^2 + 4\beta^2}} (\alpha |2, 0, 0\rangle \mp \sqrt{\alpha^2 + 2\beta^2} |2, 1, 0\rangle + \beta |2, 1, 1\rangle + \beta |2, 1, -1\rangle) \quad (412)$$

Domanda 2

L' elemento di matrice non nullo di z rilevante è

$$\begin{aligned} \langle 2, 1, 0 | z | 1, 0, 0 \rangle &= (Y_{10}, \cos \theta Y_{00}) \int_0^\infty dr r^3 R_{21}(r) R_{10}(r) = \\ &= \frac{a_{Bohr}}{\sqrt{3}} (Y_{1,0}, Y_{1,0}) \int_0^\infty d\rho \rho^4 e^{-\frac{3}{2}\rho} \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{2^8 a_{Bohr}}{\sqrt{2} 3^5} \end{aligned}$$

Le ampiezze di transizione negli stati $v_{1,2}$ sono nulle. Posto

$$\omega_{\pm} = \frac{3}{4} \frac{E_{Bohr}}{\hbar} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 + 2\beta^2}}{\hbar} \quad (413)$$

Quelle negli stati $v_{3,4}$ sono

$$\begin{aligned} A_{|1,0,0\rangle \rightarrow v_{3,4}} &= \mp \frac{i e \mathcal{E}_0}{\hbar \sqrt{2}} \langle 2, 1, 0 | z | 1, 0, 0 \rangle \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau} + i\omega_{\pm} t} dt = \\ &= \mp \frac{i \tau e \mathcal{E}_0}{\hbar \sqrt{2}} \frac{2^8 a_{Bohr}}{3^5 \sqrt{2}} \frac{1}{1 - i\omega_{\pm} \tau} = \mp \frac{2^7}{3^5} \frac{i \tau}{1 - i\omega_{\pm} \tau} \frac{e \mathcal{E}_0 a_{Bohr}}{\hbar} \end{aligned}$$

Le probabilità di transizione

$$P_{|1,0,0\rangle \rightarrow v_{3,4}} = \frac{2^{14}}{3^{10}} \frac{\tau^2}{1 + \omega_{\pm}^2 \tau^2} \frac{e^2 \mathcal{E}_0^2 a_{Bohr}^2}{\hbar^2} \quad (414)$$

Il rapporto tra le due probabilità è

$$\frac{P_{|1,0,0\rangle \rightarrow v_3}}{P_{|1,0,0\rangle \rightarrow v_4}} = \frac{1 + \omega_+^2 \tau^2}{1 + \omega_-^2 \tau^2} \quad (415)$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 23/07/2007

Problema 1

Una particella di massa m si muove in un intervallo uni-dimensionale di lunghezza L . Al tempo $t = 0$ la particella si trova nello stato fondamentale. Viene accesa una perturbazione dipendente dal tempo

$$V(t) = \begin{cases} V(x), & \text{per } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{per } t > \tau \end{cases} \quad (416)$$

dove $V(x)$ è la funzione

$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & \text{per } 0 \leq |x| \leq a/2 \\ 0 & \text{per } |x| > a/2 \end{cases} \quad (417)$$

e V_0 una costante, $a < L$ e l'origine delle x è presa al centro della buca.

Domanda 1

Si calcolino al primo ordine in teoria delle perturbazioni ciascuna delle probabilità che al tempo $t > \tau$ la particella si trovi in uno dei primi 3 stati eccitati.

Si ricavino i valori numerici delle probabilità per: m massa dell'elettrone, $L = 10^{-8} \text{cm}$, $a = 10^{-12} \text{cm}$, $V_0 = 10^4 \text{eV}$, $\tau = 5 \cdot 10^{-18} \text{sec}$. Si discuta la validità dell'approssimazione del primo ordine in questo caso.

Problema 2

Una particella di spin $1/2$ e di massa m diffonde nel potenziale

$$V(\vec{x}, \vec{p}, \vec{s}) = \begin{cases} g \vec{s} \cdot \vec{x} & |\vec{x}| \leq a \\ 0 & |\vec{x}| > a \end{cases} \quad (418)$$

dove \vec{x} , \vec{p} , \vec{s} sono rispettivamente gli operatori coordinate, impulsi e spin della particella, e g una costante.

Domanda 1

Si calcoli la sezione d'urto differenziale di Born per una particella nello stato iniziale di spin definito lungo la direzione del moto, senza misurazione dello spin finale.

Domanda 2

Si calcoli la sezione d'urto differenziale di Born per una particella con spin definito lungo la direzione del moto sia nello stato iniziale che in quello finale.

Prova Scritta del 23/07/2007: Soluzione

Problema 1

Le autofunzioni normalizzate imperturbate si scrivono

$$\begin{aligned}\psi_0^{(+,k)} &= \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{k \pi x}{L} & k = 1, 3, 5, \dots \\ \psi_0^{(-,k)} &= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{k \pi x}{L} & k = 2, 4, 6, \dots\end{aligned}\quad (419)$$

La perturbazione è pari rispetto alla riflessione $x \rightarrow -x$: quindi le transizioni dal fondamentale, che è pari, permesse al primo ordine sono quelle in stati pari. Pertanto le probabilità di transizione al primo ed al terzo livello eccitato sono nulle. Poniamo

$$\omega_{kn} = \frac{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}}{\hbar} = \frac{\hbar \pi^2}{2mL^2} (k^2 - n^2) \quad (420)$$

Calcoliamo l'elemento di matrice rilevante

$$\begin{aligned}(\psi_0^{(+,3)}, V(x) \psi_0^{(+,1)}) &= -\frac{2V_0}{L} \int_{-a/2}^{a/2} dx \cos \frac{3\pi x}{L} \cos \frac{\pi x}{L} = \\ &= -\frac{4V_0}{\pi} \cos^3 \frac{\pi a}{2L} \sin \frac{\pi a}{2L}\end{aligned}\quad (421)$$

Al primo ordine l'ampiezza di transizione nel secondo stato eccitato

$$\begin{aligned}A_{1^+ \rightarrow 3^+}^{(1)} &= \frac{i}{\hbar} (\psi_0^{(+,3)}, V(x) \psi_0^{(+,1)}) \int_0^\tau dt e^{i\omega_{31}t} = \\ &= \frac{(\psi_0^{(+,3)}, V(x) \psi_0^{(+,1)})}{\hbar \omega_{31}} (e^{i\omega_{31}\tau} - 1)\end{aligned}\quad (422)$$

La corrispondente probabilità è

$$P_{1^+ \rightarrow 3^+}^{(1)} = \frac{64V_0^2}{\pi^2} \cos^6 \frac{\pi a}{2L} \sin^2 \frac{\pi a}{2L} \sin^2 \frac{\omega_{31}\tau}{2} \quad (423)$$

Inseriamo i valori numerici:

$$\frac{a}{L} = 10^{-4} \quad (424)$$

abbiamo

$$\begin{aligned} (\psi_0^{(+,3)}, V(x) \psi_0^{(+,1)}) &= -V_0 \frac{4}{\pi} \cos^3 \frac{\pi a}{2L} \sin \frac{\pi a}{2L} \approx -V_0 \frac{4}{\pi} \frac{\pi a}{2L} = \\ &\approx -2 V_0 10^{-4} = -2.0 \text{ ev} \end{aligned} \quad (425)$$

mentre

$$\begin{aligned} \hbar \omega_{31} &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2 m L^2} (3^2 - 1) = \frac{\hbar^2}{m a_{Bohr}^2} \left(\frac{2 \pi a_{Bohr}}{L} \right)^2 \approx \\ &\approx 2 \times 13.6 \text{ ev} \times \left(\frac{3.33 \cdot 10^{-8}}{10^{-8}} \right)^2 \approx 301.6 \text{ ev} \end{aligned} \quad (426)$$

Inoltre

$$\tau_{Bohr} \equiv \frac{\hbar}{E_{Bohr}} = \frac{1}{\alpha} \frac{a_{Bohr}}{c} \approx 137 \times \frac{0.53}{3} 10^{-18} \text{ sec} \approx 2.42 \cdot 10^{-17} \text{ sec} \quad (427)$$

e

$$\begin{aligned} \omega_{31} \tau &= \frac{4 \pi^2 a_{Bohr}^2}{L^2} \frac{\tau}{\tau_{Bohr}} \approx \\ &\approx \left(\frac{3.33 \cdot 10^{-8}}{10^{-8}} \right)^2 \frac{5 \times 10^{-18}}{2.42 \cdot 10^{-17}} \approx 3.33^2 \times 2.07 \cdot 10^{-1} \approx 2.29 \end{aligned}$$

Dunque otteniamo

$$\begin{aligned} P_{1^+ \rightarrow 3^+}^{(1)} &= \left| \frac{(\psi_0^{(+,3)}, V(x) \psi_0^{(+,1)})}{\hbar \omega_{31}} \right|^2 4 \sin^2 \frac{\omega_{31} \tau}{2} \approx \\ &\approx \left(\frac{2.0}{301.6} \right)^2 3.32 \approx 1.46 \cdot 10^{-4} \end{aligned} \quad (428)$$

molto minore di 1, per cui l'approssimazione del primo ordine è affidabile.

Problema 2

L'ampiezza di diffusione di Born è

$$f_{\sigma'\sigma}^{Born} = -\frac{m g}{4 \pi \hbar} \vec{\sigma}_{\sigma'\sigma} \cdot \vec{I}(\vec{q}) \quad (429)$$

dove

$$\vec{I}(\vec{q}) = \int_{|\vec{x}| \leq a} d^3 \vec{x} \vec{x} e^{-i \vec{q} \cdot \vec{x}} = i \vec{\nabla}_{\vec{q}} \int_{|\vec{x}| \leq a} d^3 \vec{x} e^{-i \vec{q} \cdot \vec{x}} =$$

$$\begin{aligned}
&= i \vec{\nabla}_{\vec{q}} \left[\frac{4\pi}{q^3} (\sin a q - a q \cos a q) \right] = \\
&= i \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{4\pi}{q^3} (\sin a q - a q \cos a q) \right] \frac{\vec{q}}{q} = \\
&= \frac{4\pi i \vec{q}}{q^5} (3 a q \cos a q - 3 \sin a q + a^2 q^2 \sin a q) \equiv 4\pi i \vec{q} F(q)
\end{aligned}$$

e dunque

$$f_{\sigma'\sigma}^{Born} = -\frac{i m g F(q)}{\hbar} \vec{\sigma}_{\sigma'\sigma} \cdot \vec{q} \quad (430)$$

Domanda 1

La sezione d'urto differenziale ottenuta sommando sugli stati finali per spin iniziale σ è

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{Born}(\sigma)}{d\Omega} &= \frac{m^2 F^2(q) g^2}{\hbar^2} \sum_{\sigma'} \vec{\sigma}_{\sigma\sigma'} \cdot \vec{q} \vec{\sigma}_{\sigma'\sigma} \cdot \vec{q} = \\
&= \frac{m^2 F^2(q) g^2}{\hbar^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{q} \vec{\sigma} \cdot \vec{q})_{\sigma\sigma} = \frac{m^2 F^2(q) g^2}{\hbar^2} q_i q_j \frac{1}{2} (\{\sigma^i, \sigma^j\})_{\sigma\sigma} = \\
&= \frac{m^2 F^2(q) q^2 g^2}{\hbar^2} = \\
&= \frac{m^2 g^2}{q^8 \hbar^2} (3 a q \cos a q - 3 \sin a q + a^2 q^2 \sin a q)^2 \quad (431)
\end{aligned}$$

La sezione d'urto sommata sugli stati finali non dipende dallo spin dello stato iniziale.

Domanda 2

Poniamo

$$\vec{p} = |p| (0, 0, 1) \quad \vec{p}' = |p| (\sin \theta, 0, \cos \theta) \quad (432)$$

per cui

$$\vec{q} = -|p| (\sin \theta, 0, 1 - \cos \theta) \quad (433)$$

e

$$f^{Born} = \frac{i m g p F(q)}{\hbar} (\sin \theta \sigma_x + (1 - \cos \theta) \sigma_z) \quad (434)$$

Prendiamo lo stato iniziale con spin $+1/2$ lungo z :

$$f^{Born} |+\rangle = \frac{i m g p F(q)}{\hbar} (\sin \theta |-\rangle + (1 - \cos \theta) |+\rangle) \quad (435)$$

Lo stato finale ha spin definito $\pm 1/2$ lungo l'asse \vec{p} :

$$\frac{\vec{p} \cdot \sigma}{|p|} |f_{\pm}\rangle = (\sin \theta \sigma_x + \cos \theta \sigma_z) |f\rangle = \pm |f_{\pm}\rangle \quad (436)$$

Dunque

$$|f_{\pm}\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |\pm\rangle \pm \sin \frac{\theta}{2} |\mp\rangle \quad (437)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \langle f_+ | f^{Born} | + \rangle &= \frac{i m g p F(q)}{\hbar} (\cos \frac{\theta}{2} \langle + | + \sin \frac{\theta}{2} \langle - |) \times \\ &\quad \times (\sin \theta | - \rangle + (1 - \cos \theta) | + \rangle) = \\ &= \frac{i m g p F(q)}{\hbar} (\cos \frac{\theta}{2} (1 - \cos \theta) + \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta) \\ &= \frac{i 2 m g p F(q)}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \\ \langle f_- | f^{Born} | + \rangle &= \frac{i m g p F(q)}{\hbar} (\cos \frac{\theta}{2} \langle - | - \sin \frac{\theta}{2} \langle + |) \times \\ &\quad \times (\sin \theta | - \rangle + (1 - \cos \theta) | + \rangle) = \\ &= \frac{i m g p F(q)}{\hbar} (\cos \frac{\theta}{2} \sin \theta - \sin \frac{\theta}{2} (1 - \cos \theta)) \\ &= \frac{i 2 m g p F(q)}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta \end{aligned} \quad (438)$$

e le sezioni d'urto differenziali

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{Born}(+\frac{1}{2} \rightarrow f_+)}{d\Omega} &= \frac{4 m^2 g^2 p^2 F^2(q)}{\hbar^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \theta \\ \frac{d\sigma^{Born}(+\frac{1}{2} \rightarrow f_-)}{d\Omega} &= \frac{4 m^2 g^2 p^2 F^2(q)}{\hbar^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \theta \end{aligned}$$

Notiamo che, tenendo conto che $q = 2 p \sin \frac{\theta}{2}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{f_{\pm}} \frac{d\sigma^{Born}(+\frac{1}{2} \rightarrow f_{\pm})}{d\Omega} &= \frac{4 m^2 g^2 p^2 F^2(q)}{\hbar^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} = \\ &= \frac{m^2 g^2 q^2 F^2(q)}{\hbar^2} \end{aligned}$$

in accordo con la risposta alla domanda precedente.

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 04/09/2007

Problema 1

Una particella di massa m e carica e si trova in una scatola cubica di lato $2L$ nello stato fondamentale. Al tempo $t = 0$ viene acceso un campo elettrico uniforme lungo l'asse delle x :

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-\alpha t} \quad (439)$$

con $\alpha > 0$.

Domanda 1

Qual'è la probabilità, al primo ordine in teoria delle perturbazioni, che al tempo $t = \infty$ la particella si trovi nel primo livello eccitato?

Domanda 2

Calcolare il valore numerico della probabilità nel caso in cui la particella è un elettrone e

$$E_0 = 10^6 \text{ volt/cm} \quad L = 10^{-8} \text{ cm} \quad \alpha = 10^{17} \text{ sec}^{-1} \quad (440)$$

Problema 2

Un elettrone in un atomo di idrogeno si trova nello stato $|2, 0, 0\rangle$. Al tempo $t = 0$ viene accesa un campo elettrico uniforme lungo l'asse delle z di frequenza ω

$$V(t) = -e \mathcal{E}_0 z \sin \omega t \quad (441)$$

Domanda 1

Si calcoli al primo ordine in teoria delle perturbazioni la probabilità di occupazione degli stati di livello $n = 2$ al tempo $t > 0$.

Domanda 2

Trascurando tutti gli stati di livello diverso da $n = 2$, si calcoli la probabilità di occupazione degli stati di livello $n = 2$ al tempo $t > 0$ senza utilizzare l'approssimazione perturbativa.

Domanda 3

In quali condizioni l'approssimazione alla Domanda 2 rimane valida mentre quella perturbativa è inapplicabile?

Prova Scritta del 04/09/2007: Soluzione

Problema 1

Le autofunzioni dell'energia della particella nella buca sono

$$\psi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) = \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}} \sin \frac{\pi n_x x}{2L} \sin \frac{\pi n_y y}{2L} \sin \frac{\pi n_z z}{2L} \quad (442)$$

dove n_x, n_y, n_z sono interi positivi. I corrispondenti livelli di energia sono

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8 m L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (443)$$

Lo stato fondamentale corrisponde a $\psi_{1,1,1}$. Il primo livello eccitato è tre volte degenere, e gli stati corrispondenti sono $\psi_{2,1,1}$, $\psi_{1,2,1}$ e $\psi_{1,1,2}$.

Il potenziale corrispondente al campo elettrico uniforme è

$$V(x) = -e E_0 x e^{-\alpha x} \quad (444)$$

Gli elementi di matrice della perturbazione tra il fondamentale e gli stati $\psi_{1,2,1}$ e $\psi_{1,1,2}$ sono nulli. Quello con lo stato $\psi_{2,1,1}$ è

$$\begin{aligned} -e E_0 (\psi_{2,1,1}, x \psi_{1,1,1}) &= -\frac{e E_0}{L} \int_0^{2L} dx x \sin \frac{\pi x}{2L} \sin \frac{\pi x}{L} = \\ &= -\frac{e E_0}{L} \frac{4 L^2}{\pi^2} \left(-\frac{8}{9} \right) = \frac{32 e L E_0}{9 \pi^2} \end{aligned} \quad (445)$$

Posto

$$\omega \equiv \frac{E_{2,1,1} - E_{1,1,1}}{\hbar} = \frac{3 \hbar \pi^2}{8 m L^2} \quad (446)$$

abbiamo per l'ampiezza di transizione al primo ordine

$$A_{(1,1,1) \rightarrow (2,1,1)} = -\frac{i}{\hbar} \frac{32 e L E_0}{9 \pi^2} \int_0^\infty dt e^{-(\alpha - i\omega)t} = -\frac{32 i}{9 \pi^2} \frac{e L E_0}{\hbar(\alpha - i\omega)} \quad (447)$$

e per la probabilità di transizione al primo livello

$$P_{(1,1,1) \rightarrow (2,1,1)} = \frac{2^{10}}{3^4 \pi^4} \frac{e^2 L^2 E_0^2}{\hbar^2 (\alpha^2 + \omega^2)} \quad (448)$$

Domanda 2

Per un elettrone

$$\frac{\hbar^2}{2mL^2} = \frac{\hbar^2}{2ma_{Bohr}^2} \left(\frac{a_{Bohr}}{L}\right)^2 \approx 13.6 \text{ ev} \times 0.53^2 = 3.82 \text{ ev} \quad (449)$$

Quindi

$$\hbar\omega \approx 3.82 \text{ ev} \frac{3\pi^2}{4} = 28.28 \text{ ev} \quad (450)$$

Inoltre, posto $E_{Bohr} \equiv \frac{me^4}{\hbar^2} \approx 27.2 \text{ ev}$, abbiamo

$$\tau_{Bohr} = \frac{\hbar}{E_{Bohr}} = \frac{a_{Bohr}}{v_{Bohr}} \approx \frac{0.53 \cdot 10^{-8}}{3 \cdot 10^{10}} \cdot 137 \text{ sec} = 2.42 \cdot 10^{-17} \text{ sec} \quad (451)$$

Dunque

$$\hbar\alpha = \frac{\hbar}{\tau_{Bohr}} \alpha \tau_{Bohr} = E_{Bohr} \alpha \tau_{Bohr} \approx 27.2 \text{ ev} \times 2.420 \cdot 10^{-17} \cdot 10^{17} = 65.82 \text{ ev} \quad (452)$$

Infine

$$eLE_0 \approx 10^6 \times 10^{-8} \text{ ev} = 10^{-2} \text{ ev} \quad (453)$$

In definitiva

$$P_{(1,1,1) \rightarrow (2,1,1)} \approx \frac{2^{10}}{3^4 \pi^4} \frac{10^{-4}}{28.28^2 + 65.82^2} = 0.130 \times 1.949 \cdot 10^{-8} = 2.53 \cdot 10^{-9} \quad (454)$$

Problema 2

Domanda 1

Le ampiezze di transizione al primo ordine sono proporzionali agli elementi di matrice di z . L'unico elemento di matrice non-nullo è

$$\langle 2, 1, 0 | z | 2, 0, 0 \rangle = 3 a_{Bohr} \quad (455)$$

Quindi al primo ordine in teoria delle perturbazioni i soli stati occupati sono $|2, 1, 0\rangle$ e $|2, 0, 0\rangle$. L'ampiezza di transizione è

$$A_{|2,0,0\rangle \rightarrow |2,1,0\rangle}^{(1)}(t) = -\frac{i3ea_{Bohr}\mathcal{E}_0}{\hbar\omega} \int_0^t dt' \sin \omega t' = \frac{i3ea_{Bohr}\mathcal{E}_0}{\hbar\omega} (1 - \cos \omega t) \quad (456)$$

e la probabilità

$$P_{|2,0,0\rangle \rightarrow |2,1,0\rangle}^{(1)}(t) = \frac{9 e^2 a_{Bohr}^2 \mathcal{E}_0^2}{\hbar^2 \omega^2} (1 - \cos \omega t)^2 = \frac{36 e^2 a_{Bohr}^2 \mathcal{E}_0^2}{\hbar^2 \omega^2} \sin^4 \frac{\omega t}{2} \quad (457)$$

Domanda 2

Nell'approssimazione in cui trascuriamo gli stati con $n \neq 2$ il problema si riduce al sottospazio bi-dimensionale generato dagli stati $|2, 0, 0\rangle$ e $|2, 1, 0\rangle$. Decomponendo lo stato al tempo t in questa base

$$\psi(t) = a_1(t) |2, 0, 0\rangle + a_2 |2, 1, 0\rangle \quad (458)$$

le equazioni di Schrödinger diventano

$$\begin{aligned} i \hbar \dot{a}_1(t) &= -3 e \mathcal{E}_0 a_{Bohr} a_2 \sin \omega t \\ i \hbar \dot{a}_2(t) &= -3 \mathcal{E}_0 e a_{Bohr} a_1 \sin \omega t \end{aligned} \quad (459)$$

Posto

$$a_{\pm}(t) = a_1(t) \pm a_2(t) \quad (460)$$

abbiamo

$$i \hbar \dot{a}_{\pm}(t) = \mp 3 e \mathcal{E}_0 a_{Bohr} a_{\pm} \sin \omega t \quad (461)$$

da risolvere con le condizioni iniziali

$$a_{\pm}(0) = 1 \quad (462)$$

Le equazioni si risolvono per separazione delle variabili

$$a_{\pm}(t) = e^{\mp \frac{3 e \mathcal{E}_0 a_{Bohr}}{\hbar \omega} (\cos \omega t - 1)} \quad (463)$$

per cui

$$\begin{aligned} a_1(t) &= \frac{a_+(t) + a_-(t)}{2} = \cos \left[\frac{3 e \mathcal{E}_0 a_{Bohr}}{\hbar \omega} (\cos \omega t - 1) \right] \\ a_2(t) &= \frac{a_+(t) - a_-(t)}{2} = -i \sin \left[\frac{3 e \mathcal{E}_0 a_{Bohr}}{\hbar \omega} (\cos \omega t - 1) \right] \end{aligned}$$

e le probabilità di occupazione dei livelli corrispondenti sono

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \cos^2 \left[\frac{3 e \mathcal{E}_0 a_{Bohr}}{\hbar \omega} (\cos \omega t - 1) \right] \\ P_2(t) &= \sin^2 \left[\frac{3 e \mathcal{E}_0 a_{Bohr}}{\hbar \omega} (\cos \omega t - 1) \right] \end{aligned} \quad (464)$$

La validità del calcolo perturbativo richiede non solo che

$$e \mathcal{E}_0 a_{Bohr} \ll E_{Bohr} \quad (465)$$

dove E_{Bohr} è la differenza di energia tra i livelli $n = 2$ e $n = 1$, ma anche che

$$e \mathcal{E}_0 a_{Bohr} \ll \hbar \omega \quad (466)$$

L'applicabilità del risultato ottenuto in Eq. (464) non richiede invece (466) ma solo la (465).

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 20/12/2007

Problema 1

Al tempo $t = 0$ un atomo di idrogeno si trova nello stato eccitato $|2, 0, 0\rangle$. Nell'intervallo di tempo $0 < t < \tau$ l'atomo è sottoposto ad un campo elettrico uniforme diretto lungo l'asse delle z di intensità \mathcal{E} .

Domanda 1

Si calcolino, al primo ordine in teoria delle perturbazioni, ciascuna delle probabilità che al tempo $t > \tau$ l'atomo si trovi in uno degli stati con $n = 2$.

Domanda 2

Si calcolino le stesse probabilità di transizione nell'approssimazione in cui si trascurano tutti gli stati con $n \neq 2$, senza ulteriori approssimazioni. Si discuta la relazione tra questa approssimazione e quella della domanda 1.

Domanda 3

Calcolare il valore numerico delle probabilità nel caso in cui

$$\mathcal{E} = 10^6 \text{ volt/cm} \quad \tau = 10^{-12} \text{ sec} \quad (467)$$

Problema 2

Un oscillatore armonico unidimensionale di frequenza ω descritto dalla Hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (468)$$

si trova al tempo $t = 0$ nello stato coerente $|\alpha\rangle$ di ampiezza α . Per $t > 0$ viene accesa la perturbazione

$$V(t) = \frac{e E_0}{2} \left(\frac{p}{m\Omega} \sin \Omega t - x \cos \Omega t \right) \quad (469)$$

Domanda

Si calcoli al primo ordine in teoria delle perturbazione la probabilità che al tempo t l'oscillatore si trovi nello stato fondamentale $|0\rangle$.

Prova Scritta del 20/12/2007: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

L'unico elemento di matrice non nullo della perturbazione dipendente dal tempo per $t > 0$ nel settore con $n = 2$

$$V(t) = e \mathcal{E} \theta(\tau - t) \hat{z} \quad (470)$$

è quello tra lo stato $|2, 0, 0\rangle$ e $|2, 1, 0\rangle$:

$$\langle 2, 1, 0 | z | 2, 0, 0 \rangle = -3 a_{Bohr} \quad (471)$$

Dunque al primo ordine in teoria delle perturbazioni

$$A_{|2,0,0\rangle \rightarrow |2,1,0\rangle} = \frac{3 i e \mathcal{E} a_{Bohr}}{\hbar} \int_0^\tau dt = \frac{3 i e \mathcal{E} a_{Bohr} \tau}{\hbar} \quad (472)$$

e l'unica probabilità di transizione non nulla è

$$P_{|2,0,0\rangle \rightarrow |2,1,0\rangle} = \left(\frac{3 e \mathcal{E} a_{Bohr} \tau}{\hbar} \right)^2 \quad (473)$$

Domanda 2

Per $0 < t < \tau$ gli autostati di H sono, nell'approssimazione in cui ci limitiamo al livello $n = 2$:

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|2, 0, 0\rangle \pm |2, 1, 0\rangle) \quad (474)$$

con autovalori $E_\pm = E_2 \pm 3 e a_{Bohr} \mathcal{E}$, dove E_2 è il livello $n = 2$ dell'atomo di idrogeno imperturbato.

Al tempo $t = 0$ l'atomo si trova nello stato

$$|\psi(t = 0)\rangle = |2, 0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle) \quad (475)$$

Al tempo $t = \tau$

$$\begin{aligned} |\psi(t = \tau)\rangle &= \frac{e^{-\frac{i E_2 \tau}{\hbar}}}{\sqrt{2}} (e^{-\frac{i 3 e a_{Bohr} \mathcal{E} \tau}{\hbar}} |+\rangle + e^{\frac{i 3 e a_{Bohr} \mathcal{E} \tau}{\hbar}} |-\rangle) \\ &= e^{-\frac{i E_2 \tau}{\hbar}} \left(\cos \frac{3 e a_{Bohr} \mathcal{E} \tau}{\hbar} |2, 0, 0\rangle - i \sin \frac{3 e a_{Bohr} \mathcal{E} \tau}{\hbar} |2, 1, 0\rangle \right) \end{aligned}$$

Per tempi $t > \tau$ gli autostati sono nuovamente $|2, 0, 0\rangle$ e $|2, 1, 0\rangle$ e dunque lo stato è

$$|\psi(t > \tau)\rangle = e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \left(\cos \frac{3 e a_{Bohr} \mathcal{E} \tau}{\hbar} |2, 0, 0\rangle - i \sin \frac{3 e a_{Bohr} \mathcal{E} \tau}{\hbar} |2, 1, 0\rangle \right)$$

Pertanto l'ampiezza di transizione per $t > \tau$ è

$$A_{|2,0,0\rangle \rightarrow |2,1,0\rangle}(t > \tau) = -i e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \sin \frac{3 e a_{Bohr} \mathcal{E} \tau}{\hbar} \quad (476)$$

e la probabilità

$$P_{|2,0,0\rangle \rightarrow |2,1,0\rangle}(t > \tau) = \sin^2 \frac{3 e a_{Bohr} \mathcal{E} \tau}{\hbar} \quad (477)$$

Domanda 3

Abbiamo

$$3 a_{Bohr} \mathcal{E} \approx 1.59 \cdot 10^{-2} ev \ll E_{Bohr} \approx 27.2 ev \quad (478)$$

Quindi l'approssimazione della domanda 2 in cui trascuriamo gli stati con $n \neq 2$ è giustificata. D'altra parte per la validità dell'approssimazione nella domanda 1 è necessario anche che i tempi non siano troppo grandi:

$$\begin{aligned} \frac{3 a_{Bohr} \mathcal{E} \tau}{\hbar} &= \frac{3 a_{Bohr} \mathcal{E}}{E_{Bohr}} \frac{\tau}{\tau_{Bohr}} \approx \frac{1.59 \cdot 10^{-2} ev}{27.2 ev} \frac{\tau}{2.42 \cdot 10^{-17} sec} \approx \\ &\approx 5.585 \cdot 10^{-4} \times 4.132 \cdot 10^4 \approx 24.155 \end{aligned} \quad (479)$$

Dunque l'approssimazione perturbativa della domanda 1 non è applicabile. In definitiva, usando le formule nella domanda 2 abbiamo

$$P_{|2,0,0\rangle \rightarrow |2,1,0\rangle}(t > \tau) \approx \sin^2(24.155) \approx 0.69 \quad (480)$$

Problema 2

Domanda 1

Scriviamo la perturbazione in termini dei creatori e distruttori a^\dagger e a :

$$x = i \lambda (a - a^\dagger) \quad p = \frac{\hbar}{2 \lambda} (a + a^\dagger) \quad (481)$$

dove

$$\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{2 m \omega}} \quad (482)$$

Definiamo anche

$$\Lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\Omega}} \quad (483)$$

Dunque

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{eE_0}{2} \left(\frac{\Lambda^2}{\lambda} (a + a^\dagger) \sin \Omega t - i \lambda (a - a^\dagger) \cos \Omega t \right) = \\ &= \frac{eE_0\Lambda}{2} \left(\left[\frac{\Lambda}{\lambda} \sin \Omega t - i \frac{\lambda}{\Lambda} \cos \Omega t \right] a + \left[\frac{\Lambda}{\lambda} \sin \Omega t + i \frac{\lambda}{\Lambda} \cos \Omega t \right] a^\dagger \right) \equiv \\ &= \frac{eE_0\Lambda}{2} \left(f(t) a + f^*(t) a^\dagger \right) \end{aligned} \quad (484)$$

dove

$$f(t) \equiv \frac{\Lambda}{\lambda} \sin \Omega t - i \frac{\lambda}{\Lambda} \cos \Omega t \quad (485)$$

La perturbazione nella rappresentazione dell'interazione è

$$V_{int}(t) = \frac{eE_0}{2} \left(f(t) a e^{-i\omega t} + f^*(t) a^\dagger e^{i\omega t} \right) \quad (486)$$

L'ampiezza di transizione al primo ordine è

$$\begin{aligned} A_{|\alpha\rangle \rightarrow |n\rangle} &= \langle n|\alpha\rangle - \frac{i}{\hbar} \frac{eE_0}{2} \left[\langle n|a|\alpha\rangle \int_0^t dt' f(t') e^{-i\omega t'} + \right. \\ &\quad \left. + \langle n|a^\dagger|\alpha\rangle \int_0^t dt' f^*(t') e^{i\omega t'} \right] \end{aligned}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \langle n|\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \\ \langle n|a|\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{n!}} \\ \langle n|a^\dagger|\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sqrt{n} \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} \end{aligned} \quad (487)$$

e

$$\int_0^t dt' f(t') e^{-i\omega t'} = -\frac{1}{2} \left[\left(\epsilon + \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{e^{i\Omega_- t} - 1}{\Omega_-} + \left(\epsilon - \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{e^{-i\Omega_+ t} - 1}{\Omega_+} \right]$$

dove abbiamo definito

$$\epsilon = \frac{\Lambda}{\lambda} \quad \Omega_{\pm} = \Omega \pm \omega \quad (488)$$

L'ampiezza di transizione al primo ordine si riscrive pertanto

$$A_{|\alpha\rangle \rightarrow |n\rangle} = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \left[\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} - \frac{i}{\hbar} \frac{e E_0}{2} \left[\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{n!}} \int_0^t dt' f(t') e^{-i\omega t'} + \sqrt{n} \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} \int_0^t dt' f^*(t') e^{i\omega t'} \right] \right]$$

Nel caso che lo stato finale sia il fondamentale abbiamo

$$A_{|\alpha\rangle \rightarrow |0\rangle} = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \left[1 - \frac{i}{\hbar} \frac{e \alpha E_0}{2} \int_0^t dt' f(t') e^{-i\omega t'} \right] \quad (489)$$

e per la probabilità

$$P_{|\alpha\rangle \rightarrow |0\rangle} = e^{-|\alpha|^2} \left[1 - \frac{e \alpha E_0 \hbar}{2} \left[\left(\epsilon + \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{\sin \Omega_- t}{\Omega_-} + \left(\epsilon - \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{\sin \Omega_+ t}{\Omega_+} \right] \right] \quad (490)$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 31/01/2008

Problema 1

Si consideri la diffusione di una particella di massa m nel potenziale centrale

$$V(r) = -\frac{\hbar^2}{m a^2} \frac{1}{\cosh^2 \frac{r}{a}} \quad (491)$$

Domanda 1

Sapendo che l'equazione differenziale lineare

$$y''(x) + k^2 y + \frac{2}{\cosh^2 x} y = 0 \quad (492)$$

ha come soluzioni linearmente indipendenti

$$y_{\pm}(x) = e^{\pm i k x} (\tanh x \mp i k), \quad (493)$$

calcolare la sezione d'urto di diffusione della particella nel limite di basse energie.

Domanda 2

Si valuti la sezione d'urto nel caso di un elettrone di energia $E = 3.4 \cdot 10^{-2} \text{ev}$ e $a = 10^{-8} \text{cm}$. È applicabile l'approssimazione di bassa energia in questo caso? Perché?

Problema 2

Una particella uni-dimensionale di massa m e di carica q si trova in uno stato legato che è lo stato fondamentale del potenziale

$$V(x) = -2 \lambda \delta(x) \quad (494)$$

con $\lambda > 0$. Al tempo $t = 0$ si accende un campo elettrico costante \mathcal{E} fino al tempo $t = \tau$ che interagisce con la particella secondo il potenziale

$$V_1(x) = \begin{cases} -q x \mathcal{E} & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & t < 0 \quad t > \tau \end{cases} \quad (495)$$

Domanda 1

Calcolare al primo ordine in teoria delle perturbazioni la probabilità che al tempo $t > \tau$ la particella si trovi in uno stato dello spettro continuo con energia compresa tra E e $E + dE$.

Prova Scritta del 31/1/2008: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

L'equazione di Schrödinger per la funzione d'onda radiale

$$\chi_0(r) = r R_{0k}(r) \quad (496)$$

è

$$\chi_0''(r) + k^2 \chi_0 + \frac{1}{a^2} \frac{1}{\cosh^2 \frac{r}{a}} \chi_0 = 0 \quad (497)$$

Pertanto posto $x = \frac{r}{a}$ abbiamo

$$\frac{d^2 \chi_0(x)}{dx^2} + (ak)^2 \chi_0 + \frac{1}{\cosh^2 x} \chi_0 = 0 \quad (498)$$

La soluzione generale di questa equazione è

$$\chi_0 = A_+ e^{iakx} (\tanh x + iak) + A_- e^{-iakx} (\tanh x - iak) \quad (499)$$

La condizione che $\chi_0(0) = 0$ dà

$$A_+ = A_- \quad (500)$$

Dunque possiamo prendere

$$\chi_0 = 2 \cos kr \tanh \frac{r}{a} + 2ak \sin kr \quad (501)$$

Per $r \gg a$

$$\chi_0 \approx 2 \cos kr + 2ak \sin kr \quad (502)$$

e dunque

$$\cot \delta_0 = ak \quad (503)$$

L'ampiezza di diffusione parziale con $l = 0$ è pertanto

$$f_0 = \frac{1}{k \cot \delta_0 - ik} = \frac{1}{k} \frac{1}{ak - i} \quad (504)$$

e la sezione d'urto corrispondente

$$\sigma_0 = 4\pi |f_0|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \frac{1}{a^2 k^2 + 1} \quad (505)$$

NOTA

Vediamo che $ak \cot \delta_0 \propto (ak)^2$, invece di tendere ad una costante per $ak \rightarrow 0$. La ragione è che per $k = 0$ l'equazione di Schrödinger ammette una soluzione di "soglia"

$$\chi_{0,k=0}^{soglia}(r) = \tanh \frac{r}{a} \rightarrow 1 \quad \text{per } r \rightarrow \infty \quad (506)$$

Questa funzione d'onda non descrive uno stato normalizzabile, ma se la buca il potenziale è soltanto leggermente più profonda questo stato diventa normalizzabile con energia molto vicina a zero. Per esempio se introduciamo il potenziale

$$V_\lambda(r) = -\frac{\hbar^2}{m a^2} \frac{\lambda}{\cosh^2 \frac{r}{a}} \quad (507)$$

che si riduce al potenziale del problema per $\lambda = 1$ e prendiamo $\lambda = 1 + \epsilon$ con $\epsilon > 0$ arbitrariamente piccolo allora il potenziale ha uno stato legato con energia di legame proporzionale a ϵ^2 . Siamo dunque in condizioni di risonanza e questo porta alla sezione d'urto anomalmente grande per k piccoli ottenuta in Eq.(505)

Domanda 2

Definiamo come al solito

$$E_B = \frac{m e^4}{2 \hbar^2} \approx 13.6 \text{ ev} \quad (508)$$

Il corrispondente numero d'onda è

$$k_B = \sqrt{\frac{2 E_B m}{\hbar^2}} = \frac{1}{a_B} \approx \frac{1}{0.53 \cdot 10^{-8} \text{ cm}} \quad (509)$$

Dunque

$$\frac{E}{E_B} \approx \frac{3.4 \cdot 10^{-2}}{13.6} \approx 2.5 \cdot 10^{-3} \quad (510)$$

Pertanto

$$ak = \sqrt{\frac{E}{E_B}} a k_B \approx 5 \cdot 10^{-2} \frac{1}{0.53} \approx 0.943 \cdot 10^{-1} \quad (511)$$

Quindi possiamo applicare l'approssimazione di bassa energia. La formula ottenuta precedentemente dà

$$\sigma_0 = \frac{4 \pi}{k^2} \frac{1}{a^2 k^2 + 1} \approx 4 \pi a^2 \frac{1}{0.943^2 \cdot 10^{-2}} \frac{1}{0.943^2 \cdot 10^{-2} + 1} \approx 1.40 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^2 \quad (512)$$

Problema 2

La funzione d'onda dello stato legato (ottenuta in un altro esercizio) è

$$\psi_0(x) = \sqrt{k_0} e^{-k_0|x|} \quad (513)$$

dove

$$k_0 = \frac{2 \lambda m}{\hbar^2} \quad (514)$$

e l'energia dello stato legato è

$$E_0 = -\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \quad (515)$$

Poiché la perturbazione è dispari per $x \rightarrow -x$ mentre lo stato fondamentale è pari, gli stati del continuo che saranno raggiunti al primo ordine saranno quelli dispari. Le funzioni d'onda di questi stati sono

$$\psi_E^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (e^{ikx} - e^{-ikx}) \quad (516)$$

e coincidono con quelle libere (si è mostrato in un altro esercizio che questo potenziale modifica unicamente lo spettro pari). Con questa scelta della normalizzazione delle funzioni d'onda del continuo abbiamo

$$(\psi_E^{(-)}, \psi_{E'}^{(-)}) = \delta(k - k') = \frac{\hbar^2 k}{m} \delta(E - E') \equiv \rho(E) \delta(E - E') \quad (517)$$

Calcoliamo l'elemento di matrice della perturbazione tra stati del continuo e stato legato

$$\begin{aligned} M &= -q \mathcal{E} (\psi_E^{(-)}, x \psi_0) = 2q \mathcal{E} \sqrt{\frac{k_0}{4\pi}} \int_0^\infty dx x (e^{(ik-k_0)x} - e^{(-ik-k_0)x}) \\ &= 8iq \mathcal{E} \sqrt{\frac{k_0}{4\pi}} \frac{k k_0}{(k^2 + k_0^2)^2} \end{aligned} \quad (518)$$

Si noti inoltre che

$$\Delta\omega \equiv \omega_f - \omega_0 \equiv \frac{E - E_0}{\hbar} = \frac{\hbar}{2m} (k^2 + k_0^2) \quad (519)$$

La distribuzione di probabilità di transizione in energia al primo ordine in teoria delle perturbazioni si scrive dunque

$$\begin{aligned}
 \frac{dP(E)}{dE} &= \frac{|M|^2}{\hbar^2 \rho(E)} \left| \int_0^\tau dt' e^{i \Delta \omega t'} \right|^2 = \\
 &= \frac{64}{4 \pi \hbar^4} q^2 \mathcal{E}^2 \frac{m k k_0^3}{(k^2 + k_0^2)^4} \left| \frac{e^{i \Delta \omega \tau} - 1}{i \Delta \omega} \right|^2 = \\
 &= \frac{64}{\pi \hbar^4} q^2 \mathcal{E}^2 \frac{m k k_0^3}{(k^2 + k_0^2)^4} \frac{\sin^2 \frac{\Delta \omega \tau}{2}}{\frac{\hbar^2}{4 m^2} (k^2 + k_0^2)^2} = \\
 &= \frac{256}{\pi \hbar^6} q^2 \mathcal{E}^2 \frac{m^3 k k_0^3}{(k^2 + k_0^2)^6} \sin^2 \frac{\Delta \omega \tau}{2}
 \end{aligned}$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 12/02/2008

Problema 1

Una particella uni-dimensionale di massa m e di carica q si trova in uno stato legato che è lo stato fondamentale del potenziale

$$V(x) = -2\lambda\delta(x) \quad (520)$$

con $\lambda > 0$. Al tempo $t = 0$ si accende una perturbazione dipendente dal tempo

$$V_1(x, t) = g \sin\left(\frac{2\lambda m x}{\hbar^2}\right) e^{-\alpha t} \quad (521)$$

con $\alpha > 0$.

Domanda 1

Calcolare al primo ordine in teoria delle perturbazioni la probabilità che al tempo $t = +\infty$ la particella si trovi in uno stato dello spettro continuo con energia compresa tra E e $E + dE$.

Domanda 2

Valutare la probabilità di estrazione di particella dalla buca di energia compresa tra E e $E + dE$, per

$$\lambda = 7.2 \cdot 10^{-8} \text{ cm} \times \text{ev} \quad g = 1. \text{ ev} \quad \frac{1}{\alpha} = 10^{-14} \text{ sec} \quad E = 0.1 \text{ ev} \quad (522)$$

Prova Scritta del 12/02/2008: Soluzione

Problema 1

La funzione d'onda dello stato legato (ottenuta in un altro esercizio) è

$$\psi_0(x) = \sqrt{k_0} e^{-k_0|x|} \quad (523)$$

dove

$$k_0 = \frac{2 \lambda m}{\hbar^2} \quad (524)$$

e l'energia dello stato legato è

$$E_0 = -\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \quad (525)$$

Poiché la perturbazione è dispari per $x \rightarrow -x$ mentre lo stato fondamentale è pari, gli stati del continuo che saranno raggiunti al primo ordine saranno quelli dispari. Le funzioni d'onda di questi stati sono

$$\psi_E^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (e^{ikx} - e^{-ikx}) \quad (526)$$

e coincidono con quelle libere (si è mostrato in un altro esercizio che questo potenziale modifica unicamente lo spettro pari). Con questa scelta della normalizzazione delle funzioni d'onda del continuo abbiamo

$$(\psi_E^{(-)}, \psi_{E'}^{(-)}) = \delta(k - k') = \frac{\hbar^2 k}{m} \delta(E - E') \equiv \rho(E) \delta(E - E') \quad (527)$$

Calcoliamo l'elemento di matrice della perturbazione tra stati del continuo e stato legato

$$\begin{aligned} M &= g (\psi_E^{(-)}, \sin k_0 x \psi_0) = -2g \sqrt{\frac{k_0}{4\pi}} \int_0^\infty dx \sin k_0 x (e^{(ik-k_0)x} + \\ &\quad - e^{(-ik-k_0)x}) = \\ &= -8g i \sqrt{\frac{k_0}{4\pi}} \frac{k k_0^2}{k^4 + 4k_0^4} \end{aligned} \quad (528)$$

Si noti inoltre che

$$\Delta\omega \equiv \omega_f - \omega_0 \equiv \frac{E - E_0}{\hbar} = \frac{\hbar}{2m} (k^2 + k_0^2) \quad (529)$$

La distribuzione di probabilità di transizione in energia al primo ordine in teoria delle perturbazioni si scrive dunque

$$\begin{aligned}\frac{dP(E)}{dE} &= \frac{|M|^2}{\hbar^2 \rho(E)} \left| \int_0^\infty dt' e^{(i\Delta\omega - \alpha)t'} \right|^2 = \\ &= \frac{64 g^2}{4 \pi \hbar^4} \frac{m k k_0^5}{(k^4 + 4 k_0^4)^2} \frac{1}{\Delta\omega^2 + \alpha^2} = \\ &= \frac{256 g^2}{4 \pi \hbar^6} \frac{m^3 k k_0^5}{(k^4 + 4 k_0^4)^2} \frac{1}{(k_0^2 + k^2)^2 + \frac{4m^2\alpha^2}{\hbar^2}}\end{aligned}$$

Per

$$k^2 \ll k_0^2 \quad \frac{2m\alpha}{\hbar} \ll k_0^2 \quad (530)$$

la distribuzione di energia delle particelle emesse è approssimata da

$$\begin{aligned}\frac{dP(E)}{dE} &\approx \frac{1}{2\pi} \frac{8 g^2 m^3}{\hbar^6 k_0^6} \frac{k}{k_0} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{g^2}{E_0^3} \sqrt{\frac{E}{E_0}}\end{aligned} \quad (531)$$

Domanda 2

Per i valori dei parametri forniti

$$\frac{1}{k_0} = \frac{\hbar^2}{2m\lambda} = \frac{\hbar^2}{m e^2} \frac{e^2}{2\lambda} = a_{Bohr} \frac{0.529 \cdot 10^{-8} \text{ cm} \times 27.2 \text{ eV}}{2 \times 7.2 \cdot 10^{-8} \text{ cm eV}} \approx a_{Bohr} \quad (532)$$

Dunque

$$E_0 \approx 13.6 \text{ eV} \quad (533)$$

e

$$\frac{k^2}{k_0^2} = \frac{E}{E_0} \approx \frac{1}{136} \approx 7.6 \cdot 10^{-3} \quad (534)$$

Inoltre

$$\frac{\hbar k_0^2}{2m\alpha} = \frac{E_0}{\hbar\alpha} = \frac{1}{\tau_{Bohr} \alpha} \approx \frac{10^{-14} \text{ sec}}{2.4 \cdot 10^{-17}} \approx 0.4 \cdot 10^3 \quad (535)$$

Dunque siamo nelle condizioni in cui utilizzare la formula semplificata precedentemente derivata

$$\begin{aligned}\frac{dP(E)}{dE} &\approx \frac{1}{2\pi} \frac{g^2}{E_0^3} \sqrt{\frac{E}{E_0}} \approx \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \frac{1}{13.6^2} \sqrt{\frac{1}{13.6} \frac{1}{13.6}} \text{ eV}^{-1} \approx 1.7 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^{-1}\end{aligned} \quad (536)$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 11/04/2008

Problema 1

Una particella di spin 1/2 immersa in un campo magnetico uniforme e costante, descritto dall'Hamiltoniana

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar \mu B}{2} \sigma_z \quad (537)$$

si trova al tempo $t = 0$ nello stato di energia più bassa

$$\psi(0) = |+\rangle \quad (538)$$

$|\pm\rangle$ sono gli autostati della matrice di Pauli σ_z con autovalori ± 1 . Al tempo $t > 0$ è accesa la perturbazione

$$\hat{V}(t) = -\hbar \mu (B'_x(t) \sigma_x + B''_z(t) \sigma_z) \quad (539)$$

dove

$$B'_x(t) = B' e^{-\alpha t} \quad B''_z(t) = B'' e^{-\beta t}$$

con $B', B'' \ll B$ e α e β reali positivi.

Domanda 1

Si calcoli, al primo ordine in V , la probabilità di transizione al tempo $t = +\infty$ nello stato $|-\rangle$.

Domanda 2

Si calcoli, al secondo ordine in V , la probabilità di transizione al tempo $t = +\infty$ nello stato $|-\rangle$.

Prova Scritta del 11/04/2008: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

La differenza di energia tra i due autostati $|\pm\rangle$ di \hat{H}_0 è

$$\omega \equiv \frac{E_- - E_+}{\hbar} = \mu B \quad (540)$$

Riscriviamo l'interazione come segue

$$\hat{V}(t) = -\hbar \mu (B'_-(t) \sigma_+ + B'_+(t) \sigma_- + B'_z(t) \sigma_z) \quad (541)$$

dove

$$\begin{aligned} \sigma_{\pm} &= \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y) \\ B'_{\pm}(t) &= B'_x \pm i B'_y = B' e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

Abbiamo

$$\sigma_{\pm}|\pm\rangle = 0 \quad \sigma_{\pm}|\mp\rangle = |\pm\rangle \quad \sigma_z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle \quad (542)$$

Al primo ordine l'ampiezza di transizione è

$$\begin{aligned} A_{-+}^{(1)} &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^{\infty} dt' \langle -|V^{(int)}(t')|+\rangle = \\ &= i\mu \int_0^{\infty} dt' e^{i\omega t'} \langle -|B'_+(t')\sigma_-|+\rangle = \\ &= i\mu B' \int_0^{\infty} dt' e^{(i\omega-\alpha)t'} = \frac{i\mu B'}{\alpha - i\omega} \end{aligned}$$

La probabilità di transizione al primo ordine è

$$P_{-+}^{(1)} = \frac{\mu^2 (B')^2}{\omega^2 + (\alpha)^2} \quad (543)$$

Domanda 2

Il termine del secondo ordine nell'ampiezza di transizione è

$$\begin{aligned}
A^{(2)}(t) &= \frac{(-i)^2}{\hbar^2} \int_0^\infty dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle -|V^{(int)}(t_1) V^{(int)}(t_2)|+\rangle = \\
&= -\mu^2 \int_0^\infty dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \left[e^{i\omega t_1} \langle -|B'_+(t_1)\sigma_-|+\rangle \langle +|B''_z(t_2)\sigma_z|+\rangle + \right. \\
&\quad \left. + e^{i\omega t_2} \langle -|B''_z(t_1)\sigma_z|-\rangle \langle -|B'_+(t_2)\sigma_-|+\rangle \right] = \\
&= -\mu^2 B' B'' \int_0^\infty dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \left[e^{(i\omega-\alpha)t_1} e^{-\beta t_2} - e^{-\beta t_1} e^{(i\omega-\alpha)t_2} \right] = \\
&= -\mu^2 B' B'' \int_0^\infty dt_1 \left[e^{(i\omega-\alpha)t_1} \frac{1-e^{-\beta t_1}}{\beta} - e^{-\beta t_1} \frac{1-e^{(i\omega-\alpha)t_1}}{\alpha-i\omega} \right] = \\
&= -\mu^2 B' B'' \left[\frac{1}{\alpha-i\omega} \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta+\alpha-i\omega} \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} \frac{1}{\alpha-i\omega} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(\alpha-i\omega)(\alpha+\beta-i\omega)} \right] = \\
&= -\mu^2 B' B'' \frac{\beta-\alpha+i\omega}{(\alpha-i\omega)(\alpha+\beta-i\omega)\beta} \tag{544}
\end{aligned}$$

L'ampiezza totale fino al secondo ordine è pertanto

$$A_{-+} = \frac{i\mu B'}{\alpha-i\omega} \left[1 + i \frac{\mu B''}{\beta} \frac{\beta-\alpha+i\omega}{\alpha+\beta-i\omega} \right] \tag{545}$$

La probabilità di transizione a quest'ordine

$$\begin{aligned}
P_{-+}^{(2)} &= \frac{\mu^2 (B')^2}{\alpha^2 + \omega^2} \left[1 + \frac{i\mu B''}{\beta} \left(\frac{\beta-\alpha+i\omega}{\alpha+\beta-i\omega} - \frac{\beta-\alpha-i\omega}{\alpha+\beta+i\omega} \right) \right] = \\
&= \frac{\mu^2 (B')^2}{\alpha^2 + \omega^2} \left[1 + \frac{i\mu B''}{\beta} \times \right. \\
&\quad \left. \times \frac{(\beta-\alpha+i\omega)(\alpha+\beta+i\omega) - (\beta-\alpha-i\omega)(\alpha+\beta-i\omega)}{(\alpha+\beta)^2 + \omega^2} \right] = \\
&= \frac{\mu^2 (B')^2}{\alpha^2 + \omega^2} \left[1 - \frac{4\omega\mu B''}{(\alpha+\beta)^2 + \omega^2} \right]
\end{aligned}$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 4/06/2008

Problema 1

Un'oscillatore armonico di frequenza ω si trova al tempo $t = 0$ in uno stato coerente $|\alpha\rangle$. Per $t > 0$ il sistema è sottoposto alla perturbazione dipendente dal tempo

$$V(t) = f e^{-\mu t} (a + a^\dagger) \quad (546)$$

con f reale e $\mu > 0$.

Domanda 1

Si calcoli la probabilità che al tempo $t \rightarrow +\infty$ il sistema si trovi nello stato fondamentale.

Problema 2

Si consideri una particella di massa m in 3 dimensioni che diffonde in una buca di potenziale a simmetria sferica

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & 0 \leq r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (547)$$

dove $V_0 > 0$ è tale che

$$y_0 \equiv \sqrt{\frac{2 m a^2 V_0}{\hbar^2}} \quad y_0 \cot y_0 = 1 \quad (548)$$

Domanda 1

Si determini la sezione d'urto differenziale di diffusione all'ordine più basso non nullo nell'espansione di bassa energia.

Prova Scritta del 4/06/2008: Soluzione

Problema 1

L'equazione di Schrödinger nella rappresentazione olomorfa e nella pittura di interazione si scrive

$$i \hbar \partial_t \chi(z, t) = z e^{i\omega t} f(t) + e^{-i\omega t} f(t) \partial_z \chi(z, t) \quad (549)$$

dove

$$\psi(z, t) = e^{\chi(z, t)} \quad (550)$$

è la funzione d'onda e

$$f(t) = f e^{-\mu t} \quad (551)$$

Sappiamo che una soluzione dell'equazione d'onda è lineare in z

$$\chi(z, t) = \beta(t) + \alpha(t) z \quad (552)$$

con

$$\begin{aligned} i \hbar \dot{\beta}(t) &= e^{-i\omega t} f(t) \alpha(t) \\ i \hbar \dot{\alpha}(t) &= e^{i\omega t} f(t) \end{aligned}$$

Le condizioni iniziali sono

$$\alpha(0) = \alpha \quad \beta(0) = -\frac{1}{2} |\alpha|^2 \quad (553)$$

Dunque

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t e^{i\omega t'} f(t') dt' + \alpha \\ \beta(t) &= -\frac{1}{2} |\alpha(t)|^2 + i \delta(t) \end{aligned} \quad (554)$$

dove $\delta(t)$ è una fase reale irrilevante per il calcolo della probabilità di transizione. Usando l'espressione data per $f(t)$ otteniamo

$$\begin{aligned} \alpha(+\infty) &= \frac{f/\hbar}{\omega + i\mu} + \alpha \\ \beta(+\infty) &= -\frac{1}{2} \left| \frac{f/\hbar}{\omega + i\mu} + \alpha \right|^2 + i \delta(+\infty) \end{aligned} \quad (555)$$

La probabilità di transizione nello stato fondamentale è

$$P_{|\alpha\rangle\rightarrow|0\rangle} = e^{\beta(+\infty)+\bar{\beta}(+\infty)} = e^{-\left|\frac{f/h}{\omega+i\mu}+\alpha\right|^2} \quad (556)$$

Problema 2

Consideriamo l'ampiezza di diffusione con $l = 0$. La funzione d'onda radiale $\chi_0(r)$ soddisfa

$$\chi_0(r) = \begin{cases} \sin K r & 0 \leq r \leq a \\ A_0 \sin(k r + \delta_0) & r \geq a \end{cases} \quad (557)$$

dove

$$y \equiv a k \quad (558)$$

$$Y \equiv a K = \sqrt{y^2 + y_0^2} \quad (559)$$

L'equazione che determina δ_0 è

$$y \cot \delta_0 = \frac{y^2 + (y \cot y) (Y \cot Y)}{y \cot y - Y \cot Y} \quad (560)$$

Sviluppando in y^2

$$\begin{aligned} Y &= y_0 + \frac{y^2}{2y_0} + O(y^4) \\ \cot Y &= \cot\left(y_0 + \frac{y^2}{2y_0} + O(y^4)\right) = \cot y_0 - (1 + \cot^2 y_0) \frac{y^2}{2y_0} + O(y^4) \\ Y \cot Y &= 1 + \left(\frac{1}{y_0^2} - 1 - \cot^2 y_0\right) \frac{y^2}{2} + O(y^4) = \\ &= 1 - \frac{y^2}{2} + O(y^4) = \end{aligned} \quad (561)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} y \cot \delta_0 &= \frac{y^2 + (1 - \frac{y^2}{3} + O(y^4)) (1 - \frac{y^2}{2} + O(y^4))}{1 - \frac{y^2}{3} - 1 + \frac{y^2}{2} + O(y^4)} = \\ &= \frac{1 + \frac{y^2}{6} + O(y^4)}{\frac{y^2}{6} (1 + O(y^2))} = \frac{6}{y^2} + O(1) \end{aligned} \quad (562)$$

L'ampiezza parziale con $l = 0$ si scrive dunque

$$\frac{f_0}{a} = \frac{y^2}{6} (1 + O(y^2)) \quad (563)$$

Dobbiamo pertanto calcolare l'ampiezza con $l = 1$ che è dello stesso ordine. La funzione d'onda χ_1 si scrive

$$\chi_1(r) = \begin{cases} j_1(Kr) & 0 \leq r \leq a \\ A_1 (\cot \delta_1 j_1(kr) + n_1(kr)) & r \geq a \end{cases} \quad (564)$$

L'equazione che determina δ_1 è

$$\cot \delta_1 = - \frac{n_1(y) \frac{Y \chi_1'(Y)}{\chi_1(Y)} - \frac{y n_1'(y)}{n_1(y)}}{j_1(y) \frac{Y \chi_1'(Y)}{\chi_1(Y)} - \frac{y j_1'(y)}{j_1(y)}} \quad (565)$$

Notiamo che

$$\chi_1(y_0) = -\cos y_0 + \frac{\sin y_0}{y_0} = 0 \quad (566)$$

Pertanto i termini di derivata logaritmica della funzione d'onda $\chi_1(Y)$ nella (565) divergono come $\frac{1}{k^2}$:

$$\begin{aligned} \chi_1(Y) &= -\cos Y + \frac{\sin Y}{Y} = \frac{\sin Y}{Y} (1 - Y \cot Y) = \\ &= \frac{\sin y_0}{y_0} \frac{y^2}{2} + O(y^4) \\ Y \chi_1'(Y) &= \frac{\sin Y}{Y} (Y \cot Y - 1 + Y^2) = y_0 \sin y_0 + O(y^2) \\ \frac{Y \chi_1'(Y)}{\chi_1(Y)} &= \frac{2 y_0^2}{y^2} + O(1) \end{aligned} \quad (567)$$

Per quanto riguarda le funzioni di Bessel sferiche abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{n_1(y)}{j_1(y)} &= \frac{3!!}{y^3} (1 + O(y^2)) \\ \frac{y j_1'(y)}{j_1(y)} &= 2 + O(y^2) \\ \frac{y n_1'(y)}{n_1(y)} &= -1 + O(y^2) \end{aligned}$$

In definitiva

$$\cot \delta_1 = -\frac{3}{y^3}(1 + O(y^2)) \quad (568)$$

e l'ampiezza parziale con $l = 1$ è

$$\frac{f_1}{a} = \frac{1}{-\frac{3}{y^2} + O(1)} = -\frac{y^2}{3}(1 + O(y^2)) \quad (569)$$

Le ampiezze parziali con $l > 1$ sono di ordine superiore od uguale a y^4 . Quindi l'ampiezza di diffusione all'ordine più basso non nullo è

$$f(\theta) = f_0 + 3 f_1 P_1(\cos \theta) + \dots = \frac{y^2 a}{6} (1 - 6 P_1(\cos \theta)) + O(y^4) \quad (570)$$

La sezione d'urto differenziale

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = a^2 \frac{E^2}{36 E_a^2} (1 - 6 \cos \theta)^2 + O(E^3) \quad (571)$$

dove $E_a = \frac{\hbar^2}{2m a^2}$.

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 26/06/2008

Problema 1

Una particella di massa m diffonde in un potenziale centrale $V(r)$ di raggio a infinitamente repulsivo

$$V(r) = \begin{cases} +\infty & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (572)$$

Domanda 1

Determinare la sezione d'urto differenziale e quella integrata all'ordine più basso nell'espansione di bassa energia.

Domanda 2

Determinare la correzione alla sezione d'urto differenziale e quella integrata all'ordine successivo nell'espansione di bassa energia

Problema 2

Una particella di spin 1 è immersa in un campo magnetico uniforme e costante $\vec{B} = B \hat{z}$ diretto lungo l'asse z :

$$\hat{H}_0 = \frac{\mu B}{\hbar} \hat{J}_z \quad (573)$$

Al tempo $t = 0$, quando la particella si trova nello stato con $J_z = -1$, viene acceso un campo magnetico trasverso periodico, di frequenza ω , la cui interazione col sistema è descritta dall'Hamiltoniana

$$V(t) = \frac{\mu B'}{\hbar} \left[\hat{J}_x \cos(\omega t) + \hat{J}_y \sin(\omega t) \right] \quad (574)$$

Domanda 1

Si calcolino le *ampiezze* di transizione al tempo t negli stati con $J_z = 0$ e $J_z = 1$ al secondo ordine in teoria delle perturbazioni.

Domanda 2

Si supponga

$$\mu B = \hbar \omega \quad (575)$$

Si calcolino le *probabilità esatte* che al tempo t il sistema si trovi negli stati con $J_z = 0$ e $J_z = 1$.

Domanda 3

Si supponga

$$\mu B = 10^{-3} \text{ eV} \quad \mu B' = 10^{-4} \text{ eV} \quad \hbar \omega = 10^{-3} \text{ eV} \quad (576)$$

Quali sono i tempi t per i quali il risultato perturbativo è accurato?

Prova Scritta del 26/06/2008: Soluzione

Problema 1

La funzione d'onda di momento angolare l per $r > a$ si scrive

$$\chi_l(r) = \cos \delta_l j_l(kr) + \sin \delta_l n_l(kr) \quad (577)$$

La condizione al contorno è

$$\chi_l(ak) = 0 \quad (578)$$

Dunque

$$\cot \delta_l = -\frac{n_l(y)}{j_l(y)} = -\frac{(2l-1)!!(2l+1)!!}{y^{2l+1}} \left(1 + \frac{(2l+1)y^2}{(2l-1)(2l+3)} + \dots\right) \quad (579)$$

Per $l = 0$

$$y \cot \delta_0 = -1 + \frac{y^2}{3} + O(y^4) \quad (580)$$

Per $l = 1$

$$y \cot \delta_1 = -\frac{3}{y^2} - \frac{9}{5} + O(y^2) \quad (581)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \frac{f_0}{a} &= \frac{1}{y \cot \delta_0 - iy} = \frac{1}{-1 - iy + \frac{y^2}{3} + O(y^4)} = \\ &= -1 + iy - \frac{y^2}{3} + y^2 + O(y^4) = -1 + iy + \frac{2}{3}y^2 + O(y^4) \end{aligned} \quad (582)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{f_1}{a} &= \frac{1}{y \cot \delta_1 - iy} = \frac{y^2}{-3 - iy^3 - \frac{9y^2}{5} + O(y^4)} = \\ &= -\frac{y^2}{3} + O(y^4) \end{aligned} \quad (583)$$

Pertanto l'ampiezza di diffusione fino al secondo ordine in y è

$$\frac{f(\theta)}{a} = -1 + iy + \frac{2}{3}y^2 - y^2 P_1(\cos \theta) + O(y^4) \quad (584)$$

La sezione d'urto differenziale è

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left| \frac{f(\theta)}{a} \right|^2 = [1 - (\frac{2}{3} - \cos \theta) y^2]^2 + y^2 + O(y^4) = \\ &= 1 - (\frac{1}{3} - 2 \cos \theta) y^2 + O(y^4)\end{aligned}\quad (585)$$

La sezione d'urto integrata è

$$\begin{aligned}\frac{\sigma}{a^2} &= 4\pi \left(|f_0|^2 + 3|f_1|^2 + O(y^4) \right) = \\ &= 4\pi \left[1 - \frac{4y^2}{3} + y^2 + \frac{y^4}{3} + O(y^4) \right] = \\ &= 4\pi \left[1 - \frac{y^2}{3} + O(y^4) \right]\end{aligned}\quad (586)$$

Problema 2

Riscriviamo l'interazione

$$\begin{aligned}V(t) &= \frac{\mu B'}{2\hbar} \left((\hat{J}_x - i\hat{J}_y) e^{i\omega t} + (\hat{J}_x + i\hat{J}_y) e^{-i\omega t} \right) = \\ &= \frac{\mu B'}{2\hbar} \left(J_- e^{i\omega t} + J_+ e^{-i\omega t} \right)\end{aligned}\quad (587)$$

Posto

$$\omega_0 \equiv \frac{\mu B}{\hbar} \quad \omega' \equiv \frac{\mu B'}{\hbar}\quad (588)$$

otteniamo per l'operatore nella pittura dell'interazione

$$V_{int}(t) = \frac{\omega'}{2} \left(J_- e^{i(\omega-\omega_0)t} + J_+ e^{-i(\omega-\omega_0)t} \right)\quad (589)$$

Domanda 1

Le ampiezze di transizione al primo ordine sono

$$\begin{aligned}a_0^{(1)}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \frac{\omega'}{2} \langle 0|J_+|- \rangle \int_0^t dt' e^{-i(\omega-\omega_0)t'} = \\ &= \frac{\omega'}{\sqrt{2}} \frac{e^{-i(\omega-\omega_0)t} - 1}{\omega - \omega_0} \\ a_+^{(1)}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \frac{\omega'}{2} \langle +|J_+|- \rangle \int_0^t dt' e^{-i(\omega-\omega_0)t'} = 0\end{aligned}\quad (590)$$

Il contributo del secondo ordine è

$$\begin{aligned}
a_0^{(2)}(t) &= 0 \\
a_+^{(2)}(t) &= -\frac{1}{\hbar^2} \frac{(\omega')^2}{4} \langle + | J_+ J_+ | - \rangle \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{-i(\omega-\omega_0)t_1} e^{-i(\omega-\omega_0)t_2} = \\
&= -\frac{1}{\hbar^2} \frac{(\omega')^2 \hbar^2}{2} \frac{1}{2} \left[\int_0^t dt e^{-i(\omega-\omega_0)t} \right]^2 = \\
&= \frac{(\omega')^2}{4(\omega-\omega_0)^2} \left[e^{-i(\omega-\omega_0)t} - 1 \right]^2 \tag{591}
\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
a_0(t) &= a_0^{(1)}(t) + a_0^{(2)}(t) + \dots = \frac{\omega'}{\sqrt{2}} \frac{e^{-i(\omega-\omega_0)t} - 1}{\omega - \omega_0} \\
a_+(t) &= a_+^{(1)}(t) + a_+^{(2)}(t) + \dots = \frac{(\omega')^2}{4(\omega-\omega_0)^2} \left[e^{-i(\omega-\omega_0)t} - 1 \right]^2
\end{aligned}$$

Domanda 2

Denotiamo con $a_0(t), a_{\pm}(t)$ le ampiezze di transizione negli stati $|0\rangle, |\pm\rangle$ nella pittura dell'interazione. Le equazioni di Schrödinger si scrivono

$$i \begin{pmatrix} \dot{a}_+ \\ \dot{a}_0 \\ \dot{a}_- \end{pmatrix} = \frac{\omega'}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} e^{i\epsilon t} & 0 \\ \sqrt{2} e^{-i\epsilon t} & 0 & \sqrt{2} e^{i\epsilon t} \\ 0 & \sqrt{2} e^{-i\epsilon t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ \\ a_0 \\ a_- \end{pmatrix} \tag{592}$$

dove

$$\epsilon \equiv \omega_0 - \omega \tag{593}$$

Quando

$$\epsilon = 0 \tag{594}$$

queste equazioni diventano

$$\begin{aligned}
i \dot{a}_+ &= \frac{\omega'}{\sqrt{2}} a_0 \\
i \dot{a}_0 &= \frac{\omega'}{\sqrt{2}} (a_+ + a_-) \\
i \dot{a}_- &= \frac{\omega'}{\sqrt{2}} a_0 \tag{595}
\end{aligned}$$

Da queste equazioni ricaviamo

$$-\ddot{a}_0 = (\omega')^2 a_0 \quad (596)$$

la cui soluzione è

$$a_0(t) = A \sin(\omega' t + \delta) \quad (597)$$

Sostituendo nelle (595) ricaviamo

$$\begin{aligned} a_+(t) &= \frac{A i}{\sqrt{2}} \cos(\omega' t + \delta) + B \\ a_-(t) &= \frac{A i}{\sqrt{2}} \cos(\omega' t + \delta) - B \end{aligned} \quad (598)$$

Imponendo la condizione al tempo $t = 0$

$$a_0(0) = a_+(0) = 0 \quad a_-(0) = 1 \quad (599)$$

deduciamo le ampiezze di transizione

$$a_0(t) = \frac{1}{i\sqrt{2}} \sin(\omega' t) \quad (600)$$

$$a_+(t) = \frac{1}{2} [\cos(\omega' t) - 1] = -\sin^2 \frac{\omega' t}{2}$$

$$a_-(t) = \frac{1}{2} [\cos(\omega' t) + 1] = \cos^2 \frac{\omega' t}{2} \quad (601)$$

Le probabilità di transizione sono

$$P_0(t) = \frac{1}{2} \sin^2(\omega' t) \quad (602)$$

$$P_+(t) = \sin^4 \frac{\omega' t}{2}$$

$$P_-(t) = \cos^4 \frac{\omega' t}{2} \quad (603)$$

Domanda 3

Per i valori indicati ci troviamo nelle condizioni risonanti

$$\mu B = \hbar \omega \quad (604)$$

In questo caso il risultato perturbativo diventa

$$a_0(t) = a_0^{(1)}(t) + a_0^{(2)}(t) + \dots = \frac{\omega' t}{i\sqrt{2}}$$
$$a_+(t) = a_+^{(1)}(t) + a_+^{(2)}(t) + \dots = -\frac{(\omega')^2 t^2}{4}$$

Dunque per tempi

$$t \ll \frac{1}{\omega'} = \frac{\hbar}{\mu B'} \quad (605)$$

il risultato perturbativo è accurato. Per i valori indicati nel testo questo significa

$$t \ll \frac{\hbar}{\mu B'} \approx 10^4 \frac{\hbar}{ev} \approx 10^4 \times 6.58 \cdot 10^{-16} \text{ sec} = 6.58 \cdot 10^{-12} \text{ sec} \quad (606)$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 10/07/2008

Problema 1

Una particella di spin 1 diffonde nel potenziale

$$V(\vec{x}, \vec{J}) = g \frac{e^{-\mu |\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \vec{J} \cdot \vec{x} \quad (607)$$

dove \vec{J} è l'operatore di spin della particella incidente e \vec{x} la posizione.

Domanda 1

Si calcoli la sezione d'urto differenziale nell'approssimazione di Born senza misurazione dello spin nello stato finale nell'ipotesi che il fascio di particelle incidenti non sia polarizzato, ovvero che la particella incidente abbia probabilità 1/3 di trovarsi in uno dei 3 stati di spin definito.

Domanda 2

Si calcolino le sezioni d'urto differenziali nell'approssimazione di Born senza misurazione dello spin nello stato finale nell'ipotesi che la particella incidente si trovi in uno stato di spin definito lungo la direzione di incidenza.

Problema 2

Un oscillatore armonico uni-dimensionale

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (608)$$

si trova al tempo $t = 0$ nello stato

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad (609)$$

Al tempo $t = 0$ il sistema è perturbato attraverso il potenziale dipendente dal tempo

$$\hat{V}(t) = \hbar\epsilon(t) a^\dagger a \quad (610)$$

dove

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 e^{-\alpha t} \quad (611)$$

con $\alpha > 0$.

Domanda 1

Calcolare al secondo ordine in teoria delle perturbazioni la probabilità che il sistema si trovi nello stato ψ_0 al tempo t .

Domanda 2

Calcolare la stessa probabilità esattamente.

Prova Scritta del 10/07/2008: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Posto

$$\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}' \quad (612)$$

dove \vec{k} , \vec{k}' , sono, rispettivamente, i vettori d'onda dello stato iniziale e finale, la matrice della ampiezze di Born si scrive

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \frac{m g i}{2 \pi \hbar^2} \vec{J} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \int d^3 \vec{x} \frac{e^{i \vec{q} \cdot \vec{x} - \mu |\vec{x}|}}{|\vec{x}|} = \\ &= \frac{m g i}{\hbar^2} \vec{J} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \int_0^\infty r dr e^{-\mu r} \int_{-1}^1 dt e^{i q r t} = \\ &= \frac{m g}{\hbar^2} \vec{J} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \int_0^\infty \frac{dr}{q} \left[e^{-(\mu - i q) r} - e^{-(\mu + i q) r} \right] = \\ &= \frac{m g}{\hbar^2} \vec{J} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \frac{1}{q} \left[\frac{1}{\mu - i q} - \frac{1}{\mu + i q} \right] = \\ &= \frac{m g}{\hbar^2} \vec{J} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \frac{2 i}{\mu^2 + q^2} = -\frac{4 i m g}{\hbar^2} \frac{\vec{J} \cdot \vec{q}}{(\mu^2 + q^2)^2} \end{aligned} \quad (613)$$

La sezione d'urto di uno stato iniziale di spin α ed uno finale di spin β è

$$\frac{d\sigma_{\beta\alpha}}{d\Omega} = \frac{16 m^2 g^2}{\hbar^4} \frac{q^i q^j}{(\mu^2 + q^2)^4} \langle \beta | J_i | \alpha \rangle \langle \alpha | J_j | \beta \rangle \quad (614)$$

La sezione d'urto differenziale mediata sugli stati iniziali e sommata sugli stati finali è dunque

$$\frac{1}{3} \sum_{\alpha, \beta} \frac{d\sigma_{\beta\alpha}}{d\Omega} = \frac{1}{3} \sum_{\beta} \frac{16 m^2 g^2}{\hbar^4} \frac{q^i q^j}{(\mu^2 + q^2)^4} \langle \beta | J_i J_j | \beta \rangle \quad (615)$$

Ma

$$\sum_{\beta} \langle \beta | J_i J_j | \beta \rangle = \text{Tr} J_i J_j = C \delta_{ij} \quad (616)$$

da cui

$$\text{Tr} \vec{J}^2 = 3 C = 3 \times 1 \times (1 + 1) \quad (617)$$

ovvero

$$C = 2 \quad (618)$$

In definitiva

$$\frac{1}{3} \sum_{\alpha, \beta} \frac{d\sigma_{\beta\alpha}}{d\Omega} = \frac{32 m^2 g^2}{3 \hbar^4} \frac{q^2}{(\mu^2 + q^2)^4} \quad (619)$$

Domanda 2

Siano

$$\vec{k} = k(0, 0, 1) \quad \vec{k}' = k(0, \sin \theta, \cos \theta) \quad (620)$$

i vettori d'onda iniziali e finali, e θ l'angolo di diffusione. Allora

$$\vec{q} = k(0, -\sin \theta, 1 - \cos \theta) \quad (621)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \vec{J} \cdot \vec{q} &= k[-\sin \theta J_y + (1 - \cos \theta) J_z] = \\ &= k\left[\frac{i}{2} \sin \theta J_+ - \frac{i}{2} \sin \theta J_- + (1 - \cos \theta) J_z\right] \end{aligned} \quad (622)$$

Nella base $|\pm\rangle, |0\rangle$ questa matrice si scrive

$$\vec{J} \cdot \vec{q} = k \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta & \frac{i}{\sqrt{2}} \sin \theta & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \sin \theta & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \sin \theta & -1 + \cos \theta \end{pmatrix} \quad (623)$$

Dunque

$$\frac{(\vec{J} \cdot \vec{q})^2}{k^2} = \begin{pmatrix} (1 - \cos \theta)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{2} & \frac{i \sin \theta (1 - \cos \theta)}{\sqrt{2}} & -\frac{\sin^2 \theta}{2} \\ -\frac{i \sin \theta (1 - \cos \theta)}{\sqrt{2}} & \sin^2 \theta & -\frac{i \sin \theta (1 - \cos \theta)}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sin^2 \theta}{2} & \frac{i \sin \theta (1 - \cos \theta)}{\sqrt{2}} & (1 - \cos \theta)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{2} \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \sum_{\beta} \frac{d\sigma_{\beta\pm}}{d\Omega} &= \frac{16 m^2 g^2}{\hbar^4} \frac{k^2}{(\mu^2 + q^2)^4} \left((1 - \cos \theta)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{2} \right) = \\ &= \frac{32 m^2 g^2}{\hbar^4} \frac{k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{(\mu^2 + q^2)^4} \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} + 1 \right) \end{aligned} \quad (624)$$

mentre

$$\sum_{\beta} \frac{d\sigma_{\beta 0}}{d\Omega} = \frac{16 m^2 g^2}{\hbar^4} \frac{k^2}{(\mu^2 + q^2)^4} \sin^2 \theta \quad (625)$$

Problema 2

Domanda 1

Il potenziale nella pittura dell'interazione si scrive

$$V^{(int)}(t) = \hbar \epsilon(t) a^{\dagger} a \quad (626)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \psi^{(int)}(t) &= e^{\frac{i}{\hbar} t \hat{H}_0} \psi(t) = \left[1 - i \int_0^t dt' \epsilon(t') (a^{\dagger} a) + \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \epsilon(t_1) \epsilon(t_2) (a^{\dagger} a)^2 + \dots \right] \psi_0 \end{aligned} \quad (627)$$

Posto

$$\eta(t) = \int_0^t dt' \epsilon(t') = \frac{\epsilon_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \quad (628)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \psi^{(int)}(t) &= \left[1 - i \eta(t) (a^{\dagger} a) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \eta(t)^2 (a^{\dagger} a)^2 + \dots \right] \psi_0 = e^{-i \eta(t) a^{\dagger} a} \psi_0 \end{aligned} \quad (629)$$

L'ampiezza di transizione al tempo t è

$$\begin{aligned} A(t) &= (\psi_0, e^{-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}_0} \psi^{(int)}(t)) = e^{-\frac{it\omega}{2}} (\psi_0, e^{-i(\omega t + \eta(t)) a^{\dagger} a} \psi_0) = \\ &= \frac{e^{-\frac{it\omega}{2}}}{2} (|0\rangle + |1\rangle, |0\rangle + e^{-i(\omega t + \eta(t))} |1\rangle) = \\ &= \frac{e^{-\frac{it\omega}{2}}}{2} (1 + e^{-i(\omega t + \eta(t))}) = \\ &= e^{-\frac{it\omega}{2}} \left(\frac{1 + e^{-i\omega t}}{2} - i \frac{\eta(t) e^{-i\omega t}}{2} - \frac{\eta(t)^2 e^{-i\omega t}}{4} + \dots \right) \end{aligned} \quad (630)$$

La probabilità di transizione al secondo ordine è

$$\begin{aligned} P(t) &= \cos^2 \frac{\omega t + \eta(t)}{2} = \\ &= \cos^2 \frac{\omega t}{2} - \frac{\eta(t)}{2} \sin \omega t - \eta(t)^2 \frac{\cos \omega t}{4} + \dots \end{aligned} \quad (631)$$

Domanda 2

Abbiamo già ottenuto il risultato esatto risommando la serie perturbativa. Riotteniamolo risolvendo l'equazione di Schrödinger nella pittura dell'interazione e nella rappresentazione olomorfa

$$\partial_t \psi_{int}(z, t) + i \epsilon(t) z \partial_z \psi_{int}(z, t) = 0 \quad (632)$$

L'equazione caratteristica associata si scrive

$$\frac{dz(t)}{dt} = i \epsilon(t) z \quad (633)$$

la cui soluzione generale è

$$z(t) = z_0 e^{i \int_0^t dt' \epsilon(t')} = z_0 e^{i \eta(t)} \quad (634)$$

Dunque la soluzione generale dell'equazione di Schrödinger si scrive

$$\psi_{int}(z, t) = f(z e^{-i \eta(t)}) \quad (635)$$

dove

$$\psi(z, 0) = f(z) \quad (636)$$

Nel caso in analisi

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + z) \quad \psi(z, t) = \frac{e^{-\frac{i \omega t}{2}}}{\sqrt{2}}(1 + z e^{-i(\omega t + \eta(t))}) \quad (637)$$

e l'ampiezza di transizione diventa

$$A(t) = (f(z), \psi(z, t)) = \frac{e^{-\frac{i \omega t}{2}}}{2} (1 + e^{-i(\omega t + \eta(t))}) \quad (638)$$

La probabilità di transizione esatta

$$P(t) = \frac{1}{4} (2 + 2 \cos(\eta(t) + \omega t)) = \cos^2 \frac{\eta(t) + \omega t}{2} \quad (639)$$

in accordo col risultato ottenuto più sopra.

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 08/09/2008

Problema 1

Un oscillatore armonico uni-dimensionale di frequenza ω si trova al tempo $t = 0$ nello stato coerente $|\alpha\rangle$ di ampiezza complessa α . Al tempo $t = 0$ viene accesa la perturbazione dipendente dal tempo

$$V(t) = f_0 (a e^{i\omega t} + a^\dagger e^{-i\omega t}) \quad (640)$$

con f_0 reale.

Domanda 1

Calcolare al primo ordine in teoria delle perturbazioni la probabilità che al tempo t il sistema si trovi nello stato coerente $|\alpha\rangle$.

Domanda 2

Si calcoli la stessa probabilità in maniera esatta.

Problema 2

Una particella di massa m diffonde in un potenziale tridimensionale centrale

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\hbar^2}{2m\lambda^2} 4 \left(1 - \frac{\lambda}{r}\right) & \text{per } r < a \\ 0 & \text{per } r \geq a \end{cases} \quad (641)$$

Domanda 1

Calcolare l'ampiezza di diffusione di Born. Per quali valori di $\frac{a}{\lambda}$ il risultato di Born è affidabile?

Domanda 2

Calcolare l'ampiezza di diffusione nel limite di bassa energia, sapendo che la soluzione dell'equazione differenziale

$$y''(x) - 4 \left(1 - \frac{1}{x}\right) y(x) = 0 \quad (642)$$

con la condizione iniziale

$$y(0) = 0 \quad (643)$$

è

$$y(x) = C x e^{-2x} \quad (644)$$

Domanda 3

Determinare il valore risonante di λ per il quale esiste uno stato legato di soglia, e calcolare l'energia di questo stato per valori di λ vicini alla risonanza. Specificare per quali valori di λ si tratta di uno stato legato *reale*.

Prova Scritta del 08/09/2008: Soluzione

Problema 1

Domanda 1 e 2

Lo stato iniziale è

$$\psi(t=0) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle \quad (645)$$

Nella rappresentazione olomorfa questo stato si scrive

$$\psi(z, t=0) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha z} \quad (646)$$

La funzione d'onda esatta nella rappresentazione dell'interazione al tempo t è ancora uno stato coerente

$$\psi^{(int)}(z, t) = e^{i\delta(t)} e^{-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}(t)|^2} e^{\tilde{\alpha}(t)z} \quad (647)$$

dove

$$\tilde{\alpha}(t) = \alpha - \frac{if_0}{\hbar} \int_0^t dt' e^{i\omega t'} e^{-i t' \omega} = \alpha - \frac{if_0 t}{\hbar} \quad (648)$$

e $\delta(t)$ è una fase inessenziale per il calcolo delle probabilità di transizione. Lo stato nella pittura di Schrödinger è

$$\psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} \psi^{(int)}(t) = e^{i\delta(t)} e^{-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}(t)|^2} e^{\tilde{\alpha}(t)e^{-i\omega t} a^\dagger} |0\rangle \quad (649)$$

Pertanto l'ampiezza di transizione al tempo t è

$$\begin{aligned} A(t) &= (\psi(0), \psi(t)) = (\psi(0), e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} \psi^{(int)}(t)) = \\ &= e^{i\delta(t)} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}(t)|^2} \langle 0 | e^{\tilde{\alpha}(t) e^{-i\omega t} a^\dagger} |0\rangle = \\ &= e^{i\delta(t)} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}(t)|^2} e^{\tilde{\alpha}(t) e^{-i\omega t} \bar{\alpha}} = \\ &= e^{i\delta(t)} e^{-|\alpha|^2} (1 - e^{i\omega t}) e^{-\frac{if_0 t(\alpha - \bar{\alpha})}{2\hbar}} e^{-\frac{if_0 t \bar{\alpha} e^{-i\omega t}}{\hbar}} e^{-\frac{f_0^2 t^2}{2\hbar^2}} \end{aligned} \quad (650)$$

La probabilità di transizione è dunque

$$\begin{aligned} P(t) &= e^{-4|\alpha|^2} \sin^2 \frac{\omega t}{2} e^{-\frac{if_0 t(\alpha - \bar{\alpha})}{\hbar}} e^{-\frac{if_0 t(\bar{\alpha} e^{-i\omega t} - \alpha e^{i\omega t})}{\hbar}} e^{-\frac{f_0^2 t^2}{\hbar}} = \\ &= e^{-4|\alpha|^2} \sin^2 \frac{\omega t}{2} e^{\frac{2f_0 t}{\hbar} \Im(\alpha(1 - e^{i\omega t}))} e^{-\frac{f_0^2 t^2}{\hbar^2}} \end{aligned} \quad (651)$$

L'ampiezza al primo ordine nella perturbazione è

$$\begin{aligned} A(t) &= e^{i\delta(t)} e^{-|\alpha|^2(1-e^{i\omega t})} \left(1 - \frac{if_0 t(\alpha - \bar{\alpha})}{2\hbar} - \frac{if_0 t \bar{\alpha} e^{-i\omega t}}{\hbar} \right) + O(f_0^2) = \\ &= e^{i\delta(t)} e^{-|\alpha|^2(1-e^{i\omega t})} \left(1 - \frac{if_0 t}{2\hbar} (\alpha - \bar{\alpha} + 2\bar{\alpha} e^{-i\omega t}) \right) + O(f_0^2) \end{aligned}$$

La probabilità al primo ordine

$$P(t) = e^{-4|\alpha|^2 \sin^2 \frac{\omega t}{2}} \left(1 + \frac{2f_0 t}{\hbar} \Im(\alpha(1 - e^{i\omega t})) \right) + O(f_0^2) \quad (652)$$

Problema 2

Domanda 1

L'ampiezza di Born è

$$\begin{aligned} f_{Born}(\theta) &= -\frac{4}{q\lambda^2} \int_0^a dr (r - \lambda) \sin qr = \\ &= a \frac{a}{\lambda} \frac{4}{(aq)^2} \left((1 - \cos aq) - \frac{a \sin qa - aq \cos qa}{aq} \right) \end{aligned} \quad (653)$$

$$(654)$$

dove

$$q = 2k \sin \frac{\theta}{2} \quad (655)$$

Si noti che l'ampiezza è di ordine $\frac{a}{\lambda}$. Il termine successivo a quello di Born nell'espansione perturbativa sarà di ordine $(\frac{a}{\lambda})^2$. L'espansione perturbativa è affidabile se

$$\frac{a}{\lambda} \ll 1 \quad (656)$$

Il termine significativo dell'ampiezza di Born è pertanto

$$f(\theta) = a \frac{a}{\lambda} \frac{4}{(aq)^2} (1 - \cos aq) + O\left(\frac{a^2}{\lambda^2}\right) \quad (657)$$

Nel limite di bassa energia quest'ampiezza diventa

$$f(\theta) = a \frac{2a}{\lambda} + O((ak)^2) \quad (658)$$

Domanda 2

La funzione d'onda radiale con $l = 0$ per $r < a$ di energia nulla è

$$\chi_0(r) = r e^{-\frac{2r}{\lambda}} \quad r < a \quad (659)$$

La derivata logaritmica all'uscita della buca di potenziale è

$$\alpha_0 \equiv \left. \frac{r \chi_0'(r)}{\chi_0(r)} \right|_{r=a} = 1 - \frac{2a}{\lambda} + O((ak)^2) \quad (660)$$

Pertanto posto

$$ak \cot \delta_0 = A_0 + (ak)^2 B_0 + O((ak)^4) \quad (661)$$

abbiamo

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} = \frac{1 - \frac{2a}{\lambda}}{\frac{2a}{\lambda}} = \frac{\lambda}{2a} - 1 \quad (662)$$

L'ampiezza di diffusione di bassa energia si scrive pertanto

$$f_0 = a \frac{1}{ak \cot \delta_0 - iak} = a \frac{1}{\frac{\lambda}{2a} - 1 - iak + O((ak)^2)} \quad (663)$$

Lontano dalla risonanza l'ampiezza di diffusione è determinata dalla lunghezza di diffusione

$$f_0 \approx \frac{a}{\frac{\lambda}{2a} - 1} \quad (664)$$

Si noti che per $\lambda \gg a$ abbiamo

$$f_0 \approx a \frac{2a}{\lambda} \quad (665)$$

in accordo col risultato perturbativo.

Domanda 3

Il valore risonante di λ è

$$\lambda_0 = 2a \quad (666)$$

Per λ vicino al valore risonante

$$A_0 \approx \frac{\lambda - \lambda_0}{2a} \equiv -ak(\lambda) \quad (667)$$

Dunque per $\lambda < \lambda_0 = 2a$ esiste uno stato legato reale di energia

$$E(\lambda) \approx -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \left(\frac{\lambda - 2a}{2a} \right)^2 \quad (668)$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 19/01/2009

Problema 1

Una particella unidimensionale è costretta a muoversi nell'intervallo di lunghezza a sull'asse delle x da barriere di potenziale infinitamente alte poste in $x = 0$ e $x = a$:

$$V_a(x) = \begin{cases} 0 & x \in (0, a) \\ +\infty & x < 0 \quad x > a \end{cases} \quad (669)$$

Per $t > 0$ la barriera collocata in $x = a$ è improvvisamente spostata in una nuova posizione $x = b = a + \delta a$ con $b > a$:

$$V(x, t) = \begin{cases} V_a(x) & \text{per } t < 0 \\ V_b(x) & \text{per } t > 0 \end{cases} \quad (670)$$

Per tempi $t < 0$ la particella si trova in autostato di energia determinata ψ_n (autostato, cioè, di $H_a = \frac{p^2}{2m} + V_a(x)$).

Domanda 1

Si calcoli all'ordine più basso in $\frac{\delta a}{a}$ la probabilità che al tempo $t > 0$ la particella sia transita in un autostato $\psi_{n'}$ di H_a con $n' \neq n$

Domanda 2

Si calcoli all'ordine più basso in $\frac{\delta a}{a}$ la probabilità che al tempo $t > 0$ la particella sia transita in un autostato $\tilde{\psi}_{n'}$ di H_b con $n' \neq n$

Problema 2

Una particella 3-dimensionale di massa m e numero d'onda \vec{k} diffonde in un potenziale

$$V(\vec{x}, \vec{p}) = \begin{cases} g [\vec{p} \cdot (\vec{x} \times \vec{B}) + (\vec{x} \times \vec{B}) \cdot \vec{p}] & \text{per } |\vec{x}| < a \\ 0 & \text{per } |\vec{x}| > a \end{cases} \quad (671)$$

dove \vec{B} è un vettore costante, \vec{x} e \vec{p} sono gli operatori coordinate ed impulso.

Domanda 1

Si calcoli l'ampiezza di diffusione nell'approssimazione di Born.

Domanda 2

Calcolare la sezione d'urto integrata di Born nel limite di bassa energia.

Prova Scritta del 19/01/2009: Soluzione

Problema 1

Forniamo due metodi differenti per la risoluzione del problema.

Primo metodo

Le autofunzioni di H_a sono

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n x}{a} & x \in (0, a) \\ 0 & x < 0 \quad x > a \end{cases} \quad (672)$$

con autovalori

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2 m a^2} \quad (673)$$

Le autofunzioni di H_b sono

$$\tilde{\psi}_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{\pi n x}{b} & x \in (0, b) \\ 0 & x < 0 \quad x > b \end{cases} \quad (674)$$

con autovalori

$$\tilde{E}_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2 m b^2} \quad (675)$$

Decomponiamo lo stato iniziale $\psi_n(x)$ nella base di autofunzioni di H_b

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{\psi}_k, \psi_n) \tilde{\psi}_k(x) \quad (676)$$

Al tempo $t > 0$ questo stato diventa

$$\psi_n(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{\psi}_k, \psi_n) \tilde{\psi}_k(x) e^{-\frac{i \tilde{E}_k t}{\hbar}} \quad (677)$$

L'ampiezza di transizione al tempo t nello stato $\psi_{n'}$ è quindi

$$A_{n'n}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{\psi}_k, \psi_n) (\psi_{n'}, \tilde{\psi}_k) e^{-\frac{i \tilde{E}_k t}{\hbar}} \quad (678)$$

mentre quella nello stato $\tilde{\psi}_{n'}$ è

$$\tilde{A}_{n'n}(t) = (\tilde{\psi}_{n'}, \psi_n) e^{-\frac{i \tilde{E}_{n'} t}{\hbar}} \quad (679)$$

Posto

$$C_{kn} = (\tilde{\psi}_k, \psi_n) \quad (680)$$

riscriviamo queste espressione nel modo seguente

$$\begin{aligned} A_{n'n}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} C_{kn} C_{kn'}^* e^{-\frac{i\tilde{E}_k t}{\hbar}} \\ \tilde{A}_{n'n}(t) &= C_{n'n} e^{-\frac{i\tilde{E}_{n'} t}{\hbar}} \end{aligned} \quad (681)$$

Calcoliamo C_{kn} esattamente

$$\begin{aligned} C_{kn} &= \frac{2}{\sqrt{ab}} \int_0^a dx \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi k x}{b} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_0^a dx \left[\cos \left(\pi x \left(\frac{n}{a} - \frac{k}{b} \right) \right) - \cos \left(\pi x \left(\frac{n}{a} + \frac{k}{b} \right) \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{ab}} \left[\frac{\sin \left(\pi a \left(\frac{n}{a} - \frac{k}{b} \right) \right)}{\frac{n}{a} - \frac{k}{b}} - \frac{\sin \left(\pi a \left(\frac{n}{a} + \frac{k}{b} \right) \right)}{\frac{n}{a} + \frac{k}{b}} \right] = \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{\pi \sqrt{ab}} \sin \frac{\pi a k}{b} \frac{\frac{2n}{a}}{\frac{n^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2}} = \\ &= \frac{2n(-1)^{n+1}}{\pi} (1+\epsilon)^{\frac{3}{2}} \frac{\sin \frac{\pi k}{1+\epsilon}}{(1+\epsilon)^2 n^2 - k^2} \end{aligned} \quad (682)$$

dove

$$\epsilon \equiv \frac{\delta a}{a} \quad (683)$$

Sviluppiamo ora C_{kn} all'ordine più basso in ϵ . Se $k \neq n$, C_{kn} è di ordine ϵ :

$$\begin{aligned} C_{kn} &= \frac{2n(-1)^{n+k}}{\pi} \frac{\pi k \epsilon}{n^2 - k^2} + O(\epsilon^2) = \\ &= \frac{2nk(-1)^{n+k}}{n^2 - k^2} \epsilon + O(\epsilon^2) \quad n \neq k \end{aligned} \quad (684)$$

Se invece $k = n$, C_{nn} è di ordine zero in ϵ

$$C_{kk} = 1 + O(\epsilon^2) \quad (685)$$

Domanda 1

$A_{n'n}$ è pertanto di ordine ϵ : i termini nella serie di ordine ϵ sono quelli con $k = n$ e $k = n'$, tutti gli altri termini sono di ordine superiore:

$$\begin{aligned} A_{n'n}(t) &= C_{nn} C_{nn'} e^{-\frac{i\tilde{E}_n t}{\hbar}} + C_{n'n} C_{n'n'} e^{-\frac{i\tilde{E}_{n'} t}{\hbar}} + O(\epsilon^2) = \\ &= C_{nn'} e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} + C_{n'n} e^{-\frac{iE_{n'} t}{\hbar}} + O(\epsilon^2) = \\ &= \frac{2n n' (-1)^{n+n'}}{n^2 - n'^2} \epsilon e^{-\frac{iE_{n'} t}{\hbar}} \left(1 - e^{\frac{i(E_{n'} - E_n) t}{\hbar}}\right) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (686)$$

La probabilità di transizione è pertanto

$$P_{n'n}(t) = \frac{16 n^2 (n')^2}{(n^2 - n'^2)^2} \epsilon^2 \sin^2 \frac{(E_{n'} - E_n) t}{2\hbar} + O(\epsilon^2) \quad (687)$$

Domanda 2

L'ampiezza di transizione in un autostato $\tilde{\psi}_{n'}$ è all'ordine più basso in ϵ

$$\tilde{A}_{n'n}(t) = \frac{2n n' (-1)^{n+n'}}{n^2 - n'^2} \epsilon e^{-\frac{i\tilde{E}_{n'} t}{\hbar}} \quad (688)$$

e la probabilità

$$\tilde{P}_{n'n}(t) = \frac{4n^2 (n')^2}{(n^2 - n'^2)^2} \epsilon^2 + O(\epsilon^2) \quad (689)$$

Secondo metodo

Possiamo utilizzare le formule della teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo se passiamo al problema fisico in cui la barriera infinita in $x = a$ è sostituita da una barriera di altezza finita V_0 grande. Dobbiamo calcolare in questo caso le funzioni imperturbate

$$\psi_n(x) = \begin{cases} C \sin p_n x & x \in (0, a) \\ C \sin p_n a e^{-k_n(x-a)} & x < 0 \quad x > a \end{cases} \quad (690)$$

dove C è una costante di normalizzazione e

$$\begin{aligned} \xi_n &\equiv a p_n \\ k_n a &= \sqrt{\frac{2m V_0 a^2}{\hbar^2} - \xi_n^2} = -\xi_n \cot \xi_n \end{aligned} \quad (691)$$

Se la barriera è molto alta

$$v \equiv \frac{2 m V_0 a^2}{\hbar^2} \gg 1 \quad (692)$$

e

$$\xi_n = n \pi - \delta \quad (693)$$

L'equazione agli autovalori diventa

$$\frac{\pi}{\delta} \approx k_n a \approx \sqrt{v} \quad (694)$$

e quindi

$$\sin \xi_n \approx \sin\left(n \pi - \frac{n \pi}{\sqrt{v}}\right) \approx (-1)^{n+1} \frac{n \pi}{\sqrt{v}} \quad (695)$$

In conclusione le autofunzioni dell'energia normalizzate diventano in questo limite

$$\psi_n(x) \approx \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left[n \pi x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{v}}\right)\right] & x \in (0, a) \\ \sqrt{\frac{2}{a}} (-1)^{n+1} \frac{n \pi}{\sqrt{v}} e^{-\frac{\sqrt{v}}{a}(x-a)} & x < 0 \quad x > a \end{cases} \quad (696)$$

Per $t > 0$ viene accesa la perturbazione

$$\delta V(x) = \begin{cases} -V_0 & a \leq x \leq a + \delta a \\ 0 & x < a \quad x > a + \delta a \end{cases} \quad (697)$$

L'elemento di matrice rilevante di questa perturbazione è

$$\begin{aligned} (\psi_{n'}, \delta V(x) \psi_n) &= -V_0 \int_a^{a+\delta a} \psi_{n'}(x) \psi_n(x) \approx \\ &\approx -\frac{2 V_0}{a} (-1)^{n+n'} \frac{n n' \pi^2}{v} \delta a = \\ &= -\frac{2 \delta a}{a} (-1)^{n+n'} \frac{n n' \pi^2 \hbar^2}{2 m a^2} \end{aligned}$$

all'ordine più basso in δa . Pertanto l'ampiezza di transizione al primo ordine (nella pittura di interazione) è

$$\begin{aligned} A^{(int)}(t) &= -\frac{i}{\hbar} (\psi_{n'}, \delta V(x) \psi_n) \frac{e^{i \omega_{n'n} t} - 1}{i \omega_{n'n}} = \\ &= \frac{2 \delta a}{a} (-1)^{n+n'} \frac{n n'}{n^2 - (n')^2} (1 - e^{i \omega_{n'n} t}) \end{aligned} \quad (698)$$

in accordo col risultato ottenuto col primo metodo Eq. (686)

Problema 2

Domanda 1

Sia \vec{k} il vettore d'onda della particella incidente, \vec{k}' quello della particella diffusa,

$$\vec{q} \equiv \vec{k}' - \vec{k} \quad (699)$$

L'ampiezza di Born è

$$\begin{aligned} f_{Born} &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \vec{k}' | V(\vec{x}, \vec{p}) | \vec{k} \rangle = \\ &= -\frac{m g}{2\pi\hbar} (\vec{k} + \vec{k}') \cdot \int_{|\vec{x}| \leq a} d^3\vec{x} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} (\vec{x} \wedge \vec{B}) = \\ &= \frac{i m g}{2\pi\hbar} (\vec{k} + \vec{k}') \cdot \left(\vec{B} \wedge \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \int_{|\vec{x}| \leq a} d^3\vec{x} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \right) = \\ &= \frac{2 i m g}{\hbar q} (\vec{k} + \vec{k}') \cdot \left(\vec{B} \wedge \vec{q} \right) \frac{d}{dq} \left[\frac{\sin q a - q a \cos q a}{q^3} \right] = \\ &= \frac{4 i m g}{\hbar} \vec{B} \cdot (\vec{k} \wedge \vec{k}') \left[\frac{(q^2 a^2 - 3) \sin q a + 3 q a \cos q a}{q^5} \right] = \\ &= -\frac{4 i m g}{\hbar} \vec{B} \cdot (\vec{k} \wedge \vec{q}) \left(\frac{a^5}{15} + O(q^2) \right) \end{aligned} \quad (700)$$

Domanda 2

Nel limite di bassa energia l'ampiezza di diffusione di Born diventa

$$\frac{d\sigma_{Born}}{d\Omega} = \frac{16 m^2 g^2}{15^2 \hbar^2} |\vec{B} \cdot (\vec{k} \wedge \vec{k}')|^2 a^{10} \quad (701)$$

Senza perdita di generalità possiamo prendere \vec{k} lungo l'asse delle z e \vec{B} nel piano (z, y)

$$\begin{aligned} \vec{k} &= (0, 0, k) & \vec{k}' &= k (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\ \vec{B} &= (B_x, 0, B_z) \end{aligned} \quad (702)$$

Dunque

$$|\vec{B} \cdot (\vec{k} \wedge \vec{q})|^2 = k^4 B_x^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \quad (703)$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\sigma_{Born} &= \frac{16 m^2 g^2 k^4 B_x^2 a^{10}}{15^2 \hbar^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \sin^2 \theta \sin^2 \phi = \\ &= \frac{16 m^2 g^2 k^4 B_x^2 a^{10}}{15^2 \hbar^2} \frac{4\pi}{3}\end{aligned}\tag{704}$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 18/02/2009

Problema 1

Un oscillatore armonico uni-dimensionale di frequenza ω e massa m si trova al tempo $t = 0$ nello stato fondamentale. Per tempi $t > 0$ viene accesa la perturbazione

$$V(t) = \frac{1}{2} m \Delta^2 x^2 \quad \text{per } t > 0 \quad (705)$$

Domanda 1

Si calcoli al primo ordine in teoria delle perturbazioni la probabilità che la particella si trovi, per $t > 0$, in un autostato generico Ψ_n dell'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m (\omega^2 + \Delta^2) x^2 \quad (706)$$

che descrive esattamente il sistema per tempi $t > 0$.

Domanda 2

Si calcoli questa probabilità esattamente. Si confronti col risultato perturbativo.

Prova Scritta del 18/02/2009: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Denotiamo con ψ_n gli autostati di H_0 e con Ψ_n gli autostati di H . Al tempo $t = 0$ il sistema si trova in ψ_0 :

$$\psi(t = 0) = \psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n0} \Psi_n \quad (707)$$

Per tempi $t > 0$ l'evoluzione è controllata da H , pertanto lo stato a tempi successivi è

$$\psi(t) = e^{-i\frac{\Omega t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n0} \Psi_n e^{-in\Omega t} \quad (708)$$

dove Ω è la frequenza associata ad H

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 + \Delta^2} \quad (709)$$

Le ampiezze di transizione dello stato $\psi(t)$ negli autostati di H sono dunque

$$A_n(t) = e^{-i\frac{\Omega t}{2}} e^{-in\Omega t} c_{n0} \quad (710)$$

e le corrispondenti probabilità

$$P_n(t) = |c_{n0}|^2 \quad (711)$$

In definitiva dobbiamo calcolare c_{n0} . Se pensiamo al sistema H come al sistema "imperturbato" ed a $-V = -\frac{1}{2} m \Delta^2 x^2$ come la perturbazione, possiamo utilizzare le formule per c_{n0} del primo ordine in teoria delle perturbazioni *indipendenti* dal tempo:

$$c_{n0}^{(1)} = \frac{(\Psi_n, (-V) \Psi_0)}{E_0 - E_n} \quad n > 0 \quad (712)$$

dove E_n sono i livelli di H . Scriviamo dunque $-V$ in termini degli oscillatori A ed A^\dagger relativi ad H

$$-V = \frac{\hbar \Delta}{4} \frac{\Delta}{\Omega} [A^2 + (A^\dagger)^2 - 2A^\dagger A - 1] \quad (713)$$

Quindi

$$-V \Psi_0 = \frac{\hbar \Omega}{4} \frac{\Delta^2}{\Omega^2} [\sqrt{2} \Psi_2 - \Psi_0] \quad (714)$$

ed al primo ordine in $\frac{\Delta^2}{\Omega^2}$ solo c_{00} e c_{20} sono diversi da zero. Introduciamo il parametro

$$\epsilon = \frac{\Delta^2}{\omega^2} \quad (715)$$

Abbiamo

$$\frac{\Delta^2}{\Omega^2} = \epsilon + O(\epsilon^2) \quad (716)$$

In definitiva al primo ordine in teoria delle perturbazioni

$$\psi_0 = \Psi_0 - \frac{\epsilon}{4\sqrt{2}} \Psi_2 + \dots \quad (717)$$

Le ampiezze non nulle a quest'ordine sono

$$\begin{aligned} A_0^{(1)}(t) &= e^{-i\frac{\Omega t}{2}} = e^{-i\frac{\omega t}{2}} \left(1 - i \frac{\epsilon t \omega}{4} + O(\epsilon^2)\right) \\ A_2^{(1)}(t) &= -e^{-i\frac{5\omega t}{2}} \frac{\epsilon}{4\sqrt{2}} + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (718)$$

e le corrispondenti probabilità

$$P_0(t) = 1 + O(\epsilon^2) \quad P_2(t) = \frac{\epsilon^2}{32} + O(\epsilon^3) \quad (719)$$

Domanda 2

Denotiamo con a ed a^\dagger gli oscillatori relativi alla frequenza ω

$$\hat{x} = i\lambda (a - a^\dagger) \quad \hat{p} = \frac{\hbar}{2\lambda} (a + a^\dagger) \quad (720)$$

ovvero

$$a = \frac{1}{2i\lambda} \left(\hat{x} + i \frac{\hat{p}}{m\omega}\right) \quad a^\dagger = -\frac{1}{2i\lambda} \left(\hat{x} - \frac{\hat{p}}{m\omega}\right) \quad (721)$$

dove

$$\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \quad (722)$$

Denotiamo invece con A ed A^\dagger gli oscillatori relativi all'Hamiltoniana H di frequenza Ω . Abbiamo

$$\hat{x} = i\Lambda (A - A^\dagger) \quad \hat{p} = \frac{\hbar}{2\Lambda} (A + A^\dagger) \quad (723)$$

dove

$$\Lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\Omega}} \quad (724)$$

Otteniamo dunque l'espressione di a in termini di A ed A^\dagger :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\Lambda}{2\lambda} (A - A^\dagger) + \frac{\hbar}{4m\omega\lambda\Lambda} (A + A^\dagger) = \\ &= \frac{\Lambda}{2\lambda} \left(1 + \frac{\lambda^2}{\Lambda^2}\right) A + \frac{\Lambda}{2\lambda} \left(\frac{\lambda^2}{\Lambda^2} - 1\right) A^\dagger \end{aligned} \quad (725)$$

Lo stato fondamentale di H_0 è definito da

$$a|0\rangle = 0 \quad (726)$$

ovvero

$$\left(1 + \frac{\lambda^2}{\Lambda^2}\right) A|0\rangle = -\left(\frac{\lambda^2}{\Lambda^2} - 1\right) A^\dagger|0\rangle \quad (727)$$

Usiamo la rappresentazione olomorfa relativa agli oscillatori A ed A^\dagger . In questa rappresentazione $|0\rangle$ sarà rappresentato da una funzione $\psi(Z)$ che soddisfa l'equazione differenziale corrispondente a (727)

$$\left(1 + \frac{\lambda^2}{\Lambda^2}\right) \partial_Z \psi(Z) = -\left(\frac{\lambda^2}{\Lambda^2} - 1\right) Z \psi(Z) \quad (728)$$

La soluzione di quest'equazione è

$$\psi(Z) = N e^{-\frac{1}{2}\alpha Z^2} \quad (729)$$

dove N è un fattore di normalizzazione e

$$\alpha \equiv \frac{\frac{\lambda^2}{\Lambda^2} - 1}{\frac{\lambda^2}{\Lambda^2} + 1} = \frac{\Omega - \omega}{\Omega + \omega} = \frac{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2} - \omega}{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2} + \omega} \quad (730)$$

Determiniamo N normalizzando $\psi(Z)$ a 1. Poiché

$$\int \frac{d^2Z}{\pi} e^{-\frac{\alpha}{2}(Z^2 + \bar{Z}^2) - Z\bar{Z}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \quad (731)$$

e $|\alpha| < 1$, lo stato è normalizzabile. Otteniamo

$$\begin{aligned} |0\rangle = \psi(Z) &= (1 - \alpha^2)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\alpha Z^2} = (1 - \alpha^2)^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{2^n n!} (A^\dagger)^{2n} |\tilde{0}\rangle = \\ &= (1 - \alpha^2)^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n \sqrt{(2n)!}}{2^n n!} |\widetilde{2n}\rangle \end{aligned} \quad (732)$$

dove $|\tilde{n}\rangle$ sono gli autostati di H . Lo stato al tempo $t > 0$ è pertanto

$$\psi(t) = (1 - \alpha^2)^{\frac{1}{4}} e^{-i\frac{\Omega t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n \sqrt{(2n)!}}{2^n n!} e^{-i2n\Omega t} |\tilde{2n}\rangle \quad (733)$$

Le ampiezze di transizione esatte sono quindi

$$A_{2n} = (1 - \alpha^2)^{\frac{1}{4}} e^{-i\frac{\Omega t}{2}} \frac{(-1)^n \alpha^n \sqrt{(2n)!}}{2^n n!} e^{-i2n\Omega t} \quad (734)$$

e le probabilità

$$P_{2n} = (1 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha^{2n} (2n)!}{4^n n!^2} \quad (735)$$

Sviluppiamo questi risultati all'ordine piú basso in

$$\epsilon \equiv \frac{\Delta^2}{\omega^2} \quad (736)$$

Abbiamo

$$\alpha = \frac{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2} - \omega}{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2} + \omega} = \frac{1}{4} \epsilon + O(\epsilon^2) \quad (737)$$

In definitiva, al primo ordine in teoria delle perturbazioni, ovvero all'ordine 1 in ϵ sono diversi da zero solo A_0 e A_2 :

$$\begin{aligned} A_0 &= e^{-i\frac{\omega t}{2}} \left(1 - i \frac{\epsilon t \omega}{4} + O(\epsilon^2) \right) & A_2 &= -\frac{\epsilon}{4\sqrt{2}} e^{-i\frac{\omega t}{2}} e^{-i2\omega t} + O(\epsilon^2) \\ A_{2n} &= O(\epsilon^n) \quad \text{per } n > 1 \end{aligned} \quad (738)$$

e

$$P_0 = 1 + O(\epsilon^2) \quad P_2 = \frac{\epsilon^2}{32} + O(\epsilon^3) \quad P_{2n} = O(\epsilon^{2n}) \quad \text{per } n > 1 \quad (739)$$

in accordo col risultato perturbativo.

NOTA

Mostriamo come ottenere il risultato perturbativo attraverso la teoria delle perturbazioni *dipendenti* dal tempo: con questo metodo i calcoli sono leggermente piú complicati.

La perturbazione in rappresentazione dell' interazione è

$$V_{int}(t) = -\frac{\hbar\omega}{4} \epsilon [e^{-i2\omega t} a^2 + e^{i2\omega t} (a^\dagger)^2 - 2a^\dagger a - 1] \quad (740)$$

Lo stato $\psi(t)$ al tempo $t > 0$ nella pittura dell'interazione al primo ordine in ϵ è

$$\begin{aligned}\psi_{int}(t) &= |0\rangle + \frac{i\omega}{4} \epsilon \left[\frac{e^{i2\omega t} - 1}{2i\omega} \sqrt{2}|2\rangle - t|0\rangle \right] + O(\epsilon^2) = \\ &= \left(1 - \frac{i\omega t \epsilon}{4}\right) |0\rangle + \frac{\epsilon}{4} \frac{e^{i2\omega t} - 1}{\sqrt{2}} |2\rangle + O(\epsilon^2)\end{aligned}\quad (741)$$

Lo stesso stato nella pittura di Schrödinger è

$$\psi(t) = \left(1 - \frac{i\omega t \epsilon}{4}\right) e^{-i\frac{\omega t}{2}} |0\rangle + \frac{\epsilon}{4} \frac{1 - e^{-i2\omega t}}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\omega t}{2}} |2\rangle + O(\epsilon^2) \quad (742)$$

Dobbiamo ora esprimere gli autostati di H , $|\tilde{0}\rangle$ e $|\tilde{2}\rangle$ in termini degli autostati di H_0 . Dalla teoria delle perturbazioni indipendenti dal tempo abbiamo ottenuto

$$\begin{aligned}|\tilde{0}\rangle &= |0\rangle + \frac{\epsilon}{4\sqrt{2}} |2\rangle + O(\epsilon^2) \\ |\tilde{2}\rangle &= |2\rangle - \frac{\epsilon}{4\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{\epsilon}{8} \sqrt{3 \cdot 4} |4\rangle + O(\epsilon^2)\end{aligned}\quad (743)$$

Dunque

$$\begin{aligned}A_0 &= \left(1 - \frac{i\omega t \epsilon}{4}\right) e^{-i\frac{\omega t}{2}} + O(\epsilon^2) \\ A_2 &= -\left(1 - \frac{i\omega t \epsilon}{4}\right) e^{-i\frac{\omega t}{2}} \frac{\epsilon}{4\sqrt{2}} + \frac{\epsilon}{4} \frac{1 - e^{-i2\omega t}}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\omega t}{2}} + O(\epsilon^2) = \\ &= -\frac{\epsilon}{4} \frac{e^{-i2\omega t}}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\omega t}{2}} + O(\epsilon^2)\end{aligned}\quad (744)$$

in accordo con i risultati ottenuti sopra.

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 24/04/2009

Problema 1

Sia H_0 l'Hamiltoniana che descrive un atomo di idrogeno (e trascuri lo spin). Si supponga che l' atomo si trovi al tempo $t = 0$ in un autostato di energia E , di momento angolare $l = 1$ e $m = 0$. Al tempo $t = 0$ viene accesa una perturbazione

$$V(t) = \vec{\lambda}(t) \cdot \vec{L} \quad t > 0 \quad (745)$$

dove \vec{L} è il momento angolare del sistema,

$$\vec{\lambda}(t) = \lambda_0 e^{-\alpha t} (\sin \theta, 0, \cos \theta) \quad (746)$$

λ_0 e θ parametri costanti, e $\alpha > 0$.

Domanda 1 (Punti 0.5)

Si calcolino al primo ordine in teoria delle perturbazioni le ampiezze e le probabilità che il sistema si trovi, per $t \rightarrow +\infty$, in un autostato generico $|E', l', m'\rangle$ di H_0 .

Domanda 2 (Punti 1)

Si calcolino le stesse ampiezze e probabilità al secondo ordine in teoria delle perturbazioni.

Domanda 3 (Punti 1.5)

Si calcolino ampiezze e probabilità esattamente.

Prova Scritta del 24/04/2009: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

La perturbazione commuta con H_0 e con \vec{L}^2 : pertanto può indurre transizioni solo tra stati della stessa energia E e momento angolare $l = 1$. Le ampiezze di transizione non nulle sono

$$A_m = \lim_{t \rightarrow +\infty} \langle E, l = 1, m | U(t) | E, l = 1, m = 0 \rangle \quad (747)$$

Si noti che

$$V^{(int)}(t) = e^{\frac{i}{\hbar} t H_0} V(t) e^{-\frac{i}{\hbar} t H_0} = V(t) \quad (748)$$

perché H_0 commuta con \vec{J}

Domanda 1

Al primo ordine in teoria delle perturbazioni le ampiezze di transizione sono

$$\begin{aligned} A_{\pm 1}^{(1)} &= -\frac{i \lambda_0}{\hbar} \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} \langle E, l = 1, m = \pm 1 | (\sin \theta L_x + \\ &\quad + \cos \theta L_z) | E, l = 1, m = 0 \rangle = \\ &= -\frac{i \lambda_0}{\alpha} \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (749)$$

e le probabilità

$$P_{\pm 1}^{(1)} = \frac{\lambda_0^2}{\hbar^2 \alpha^2} \frac{\sin^2 \theta}{2} \quad (750)$$

Domanda 2

Il contributo del secondo ordine in teoria delle perturbazioni alle ampiezze di transizione è

$$\begin{aligned} A_{\pm 1}^{(2)} &= \frac{i^2 \lambda_0^2}{\hbar^2} \int_0^\infty dt_1 e^{-\alpha t_1} \times \\ &\quad \times \int_0^{t_1} dt_2 e^{-\alpha t_2} \langle E, l = 1, m = \pm 1 | (\sin \theta L_x + \cos \theta L_z) \times \\ &\quad \times \frac{\hbar \sin \theta}{\sqrt{2}} (|E, l = 1, m = 1\rangle + |E, l = 1, m = -1\rangle) = \\ &= \mp \frac{\lambda_0^2}{2 \alpha^2} \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (751)$$

e

$$\begin{aligned}
A_0^{(2)} &= \frac{i^2 \lambda_0^2}{\hbar^2} \int_0^\infty dt_1 e^{-\alpha t_1} \times \\
&\times \int_0^{t_1} dt_2 e^{-\alpha t_2} \langle E, l = 1, m = 0 | \sin^2 \theta L_x^2 | E, l = 1, m = 0 \rangle = \\
&= -\frac{\lambda_0^2}{2\alpha^2} \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{752}$$

ovvero a quest'ordine:

$$\begin{aligned}
A_\pm &= -\frac{i \lambda_0}{\alpha} \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left(1 \mp \frac{i \lambda_0}{2\alpha} \cos \theta + O\left(\frac{\lambda_0^2}{\alpha^2}\right) \right) \\
A_0 &= 1 - \frac{\lambda_0^2}{2\alpha^2} \sin^2 \theta + O\left(\frac{\lambda_0^3}{\alpha^3}\right)
\end{aligned} \tag{753}$$

e le probabilità

$$P_{\pm 1} = \frac{\lambda_0^2}{\alpha^2} \frac{\sin^2 \theta}{2} \left(1 + O\left(\frac{\lambda_0^2}{\alpha^2}\right) \right) \tag{754}$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda_0^2}{\alpha^2} \sin^2 \theta + O\left(\frac{\lambda_0^3}{\alpha^3}\right) \tag{755}$$

Domanda 3

L'interazione si scrive

$$V(t) = \lambda_0 e^{-\alpha t} (\sin \theta L_x + \cos \theta L_z) = \lambda_0 e^{-\alpha t} \tilde{L}_z \tag{756}$$

dove \tilde{L}_z è il momento angolare lungo la direzione $\vec{n} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$. Denotiamo con ψ_m gli autostati di momento angolare definito lungo z e con $\tilde{\psi}_m$ quelli con momento angolare definito definito lungo \vec{n} . Poiché

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_x &= \cos \theta L_x - \sin \theta L_z \\
\tilde{L}_y &= L_y \\
\tilde{L}_z &= \sin \theta L_x + \cos \theta L_z
\end{aligned} \tag{757}$$

abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\psi}_1 - \tilde{\psi}_{-1}) &= \frac{\cos \theta}{\sqrt{2}}(\psi_1 - \psi_{-1}) + \sin \theta \psi_0 \\
\frac{1}{\sqrt{2}i}(\tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_{-1}) &= \frac{1}{\sqrt{2}i}(\psi_1 + \psi_{-1}) \\
\tilde{\psi}_0 &= -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}(\psi_1 - \psi_{-1}) + \cos \theta \psi_0
\end{aligned} \tag{758}$$

ovvero

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_1 &= \frac{\cos \theta + 1}{2} \psi_1 + \frac{1 - \cos \theta}{2} \psi_{-1} + \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \psi_0 \\
\tilde{\psi}_{-1} &= \frac{1 - \cos \theta}{2} \psi_1 + \frac{\cos \theta + 1}{2} \psi_{-1} - \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \psi_0 \\
\tilde{\psi}_0 &= -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} (\psi_1 - \psi_{-1}) + \cos \theta \psi_0
\end{aligned} \tag{759}$$

Decomponendo lo stato $\psi(t)$ nella pittura di interazione nella base $\tilde{\psi}_m$ (con $m = 0, \pm 1$)

$$\psi(t) = \sum_m a_m(t) \tilde{\psi}_m \tag{760}$$

otteniamo

$$i \hbar \frac{d a_m(t)}{dt} = \lambda_0 e^{-\alpha t} \hbar m a_m \tag{761}$$

Quindi

$$a_m(t) = a_m(0) e^{-\frac{i m \lambda_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})} \tag{762}$$

Lo stato iniziale ψ_0 si scrive nella base $\tilde{\psi}_m$

$$\psi(t=0) = \psi_0 = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} (\tilde{\psi}_1 - \tilde{\psi}_{-1}) + \cos \theta \tilde{\psi}_0 \tag{763}$$

Dunque lo stato al tempo $t \rightarrow +\infty$ è

$$\begin{aligned}
\psi(+\infty) &= \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} (e^{-\frac{i \lambda_0}{\alpha}} \tilde{\psi}_1 - e^{\frac{i \lambda_0}{\alpha}} \tilde{\psi}_{-1}) + \cos \theta \tilde{\psi}_0 = \\
&= \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left[e^{-\frac{i \lambda_0}{\alpha}} \left(\frac{\cos \theta + 1}{2} \psi_1 + \frac{1 - \cos \theta}{2} \psi_{-1} + \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \psi_0 \right) + \right. \\
&\quad \left. - e^{\frac{i \lambda_0}{\alpha}} \left(\frac{1 - \cos \theta}{2} \psi_1 + \frac{\cos \theta + 1}{2} \psi_{-1} - \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \psi_0 \right) \right] + \\
&\quad + \cos \theta \left(-\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} (\psi_1 - \psi_{-1}) + \cos \theta \psi_0 \right) = \\
&= \left[\left(\left(\cos \frac{\lambda_0}{\alpha} - 1 \right) \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{2}} - i \sin \frac{\lambda_0}{\alpha} \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \right) \psi_1 + \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(1 - \cos \frac{\lambda_0}{\alpha} \right) \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{2}} - i \sin \frac{\lambda_0}{\alpha} \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \right) \psi_{-1} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\sin^2 \theta \cos \frac{\lambda_0}{\alpha} + \cos^2 \theta \right) \psi_0 \right]
\end{aligned}$$

Le ampiezze di transizione esatte sono pertanto

$$\begin{aligned}
 A_{\pm 1} &= \pm \left(\cos \frac{\lambda_0}{\alpha} - 1 \right) \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{2}} - i \sin \frac{\lambda_0}{\alpha} \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} = \\
 &= -i \frac{\lambda_0}{\alpha} \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \mp \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{2}} \frac{\lambda_0^2}{2\alpha^2} + \dots \\
 A_0 &= \sin^2 \theta \cos \frac{\lambda_0}{\alpha} + \cos^2 \theta = 1 - \frac{\sin^2 \theta}{2} \frac{\lambda_0^2}{\alpha^2} + \dots
 \end{aligned} \tag{764}$$

in accordo con i risultati perturbativi.

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 15/06/2009

Problema 1

Una particella di impulso $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ diretto lungo l'asse delle z diffonde nel potenziale:

$$V(z, \rho) = \begin{cases} V_0 e^{-\frac{\rho^2}{d^2}} & |z| \leq l \\ 0 & |z| > l \end{cases} \quad (765)$$

dove $\rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ è la coordinata radiale cilindrica; $d > 0$ e $l > 0$ sono due lunghezze.

Domanda 1 (Punti 9)

Si calcoli la sezione d'urto differenziale in approssimazione di Born come funzione dell'angolo di diffusione θ che il momento della particella diffusa $\vec{p}' = \hbar \vec{k}'$ forma con l'asse delle z .

Domanda 2

Si calcoli la sezione d'urto di Born *integrata* nei due limiti:

- i) $kl \ll 1$ e $kd \ll 1$ (Punti 3)
- ii) $\frac{1}{l} \ll k \ll \frac{1}{d}$. (Punti 6)

Problema 2

Un oscillatore armonico uni-dimensionale di frequenza ω e massa m si trova, al tempo $t = 0$ nello stato

$$\psi(t = 0; x) = e^{i \frac{m v x}{\hbar}} \psi_0(x) \quad (766)$$

dove $\psi_0(x)$ è la funzione d'onda dello stato fondamentale.

Domanda 1 (Punti 8)

Si calcoli, all'ordine v^2 , la probabilità che al tempo $t > 0$ il sistema si trovi nello stato

$$\psi_f = e^{i \frac{m v x}{\hbar}} \psi_n(x) \quad (767)$$

dove $\psi_n(x)$ con $n = 0, 1, 2, \dots$ è un generico autostato dell'energia dell'oscillatore armonico.

Domanda 2 (Punti 12)

Si calcoli la stessa probabilità esattamente.¹

¹Si ricordi la relazione operatoriale $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$, valida se $[A, B]$ è un multiplo dell'identità.

Prova Scritta del 15/06/2009: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Sia

$$\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}' = k(-\sin\theta, 0, 1 - \cos\theta) = k(-\sin\theta, 0, 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \quad (768)$$

L'ampiezza di Born è

$$f_{Born}(\theta) = -\frac{m V_0}{2 \pi \hbar^2} \int_{-l}^l dz e^{i q_z z} \times \quad (769)$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i q_x x - \frac{x^2}{d^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{i q_y y - \frac{y^2}{d^2}} = \\ & = -\frac{m d^2 V_0 \sin q_z l}{\hbar^2 q_z} e^{-\frac{d^2 (q_x^2 + q_y^2)}{4}} \end{aligned} \quad (770)$$

La sezione d'urto differenziale è pertanto

$$\frac{d \sigma_{Born}}{d \Omega} = \frac{m^2 d^4 V_0^2 \sin^2 q_z l}{\hbar^4 q_z^2} e^{-\frac{d^2 k^2 \sin^2 \theta}{2}} \quad (771)$$

Domanda 2

La sezione d'urto integrata è

$$\sigma_{Born} = \frac{2 \pi m^2 d^4 V_0^2}{\hbar^4} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{\sin^2 q_z l}{q_z^2} e^{-\frac{d^2 k^2 \sin^2 \theta}{2}} \quad (772)$$

Operiamo il cambio di variabili

$$q_z = 2 k \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (773)$$

da cui

$$dq_z = k \sin \theta d\theta \quad (774)$$

e

$$k^2 \sin^2 \theta = q^2 - q_z^2 = 2 k q_z - q_z^2 \quad (775)$$

Dunque

$$\begin{aligned}\sigma_{Born} &= \frac{2\pi m^2 d^4 V_0^2}{\hbar^4} \int_0^{2k} \frac{dq_z \sin^2 q_z l}{k q_z^2} e^{-\frac{d^2(2kq_z - q_z^2)}{2}} = \\ &= \frac{2\pi m^2 d^4 V_0^2}{\hbar^4} \frac{l}{k} \int_0^{2kl} dx \frac{\sin^2 x}{x^2} e^{-d^2(\frac{kx}{l} - \frac{x^2}{2l^2})}\end{aligned}\quad (776)$$

Nel limite di bassa energia

$$kl \ll 1 \quad kd \ll 1 \quad (777)$$

otteniamo

$$\sigma_{Born} = \frac{4\pi m^2 d^4 V_0^2}{\hbar^4} l^2 + O(k^2) \quad (778)$$

Nel limite

$$\frac{1}{l} \ll k \ll \frac{1}{d} \quad (779)$$

abbiamo

$$\begin{aligned}\sigma_{Born} &= \frac{2\pi m^2 d^4 V_0^2}{\hbar^4} \frac{l}{k} \int_0^{2kl} dx \frac{\sin^2 x}{x^2} e^{-d^2(\frac{kx}{l} - \frac{x^2}{2l^2})} = \\ &\approx \frac{2\pi m^2 d^4 V_0^2}{\hbar^4} \frac{l}{k} \frac{\pi}{2}\end{aligned}\quad (780)$$

Problema 2

Domanda 1

Poniamo

$$x = i\lambda(a - a^\dagger) \quad (781)$$

con

$$\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \quad (782)$$

Lo stato iniziale si scrive

$$\psi(t=0) = e^{\alpha(a^\dagger - a)} |0\rangle \quad (783)$$

dove

$$\alpha \equiv \frac{mv\lambda}{\hbar} = \sqrt{\frac{mv^2}{2\hbar\omega}} \quad (784)$$

Lo stato al tempo $t > 0$ è

$$\psi(t) = e^{\alpha(a^\dagger e^{-i\omega t} - a e^{i\omega t})} |0\rangle e^{-\frac{i\omega t}{2}} \quad (785)$$

L'ampiezza di transizione richiesta è

$$A_n(t) = e^{-\frac{i\omega t}{2}} \langle e^{\alpha(a^\dagger - a)} |n\rangle, e^{\alpha(a^\dagger e^{-i\omega t} - a e^{i\omega t})} |0\rangle \rangle \quad (786)$$

Espandendo al primo ordine in α otteniamo

$$\begin{aligned} A_n(t) &= e^{-\frac{i\omega t}{2}} \left(\delta_{n,0} + \alpha \langle n|1\rangle e^{-i\omega t} + \alpha \langle n|(a - a^\dagger)|0\rangle + O(\alpha^2) \right) = \\ &= e^{-\frac{i\omega t}{2}} \left(\delta_{n,0} + \alpha \delta_{n,1} (e^{-i\omega t} - 1) + O(\alpha^2) \right) \end{aligned} \quad (787)$$

Le probabilità di transizione sono pertanto

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1 + O(\alpha^2) \\ P_1(t) &= 4\alpha^2 \sin^2 \frac{\omega t}{2} + O(\alpha^3) \\ P_n(t) &= O(\alpha^{2n}) \quad n > 1 \end{aligned} \quad (788)$$

Poiché

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1 \quad (789)$$

abbiamo

$$P_0(t) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) = 1 - 4\alpha^2 \sin^2 \frac{\omega t}{2} + O(\alpha^3) \quad (790)$$

Domanda 2

Riscriviamo lo stato al tempo $t > 0$ usando l'identità suggerita

$$\psi(t) = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} e^{\alpha a^\dagger e^{-i\omega t}} |0\rangle e^{-\frac{i\omega t}{2}} \quad (791)$$

Analogamente, lo stato finale si riscrive

$$\begin{aligned} \psi_f &= e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha a} |n\rangle = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha a} \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle = \\ &= e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} e^{\alpha a^\dagger} \frac{(a^\dagger - \alpha)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \end{aligned} \quad (792)$$

dove abbiamo usato

$$e^{-\alpha a} f(a^\dagger) = f(a^\dagger - \alpha) e^{-\alpha a} \quad (793)$$

L'ampiezza di transizione è pertanto

$$\begin{aligned} A_n(t) &= e^{-\alpha^2} \langle 0 | \frac{(a - \alpha)^n}{\sqrt{n!}} e^{\alpha a} e^{\alpha a^\dagger e^{-i\omega t}} | 0 \rangle e^{-\frac{i\omega t}{2}} \\ &= e^{-\alpha^2} \langle 0 | \frac{(a + \alpha (e^{-i\omega t} - 1))^n}{\sqrt{n!}} e^{\alpha a + \alpha^2 e^{-i\omega t}} | 0 \rangle e^{-\frac{i\omega t}{2}} = \\ &= e^{-\alpha^2 (1 - e^{-i\omega t})} \frac{\alpha^n (e^{-i\omega t} - 1)^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \end{aligned} \quad (794)$$

dove abbiamo usato la relazione analoga alla (793)

$$f(a) e^{\alpha a^\dagger e^{-i\omega t}} = e^{\alpha a^\dagger e^{-i\omega t}} f(a + \alpha e^{-i\omega t}) \quad (795)$$

La probabilità è dunque

$$P_n(t) = \frac{4^n}{n!} \alpha^{2n} \sin^{2n} \frac{\omega t}{2} e^{-4\alpha^2 \sin^2 \frac{\omega t}{2}} \quad (796)$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 2/07/2009

Problema 1

Un oscillatore armonico uni-dimensionale di frequenza ω e massa m si trova al tempo $t = 0$ nello stato fondamentale. Per tempi $t > 0$ viene accesa la perturbazione

$$V(t) = g e^{-\alpha t} x^3 \quad t > 0 \quad (797)$$

con g parametro reale ed $\alpha > 0$.

Domanda 1 (Punti 7)

Si calcoli al primo ordine in teoria delle perturbazioni (cioè all'ordine g^2) la probabilità che la particella si trovi, per $t \rightarrow +\infty$, in un autostato generico $|n\rangle$ dell'Hamiltoniana imperturbata.

Domanda 2 (Punti 8)

Si calcoli la probabilità di transizione nell'autostato $|2\rangle$ al secondo ordine (cioè all'ordine g^4) in teoria delle perturbazioni.

Problema 2

Una particella di massa m ed impulso $\hbar \vec{k}$ diffonde nel potenziale centrale

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \left(1 + \frac{4d}{r} \tan \frac{r}{d}\right) & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (798)$$

dove $0 < \frac{a}{d} < \frac{\pi}{2}$.

Domanda 1 (Punti 6)

Si consideri la funzione della coordinata radiale r

$$\chi(r) = r^\alpha \cos \beta r \quad (799)$$

Si determinino i parametri α , β ed il momento angolare \bar{l} per i quali la $\chi(r)$ è soluzione di energia nulla dell'equazione di Schrödinger radiale ridotta nella regione $0 \leq r \leq a$.

Domanda 2 (Punti 8)

Si determini l'ampiezza parziale di momento angolare \bar{l} nel limite di bassa energia, all'ordine k^2 , dove $k = |\vec{k}|$.

Domanda 3 (Punti 8)

Si determinino i valori numerici risonanti del parametro $\frac{a}{d}$ nell'intervallo indicato. Si calcoli la sezione d'urto integrata di picco in prossimità della risonanza.

Prova Scritta del 2/07/2009: Soluzione

Problema 1

Introduciamo gli operatori di salita e discesa

$$\hat{x} = \lambda (a + a^\dagger) \quad (800)$$

dove

$$\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \quad (801)$$

Il potenziale si scrive

$$\begin{aligned} V(t) &= g e^{-\alpha t} \lambda^3 \left[a^3 + (a^\dagger)^3 + (a^\dagger)^2 a + a^\dagger a a^\dagger + a (a^\dagger)^2 + \right. \\ &\quad \left. + a^2 a^\dagger + a a^\dagger a + a^\dagger a^2 \right] = \\ &= g e^{-\alpha t} \lambda^3 \left[a^3 + (a^\dagger)^3 + 3 (a^\dagger)^2 a + 3 a^\dagger + 3 a + 3 a^\dagger a^2 \right] \end{aligned} \quad (802)$$

Il potenziale nella rappresentazione dell'interazione è

$$\begin{aligned} V_{int}(t) &= g e^{-\alpha t} \lambda^3 \left[a^3 e^{-3i\omega t} + (a^\dagger)^3 e^{3i\omega t} + \right. \\ &\quad \left. + 3 (a^\dagger)^2 a e^{i\omega t} + 3 a^\dagger e^{i\omega t} + 3 a e^{-i\omega t} + 3 a^\dagger a^2 e^{-i\omega t} \right] \end{aligned} \quad (803)$$

L'ampiezza di transizione in uno stato $|n\rangle$ con $n \neq 0$ al primo ordine in teoria delle perturbazioni è

$$\begin{aligned} A_n^{(1)} &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt' \langle n | V_{int}(t') | 0 \rangle = \\ &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt' \langle n | g e^{-\alpha t'} \lambda^3 \left[(a^\dagger)^3 e^{3i\omega t'} + 3 a^\dagger e^{i\omega t'} \right] | 0 \rangle = \\ &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt' g e^{-\alpha t'} \lambda^3 \left[\delta_{n,3} \sqrt{3!} e^{3i\omega t'} + 3 \delta_{n,1} e^{i\omega t'} \right] = \\ &= -\frac{i g \lambda^3}{\hbar} \left[\delta_{n,3} \frac{\sqrt{3!}}{\alpha - 3i\omega} + \delta_{n,1} \frac{3}{\alpha - i\omega} \right] \end{aligned} \quad (804)$$

Inoltre

$$A_0 = 1 + O(g^2) \quad (805)$$

Le probabilità di transizione non nulle all'ordine g^2 sono pertanto

$$P_1^{(1)} = \frac{9g^2\lambda^6}{\hbar^2} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{9g^2\hbar}{8m^3\omega^3} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$P_3^{(1)} = \frac{6g^2\lambda^6}{\hbar^2} \frac{1}{\alpha^2 + 9\omega^2} = \frac{3g^2\hbar}{4m^3\omega^3} \frac{1}{\alpha^2 + 9\omega^2}$$

e

$$P_0 = 1 - \frac{9g^2\lambda^6}{\hbar^2} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{6g^2\lambda^6}{\hbar^2} \frac{1}{\alpha^2 + 9\omega^2} + O(g^3) \quad (806)$$

Domanda 2

L'ampiezza al secondo ordine è

$$\begin{aligned} A_2^{(2)} &= \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_0^\infty dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle 2|V_{int}(t_1)V_{int}(t_2)|0\rangle = \\ &= -\frac{g^2\lambda^6}{\hbar^2} \int_0^\infty dt_1 e^{-\alpha t_1} \int_0^{t_1} dt_2 e^{-\alpha t_2} \times \\ &\quad \times \langle 2| \left[3(a^\dagger)^2 a e^{i\omega t_1} + 3a^\dagger e^{i\omega t_1} + 3a e^{-i\omega t_1} + 3a^\dagger a^2 e^{-i\omega t_1} \right] \times \\ &\quad \times \left[(a^\dagger)^3 e^{3i\omega t_2} + 3a^\dagger e^{i\omega t_2} \right] |0\rangle = \\ &= -\frac{g^2\lambda^6}{\hbar^2} \int_0^\infty dt_1 e^{-\alpha t_1} \int_0^{t_1} dt_2 e^{-\alpha t_2} \left[e^{i\omega t_1} e^{i\omega t_2} \times \right. \\ &\quad \times \langle 2|(3(a^\dagger)^2 a + 3a^\dagger)3a^\dagger|0\rangle + \\ &\quad \left. + e^{-i\omega t_1} e^{3i\omega t_2} \langle 2|(3a + 3a^\dagger a^2)(a^\dagger)^3|0\rangle \right] = \\ &= -\frac{g^2\lambda^6}{\hbar^2} \int_0^\infty dt_1 e^{-\alpha t_1} \int_0^{t_1} dt_2 e^{-\alpha t_2} \times \\ &\quad \times \left[e^{i\omega t_1} e^{i\omega t_2} \sqrt{2}18 + e^{-i\omega t_1} e^{3i\omega t_2} \sqrt{2}27 \right] = \\ &= -\frac{9\sqrt{2}g^2\lambda^6}{\hbar^2} \left[\int_0^\infty dt_1 e^{-(\alpha-i\omega)t_1} \int_0^{t_1} dt_2 e^{-(\alpha-i\omega)t_2} 2 + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty dt_1 e^{-(\alpha+i\omega)t_1} \int_0^{t_1} dt_2 e^{-(\alpha-3i\omega)t_2} 3 \right] = \\ &= -\frac{9\sqrt{2}g^2\lambda^6}{\hbar^2} \left[2 \int_0^\infty dt_1 e^{-(\alpha-i\omega)t_1} \frac{1 - e^{-(\alpha-i\omega)t_1}}{\alpha - i\omega} + \right. \\ &\quad \left. + 3 \int_0^\infty dt_1 e^{-(\alpha+i\omega)t_1} \frac{1 - e^{-(\alpha-3i\omega)t_1}}{\alpha - 3i\omega} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{9\sqrt{2}g^2\lambda^6}{\hbar^2} \left[2\frac{1}{(\alpha-i\omega)^2} - \frac{1}{(\alpha-i\omega)^2} + \right. \\
&\quad \left. + 3\frac{1}{(\alpha+i\omega)(\alpha-3i\omega)} - \frac{3}{2(\alpha-i\omega)(\alpha-3i\omega)} \right] = \\
&= -\frac{9\sqrt{2}g^2\lambda^6}{\hbar^2} \left[\frac{1}{(\alpha-i\omega)^2} + \frac{3}{2(\alpha+i\omega)(\alpha-i\omega)} \right] = \\
&= -\frac{9\sqrt{2}g^2\lambda^6}{\hbar^2} \frac{5\alpha-i\omega}{2(\alpha^2+\omega^2)(\alpha-i\omega)}
\end{aligned}$$

La corrispondente probabilità è

$$P_2^{(2)} = \frac{81g^4\lambda^{12}}{\hbar^4} \frac{25\alpha^2 + \omega^2}{2(\alpha^2 + \omega^2)^3} \quad (807)$$

Problema 2

Domanda 1

Abbiamo

$$\begin{aligned}
\chi'(r) &= \alpha r^{\alpha-1} \cos \beta r - r^\alpha \beta \sin \beta r \\
\chi''(r) &= \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} \cos \beta r - 2\alpha\beta r^{\alpha-1} \sin \beta r - r^\alpha \beta^2 \cos \beta r \\
\frac{\chi''(r)}{\chi(r)} &= \frac{\alpha(\alpha-1)}{r^2} - \frac{2\alpha\beta}{r} \tan \beta r - \beta^2
\end{aligned} \quad (808)$$

Deve essere

$$\frac{\chi''(r)}{\chi(r)} = \frac{2m}{\hbar^2} V(r) + \frac{\bar{l}(\bar{l}+1)}{r^2} \quad (809)$$

Dunque

$$\alpha = 2 \quad \beta = \frac{1}{d} \quad \bar{l} = 1 \quad (810)$$

Domanda 2

Calcoliamo la derivata logaritmica della funzione d'onda all'uscita della buca

$$\frac{r\chi'(r)}{\chi(r)} \Big|_{r=a} = 2 - \frac{a}{d} \tan \frac{a}{d} \quad (811)$$

Posto pertanto

$$(ak)^3 \cot \delta_1 = A_1 + B_1 (ak)^2 + O((ak)^4) \quad (812)$$

otteniamo

$$\frac{A_1}{3} = \frac{3 - \frac{a}{d} \tan \frac{a}{d}}{\frac{a}{d} \tan \frac{a}{d}} = 3 \frac{d}{a} \cot \frac{a}{d} - 1 \quad (813)$$

L'ampiezza parziale di momento angolare 1 nel limite di bassa energia si scrive

$$\begin{aligned} 3 f_1 &= 3a \frac{(ak)^2}{A_1 + B_1 (ak)^2 - i(ak)^3 + O((ak)^4)} = \\ &= a (ak)^2 \frac{\frac{a}{d} \tan \frac{a}{d}}{3 - \frac{a}{d} \tan \frac{a}{d}} + O((ak)^3) \end{aligned} \quad (814)$$

Domanda 3

La condizione di risonanza è

$$3 - \frac{a}{d} \tan \frac{a}{d} = 0 \quad (815)$$

Nell'intervallo indicato dei valori di $\frac{a}{d}$ esiste una unica soluzione di queste equazione

$$\bar{y} \equiv \frac{a}{d} \approx 1.19 \quad (816)$$

In prossimità della risonanza

$$3 - \frac{a}{d} \tan \frac{a}{d} = \epsilon \quad (817)$$

con

$$\epsilon \ll 1 \quad (818)$$

ovvero

$$\frac{A_1}{3} = \frac{3 - \frac{a}{d} \tan \frac{a}{d}}{\frac{a}{d} \tan \frac{a}{d}} = \frac{\epsilon}{3 - \epsilon} = \frac{\epsilon}{3} + O(\epsilon^2) \quad (819)$$

dobbiamo includere il termine di raggio effettivo

$$f_1 = a \frac{(ak)^2}{\epsilon + B_1 (ak)^2 - i(ak)^3 + O((ak)^4)} \quad (820)$$

Sappiamo che in generale $B_1 < 0$. Dunque per $\epsilon > 0$ esiste un valore risonante per k dato da

$$(k_{ris} a)^2 = -\frac{\epsilon}{B_1} + O(\epsilon^2) \quad (821)$$

in corrispondenza del quale la sezione d'urto è dominata dall'ampiezza parziale con $l = 1$:

$$\sigma \approx 3 \frac{4 \pi}{k_{ris}^2} = \frac{12 \pi |B_1| a^2}{\epsilon} \quad (822)$$

Il parametro di raggio effettivo B_1 alla risonanza è dato da

$$B_1 = -1 - \frac{\int_0^a \chi^2(r) dr}{a \chi^2(a)} = -1 - \frac{\int_0^{\bar{y}} dx x^4 \cos^2 x}{\bar{y}^5 \cos^2 \bar{y}} \approx -1.45 \quad (823)$$

dove si è usato il valore approssimato per l'integrale

$$\int_0^{\bar{y}} dx x^4 \cos^2 x \approx 0.147 \quad (824)$$

Per $\epsilon < 0$ non c'è una vera risonanza. Per $\epsilon \ll a k \ll 1$ il valore dell'ampiezza f_1 è dello stesso ordine della f_0 , cioè di ordine $O((a k)^0)$

$$f_1 \approx \frac{a}{B_1} \quad \epsilon \ll a k \ll 1 \quad (825)$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 16/07/2009

Problema 1

Una particella di massa m e vettore d'onda \vec{k} diffonde nel potenziale

$$V(r) = g e^{-\alpha^2 r^2} \quad r = |\vec{x}| \quad (826)$$

Domanda 1 (Punti 4)

Si calcoli la sezione d'urto differenziale e quella integrata totale nella approssimazione di Born.

Domanda 2 (Punti 10)

Si calcolino le fasi di scattering δ_l per $l = 0$ e $l = 1$ al primo ordine in g .

Domanda 3 (Punti 3)

Nel caso in cui la particella incidente sia un elettrone, e $\alpha = 10^8 \text{ cm}^{-1}$ si stabilisca in quali dei seguenti casi è applicabile l'approssimazione di Born e si calcolino le corrispondenti sezioni d'urto totali:

$$I = \{E = 10^{-2} \text{ ev}; g = 10^{-2} \text{ ev}\}$$

$$II = \{E = 10^{-2} \text{ ev}; g = 3 \text{ ev}\}$$

$$III = \{E = 10^3 \text{ ev}; g = 3 \text{ ev}\}$$

Problema 2

Un oscillatore armonico 1-dimensionale di frequenza ω , massa m e carica q si trova al tempo $t = 0$ nello stato fondamentale. Per tempi $t > 0$ viene sottoposto ad un campo elettrico periodico di frequenza $\tilde{\omega}$:

$$\hat{V}(t) = -q \mathcal{E}_0 \hat{x} \cos \tilde{\omega} t \quad t > 0 \quad (827)$$

dove \hat{x} è l'operatore coordinata e \mathcal{E}_0 è l'ampiezza del campo elettrico.

Domanda 1 (Punti 14)

Si calcoli, al primo ordine in teoria delle perturbazioni, il valore medio dell'operatore $\hat{d} = q \hat{x}$ al tempo t , ovvero si calcoli

$$\bar{d}(t) \equiv (\psi(t), \hat{d} \psi(t)) \quad (828)$$

dove $\psi(t)$ è lo stato al tempo t .

Domanda 2 (Punti 4)

Si risponda alla stessa domanda nel caso in cui lo stato iniziale sia

$$\psi(t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad (829)$$

Prova Scritta del 16/07/2009: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

L'ampiezza di Born è

$$\begin{aligned}
 f_{Born}(\theta) &= -\frac{g m}{2 \pi \hbar^2} \int d^3 \vec{x} e^{i \vec{q} \cdot \vec{x}} e^{-\alpha^2 r^2} = \\
 &= -\frac{g m}{i q \hbar^2} \int_0^\infty dr r \left[e^{i q r - \alpha^2 r^2} - e^{-i q r - \alpha^2 r^2} \right] = \\
 &= -\frac{g m}{2 i q \hbar^2} \int_{-\infty}^\infty dr r \left[e^{i q r - \alpha^2 r^2} - e^{-i q r - \alpha^2 r^2} \right] = \\
 &= -\frac{g m}{i q \hbar^2} \int_{-\infty}^\infty dr r e^{i q r - \alpha^2 r^2} = \frac{g m}{\hbar^2 q} \frac{\partial}{\partial q} \int_{-\infty}^\infty dr e^{i q r - \alpha^2 r^2} = \\
 &= \frac{g m}{\hbar^2 q} \frac{\partial}{\partial q} \int_{-\infty}^\infty dr r e^{-\frac{q^2}{4 \alpha^2} - \alpha^2 (r - \frac{i q}{2 \alpha^2})^2} = \\
 &= \frac{2 g m}{\hbar^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \frac{\partial}{\partial q^2} e^{-\frac{q^2}{4 \alpha^2}} = -\frac{g m}{2 \hbar^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^3} e^{-\frac{q^2}{4 \alpha^2}} \quad (830)
 \end{aligned}$$

dove

$$\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k} \quad q = 2 k \sin \frac{\theta}{2} \quad (831)$$

La sezione d'urto differenziale è

$$\frac{d \sigma_{Born}}{d \Omega} = \frac{g^2 m^2}{4 \hbar^4} \frac{\pi}{\alpha^6} e^{-\frac{q^2}{2 \alpha^2}} = \frac{g^2 m^2}{4 \hbar^4} \frac{\pi}{\alpha^6} e^{-\frac{2 k^2}{\alpha^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (832)$$

Quella integrata

$$\begin{aligned}
 \sigma_{Born} &= \int_0^\pi 2 \pi \sin \theta d\theta \frac{d \sigma_{Born}}{d \Omega} = \frac{g^2 m^2}{4 \hbar^4} \frac{\pi}{\alpha^6} \int_0^{2k} \frac{2 \pi q dq}{k^2} e^{-\frac{q^2}{2 \alpha^2}} = \\
 &= \frac{g^2 m^2}{4 \hbar^4} \frac{\pi^2}{\alpha^6} \int_0^4 dx e^{-\frac{x k^2}{2 \alpha^2}} = \\
 &= \frac{g^2 m^2}{4 \hbar^4} \frac{\pi^2}{\alpha^6} \frac{2 \alpha^2}{k^2} \left[1 - e^{-\frac{2 k^2}{\alpha^2}} \right] = \frac{\pi^2 g^2 m^2}{2 \hbar^4 \alpha^4 k^2} \left[1 - e^{-\frac{2 k^2}{\alpha^2}} \right] \quad (833)
 \end{aligned}$$

Domanda 2

L' ampiezza di diffusione *esatta* si scrive

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l P_l(\cos \theta) \quad (834)$$

Poiché

$$\int d\Omega P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) = \delta_{ll'} \frac{4\pi}{2l+1} \quad (835)$$

ricaviamo

$$f_l = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) f(\theta) \quad (836)$$

Ricordiamo i polinomi di Legendre di ordine 0 e 1

$$P_0(\cos \theta) = 1 \quad P_1(\cos \theta) = \cos \theta \quad (837)$$

Notiamo anche che

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} \quad (838)$$

Quindi l'ampiezza parziale con $l = 0$ è, al primo ordine in g si scrive

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta f(\theta) = -\frac{g m}{4 \hbar^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^3} e^{-\frac{k^2}{2\alpha^2}} \int_{-1}^1 dx e^{\frac{k^2}{2\alpha^2} x} + O(g^2) = \\ &= -\frac{g m}{2 \hbar^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha k^2} (1 - e^{-\frac{k^2}{\alpha^2}}) + O(g^2) \end{aligned} \quad (839)$$

Quella con $l = 1$ è, allo stesso ordine,

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \cos \theta f(\theta) = \\ &= -\frac{g m}{4 \hbar^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^3} e^{-\frac{k^2}{2\alpha^2}} \int_{-1}^1 dx x e^{\frac{k^2}{2\alpha^2} x} + O(g^2) = \\ &= -\frac{g m}{\hbar^2} \frac{\sqrt{\pi} \alpha}{k^4} \left[\frac{k^2}{2\alpha^2} - 1 + \left(\frac{k^2}{2\alpha^2} + 1 \right) e^{-\frac{k^2}{\alpha^2}} \right] + O(g^2) \end{aligned} \quad (840)$$

Domanda 3

Il raggio dell'interazione è $\frac{1}{\alpha}$. La sezione d'urto di Born nel limite di basse energie

$$\frac{k^2}{\alpha^2} \ll 1 \quad (841)$$

diventa, in unità $\frac{1}{\alpha^2}$

$$\alpha^2 \sigma_{Born} = \frac{\pi^2 g^2 m^2}{\hbar^4 \alpha^4} \quad (842)$$

mentre per

$$\frac{k^2}{\alpha^2} \gg 1 \quad (843)$$

la sezione d'urto è più piccola per un fattore inversamente proporzionale all'energia:

$$\alpha^2 \sigma_{Born} = \frac{\pi^2 g^2 m^2}{\hbar^4 \alpha^4} \frac{\alpha^2}{2k^2} = \frac{\pi^2 g^2 m^2}{\hbar^4 \alpha^4} \frac{\hbar^2 \alpha^2}{4E} \quad (844)$$

La scala di energia associata al raggio dell'interazione è

$$\frac{\hbar^2 \alpha^2}{m} \approx 7.64 \text{ ev} \quad (845)$$

Pertanto nel limite di basse energie, ovvero per

$$E \ll 7.64 \text{ ev} \quad (846)$$

la validità di Born richiede

$$g \ll \frac{7.64}{\pi} \text{ ev} \approx 2.4 \text{ ev} \quad (847)$$

Nel limite di alte energie invece, è sufficiente per l'applicabilità di Born che

$$g \ll 2.4 \sqrt{\frac{7.64 \text{ ev}}{E}} \text{ ev} \quad (848)$$

Nel caso I e II, $E = 10^{-2} \text{ ev}$: siamo dunque in un regime di bassa energia. Nel caso I, inoltre, $g = 10^{-2} \text{ ev} \ll 2.4 \text{ ev}$ e dunque l'approssimazione di Born è accettabile

$$\alpha^2 \sigma_I \approx \left(\frac{\pi \times 10^{-2}}{7.64} \right)^2 \approx (4.1 \cdot 10^{-3})^2 \approx 1.7 \cdot 10^{-5} \quad (849)$$

Nel caso II, $g = 3 \text{ ev}$:

$$\frac{\pi g}{\hbar^2 \alpha^2} \approx 1.23 \quad (850)$$

Siamo pertanto in un regime di accoppiamento forte in cui l'approssimazione di Born non è applicabile.

Infine, nel caso III, $E = 10^3 \text{ ev}$ siamo nel limite di alta energia: l'approssimazione di Born diventa accettabile e dà

$$\alpha^2 \sigma_{III} \approx \left(\frac{3 \times \pi}{7.64} \right)^2 \frac{7.64}{4 \cdot 10^3} \approx 1.52 \times 1.91 \cdot 10^{-3} \approx 2.9 \cdot 10^{-3} \quad (851)$$

Problema 2

Al primo ordine in teoria delle perturbazioni

$$\psi^{(int)}(t) = \left(1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t ds V^{(int)}(s) \right) \psi_0 \quad (852)$$

Dunque al primo ordine in V

$$\begin{aligned} (\psi(t), \hat{d} \psi(t)) &= (\psi^{(int)}(t), \hat{d}^{(int)}(t) \psi^{(int)}(t)) = \\ &= (\psi_0, \hat{d}^{(int)}(t) \psi_0) + \frac{i}{\hbar} \int_0^t ds (\psi_0, [V^{(int)}(s), \hat{d}^{(int)}(t)] \psi_0) = \\ &= (\psi_0, \hat{d}^{(int)}(t) \psi_0) - \frac{i \mathcal{E}_0}{\hbar} \int_0^t ds (\psi_0, [\hat{d}^{(int)}(s), \hat{d}^{(int)}(t)] \psi_0) \cos \tilde{\omega} s \end{aligned}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} [\hat{d}^{(int)}(s), \hat{d}^{(int)}(t)] &= q^2 \lambda^2 [a e^{-i\omega s} + a^\dagger e^{i\omega s}, a e^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}] = \\ &= q^2 \lambda^2 (e^{-i\omega(s-t)} - e^{i\omega(s-t)}) = -2i q^2 \lambda^2 \sin \omega(s-t) \quad (853) \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} (\psi(t), \hat{d} \psi(t)) &= (\psi_0, \hat{d}^{(int)}(t) \psi_0) + \frac{2 q^2 \lambda^2 \mathcal{E}_0}{\hbar} \int_0^t ds \cos \tilde{\omega} s \sin \omega(s-t) = \\ &= (\psi_0, \hat{d}^{(int)}(t) \psi_0) + \\ &\quad + \frac{q^2 \lambda^2 \mathcal{E}_0}{2i\hbar} \int_0^t ds (e^{i\tilde{\omega} s} + e^{-i\tilde{\omega} s}) (e^{i\omega(s-t)} - e^{-i\omega(s-t)}) = \\ &= (\psi_0, \hat{d}^{(int)}(t) \psi_0) + \frac{q^2 \lambda^2 \mathcal{E}_0}{2i\hbar} \int_0^t ds e^{i(\tilde{\omega}+\omega)s} e^{-i\omega t} - e^{-i(\tilde{\omega}+\omega)s} e^{i\omega t} + \\ &\quad - e^{i(\tilde{\omega}-\omega)s} e^{i\omega t} + e^{-i(\tilde{\omega}-\omega)s} e^{-i\omega t} = \\ &= (\psi_0, \hat{d}^{(int)}(t) \psi_0) + \frac{q^2 \lambda^2 \mathcal{E}_0}{2i\hbar} \left[\frac{e^{i(\tilde{\omega}+\omega)t} - 1}{i(\tilde{\omega}+\omega)} e^{-i\omega t} - \frac{e^{-i(\tilde{\omega}+\omega)t} - 1}{-i(\tilde{\omega}+\omega)} e^{i\omega t} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{i(\tilde{\omega}-\omega)t} - 1}{i(\tilde{\omega}-\omega)} e^{i\omega t} + \frac{e^{-i(\tilde{\omega}-\omega)t} - 1}{-i(\tilde{\omega}-\omega)} e^{-i\omega t} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\psi_0, \hat{d}^{(int)}(t) \psi_0) + \frac{q^2 \lambda^2 \mathcal{E}_0}{2i\hbar} \left[\frac{e^{i\tilde{\omega}t} - e^{-i\omega t}}{i(\tilde{\omega} + \omega)} - \frac{e^{-i\tilde{\omega}t} - e^{i\omega t}}{-i(\tilde{\omega} + \omega)} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{i\tilde{\omega}t} - e^{i\omega t}}{i(\tilde{\omega} - \omega)} + \frac{e^{-i\tilde{\omega}t} - e^{-i\omega t}}{-i(\tilde{\omega} - \omega)} \right] = \\
&= (\psi_0, \hat{d}^{(int)}(t) \psi_0) - \frac{q^2 \lambda^2 \mathcal{E}_0}{\hbar} \left[\frac{\cos \tilde{\omega} t}{\tilde{\omega} + \omega} - \frac{\cos \omega t}{\tilde{\omega} + \omega} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{\cos \tilde{\omega} t}{\tilde{\omega} - \omega} + \frac{\cos \omega t}{\tilde{\omega} - \omega} \right] = \\
&= (\psi_0, \hat{d}^{(int)}(t) \psi_0) + \frac{2q^2 \lambda^2 \mathcal{E}_0}{\hbar} \frac{\omega [\cos \tilde{\omega} t - \cos \omega t]}{\tilde{\omega}^2 - \omega^2} \tag{854}
\end{aligned}$$

Questa formula è valida per ψ_0 arbitrario. Nel caso della domanda 1,

$$\psi_0 = |0\rangle \tag{855}$$

e quindi

$$(\psi_0, \hat{d}^{(int)}(t) \psi_0) = q\lambda (\psi_0, (a e^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}) \psi_0) = 0 \tag{856}$$

In definitiva il valore medio dell'operatore di dipolo \hat{d} nel caso dello stato fondamentale è

$$(\psi(t), \hat{d} \psi(t)) = \frac{2\mathcal{E}_0 q^2 \lambda^2}{\hbar} \frac{\omega [\cos \tilde{\omega} t - \cos \omega t]}{\tilde{\omega}^2 - \omega^2} \tag{857}$$

Domanda 2

Per uno stato iniziale generico

$$\psi(t=0) = \psi_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_n |n\rangle \tag{858}$$

abbiamo

$$(\psi_0, \hat{d}^{(int)}(t) \psi_0) = q\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} (e^{-i\omega t} a_n^* a_{n+1} + e^{i\omega t} a_{n+1}^* a_n) \tag{859}$$

In particolare per

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \tag{860}$$

abbiamo

$$(\psi_0, \hat{d}^{(int)}(t) \psi_0) = q\lambda \cos \omega t \tag{861}$$

e dunque

$$(\psi(t), \hat{d}\psi(t)) = q \lambda \cos \omega t + \frac{2 \mathcal{E}_0 q^2 \lambda^2}{\hbar} \frac{\omega [\cos \tilde{\omega} t - \cos \omega t]}{\tilde{\omega}^2 - \omega^2} \quad (862)$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 07/09/2009

Problema 1

L'evoluzione di un sistema quanto-meccanico a due livelli è descritta dall'Hamiltoniana:

$$H = H_0 + V \quad (863)$$

dove

$$H_0 = \hbar \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad V = \hbar \begin{pmatrix} 0 & f \\ f & 0 \end{pmatrix} \quad (864)$$

dove $\lambda > 0$ e $f > 0$. Al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello ψ_0 :

$$\psi(t=0) = \psi_0 \equiv \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \alpha > 0 \quad (865)$$

Domanda 1 (Punti 6)

Si determini, al primo ordine in f , le probabilità $P_{\pm}(t)$ che il sistema si trovi al tempo $t > 0$ negli stati $\psi_+ \equiv (0, 1)$ e $\psi_- \equiv (1, 0)$.

Domanda 2 (Punti 10)

Si calcolino esattamente le probabilità $P_{\pm}(t)$ per tempi $t > 0$.

Problema 2

Un atomo di idrogeno si trova nello stato fondamentale. A partire dal tempo $t = 0$ viene sottoposto alla perturbazione periodica di frequenza ω

$$V(t) = e \hat{x} \mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (866)$$

dove e è la carica dell'elettrone, \mathcal{E}_0 il campo elettrico, \hat{x} la coordinata lungo l'asse delle x .

Domanda 1 (Punti 3)

Determinare la condizione sulla frequenza ω che rende possibile la ionizzazione al primo ordine in teoria delle perturbazioni.

Domanda 2 (Punti 15)

Si calcoli, al primo ordine in teoria delle perturbazioni, la probabilità di ionizzazione per unità di tempo, approssimando gli stati finali con onde piane di momento \vec{k} .

Domanda 3 (Punti 2)

Dedurre la condizione di validità dell'approssimazione di cui alla domanda precedente.

Prova Scritta del 7/09/2009: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Sia

$$\psi(t) = (a(t), b(t)) \quad (867)$$

lo stato del sistema al tempo t . L'equazione di Schrödinger è

$$\begin{aligned} i \dot{a}(t) &= -\lambda a(t) + f b(t) \\ i \dot{b}(t) &= +\lambda a(t) + f a(t) \end{aligned}$$

Passando alla rappresentazione dell'interazione

$$a(t) \equiv e^{i\lambda t} \tilde{a}(t) \quad b(t) \equiv e^{-i\lambda t} \tilde{b}(t) \quad (868)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} i \dot{\tilde{a}}(t) &= f e^{-2i\lambda t} \tilde{b}(t) \\ i \dot{\tilde{b}}(t) &= f e^{2i\lambda t} \tilde{a}(t) \end{aligned}$$

Integrando

$$\begin{aligned} \tilde{a}(t) &= \cos \alpha - i f \int_0^t dt_1 e^{-2i\lambda t_1} \tilde{b}(t_1) \\ \tilde{b}(t) &= \sin \alpha - i f \int_0^t dt_1 e^{2i\lambda t_1} \tilde{a}(t_1) \end{aligned}$$

Al primo ordine in f otteniamo

$$\begin{aligned} \tilde{a}(t) &= \cos \alpha - i f \sin \alpha \int_0^t dt_1 e^{-2i\lambda t_1} + \dots = \\ &= \cos \alpha + \frac{f \sin \alpha}{2\lambda} (e^{-2i\lambda t} - 1) + \dots \\ \tilde{b}(t) &= \sin \alpha - i f \cos \alpha \int_0^t dt_1 e^{2i\lambda t_1} \tilde{a}(t_1) + \dots = \\ &= \sin \alpha - \frac{f \cos \alpha}{2\lambda} (e^{2i\lambda t} - 1) + \dots \end{aligned}$$

Le corrispondenti probabilità sono

$$P_-(t) = \cos^2 \alpha + \frac{f \sin \alpha \cos \alpha}{\lambda} (\cos 2 \lambda t - 1) = \cos^2 \alpha - \frac{f \sin 2 \alpha}{\lambda} \sin^2 \lambda t$$

$$P_+(t) = \sin^2 \alpha - \frac{f \sin \alpha \cos \alpha}{\lambda} (\cos 2 \lambda t - 1) = \sin^2 \alpha + \frac{f \sin 2 \alpha}{\lambda} \sin^2 \lambda t$$

Domanda 2

Gli autostati (non-normalizzati) esatti di H sono

$$v_{\pm} = (f, \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + f^2}) \quad (869)$$

ed i corrispondenti autovalori

$$E_{\pm} = \pm \hbar \sqrt{\lambda^2 + f^2} \quad (870)$$

Decomponiamo lo stato iniziale nella base v_{\pm} :

$$\psi_0 = c_+ v_+ + c_- v_- \quad (871)$$

Abbiamo

$$c_{\pm} = \frac{(v_{\pm}, \psi_0)}{(v_{\pm}, v_{\pm})} = \frac{f \cos \alpha + (\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + f^2}) \sin \alpha}{2 \sqrt{\lambda^2 + f^2} (\sqrt{f^2 + \lambda^2} \pm \lambda)} \quad (872)$$

Lo stato al tempo t è

$$\psi(t) = c_+ e^{-i \sqrt{\lambda^2 + f^2} t} v_+ + c_- e^{i \sqrt{\lambda^2 + f^2} t} v_- \quad (873)$$

Dunque:

$$\begin{aligned} P_-(t) &= f^2 |c_+ e^{-i \sqrt{\lambda^2 + f^2} t} + c_- e^{i \sqrt{\lambda^2 + f^2} t}|^2 = \\ &= f^2 (c_+^2 + c_-^2 + 2 c_+ c_- \cos 2 \sqrt{\lambda^2 + f^2} t) = \\ &= \cos^2 \alpha - 2 f^2 c_- c_+ (1 - \cos 2 \sqrt{\lambda^2 + f^2} t) = \\ &= \cos^2 \alpha - 4 f^2 c_- c_+ \sin^2 \sqrt{\lambda^2 + f^2} t \end{aligned} \quad (874)$$

Analogamente

$$P_+(t) = \sin^2 \alpha + 4 f^2 c_- c_+ \sin^2 \sqrt{\lambda^2 + f^2} t \quad (875)$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}
4 f^2 c_- c_+ &= 4 f^2 \frac{f \cos \alpha + (\lambda + \sqrt{\lambda^2 + f^2}) \sin \alpha}{2 \sqrt{\lambda^2 + f^2} (\sqrt{f^2 + \lambda^2} + \lambda)} \times \\
&\times \frac{f \cos \alpha + (\lambda - \sqrt{\lambda^2 + f^2}) \sin \alpha}{2 \sqrt{\lambda^2 + f^2} (\sqrt{f^2 + \lambda^2} - \lambda)} = \\
&= \frac{f^2 \cos^2 \alpha - f^2 \sin^2 \alpha + 2 \lambda f \cos \alpha \sin \alpha}{\lambda^2 + f^2} = \\
&= \frac{f^2 \cos 2 \alpha + \lambda f \sin 2 \alpha}{\lambda^2 + f^2}
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
P_-(t) &= \cos^2 \alpha - \frac{f^2 \cos 2 \alpha + \lambda f \sin 2 \alpha}{\lambda^2 + f^2} \sin^2 \sqrt{\lambda^2 + f^2} t \\
P_+(t) &= \sin^2 \alpha + \frac{f^2 \cos 2 \alpha + \lambda f \sin 2 \alpha}{\lambda^2 + f^2} \sin^2 \sqrt{\lambda^2 + f^2} t \quad (876)
\end{aligned}$$

in accordo con il risultato del primo ordine.

Problema 2

Domanda 1

Deve essere

$$\hbar \omega > |E_B| = \frac{m e^4}{2 \hbar^2} \quad (877)$$

dove

$$E_B = -\frac{m e^4}{2 \hbar^2} \quad (878)$$

è l'energia dello stato fondamentale dell'idrogeno.

Domanda 2

Per comodità ruotiamo gli assi e prendiamo l'asse delle z lungo il campo elettrico. La perturbazione si riscrive

$$V(t) = \frac{1}{2} e z \mathcal{E}_0 (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (879)$$

La funzione d'onda dello stato iniziale è

$$\psi_i(\vec{x}) = \frac{1}{a_B^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}} e^{-\frac{|\vec{x}|}{a_B}} \quad (880)$$

dove

$$a_B = \frac{\hbar^2}{m e^2} \quad (881)$$

è il raggio di Bohr. La funzione d'onda delle onde piane che prendiamo come stati finali sono

$$\psi_{f;\vec{k}}(x) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (882)$$

L'elemento di matrice rilevante è

$$\begin{aligned} A_{fi} &= \frac{1}{2} e \mathcal{E}_0 (\psi_{f;\vec{k}}, z \psi_i) = \frac{e \mathcal{E}_0}{2 a_B^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}} \int d^3\vec{x} z e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} - \frac{|\vec{x}|}{a_B}} = \\ &= \frac{i e \mathcal{E}_0}{2 a_B^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial k_z} I(k) \end{aligned} \quad (883)$$

dove abbiamo introdotto l'integrale

$$\begin{aligned} I(k) &= \int d^3\vec{x} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} - \frac{|\vec{x}|}{a_B}} = 2\pi \int_0^\infty dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{-ikr \cos\theta - \frac{r}{a_B}} = \\ &= \frac{2\pi}{ik} \int_0^\infty dr r (e^{-\frac{r}{a_B}(1-ia_B k)} - e^{-\frac{r}{a_B}(1+ia_B k)}) = \\ &= \frac{2\pi a_B^2}{ik} \int_0^\infty dx x (e^{-x(1-ia_B k)} - e^{-x(1+ia_B k)}) = \\ &= \frac{2\pi a_B^2}{ik} \left[\frac{1}{(1-ia_B k)^2} - \frac{1}{(1+ia_B k)^2} \right] = \frac{8\pi a_B^3}{(1+a_B^2 k^2)^2} \end{aligned} \quad (884)$$

Pertanto

$$A_{fi} = -\frac{i e \mathcal{E}_0}{2 a_B^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}} \frac{32\pi a_B^5 k_z}{(1+a_B^2 k^2)^3} = -\frac{16\sqrt{\pi} i e \mathcal{E}_0 a_B^{\frac{7}{2}} k_z}{(1+a_B^2 k^2)^3} \quad (885)$$

e

$$|A_{fi}|^2 = \frac{2^8 \pi e^2 \mathcal{E}_0^2 a_B^7 k^2 \cos^2 \tilde{\theta}}{(1+a_B^2 k^2)^6} \quad (886)$$

dove $\tilde{\theta}$ è l'angolo formato da \vec{k} e l'asse z . Poiché

$$(\psi_{f;\vec{k}'}, \psi_{f;\vec{k}}) = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (887)$$

la regola d'oro di Fermi dà per la probabilità di ionizzazione per unità di tempo

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \delta(E - E_B - \hbar\omega) \frac{2^8 \pi e^2 \mathcal{E}_0^2 a_B^7 k^2 \cos^2 \tilde{\theta}}{(1 + a_B^2 k^2)^6} \quad (888)$$

dove

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (889)$$

Posto $x = \cos \tilde{\theta}$, otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{dP(t)}{dt} &= \frac{2^7 e^2 \mathcal{E}_0^2 a_B^7}{\hbar} \int_0^\infty dk \delta(E - E_B - \hbar\omega) \frac{k^4}{(1 + a_B^2 k^2)^6} \int_{-1}^1 dx x^2 \\ &= \frac{2^8 e^2 \mathcal{E}_0^2 a_B^7}{3\hbar} \int_0^\infty dk \delta(E - E_B - \hbar\omega) \frac{k^4}{(1 + a_B^2 k^2)^6} \\ &= \frac{2^8 e^2 \mathcal{E}_0^2 a_B^7 m}{3\hbar^3} \frac{\bar{k}^3}{(1 + a_B^2 \bar{k}^2)^6} \end{aligned} \quad (890)$$

dove

$$\begin{aligned} \bar{k} &\equiv \sqrt{\frac{2m(E_B + \hbar\omega)}{\hbar^2}} = \frac{m e^2}{\hbar^2} \sqrt{\frac{2\omega \hbar^2}{m e^4} - 1} = \\ &= \frac{1}{a_B} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{|E_B|} - 1} \end{aligned} \quad (891)$$

Domanda 3

L'approssimazione usata nel punto precedente è ragionevole nel limite in cui l'impulso dell'elettrone finale è grande ovvero per

$$\bar{k} a_B \gg 1 \quad (892)$$

In questa situazione,

$$\bar{k} a_B \approx \sqrt{\frac{\hbar\omega}{|E_B|}} \quad \text{e} \quad \frac{\hbar^2 \bar{k}^2}{2m} \approx \hbar\omega \quad (893)$$

e la probabilità di ionizzazione per unità di tempo diventa

$$\frac{dP(t)}{dt} \approx \frac{2^7 e^2 \mathcal{E}_0^2 a_B^2}{3\hbar} \frac{1}{\frac{\hbar^2 \bar{k}^2}{2m} (a_B \bar{k})^7} \approx \frac{2^7 e^2 \mathcal{E}_0^2 a_B^2}{3\hbar \hbar\omega} \left(\frac{|E_B|}{\hbar\omega} \right)^{\frac{7}{2}} \quad (894)$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 19/01/2010

Problema 1

Una particella di massa m e vettore d'onda \vec{k} diffonde nel potenziale centrale

$$V(r) = \frac{A}{r^2} e^{-\mu r}$$

con $\mu > 0$ e A reale.

Domanda 1 (Punti 7)

Si calcoli l'ampiezza di diffusione di Born.

Domanda 2 (Punti 7)

Si calcoli la sezione d'urto di Born integrata nei limiti di bassa energia e di alta energia

Domanda 3 (Punti 7)

Sia $\mu = 10^8 \text{ cm}^{-1}$ e la particella che diffonde un elettrone. Si stimi il valore numerico della sezione d'urto integrata nei casi in cui l'approssimazione di Born è applicabile:

- a) $A = 7.64 \cdot 10^{-20} \text{ ev} \times \text{cm}^2$ $E = .04 \text{ ev}$
- b) $A = 7.64 \cdot 10^{-16} \text{ ev} \times \text{cm}^2$ $E = 10^4 \text{ ev}$
- c) $A = 7.64 \cdot 10^{-16} \text{ ev} \times \text{cm}^2$ $E = 1. \text{ ev}$

Problema 2

Un oscillatore armonico bi-dimensionale di frequenza ω

$$H_0 = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)}{2}$$

è perturbato per tempi $t \geq 0$ dal campo elettrico

$$V(t) = -q(\mathcal{E}_x(t)\hat{x} + \mathcal{E}_y(t)\hat{y})$$

dove $\mathcal{E}_{x,y}(t) = \mathcal{E}_{x,y} e^{-\Gamma t}$, con $\mathcal{E}_{x,y}$ costanti e reali. Siano $\psi_{n,J}$ gli autostati di H_0 di momento angolare lungo z determinato.

Domanda 1 (Punti 10)

Calcolare all'ordine più basso non nullo in teoria delle perturbazioni le probabilità di transizione al tempo $t \rightarrow +\infty$ dallo stato $\psi_{0,0}$ agli stati $\psi_{2,J}$

Domanda 2 (Punti 10)

Dati due autostati $\psi_{n,J}$ e $\psi_{n',J'}$ determinare, in funzione di n, n', J, J' , l'ordine più basso non nullo della transizione $\psi_{n,J} \rightarrow \psi_{n',J'}$,

Prova Scritta del 19/01/2010: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Posto

$$\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k} \quad (895)$$

dove \vec{k} e \vec{k}' sono i vettori d'onda incidenti e diffusi, abbiamo

$$\begin{aligned} f_B &= -\frac{m A}{\hbar^2} \int_0^\infty dr e^{-\mu r} \int_{-1}^1 dt e^{i q r t} = \\ &= -\frac{m A}{i q \hbar^2} \int_0^\infty \frac{dr e^{-\mu r}}{r} (e^{i q r} - e^{-i q r}) = \\ &= -\frac{2 m A}{q \hbar^2} \arctan \frac{q}{\mu} \end{aligned} \quad (896)$$

dove abbiamo usato il risultato

$$\int_0^\infty \frac{dr e^{-\mu r}}{r} (e^{i q r} - e^{-i q r}) = 2 i \arctan \frac{q}{\mu} \quad (897)$$

che si può per esempio derivare dall'integrale elementare

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx (e^{-(\mu-iq)x} - e^{-(\mu+iq)x}) &= \frac{1}{\mu - i q} - \frac{1}{\mu + i q} = \\ &= \frac{2 i q}{\mu^2 + q^2} \end{aligned} \quad (898)$$

Infatti, derivando ambo i membri della (897) rispetto a μ otteniamo

$$-\int_0^\infty dr e^{-\mu r} (e^{i q r} - e^{-i q r}) = -2 i \frac{1}{1 + \frac{q^2}{\mu^2}} \frac{q}{\mu^2} \quad (899)$$

ovvero la (898).

Domanda 2

Introduciamo il parametro adimensionale che caratterizza l'intensità del potenziale

$$\alpha \equiv \frac{m A}{\hbar^2} \quad (900)$$

La sezione d'urto di Born integrata è

$$\sigma_B = 8 \pi \alpha^2 \int_0^{2k} \frac{q dq}{k^2 q^2} \arctan^2 \frac{q}{\mu} = \frac{8 \pi \alpha^2}{k^2} \int_0^{\frac{2k}{\mu}} \frac{dx}{x} \arctan^2 x \quad (901)$$

Nel limite di bassa energia

$$k \ll \mu \quad (902)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \frac{8 \pi \alpha^2}{k^2} \int_0^{\frac{2k}{\mu}} dx x + \dots = \frac{8 \pi \alpha^2}{k^2} \frac{2k^2}{\mu^2} + \dots = \\ &= \frac{16 \pi \alpha^2}{\mu^2} + O(k^2) \end{aligned} \quad (903)$$

Nel limite di alta energia

$$k \gg \mu \quad (904)$$

otteniamo

$$\sigma_B = \frac{2 \pi^3 \alpha^2}{k^2} \int_{\epsilon}^{\frac{2k}{\mu}} \frac{dx}{x} + \dots = \frac{2 \pi^3 \alpha^2}{k^2} \log \frac{k}{\mu} + O(1/k^2) \quad (905)$$

dove $\epsilon > 0$ è una costante positiva.

Domanda 3

Per l'elettrone

$$\frac{\hbar^2}{m} = 27.2 \text{ eV} \times (0.53 \cdot 10^{-8})^2 \text{ cm}^2 \approx 7.64 \cdot 10^{-16} \text{ eV} \times \text{cm}^2 \quad (906)$$

La costante adimensionale α è pertanto nei tre casi

$$(a) \alpha = 10^{-4} \quad (b) \alpha = 1. \quad (c) \alpha = 1.$$

Il numero d'onda $k \propto \sqrt{E}$ è nei tre casi

$$\begin{aligned} (a) \frac{k}{\mu} &= \sqrt{\frac{0.04}{13.6}} (0.53)^{-1} \approx 0.10 \\ (b) \frac{k}{\mu} &= \sqrt{\frac{10^4}{13.6}} (0.53)^{-1} \approx 51. \\ (c) \frac{k}{\mu} &= \sqrt{\frac{1}{13.6}} (0.53)^{-1} \approx 0.51. \end{aligned}$$

Nel caso (a) pertanto l'approssimazione di Born è certamente valida. Inoltre siamo in un regime di bassa energia, per cui possiamo far uso della (903):

$$(a) \sigma_B \approx 16 \pi \times 10^{-8} 10^{-16} \text{ cm}^2 = 5. \times 10^{-23} \text{ cm}^2$$

Nel caso (b) il rapporto

$$\frac{\alpha \mu}{k} \approx \frac{1}{51.} \approx 2 \cdot 10^{-2} \ll 1 \quad (907)$$

implica che l'approssimazione di Born è applicabile. Possiamo inoltre, con discreta precisione, usare l'approssimazione di alta energia (905):

$$(b) \sigma_B \approx \frac{2 \pi^3}{51.^2} \log(51.) \times 10^{-16} \times \text{cm}^2 \approx 9. \cdot 10^{-18} \text{ cm}^2$$

Nel caso (c), siamo in condizioni di (relativamente) bassa energia e dunque il valore di α indica che l'approssimazione di Born non è applicabile.

Problema 2

Domanda 1

Converrà introdurre gli operatori di salita e discesa di momento angolare definito:

$$a_{\pm}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x^{\dagger} \pm i a_y^{\dagger}) \quad (908)$$

$$a_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x \mp i a_y) \quad (909)$$

Un autostato di $\psi_{n,J}$ di H_0 di momento angolare J e energia $E_n = \hbar \omega(n+1)$ si scrive in termini degli operatori di salita (908) come segue

$$\psi_{n,J} = \frac{(a_+^{\dagger})^{m_+} (a_-^{\dagger})^{m_-}}{\sqrt{m_+! m_-!}} |0\rangle \quad (910)$$

con

$$n = m_+ + m_- \quad J = m_+ - m_- \quad (911)$$

ovvero

$$m_+ = \frac{n+J}{2} \quad m_- = \frac{n-J}{2} \quad (912)$$

Per ogni livello n , J assume gli $n + 1$ valori $n, n - 2, \dots, -(n - 2), -n$.

Il potenziale d'interazione si scrive in termini degli operatori (908) e (909) nel modo seguente

$$V(t) = -q \lambda [\mathcal{E}_+(t) (a_- + a_-^\dagger) + \mathcal{E}_-(t) (a_+ + a_+^\dagger)] \quad (913)$$

dove

$$\mathcal{E}_+(t) \equiv \frac{\mathcal{E}_x(t) \pm i \mathcal{E}_y(t)}{\sqrt{2}} \quad \lambda \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \quad (914)$$

Gli stati di livello 2, sono $\psi_{2,2}, \psi_{2,0}, \psi_{2,-2}$. L'ordine più basso non nullo in teoria delle perturbazioni per le transizioni $\psi_{0,0} \rightarrow \psi_{2,J}$ è il secondo.

Le ampiezze sono

$$\begin{aligned} A_{\psi_{0,0} \rightarrow \psi_{2,\pm 2}} &= -\frac{q^2 \lambda^2}{\hbar^2} \int_0^\infty dt \mathcal{E}_\mp(t) \int_0^t dt' \mathcal{E}_\mp(t') \sqrt{2} e^{i\omega(t+t')} = \\ &= -\frac{q^2 \lambda^2}{\sqrt{2} \hbar^2} \left[\int_0^\infty dt \mathcal{E}_\mp(t) e^{i\omega t} \right]^2 = -\frac{q^2 \lambda^2}{\sqrt{2} \hbar^2} \frac{\mathcal{E}_\mp^2}{(\Gamma - i\omega)^2} \\ A_{\psi_{0,0} \rightarrow \psi_{2,0}} &= -\frac{q^2 \lambda^2}{\hbar^2} \int_0^\infty dt \int_0^t dt' [\mathcal{E}_+(t) \mathcal{E}_-(t') + \\ &\quad + \mathcal{E}_-(t) \mathcal{E}_+(t')] e^{i\omega(t+t')} = \\ &= -\frac{q^2 \lambda^2}{\hbar^2} \left[\int_0^\infty dt \mathcal{E}_+(t) e^{i\omega t} \right] \left[\int_0^\infty dt \mathcal{E}_-(t) e^{i\omega t} \right] = \\ &= -\frac{q^2 \lambda^2}{\hbar^2} \frac{\mathcal{E}_+ \mathcal{E}_-}{(\Gamma - i\omega)^2} \end{aligned}$$

Le probabilità

$$\begin{aligned} P_{\psi_{0,0} \rightarrow \psi_{2,\pm 2}} &= \frac{q^4 \lambda^4 (\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2)^2}{8 \hbar^4 (\Gamma^2 + \omega^2)^2} \\ P_{\psi_{0,0} \rightarrow \psi_{2,0}} &= \frac{q^4 \lambda^4 (\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2)^2}{4 \hbar^4 (\Gamma^2 + \omega^2)^2} \end{aligned}$$

Domanda 2

Un'ampiezza di transizione in teoria delle perturbazioni coinvolge un monomio nei creatori e distruttori: sia m_\pm il numero dei creatori a_\pm^\dagger e \bar{m}_\pm il numero dei distruttori a_\pm presenti nell'operatore di transizione ad un dato

ordine in teoria delle perturbazioni. Affinché questo operatore non abbia elementi nulli tra $\psi_{n,J}$ e $\psi_{n',J'}$ devono valere le regole di selezione:

$$\begin{aligned}\Delta n &\equiv n' - n = m_+ + m_- - \bar{m}_+ - \bar{m}_- \\ \Delta J &\equiv J' - J = m_+ - m_- - \bar{m}_+ + \bar{m}_-\end{aligned}$$

Dunque

$$\Delta m_+ \equiv m_+ - \bar{m}_+ = \frac{\Delta n + \Delta J}{2} \quad \Delta m_- \equiv m_- - \bar{m}_- = \frac{\Delta n - \Delta J}{2}$$

Quindi le differenze $m_{\pm} - \bar{m}_{\pm}$ sono determinate univocamente dai valori $(n, J), (n', J')$ che caratterizzano la transizione.

Poiché la perturbazione è lineare nei creatori/distruttori, il grado del monomio coincide con l'ordine della teoria delle perturbazioni k alla quale l'operatore di transizione in questione contribuisce:

$$k = m_+ + m_- + \bar{m}_+ + \bar{m}_- \quad (915)$$

Tenendo conto delle delle (915), possiamo riscrivere k in quattro modi equivalenti:

$$\begin{aligned}k &= \Delta m_+ + \Delta m_- + 2(\bar{m}_+ + \bar{m}_-) = \Delta n + 2(\bar{m}_+ + \bar{m}_-) = \\ &= -\Delta m_+ - \Delta m_- + 2(m_+ + m_-) = -\Delta n + 2(m_+ + m_-) = \\ &= \Delta m_+ - \Delta m_- + 2(\bar{m}_+ + m_-) = \Delta J + 2(\bar{m}_+ + m_-) = \\ &= -\Delta m_+ + \Delta m_- + 2(m_+ + \bar{m}_-) = -\Delta J + 2(m_+ + \bar{m}_-)\end{aligned}$$

Concludiamo che deve essere

$$k \geq |\Delta n| \quad \text{e} \quad k \geq |\Delta J| \quad (916)$$

In definitiva l'ordine più basso associato ad una transizione $\psi_{n,J} \rightarrow \psi_{n',J'}$ è

$$k = \max\{|\Delta n|, |\Delta J|\} \quad (917)$$

I valori di m_{\pm}, \bar{m}_{\pm} che corrispondono agli operatori che inducono le transizioni di ordine più basso dipendono dai valori di Δn e ΔJ . Possiamo distinguere i due casi:

(a) $|\Delta n| \geq |\Delta J|$, per cui $k = \Delta n$. In questo caso se $\Delta n > 0$ la transizione di ordine più basso sarà indotta da un operatore con

$$m_+ = \frac{\Delta n + \Delta J}{2} \quad m_- = \frac{\Delta n - \Delta J}{2} \quad \bar{m}_+ = \bar{m}_- = 0 \quad (918)$$

mentre per $\Delta n < 0$ sarà indotta da un operatore con

$$\bar{m}_+ = -\frac{\Delta n + \Delta J}{2} \quad \bar{m}_- = -\frac{\Delta n - \Delta J}{2} \quad m_+ = m_- = 0 \quad (919)$$

(b) $|\Delta n| < |\Delta J|$, per cui $k = \Delta J$. Se $\Delta J > 0$ la transizione di ordine più basso sarà indotta da un operatore con

$$m_+ = \frac{\Delta n + \Delta J}{2} \quad \bar{m}_- = -\frac{\Delta n - \Delta J}{2} \quad \bar{m}_+ = m_- = 0 \quad (920)$$

mentre, per $\Delta J < 0$, sarà indotta da un operatore con

$$\bar{m}_+ = -\frac{\Delta n + \Delta J}{2} \quad m_- = \frac{\Delta n - \Delta J}{2} \quad m_+ = \bar{m}_- = 0 \quad (921)$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 02/03/2010

Problema 1

Una particella di massa m e vettore d'onda \vec{k} diffonde nel potenziale centrale

$$V(r) = A r e^{-\mu r}$$

con $\mu > 0$ e A reale.

Domanda 1 (Punti 7)

Si calcoli l'ampiezza di diffusione di Born.

Domanda 2 (Punti 7)

Si calcoli la sezione d'urto di Born integrata nei limiti di bassa energia e di alta energia

Domanda 3 (Punti 7)

Sia $\mu = 10^8 \text{ cm}^{-1}$ e la particella che diffonde un elettrone. Si stimi il valore numerico della sezione d'urto integrata nei casi in cui l'approssimazione di Born è applicabile:

- a) $A = 7.64 \cdot 10^4 \text{ ev} \times \text{cm}^{-1}$ $E = .01 \text{ ev}$
- b) $A = 7.64 \cdot 10^{10} \text{ ev} \times \text{cm}^{-1}$ $E = 10^4 \text{ ev}$
- c) $A = 7.64 \cdot 10^{10} \text{ ev} \times \text{cm}^{-1}$ $E = 10^8 \text{ ev}$

Problema 2

Un oscillatore armonico uni-dimensionale si trova nello stato fondamentale al tempo $t = -\infty$. E' sottoposto alla perturbazione dipendente dal tempo

$$V(x, t) = V_0 e^{-\frac{(x-vt)^2}{2\alpha^2}}$$

dove $\alpha > 0$ e $v > 0$.

Domanda 1 (Punti 16)

Si calcoli all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni la probabilità che l'oscillatore si trovi nel primo stato eccitato al tempo $t = +\infty$.

Prova Scritta del 02/03/2010: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Posto

$$\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k} \quad (922)$$

dove \vec{k} e \vec{k}' sono i vettori d'onda incidenti e diffusi, abbiamo

$$\begin{aligned} f_B &= -\frac{mA}{\hbar^2} \int_0^\infty dr e^{-\mu r} r^3 \int_{-1}^1 dt e^{iqr t} = \\ &= -\frac{mA}{iq\hbar^2} \int_0^\infty dr e^{-\mu r} r^2 (e^{iqr} - e^{-iqr}) = \\ &= \frac{4mA}{\hbar^2} \frac{q^2 - 3\mu^2}{(q^2 + \mu^2)^3} \end{aligned} \quad (923)$$

dove abbiamo calcolato l'integrale definito a partire dall'integrale elementare

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx (e^{-(\mu-iq)x} - e^{-(\mu+iq)x}) &= \frac{1}{\mu - iq} - \frac{1}{\mu + iq} = \\ &= \frac{2iq}{\mu^2 + q^2} \end{aligned} \quad (924)$$

e derivando ambo i membri due volte rispetto a μ

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr e^{-\mu r} r^2 (e^{iqr} - e^{-iqr}) &= \frac{2}{(\mu - iq)^3} - \frac{2}{(\mu + iq)^3} = \\ &= -4i \frac{q^3 - 3q\mu^2}{(\mu^2 + q^2)^3} \end{aligned} \quad (925)$$

Domanda 2

La sezione d'urto di Born integrata è

$$\sigma_B = \frac{32\pi m^2 A^2}{\hbar^4} \int_0^{2k} \frac{q dq}{k^2} \frac{(q^2 - 3\mu^2)^2}{(q^2 + \mu^2)^6} = \frac{32\pi m^2 A^2}{\hbar^4 k^2 \mu^6} \int_0^{\frac{2k}{\mu}} x dx \frac{(x^2 - 3)^2}{(x^2 + 1)^6}$$

Nel limite di bassa energia

$$k \ll \mu$$

otteniamo

$$\sigma_B = \frac{32 \pi m^2 A^2}{\hbar^4 k^2 \mu^6} \int_0^{\frac{2k}{\mu}} 9x dx + \dots = \frac{576 \pi m^2 A^2}{\hbar^4 \mu^8} + O(k^2) \quad (926)$$

Nel limite di alta energia

$$k \gg \mu$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \frac{32 \pi m^2 A^2}{\hbar^4 k^2 \mu^6} \left[\int_0^\infty x dx \frac{(x^2 - 3)^2}{(x^2 + 1)^6} + O\left(\frac{\mu^6}{k^6}\right) \right] = \\ &= \frac{16 \pi m^2 A^2}{\hbar^4 k^2 \mu^6} \left[\int_0^\infty dt \frac{(t - 3)^2}{(t + 1)^6} + O\left(\frac{\mu^6}{k^6}\right) \right] = \\ &= \frac{16 \pi m^2 A^2}{\hbar^4 k^2 \mu^6} \left[\int_0^\infty dt \left(\frac{1}{(t + 1)^4} - \frac{8}{(t + 1)^5} + \frac{16}{(t + 1)^6} \right) + O\left(\frac{\mu^6}{k^6}\right) \right] = \\ &= \frac{16 \pi m^2 A^2}{\hbar^4 k^2 \mu^6} \left[\frac{23}{15} + O\left(\frac{\mu^6}{k^6}\right) \right] \end{aligned} \quad (927)$$

Domanda 3

Nel regime di bassa energia

$$k \ll \mu$$

l'approssimazione di Born è affidabile quando

$$\frac{m A}{\hbar^2 \mu^4} \ll \frac{1}{\mu}$$

ovvero per

$$A \ll \frac{\hbar^2 \mu^3}{m} \quad (928)$$

Nel regime di alta energia, invece,

$$k \gg \mu$$

è sufficiente, per l'affidabilità del risultato di Born, che

$$A \ll \frac{\hbar^2 \mu^2 k}{m} \quad (929)$$

Per l'elettrone

$$\frac{\hbar^2}{m} = 27.2 \text{ ev} \times (0.53 \cdot 10^{-8})^2 \text{ cm}^2 \approx 7.64 \cdot 10^{-16} \text{ ev} \times \text{cm}^2 \quad (930)$$

Dunque per il potenziale in questione

$$\frac{\hbar^2 \mu^3}{m} \approx 7.64 \cdot 10^8 \text{ ev} \times \text{cm}^{-1} \quad (931)$$

Il numero d'onda $k \propto \sqrt{E}$ è nei tre casi

$$(a) \frac{k}{\mu} = \sqrt{\frac{0.01}{13.6}} (0.53)^{-1} \approx 0.05$$

$$(b) \frac{k}{\mu} = \sqrt{\frac{10^4}{13.6}} (0.53)^{-1} \approx 51.$$

$$(c) \frac{k}{\mu} = \sqrt{\frac{10^8}{13.6}} (0.53)^{-1} \approx 5.1 \times 10^3$$

Dunque nei casi (a) siamo in un regime di bassa energia, mentre nei casi (b) e (c) siamo nelle condizioni di alta energia.

Nel caso (a)

$$\frac{A m}{\hbar^2 \mu^3} \approx 10^{-4} \quad (932)$$

la condizione (928) è soddisfatta e l'approssimazione di Born è affidabile. La sezione d'urto può essere calcolata utilizzando la (926):

$$(a) \sigma_B \approx \frac{576 \pi 10^{-8}}{\mu^2} \approx \frac{1.8 \times 10^{-5}}{\mu^2} \approx 1.8 \times 10^{-21} \text{ cm}^2$$

Nel caso (b)

$$\frac{A m}{\hbar^2 \mu^2 k} \approx \frac{10^2}{51} \approx 2 \quad (933)$$

e quindi non ci si aspetta che l'approssimazione di Born sia accurata.

Nel caso (c) invece

$$\frac{A m}{\hbar^2 \mu^2 k} \approx \frac{10^2}{5.1 \times 10^3} \approx 2 \times 10^{-2} \quad (934)$$

e dunque l'approssimazione di Born dovrebbe essere discreta.

Possiamo inoltre usare l'approssimazione di alta energia (927):

$$(c) \sigma_B \approx \frac{16 \times 23 \pi}{15} \frac{4 \times 10^{-4}}{\mu^2} = \frac{3.1 \times 10^{-2}}{\mu^2} \approx 3.1 \times 10^{-18} \text{ cm}^2$$

Problema 2

Le funzioni d'onda dello stato iniziale e finale sono

$$\psi_0(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\lambda^2}}}{(2\pi\lambda^2)^{\frac{1}{4}}} \quad \psi_1(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\lambda^2}}}{(2\pi\lambda^2)^{\frac{1}{4}}} \frac{x}{\lambda}$$

dove

$$\lambda \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

Pertanto l'ampiezza di transizione al primo ordine in teoria delle perturbazioni è

$$\begin{aligned} A_{fi} &= \frac{-iV_0}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx x}{\lambda} e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2} - \frac{(x-vt)^2}{2\alpha^2}} = \\ &= \frac{-iV_0}{\hbar(2\pi)^{\frac{1}{2}}\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dx x e^{-\frac{x^2}{2} \frac{\alpha^2 + \lambda^2}{\lambda^2 \alpha^2} + \frac{v}{\alpha^2} x - \frac{v^2 t^2}{2\alpha^2}} \end{aligned}$$

Ricordiamo la formula per l'integrale gaussiano

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-\frac{A\xi^2}{2} + j\xi} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{A}} e^{\frac{j^2}{2A}}$$

da cui discende

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \xi e^{-\frac{A\xi^2}{2} + j\xi} = \frac{\sqrt{2\pi} j}{A^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{j^2}{2A}}$$

Applicando questa formula all'integrale in x nella (935), otteniamo

$$A_{fi} = \frac{-iV_0 v}{\hbar \lambda^2 \alpha^2} \frac{\alpha^3 \lambda^3}{(\alpha^2 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} dt t e^{i\omega t} e^{-\frac{v^2 t^2}{2(\alpha^2 + \lambda^2)}}$$

Applicando una seconda volta la stessa formula all'integrale in t arriviamo a

$$\begin{aligned} A_{fi} &= \frac{V_0 v \omega}{\hbar \lambda^2 \alpha^2} \frac{\alpha^3 \lambda^3}{(\alpha^2 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\sqrt{2\pi} (\alpha^2 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{v^3} e^{-\frac{\omega^2 (\alpha^2 + \lambda^2)}{2v^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi} V_0 \omega \alpha \lambda}{\hbar v^2} e^{-\frac{\omega^2 (\alpha^2 + \lambda^2)}{2v^2}} \end{aligned}$$

La probabilità di transizione è dunque

$$P_{fi} = \frac{2\pi V_0^2 \omega^2 \alpha^2 \lambda^2}{\hbar^2 v^4} e^{-\frac{\omega^2 (\alpha^2 + \lambda^2)}{v^2}} = \frac{\pi V_0^2 \omega \alpha^2}{\hbar v^4 m} e^{-\frac{\omega^2 \alpha^2}{v^2}} e^{-\frac{\omega \hbar}{2m v^2}}$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 14/04/2010

Problema 1

Un oscillatore armonico 3-dimensionale isotropo di frequenza ω

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^3 \hbar \omega a_i^\dagger a_i + \frac{3}{2} \hbar \omega \quad (935)$$

è perturbato dal potenziale

$$\hat{V} = \beta (a_1^\dagger a_2^\dagger + a_1 a_2) + \gamma ((a_1^\dagger)^2 + a_1^2) \quad (936)$$

con β e γ reali.

Domanda 1 (Punti 1)

Si calcoli la correzione al secondo ordine in teoria delle perturbazioni dell'energia dello stato fondamentale e lo stato fondamentale al primo ordine.

Domanda 2 (Punti 2)

Si calcolino le correzioni al secondo ordine delle energie del primo livello eccitato, e si determinino i corrispondenti autostati all'ordine zero in teoria delle perturbazioni.

Prova Scritta del 14/04/2010: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Denotiamo con $|n_1, n_2, n_3\rangle$ gli autostati di \hat{H}_0 .

$$\begin{aligned}\hat{V} |0, 0, 0\rangle &= \left(\beta (a_1^\dagger a_2^\dagger + a_1 a_2) + \gamma ((a_1^\dagger)^2 + a_1^2) \right) |0, 0, 0\rangle \\ &= \beta |1, 1, 0\rangle + \gamma \sqrt{2} |2, 0, 0\rangle\end{aligned}\quad (937)$$

Pertanto la correzione del primo ordine all'energia del fondamentale è nulla e quella del secondo ordine è

$$E_0^{(2)} = -\frac{\beta^2 + 2\gamma^2}{2\hbar\omega}\quad (938)$$

Ovvero

$$E_0 = \frac{3\hbar\omega}{2} \left(1 - \frac{\beta^2 + 2\gamma^2}{3\hbar^2\omega^2} + \dots \right)\quad (939)$$

Lo stato fondamentale al primo ordine è

$$\psi_0^{(1)} = |0, 0, 0\rangle - \frac{\beta}{2\hbar\omega} |1, 1, 0\rangle - \frac{\sqrt{2}\gamma}{2\hbar\omega} |2, 0, 0\rangle\quad (940)$$

Domanda 2

Il primo livello eccitato di \hat{H}_0 ha autovalore

$$E_1^{(0)} = \frac{5\hbar\omega}{2}\quad (941)$$

ed ha degenerazione 3. La matrice formata dagli elementi di matrice di \hat{V} sull'autospazio degenere è nulla:

$$\begin{aligned}\hat{V} |1, 0, 0\rangle &= \beta \sqrt{2} |2, 1, 0\rangle + \gamma \sqrt{3!} |3, 0, 0\rangle \\ \hat{V} |0, 1, 0\rangle &= \beta \sqrt{2} |1, 2, 0\rangle + \gamma \sqrt{2} |2, 1, 0\rangle \\ \hat{V} |0, 0, 1\rangle &= \beta |1, 1, 1\rangle + \gamma \sqrt{2} |2, 0, 1\rangle\end{aligned}$$

Pertanto la degenerazione del primo livello eccitato non viene rimossa la primo ordine in teoria delle perturbazioni.

Denotiamo con ψ_i , $i = 1, 2, 3$ i tre autostati degeneri di \hat{H}_0 di energia $E_1^{(0)}$ della base $|n_1, n_2, n_3\rangle$. Sia $V_{\alpha i} = (\psi'_\alpha, \hat{V}, \psi_i)$ l' elemento di matrice di \hat{V} tra ψ_i ed un generico autostato ψ'_α di \hat{H}_0 di energia *diversa* da $E_1^{(0)}$. La matrice rilevante per la correzione all'energia al secondo ordine è²

$$\mathcal{V}_{ij}^{(2)} = -\frac{1}{2\hbar\omega} \sum_{\alpha} V_{\alpha i}^* V_{\alpha j} \quad (942)$$

ovvero

$$\mathcal{V}^{(2)} = -\frac{1}{2\hbar\omega} \begin{pmatrix} 2\beta^2 + 6\gamma^2 & 2\beta\gamma & 0 \\ 2\beta\gamma & 2\beta^2 + 2\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 + 2\gamma^2 \end{pmatrix} \quad (943)$$

I tre autovalori di questa matrice sono le correzioni del secondo ordine al primo livello eccitato

$$\begin{aligned} E_1^{(2)} &= -\frac{\beta^2 + 2\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 + \gamma^2\beta^2}}{\hbar\omega} \\ E_2^{(2)} &= -\frac{\beta^2 + 2\gamma^2 - \sqrt{\gamma^4 + \gamma^2\beta^2}}{\hbar\omega} \\ E_3^{(2)} &= -\frac{\beta^2 + 2\gamma^2}{2\hbar\omega} \end{aligned} \quad (944)$$

I corrispondenti autostati si scrivono

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_1 &= \cos\theta |1, 0, 0\rangle + \sin\theta |0, 1, 0\rangle \\ \tilde{\psi}_2 &= -\sin\theta |1, 0, 0\rangle + \cos\theta |0, 1, 0\rangle \\ \tilde{\psi}_3 &= |0, 0, 1\rangle \end{aligned} \quad (945)$$

dove θ è determinato dall'equazione agli autovalori

$$(\beta^2 + 3\gamma^2 - (\beta^2 + 2\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 + \gamma^2\beta^2})) \cos\theta + \beta\gamma \sin\theta = 0 \quad (946)$$

ovvero

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{\gamma^4 + \gamma^2\beta^2} - \gamma^2}{\beta\gamma} \quad (947)$$

da cui

$$\begin{aligned} \cos^2\theta &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|\gamma|}{\sqrt{\gamma^2 + \beta^2}} \right) \\ \sin^2\theta &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|\gamma|}{\sqrt{\gamma^2 + \beta^2}} \right) \end{aligned}$$

²Vedi per esempio la formula (1.22) pag.7 degli Appunti del corso

In definitiva

$$\cos 2\theta = \frac{|\gamma|}{\sqrt{\gamma^2 + \beta^2}} \quad \tan 2\theta = \frac{\beta}{\gamma} \quad (948)$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Esercitazione guidata del 14/06/2010

Problema 2

Si consideri un sistema composto da 3 sotto-sistemi di spin 1/2 descritto dall'Hamiltoniana

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}' + \hat{H}''$$

dove

$$\hat{H}_0 = \alpha \left(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 + \vec{S}_3 \cdot \vec{S}_1 \right)$$

$$\hat{H}' = \beta \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

$$\hat{H}'' = \gamma_1 S_1^{(z)} + \gamma_2 S_2^{(z)} + \gamma_3 S_3^{(z)}$$

dove \vec{S}_i con $i = 1, 2, 3$ sono gli operatori associati con gli spin dei tre sotto-sistemi.

Domanda 1

Si determini lo spettro, gli autostati e le rispettive degenerazioni di \hat{H}_0 .

Domanda 2

Si determini lo spettro, gli autostati e le rispettive degenerazioni di $\hat{H}_1 = \hat{H}_0 + \hat{H}'$. Quale degenerazione di \hat{H}_0 è rimossa da \hat{H}' ?

Domanda 3

Si consideri ora $\hat{H}_2 = \hat{H}_0 + \hat{H}''$. Si determini lo spettro, gli autostati e le rispettive degenerazioni di \hat{H}_2 considerando \hat{H}'' come una perturbazione al primo ordine. Sotto quale ipotesi questa è una buona approssimazione per lo spettro dell'Hamiltoniana totale \hat{H} ?

Esercitazione guidata del 14/06/2010: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Sia

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^3 \vec{S}_i$$

lo spin totale del sistema. Il sistema composto ha valori di \vec{S}^2 possibili dati dalla regola di composizione dei momenti angolari

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} &= (\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0) \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} = \\ &= \mathcal{H}_{\frac{3}{2}} \oplus \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \oplus \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

dove \mathcal{H}_S è uno spazio di spin S .

Possiamo scrivere

$$\hat{H}_0 = \frac{\alpha}{2} \left(S^2 - \sum_{i=1}^3 S_i^2 \right)$$

Pertanto lo spettro di \hat{H}_0 è

$$E_S^{(0)} = \frac{\hbar^2 \alpha}{2} \left(S(S+1) - \frac{9}{4} \right) = \begin{cases} \frac{3\hbar^2 \alpha}{4} & S = \frac{3}{2} \\ -\frac{3\hbar^2 \alpha}{4} & S = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e ciascuno livello ha degenerazione 4.

Denotiamo con $|\pm\rangle_i$ gli stati di spin $\frac{1}{2}$ dell' i -esima componente del sistema con $i = 1, 2, 3$. Sia $|S, S_z\rangle$ uno stato del sistema composto di momento angolare totale S e proiezione del momento angolare totale S_z . Abbiamo

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2}; \pm \frac{3}{2} \right\rangle &= |\pm\rangle_1 |\pm\rangle_2 |\pm\rangle_3 \\ \left| \frac{3}{2}; \pm \frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|\pm\rangle_1 |\pm\rangle_2 |\mp\rangle_3 + |\pm\rangle_1 |\mp\rangle_2 |\pm\rangle_3 + |\mp\rangle_1 |\pm\rangle_2 |\pm\rangle_3 \right) \end{aligned} \quad (949)$$

Gli stati con $S = \frac{3}{2}$ e $S_z = \pm \frac{3}{2}$ sono ovviamente simmetrici per scambio dei sottosistemi. Pertanto anche quelli con $S = \frac{3}{2}$ e $S_z = \pm 1/2$ devono esserlo, e questo fissa la combinazione (949) dei 3 stati con $S_z = \pm \frac{1}{2}$ che ha $S = \frac{3}{2}$.

I 4 stati ortogonali al sottospazio con $S = \frac{3}{2}$ con $S_z = \pm\frac{1}{2}$ sono

$$\frac{a|\pm\rangle_1|\pm\rangle_2|\mp\rangle_3 + b|\pm\rangle_1|\mp\rangle_2|\pm\rangle_3 - (a+b)|\mp\rangle_1|\pm\rangle_2|\pm\rangle_3}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2 + ab}}$$

dove a e b sono parametri reali arbitrari. Questi stati generano due sottospazi con $S = \frac{1}{2}$. \hat{H}_0 ha un unico livello degenere in corrispondenza di questi autospazi.

Possiamo prendere, per esempio, come basi ortonormali di questi due spazi, gli stati corrispondenti a $(a, b) = (1, 0)$ e $(a, b) = (1, -2)$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{2}; 1\right\rangle &= \frac{|\pm\rangle_1|\pm\rangle_2|\mp\rangle_3 - |\mp\rangle_1|\pm\rangle_2|\pm\rangle_3}{\sqrt{2}} \\ \left|\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{2}; 2\right\rangle &= \frac{|\pm\rangle_1|\pm\rangle_2|\mp\rangle_3 - 2|\pm\rangle_1|\mp\rangle_2|\pm\rangle_3 + |\mp\rangle_1|\pm\rangle_2|\pm\rangle_3}{\sqrt{6}} \end{aligned} \quad (950)$$

Domanda 2

Nella soluzione considereremo una Hamiltoniana più generale di quella considerata nel testo:

$$\hat{H}' = \beta_1 \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \beta_2 \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 + \beta_3 \vec{S}_3 \cdot \vec{S}_1 \quad (951)$$

Il testo proposto considera il caso particolare in cui $\beta_2 = \beta_3 = 0$ e $\beta_1 = \beta$. Tutte le considerazioni che faremo sono valide anche per l'Hamiltoniana più generale.

\hat{H}' commuta con \vec{S} . Pertanto gli autostati di \hat{H}_1 saranno ancora autostati con S e S_z determinato: la degenerazione su S_z non sarà rimossa ma, in generale, la degenerazione dei due livelli con $S = \frac{1}{2}$ lo sarà.

Calcoliamo dapprima gli elementi di matrice della perturbazione \hat{H}' sul multipletto con $S = \frac{3}{2}$. Consideriamo l'operatore

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2} (S_1^{(+)} S_2^{(-)} + S_1^{(-)} S_2^{(+)}) + S_1^{(z)} S_2^{(z)}$$

L'operatore è proporzionale all'identità su tutto il multipletto con $S = \frac{3}{2}$. Basterà pertanto calcolare il valore di questo operatore su uno degli stati del multipletto con $S = \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{3}{2}; \frac{3}{2} | \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 | \frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right\rangle &= \langle + | \langle + | \langle + | \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 | + \rangle | + \rangle | + \rangle = \\ &= \langle + | \langle + | \langle + | S_1^{(z)} \cdot S_2^{(z)} | + \rangle | + \rangle | + \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \end{aligned}$$

Quindi il multipletto con $S = \frac{3}{2}$ riceve una correzione per effetto di \hat{H}' pari a

$$E'_{\frac{3}{2}} = \frac{\hbar^2}{4} (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$$

e

$$E_{\frac{3}{2}}^{(1)} = E_{\frac{3}{2}}^{(0)} + E'_{\frac{3}{2}} = \frac{3\hbar^2\alpha}{4} + \frac{\hbar^2}{4} (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$$

Valutiamo ora l'operatore $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ sul sottospazio con $S = \frac{1}{2}$ e $S_z = +\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \frac{a|+\rangle_1|+\rangle_2|-\rangle_3 + b|+\rangle_1|-\rangle_2|+\rangle_3 - (a+b)|-\rangle_1|+\rangle_2|+\rangle_3}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+ab}} = \\ = \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+ab}} \left(\frac{a}{4}|+\rangle_1|+\rangle_2|-\rangle_3 + \frac{b}{2}|-\rangle_1|+\rangle_2|+\rangle_3 + \right. \\ \left. - \frac{b}{4}|+\rangle_1|-\rangle_2|+\rangle_3 - \frac{a+b}{2}|+\rangle_1|-\rangle_2|+\rangle_3 + \frac{a+b}{4}|-\rangle_1|+\rangle_2|+\rangle_3 \right) = \\ = \frac{\hbar^2}{4\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+ab}} \left(a|+\rangle_1|+\rangle_2|-\rangle_3 - (2a+3b)|+\rangle_1|-\rangle_2|+\rangle_3 + \right. \\ \left. + (a+3b)|-\rangle_1|+\rangle_2|+\rangle_3 \right) \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 \frac{a|+\rangle_1|+\rangle_2|-\rangle_3 + b|+\rangle_1|-\rangle_2|+\rangle_3 - (a+b)|-\rangle_1|+\rangle_2|+\rangle_3}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+ab}} = \\ = \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+ab}} \left(\frac{a}{2}|+\rangle_1|-\rangle_2|+\rangle_3 - \frac{a}{4}|+\rangle_1|+\rangle_2|-\rangle_3 + \right. \\ \left. + \frac{b}{2}|+\rangle_1|+\rangle_2|-\rangle_3 - \frac{b}{4}|+\rangle_1|-\rangle_2|+\rangle_3 - \frac{a+b}{4}|-\rangle_1|+\rangle_2|+\rangle_3 \right) = \\ = \frac{\hbar^2}{4\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+ab}} \left(-(a-2b)|+\rangle_1|+\rangle_2|-\rangle_3 + \right. \\ \left. + (2a-b)|+\rangle_1|-\rangle_2|+\rangle_3 - (a+b)|-\rangle_1|+\rangle_2|+\rangle_3 \right) \end{aligned}$$

e

$$\vec{S}_3 \cdot \vec{S}_1 \frac{a|+\rangle_1|+\rangle_2|-\rangle_3 + b|+\rangle_1|-\rangle_2|+\rangle_3 - (a+b)|-\rangle_1|+\rangle_2|+\rangle_3}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+ab}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+ab}} \left(\frac{a}{2} |-\rangle_1|+\rangle_2|+\rangle_3 - \frac{a}{4} |+\rangle_1|+\rangle_2|-\rangle_3 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{b}{4} |+\rangle_1|-\rangle_2|+\rangle_3 + \frac{a+b}{4} |-\rangle_1|+\rangle_2|+\rangle_3 - \frac{a+b}{2} |+\rangle_1|+\rangle_2|-\rangle_3 \right) = \\
&= \frac{\hbar^2}{4\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+ab}} \left(-(3a+2b) |+\rangle_1|+\rangle_2|-\rangle_3 + \right. \\
&\quad \left. + b |+\rangle_1|-\rangle_2|+\rangle_3 + (3a+b) |-\rangle_1|+\rangle_2|+\rangle_3 \right)
\end{aligned}$$

In definitiva:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{\hbar^2} \hat{H}' (a |+\rangle_1|+\rangle_2|-\rangle_3 + b |+\rangle_1|-\rangle_2|+\rangle_3 - (a+b) |-\rangle_1|+\rangle_2|+\rangle_3) = \\
= (a(\beta_1 - \beta_2 - 3\beta_3) + b(2\beta_2 - 2\beta_3)) |+\rangle_1|+\rangle_2|-\rangle_3 + \\
+ (a(-2\beta_1 + 2\beta_2) + b(-3\beta_1 - \beta_2 + \beta_3)) |+\rangle_1|-\rangle_2|+\rangle_3 + \\
+ (a(\beta_1 - \beta_2 + 3\beta_3) + b(3\beta_1 - \beta_2 + \beta_3)) |-\rangle_1|+\rangle_2|+\rangle_3
\end{aligned}$$

Gli autovettori di \hat{H}' nel sottospazio con $S = \frac{1}{2}$ sono dunque dati dalla condizione

$$(\beta_2 - \beta_3) \frac{b^2}{a^2} + 2(\beta_1 - \beta_3) \frac{b}{a} + \beta_1 - \beta_2 = 0$$

Ovvero

$$\frac{b}{a} = \frac{\beta_3 - \beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - \beta_1\beta_2 - \beta_2\beta_3 - \beta_1\beta_3}}{\beta_2 - \beta_3} \quad (952)$$

cui corrispondono gli autovalori di \hat{H}'

$$\begin{aligned}
E'_{\frac{1}{2};\pm} &= \frac{\hbar^2}{4} \left(-(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \pm 2\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - \beta_1\beta_2 - \beta_2\beta_3 - \beta_1\beta_3} \right) = \\
&= \frac{\hbar^2}{4} \left(-\sum_i \beta_i \pm \sqrt{2} \sqrt{\sum_{i<j} (\beta_i - \beta_j)^2} \right)
\end{aligned}$$

e di \hat{H}_1

$$E_{\frac{1}{2};\pm}^{(1)} = E_{\frac{1}{2}}^{(0)} + (E')_{\frac{1}{2}}^{(\pm)} = -\frac{3\alpha\hbar^2}{4} + \frac{\hbar^2}{4} \left(-\sum_i \beta_i \pm \sqrt{2} \sqrt{\sum_{i<j} (\beta_i - \beta_j)^2} \right)$$

La separazione tra i livelli con $S = \frac{1}{2}$ è:

$$E_{\frac{1}{2};+}^{(1)} - E_{\frac{1}{2};-}^{(1)} = \frac{\hbar^2}{2} \sqrt{(\beta_1 - \beta_2)^2 + (\beta_2 - \beta_3)^2 + (\beta_1 - \beta_3)^2}$$

NOTA: Nel caso particolare considerato nel testo del problema le formule precedenti si semplificano. L'equazione per gli autovettori di \hat{H}' nel sottospazio con $S = \frac{1}{2}$ sono

$$\begin{aligned} \frac{4}{\hbar^2} \hat{H}' (a |+\rangle_1 |+\rangle_2 |-\rangle_3 + b |+\rangle_1 |-\rangle_2 |+\rangle_3 - (a+b) |-\rangle_1 |+\rangle_2 |+\rangle_3) = \\ = \beta a |+\rangle_1 |+\rangle_2 |-\rangle_3 - \beta (2a + 3b) |+\rangle_1 |-\rangle_2 |+\rangle_3 + \\ + \beta (a + 3b) |-\rangle_1 |+\rangle_2 |+\rangle_3 \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{4} \beta a &= E' a \\ \frac{\hbar^2}{4} \beta (2a + 3b) &= -E' b \end{aligned}$$

L'equazione agli autovalori è

$$\left(\frac{\beta \hbar^2}{4} - E' \right) \left(\frac{3\hbar^2 \beta}{4} + E' \right) = 0$$

$$E_{\frac{1}{2};\pm}^{(1)} = E_{\frac{1}{2}}^{(0)} + (E')_{\frac{1}{2}}^{(\pm)} = \begin{cases} -\frac{3\alpha \hbar^2}{4} + \frac{\beta \hbar^2}{4} \\ -\frac{3\alpha \hbar^2}{4} - \frac{3\beta \hbar^2}{4} \end{cases} \quad (953)$$

I corrispondenti autovettori sono

$$\frac{b_+}{a_+} = -\frac{1}{2} \quad a_- = 0 \quad b_- = 1$$

Sei fossimo interessati a calcolare solo gli autovalori e non agli autostati si sarebbe potuto ottenere il risultato più rapidamente notando che l'operatore

$$\hat{H}' = \frac{\beta}{2} (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 - \frac{3\hbar^2 \beta}{4} = \frac{\hbar^2 \beta}{2} S_{12} (S_{12} + 1) - \frac{3\hbar^2 \beta}{4}$$

ha due possibili autovalori: $E'_- = -\frac{3\hbar^2 \beta}{4}$ di degenerazione $2 = 2 \times 1$ e $E'_+ = \frac{\hbar^2 \beta}{4}$, con degenerazione $6 = 2 \times 3$. Sul livello $S = \frac{3}{2}$ che ha degenerazione

4, \hat{H}' deve avere quindi necessariamente valore $E'_+ = \frac{\hbar^2 \beta}{4}$. Rimangono due autovalori $\frac{\hbar^2 \beta}{4}$ e due autovalori $-\frac{3\hbar^2 \beta}{4}$ che dunque sono i valori di \hat{H}' sui due doppietti con $S = \frac{1}{2}$.

Domanda 3

\hat{H}'' commuta con S_z ma non commuta con S_{\pm} . Quindi gli autostati esatti di \hat{H}_2 sono autostati con S_z definito ma non con S definito. Se vale

$$|\hbar\beta_i| \ll |\gamma_i| \ll \hbar\alpha$$

la teoria delle perturbazioni del primo ordine (degenere) allo spettro di \hat{H}_0 è una descrizione appropriata per \hat{H} totale.

Calcoliamo l'azione della perturbazione sugli autostati di \hat{H}_0 . Per quanto riguarda gli stati con $S = \frac{3}{2}$ e $S_z = \pm\frac{1}{2}$ abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{H}'' \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|\pm\rangle_1 |\pm\rangle_2 |\mp\rangle_3 + |\pm\rangle_1 |\mp\rangle_2 |\pm\rangle_3 + |\mp\rangle_1 |\pm\rangle_2 |\pm\rangle_3 \right) = \\ = \pm \frac{\hbar}{2\sqrt{3}} \left((\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3) |\pm\rangle_1 |\pm\rangle_2 |\mp\rangle_3 + \right. \\ \left. + (\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3) |\pm\rangle_1 |\mp\rangle_2 |\pm\rangle_3 + \right. \\ \left. + (-\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) |\mp\rangle_1 |\pm\rangle_2 |\pm\rangle_3 \right) \end{aligned}$$

Pertanto

$$\left\langle \frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2} \left| \hat{H}'' \right| \frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}{3}$$

La correzione al multipletto con $S = \frac{3}{2}$ è quindi

$$\begin{aligned} E''_{S=\frac{3}{2}; S_z=\pm\frac{3}{2}} &= \pm \frac{\hbar}{2} (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \\ E''_{S=\frac{3}{2}; S_z=\pm\frac{1}{2}} &= \pm \frac{\hbar}{2} \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}{3} \end{aligned}$$

L'azione di \hat{H}'' sul sottospazio con $S = \frac{1}{2}$ e $S_z = +\frac{1}{2}$ è

$$\begin{aligned} \hat{H}'' \frac{a |+\rangle_1 |+\rangle_2 |-\rangle_3 + b |+\rangle_1 |-\rangle_2 |+\rangle_3 - (a+b) |-\rangle_1 |+\rangle_2 |+\rangle_3}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2 + ab}} = \\ = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2 + ab}} \left(a(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3) |+\rangle_1 |+\rangle_2 |-\rangle_3 + \right. \\ \left. + b(\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3) |+\rangle_1 |-\rangle_2 |+\rangle_3 + \right. \\ \left. - (a+b)(-\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) |-\rangle_1 |+\rangle_2 |+\rangle_3 \right) \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\hat{H}'' \left| \frac{1}{2}; +\frac{1}{2}; 1 \right\rangle &= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \left((\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3) |+\rangle_1 |+\rangle_2 |-\rangle_3 + \right. \\ &\quad \left. - (-\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) |-\rangle_1 |+\rangle_2 |+\rangle_3 \right) \\ \hat{H}'' \left| \frac{1}{2}; +\frac{1}{2}; 2 \right\rangle &= \frac{\hbar}{2\sqrt{6}} \left((\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3) |+\rangle_1 |+\rangle_2 |-\rangle_3 + \right. \\ &\quad \left. - 2(\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3) |+\rangle_1 |-\rangle_2 |+\rangle_3 + \right. \\ &\quad \left. + (-\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) |-\rangle_1 |+\rangle_2 |+\rangle_3 \right)\end{aligned}$$

Per cui

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{2}; +\frac{1}{2}; 1 \left| \hat{H}'' \right| \frac{1}{2}; +\frac{1}{2}; 1 \right\rangle &= \frac{\hbar}{4} [(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3) + (-\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)] = \frac{\gamma_2 \hbar}{2} \\ \left\langle \frac{1}{2}; +\frac{1}{2}; 1 \left| \hat{H}'' \right| \frac{1}{2}; +\frac{1}{2}; 2 \right\rangle &= \frac{\hbar}{2\sqrt{12}} [(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3) - (-\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)] = \\ &= \frac{\hbar(\gamma_1 - \gamma_3)}{2\sqrt{3}} = \left\langle \frac{1}{2}; +\frac{1}{2}; 2 \left| \hat{H}'' \right| \frac{1}{2}; +\frac{1}{2}; 1 \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}; +\frac{1}{2}; 2 \left| \hat{H}'' \right| \frac{1}{2}; +\frac{1}{2}; 2 \right\rangle &= \frac{\hbar}{12} [(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3) + \\ &\quad + 4(\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3) + (-\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)] = \frac{\hbar(2\gamma_1 - \gamma_2 + 2\gamma_3)}{6}\end{aligned}$$

Gli autovalori della matrice definita da \hat{H}'' sul sottospazio con $S = S_z = \frac{1}{2}$ sono dati dall'equazione

$$(E''_{S=S_z=\frac{1}{2}})^2 - \frac{\hbar^2}{3} \sum_i \gamma_i E''_{S=S_z=\frac{1}{2}} - \hbar^2 \frac{\sum_i \gamma_i^2 - 2 \sum_{i<j} \gamma_i \gamma_j}{12} = 0$$

Ovvero

$$E''_{S=\frac{1}{2}; S_z=\frac{1}{2}; \pm} = \frac{\hbar}{6} \left[\sum_i \gamma_i \pm 2 \sqrt{\sum_i \gamma_i^2 - \sum_{i<j} \gamma_i \gamma_j} \right]$$

Gli autovalori della matrice definita da \hat{H}'' sul sottospazio con $S = \frac{1}{2}$ e $S_z = -\frac{1}{2}$ sono analogamente dati da

$$E''_{S=\frac{1}{2}; S_z=-\frac{1}{2}; \pm} = -\frac{\hbar}{6} \left[\sum_i \gamma_i \pm 2 \sqrt{\sum_i \gamma_i^2 - \sum_{i<j} \gamma_i \gamma_j} \right]$$

NOTA: Consideriamo anche il caso non considerato nel testo del problema, in cui:

$$|\gamma_i| \ll |\hbar\beta_i|$$

In questo caso \hat{H}'' va considerata come una perturbazione di H_1 , i cui livelli con $S_z = \pm\frac{1}{2}$ sono non-degeneri.

La correzione ai livelli $E_{\frac{1}{2};\pm}^{(1)}$ è data dal valore medio della perturbazione su ciascuno livello non degeneri:

$$\begin{aligned} E''_{\pm} &= \langle E_{\frac{1}{2};\pm}^{(1)} | \hat{H}'' | E_{\frac{1}{2};\pm}^{(1)} \rangle = \frac{\hbar}{4(a^2 + b^2 + ab)} \left(a^2(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3) + \right. \\ &\quad \left. + b^2(\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3) + (a+b)^2(-\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \right) = \\ &= \frac{\hbar}{2(a^2 + b^2 + ab)} \left(-ab\gamma_1 + a(a+b)\gamma_2 + b(a+b)\gamma_3 \right) = \\ &= \frac{\hbar}{2\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 1\right)} \left(-\gamma_1 + \left(1 + \frac{a}{b}\right)\gamma_2 + \left(1 + \frac{b}{a}\right)\gamma_3 \right) = \end{aligned}$$

dove $\frac{b}{a}$ è dato dalla (952).

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 18/06/2010

Problema 1

Un atomo d'idrogeno interagisce con un campo elettrico non-uniforme attraverso l'Hamiltoniana

$$\hat{V} = e \left(\sum_{i=1}^3 a_i x^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 b_{ij} x^i x^j \right)$$

dove e è la carica dell'elettrone, a_i e b_{ij} sono reali, e $(x^i) = (x, y, z)$ sono gli operatori coordinate cartesiane.

Domanda 1 (Punti 12)

Si calcoli l'effetto del campo elettrico sul livello energetico del fondamentale ($n = 1$), al primo ordine in teoria delle perturbazioni.

Domanda 2 (Punti 14)

Si supponga che $a_i = 0$ e

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con b reale. Si calcoli l'effetto del campo elettrico (autovalori ed autovettori dell'energia) sul primo livello eccitato, quello con $n = 2$, al primo ordine in teoria delle perturbazioni.

Problema 2

Un oscillatore armonico di frequenza ω si trova per $t < 0$ nello stato fondamentale. Al tempo $t = 0$ all'oscillatore viene impressa una velocità v costante lungo l'asse delle x . La situazione è descritta da un potenziale dipendente dal tempo

$$V(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 & t \leq 0 \\ \frac{1}{2} m \omega^2 (x - vt)^2 & t > 0 \end{cases}$$

Siano $\psi_n(x)$, con $n = 0, 1, 2, \dots$, le autofunzioni dell'energia dell'oscillatore.

Domanda 1 (Punti 14)

Si calcoli all'ordine più basso in v la probabilità che la particella si trovi al tempo $t > 0$ in uno stato $\psi_n(x - vt)$ con $n > 0$. Si valuti numericamente questa probabilità per un oscillatore di massa uguale a quella di un elettrone e con

$$\frac{\hbar\omega}{2} = 13.6 \text{ eV} \quad v = 100 \text{ km/sec}$$

Domanda 2 (Punti 18)

Si calcoli questa probabilità esattamente. (*Suggerimento:* Per $t > 0$, la sostituzione $x' = x - vt$ trasforma l'equazione di Schrödinger con potenziale dipendente dal tempo $V(x, t)$ in un'equazione di Schrödinger con un potenziale indipendente dal tempo.)

Prova Scritta del 18/06/2010: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Il potenziale è la somma di un termine lineare e di un termine quadratico nelle coordinate:

$$\hat{V} = \hat{V}_1 + \hat{V}_2$$

$$\hat{V}_1 \equiv e \sum_{i=1}^3 a_i x^i \quad \hat{V}_2 \equiv e \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 b_{ij} x^i x^j$$

Il termine lineare nelle coordinate ha parità negativa: quindi il suo valor medio sul fondamentale è nullo. Ne consegue che al primo ordine in teoria delle perturbazione \hat{V}_1 non cambia il livello fondamentale.

Il termine quadratico nelle coordinate è una combinazione di un operatore con momento angolare $l = 2$ ed uno con momento angolare $l = 0$:

$$\hat{V}_2 = \frac{e}{2} \sum_{i,j} (b_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \sum_k b_{kk}) x^i x^j + \frac{r^2}{6} e \sum_k b_{kk} \equiv V_{l=2} + V_{l=0}$$

dove $r^2 \equiv \sum_i (x^i)^2$. Il termine con $l = 2$ ha valor medio nullo sullo stato fondamentale, poiché quest'ultimo ha $l = 0$. Pertanto l'unico termine del potenziale che ha un valor medio non nullo sul fondamentale è $V_{l=0}$. In definitiva la correzione al livello fondamentale al primo ordine in teoria delle perturbazioni è

$$\begin{aligned} \Delta E_{1,0,0} &= \langle 1, 0, 0 | V_{l=0} | 1, 0, 0 \rangle = e \left(\sum_k b_{kk} \right) \int_0^\infty dr r^2 R_{10}^2(r) \frac{r^2}{6} = \\ &= \frac{4 a_B^2 e}{6} \left(\sum_k b_{kk} \right) \int_0^\infty d\rho \rho^4 e^{-2\rho} = \\ &= \frac{4 a_B^2 e}{6} \left(\sum_k b_{kk} \right) \frac{3}{4} = \frac{a_B^2 e}{2} \sum_k b_{kk} \end{aligned}$$

Domanda 2

In questo caso il potenziale è

$$V = e b x z$$

Introducendo le combinazioni di momento angolare definito

$$x_{\pm} = \frac{x \pm i y}{\sqrt{2}}$$

il potenziale si riscrive

$$\hat{V} = e b \frac{x_+ z + x_- z}{\sqrt{2}}$$

Quindi \hat{V} ha $l = 2$ e $m = \pm 1$. Ne consegue che la matrice che rappresenta V sul livello $n = 2$ nella base $(|2, 0, 0\rangle, |2, 1, -1\rangle, |2, 1, 0\rangle, |2, 1, 1\rangle)$ ha la forma

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^* & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \beta^* & 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$\alpha = \langle 2, 1, -1 | \hat{V} | 2, 1, 0 \rangle \quad \beta = \langle 2, 1, 0 | \hat{V} | 2, 1, 1 \rangle$$

Dunque³

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{e b}{\sqrt{2}} \langle 2, 1, -1 | x_- z | 2, 1, 0 \rangle = \\ &= \frac{e b}{\sqrt{2}} \langle 2, 1, -1 | \frac{r^2}{\sqrt{2}} e^{-i\phi} \sin \theta \cos \theta | 2, 1, 0 \rangle = \\ &= \frac{e b}{2} \int_0^{\infty} dr r^2 R_{21}^2(r) r^2 2\pi \times \\ &\quad \times \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta (\sin \theta) (\sin \theta \cos \theta) (\cos \theta) = \\ &= \frac{3 e b}{4 \sqrt{2}} \frac{a_B^2}{24} \int_0^{\infty} d\rho \rho^6 e^{-\rho} \int_{-1}^1 dt (1 - t^2) t^2 = \\ &= \frac{3 e b}{4 \sqrt{2}} \frac{a_B^2}{24} \times 6! \times \frac{4}{15} = 3 \sqrt{2} e b a_B^2 \end{aligned}$$

³ $Y_{1,\pm 1} = \mp i \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{\pm i\phi} \sin \theta \quad Y_{10} = i \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$

Il calcolo per β è identico⁴

$$\beta = -\alpha$$

Gli autovalori della matrice del potenziale sugli stati con $l = 1$ del livello $n = 2$ sono dunque

$$-E(E - |\beta|^2) - \alpha(-\alpha^* E) = -E(E^2 - |\beta|^2 - |\alpha|^2) = -E(E^2 - 2|\alpha|^2)$$

Dunque il livello $n = 2$ si splitta in 3 livelli:

$$\begin{aligned} E_{l=1}^{(\pm)} &= E_2^{(0)} \pm 6 e b a_B^2 \\ E_{l=1} &= E_2^{(0)} \\ E_{l=0} &= E_2^{(0)} \end{aligned}$$

dove $E_2^{(0)} = -\frac{1}{4} \frac{m e^4}{\hbar^2}$.

I corrispondenti autovettori sono

$$\begin{aligned} \psi_{l=1}^{\pm} &= \frac{1}{2} (-|2, 1, -1\rangle \mp \sqrt{2} |2, 1, 0\rangle + |2, 1, 1\rangle) \\ \psi_{l=1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|2, 1, -1\rangle + |2, 1, 1\rangle) \\ \psi_{l=0} &= |2, 0, 0\rangle \end{aligned}$$

Problema 2

Domanda 1

Al primo ordine in v possiamo pensare al potenziale per $t > 0$ come una perturbazione $V_1(x, t)$ del potenziale $V_0(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ di un oscillatore armonico:

$$V_1(x, t) = -m\omega^2 v t \hat{x} = -i m \omega^2 v t \lambda (a - a^\dagger)$$

dove

$$\lambda^2 = \frac{\hbar}{2 m \omega} \quad \hat{x} = i \lambda (a - a^\dagger) \quad \hat{p} = \frac{\hbar}{2 \lambda} (a + a^\dagger)$$

⁴Questo risultato è derivabile a priori dall'invarianza di \hat{V} per $y \rightarrow -y$.

Lo stato al tempo t nella rappresentazione dell'interazione al primo ordine in v è

$$\begin{aligned}\psi^{(int)}(t) &= |0\rangle + \frac{m\omega^2 v \lambda}{\hbar} \int_0^t dt' e^{i\omega t'} |1\rangle = \\ &= |0\rangle + \frac{m\omega^2 v \lambda}{\hbar} \frac{(e^{i\omega t} - 1) - i\omega t e^{i\omega t}}{\omega^2} |1\rangle = \\ &= |0\rangle + \frac{m v \lambda}{\hbar} [(e^{i\omega t} - 1) - i\omega t e^{i\omega t}] |1\rangle\end{aligned}$$

Lo stesso stato nella rappresentazione di Schrödinger è

$$\psi(t) = e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}} \psi^{(int)}(t) = e^{-\frac{i\omega t}{2}} \left(|0\rangle + \frac{m v \lambda}{\hbar} [(1 - e^{-i\omega t}) - i\omega t] |1\rangle \right)$$

Lo stato finale è

$$\psi_n(x - vt) = e^{-\frac{ivt\hat{p}}{\hbar}} \psi_n(x) = e^{-\frac{ivt(a+a^\dagger)}{2\lambda}} |n\rangle$$

L'ampiezza di transizione al tempo t , trascurando i termini in v superiori al primo, è

$$\begin{aligned}A_n(t) &= (\psi_n(x - vt), \psi(t)) = \\ &= e^{-\frac{i\omega t}{2}} \langle n | e^{\frac{ivt(a+a^\dagger)}{2\lambda}} \left(|0\rangle + \frac{m v \lambda}{\hbar} [(1 - e^{-i\omega t}) - i\omega t] |1\rangle \right) + O(v^2) = \\ &= e^{-\frac{i\omega t}{2}} \langle n | \left(|0\rangle + \frac{ivt}{2\lambda} |1\rangle + \frac{m v \lambda}{\hbar} [(1 - e^{-i\omega t}) - i\omega t] |1\rangle \right) + O(v^2) = \\ &= e^{-\frac{i\omega t}{2}} \langle n | \left(|0\rangle + \frac{m v \lambda}{\hbar} (1 - e^{-i\omega t}) |1\rangle \right) + O(v^2) = \\ &= e^{-\frac{i\omega t}{2}} (\delta_{n,0} + \delta_{n,1} \frac{m v \lambda}{\hbar} (1 - e^{-i\omega t})) + O(v^2)\end{aligned}$$

Dunque la probabilità di transizione all'ordine più basso in v è

$$P_n(t) = \delta_{n,0} \left(1 - \frac{2 m v^2}{\hbar \omega} \sin^2 \frac{\omega t}{2}\right) + \delta_{n,1} \frac{2 m v^2}{\hbar \omega} \sin^2 \frac{\omega t}{2}$$

Nel caso numerico in esame il valore massimo della probabilità di transizione è⁵

$$P_{max} = \frac{2 m v^2}{\hbar \omega} \approx \frac{2}{\alpha^2} \frac{v^2}{c^2}$$

⁵ $E = 13.6 \text{ eV} \approx \frac{m e^4}{2 \hbar^2} = \frac{m \alpha^2 c^2}{2}$.

dove $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ è al costante di struttura fine. Dunque la probabilità massima di transizione è

$$P_{max} \approx 2 \times 137^2 \times \frac{10^{-6}}{9} \approx 4.2 \times 10^{-3}$$

Domanda 2

L'equazione di Schrödinger per $t > 0$ è

$$i \hbar \partial_t \psi(x, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + V_0(x - vt) \right] \psi(x, t)$$

dove

$$V_0(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

è il potenziale di un oscillatore armonico e la condizione iniziale è

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x) = \langle x|0\rangle$$

Operiamo il cambio di variabili

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ t' &= t \end{aligned}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \partial_t &= \frac{\partial t'}{\partial t} \partial_{t'} + \frac{\partial x'}{\partial t} \partial_{x'} = \partial_{t'} - v \partial_{x'} \\ \partial_x &= \frac{\partial t'}{\partial x} \partial_{t'} + \frac{\partial x'}{\partial x} \partial_{x'} = \partial_{x'} \end{aligned}$$

Pertanto, posto

$$\psi'(x', t') = \psi(x, t)$$

ovvero

$$\psi'(x', t') = \psi(x' + vt', t')$$

otteniamo l'equazione di Schrödinger nella nuove variabili

$$\begin{aligned} i \hbar \partial_{t'} \psi'(x', t') &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_{x'}^2 + V_0(x') + i \hbar v \partial_{x'} \right] \psi'(x', t') = \\ &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} (\partial_{x'} - i \frac{mv}{\hbar})^2 + V_0(x') - \frac{mv^2}{2} \right] \psi'(x', t') \end{aligned}$$

La condizione iniziale per ψ' è

$$\psi'(x', 0) = \psi(x', 0) = \psi_0(x')$$

Al fine di rimuovere dall'equazione ottenuta il termine lineare nella derivata rispetto a x' operiamo l'ulteriore sostituzione

$$\psi'(x', t') = e^{\frac{imvx'}{\hbar}} \tilde{\psi}(x', t')$$

Dunque

$$(\partial_{x'} - i \frac{mv}{\hbar}) \psi'(x', t') = e^{\frac{imvx'}{\hbar}} \partial_{x'} \tilde{\psi}(x', t')$$

e

$$(\partial_{x'} - i \frac{mv}{\hbar})^2 \psi'(x', t') = e^{\frac{imvx'}{\hbar}} \partial_{x'}^2 \tilde{\psi}(x', t')$$

In definitiva, l'equazione di Schrödinger si scrive in termini di $\tilde{\psi}(x', t')$

$$i \hbar \partial_{t'} \tilde{\psi}(x', t') = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_{x'}^2 + V_0(x') - \frac{mv^2}{2} \right] \tilde{\psi}(x', t')$$

e la condizione iniziale per $\tilde{\psi}$ diventa

$$\tilde{\psi}(x', 0) = e^{-\frac{imvx'}{\hbar}} \psi'(x', 0) = e^{-\frac{imvx'}{\hbar}} \psi_0(x')$$

ovvero, riscrivendo questa relazione in termini di vettori nella rappresentazione degli oscillatori

$$|\tilde{\psi}(t' = 0)\rangle = e^{\frac{mv\lambda(a-a^\dagger)}{\hbar}} |0\rangle = e^{-\frac{m^2v^2\lambda^2}{2\hbar^2}} e^{-\frac{mv\lambda a^\dagger}{\hbar}} |0\rangle$$

L'equazione di evoluzione per $\tilde{\psi}$ è *identica* a quella di un oscillatore armonico di frequenza ω , a parte una costante additiva all'energia $-\frac{mv^2}{2}$. L'evoluto dello stato $\tilde{\psi}(t' = 0)$ al tempo t' è quindi

$$|\tilde{\psi}(t')\rangle = e^{i\frac{mv^2t'}{2\hbar}} e^{-\frac{m^2v^2\lambda^2}{2\hbar^2}} e^{-\frac{mv\lambda a^\dagger e^{i\omega t'}}{\hbar}} |0\rangle$$

L'ampiezza di transizione che vogliamo calcolare si scrive in termini delle funzioni d'onda trasformate come segue

$$\begin{aligned} A_n(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n^*(x - vt) \psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi_n^*(x') \psi(x' + vt, t) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi_n^*(x') \psi'(x', t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi_n^*(x') e^{\frac{imvx'}{\hbar}} \tilde{\psi}(x', t) = \\ &= \langle n | e^{\frac{imv\hat{x}}{\hbar}} | \tilde{\psi}(t) \rangle \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
A_n(t) &= e^{i \frac{m v^2 t}{2 \hbar}} e^{-\frac{m^2 v^2 \lambda^2}{2 \hbar^2}} \langle n | e^{\frac{m v \lambda (a^\dagger - a)}{\hbar}} e^{-\frac{m v \lambda a^\dagger e^{i \omega t}}{\hbar}} | 0 \rangle = \\
&= e^{i \frac{m v^2 t}{2 \hbar}} e^{-\frac{m^2 v^2 \lambda^2}{\hbar^2}} \langle n | e^{\frac{m v \lambda a^\dagger}{\hbar}} e^{-\frac{m v \lambda a}{\hbar}} e^{-\frac{m v \lambda a^\dagger e^{i \omega t}}{\hbar}}, | 0 \rangle = \\
&= e^{i \frac{m v^2 t}{2 \hbar}} e^{-\frac{m^2 v^2 \lambda^2}{\hbar^2}} \langle n | e^{\frac{m v \lambda a^\dagger}{\hbar}} e^{-\frac{m v \lambda}{\hbar} (a^\dagger - \frac{m v \lambda}{\hbar}) e^{i \omega t}} | 0 \rangle = \\
&= e^{i \frac{m v^2 t}{2 \hbar}} e^{-\frac{m^2 v^2 \lambda^2}{\hbar^2}} e^{\frac{m^2 v^2 \lambda^2}{\hbar^2} e^{i \omega t}} \langle n | e^{\frac{m v \lambda a^\dagger (1 - e^{i \omega t})}{\hbar}} | 0 \rangle = \\
&= e^{i \frac{m v^2 t}{2 \hbar}} e^{-(1 - e^{i \omega t}) \frac{m^2 v^2 \lambda^2}{\hbar^2}} \langle n | e^{\frac{m v \lambda a^\dagger (1 - e^{i \omega t})}{\hbar}} | 0 \rangle = \\
&= e^{i \frac{m v^2 t}{2 \hbar}} e^{-(1 - e^{i \omega t}) \frac{m^2 v^2 \lambda^2}{\hbar^2}} \frac{m^n v^n \lambda^n}{\sqrt{n!} \hbar^n} (1 - e^{i \omega t})^n
\end{aligned}$$

La probabilità di transizione è quindi

$$\begin{aligned}
P_n(t) &= e^{-\sin^2 \frac{\omega t}{2} \frac{2 m v^2}{\hbar \omega}} \left[\frac{m v \lambda}{\hbar} \right]^{2n} \frac{(2 \sin \frac{\omega t}{2})^{2n}}{n!} = \\
&= e^{-\sin^2 \frac{\omega t}{2} \frac{2 m v^2}{\hbar \omega}} \left[\frac{2 m v^2}{\hbar \omega} \right]^n \frac{(\sin \frac{\omega t}{2})^{2n}}{n!}
\end{aligned}$$

All'ordine più basso in v questa diventa

$$P_n(t) = \delta_{n,0} \left(1 - \frac{2 m v^2}{\hbar \omega} \sin^2 \frac{\omega t}{2} \right) + \delta_{n,1} \frac{2 m v^2}{\hbar \omega} \sin^2 \frac{\omega t}{2} + \dots$$

in accordo col calcolo perturbativo.

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 28/07/2010

Problema 1

Sia $|n, l, m\rangle$ la base degli autostati dell'energia con momento angolare l e proiezione lungo z del momento angolare m , definiti, di un oscillatore armonico 3-dimensionale:

$$\hat{H} = \frac{\vec{p}^2}{2M} + \frac{M\omega\vec{x}^2}{2}$$

Al tempo $t = 0$ il sistema si trova in uno degli stati del primo livello eccitato ($n = 1$) con l ed m definiti. Per $t > 0$ è acceso un campo elettrico uniforme

$$V(t) = -qzE(t) \quad E(t) = E_0 e^{-\alpha t} \quad t > 0$$

con $\alpha > 0$ e q, E_0 reali.

Domanda 1 (Punti 16)

Si calcolino al primo ordine in teoria delle perturbazioni le probabilità di transizione per $t \rightarrow \infty$ tra i diversi stati del livello $n = 1$ e quelli del livello $n = 2$ con l e m definiti.

Domanda 2 (Punti 5)

Si calcolino al primo ordine in teoria delle perturbazioni le probabilità di transizione per $t \rightarrow \infty$ tra i diversi stati del livello $n = 1$ e lo stato fondamentale (con $n = 0$).

Domanda 3 (Punti 5)

Si calcolino al primo ordine in teoria delle perturbazioni le probabilità di transizione per $t \rightarrow \infty$ tra i diversi stati del livello $n = 1$ e quelli del livello $n = 3$ con l e m definiti.

Problema 2

Si consideri una particella non-relativistica di massa m confinata in una scatola cubica di lato L , un cui vertice è l'origine di un sistema di assi cartesiani (x, y, z) paralleli agli spigoli. Il sistema è sottoposto ad una perturbazione

$$V = \lambda \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{2\pi y}{L} \quad x \in [0, L] \quad y \in [0, L]$$

con λ reale.

Domanda 1 (Punti 10)

Si calcoli l'effetto della perturbazione sul primo livello eccitato al primo ordine in teoria delle perturbazioni.

Prova Scritta del 28/07/2010: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Il livello con $n = 1$ ha degenerazione 3: il valore del momento angolare è $l = 1$. Il livello con $n = 2$ ha degenerazione 5: i valori del momento angolare sono $l = 2$ e $l = 0$. $V(t)$ è un operatore con $l = 1$ e $m = 0$: sono pertanto permesse transizioni al primo ordine dal livello $n = 1$ al livello $n = 2$ sia su stati con $l = 0$ che stati con $l = 2$. Gli elementi di matrice non nulli rilevanti nella base $|n, l, m\rangle$ sono quindi:

$$M_m \equiv \langle 2, 2, m | z | 1, 1, m \rangle$$

$$M' \equiv \langle 2, 0, 0 | z | 1, 1, 0 \rangle$$

Scriviamo gli autostati dell'energia nella base degli oscillatori di momento angolare definito:

$$a_0^\dagger = a_z^\dagger \quad a_\pm^\dagger = \mp \frac{a_x^\dagger \pm i a_y^\dagger}{\sqrt{2}}$$

Gli stati di livello $n = 1$ sono

$$|1, 1, \pm 1\rangle = a_\pm^\dagger |0, 0, 0\rangle \quad |1, 1, 0\rangle = a_0^\dagger |0, 0, 0\rangle$$

L'operatore z nella base degli oscillatori si scrive

$$z = \lambda (a_0 + a_0^\dagger) \quad \lambda \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

Quindi

$$\begin{aligned} z |1, 1, \pm 1\rangle &= \lambda a_0^\dagger a_\pm^\dagger |0, 0, 0\rangle \\ z |1, 1, 0\rangle &= \lambda (a_0^\dagger)^2 |0, 0, 0\rangle + \lambda |0, 0, 0\rangle \end{aligned} \quad (954)$$

Gli stati di livello $n = 2$ hanno la forma

$$\begin{aligned} |2, 2, \pm 2\rangle &= \frac{(a_\pm^\dagger)^2}{\sqrt{2}} |0, 0, 0\rangle \\ |2, 2, \pm 1\rangle &= a_0^\dagger a_\pm^\dagger |0, 0, 0\rangle \\ |2, 2, 0\rangle &= (\alpha a_+^\dagger a_-^\dagger + \frac{\beta}{\sqrt{2}} (a_0^\dagger)^2) |0, 0, 0\rangle \\ |2, 0, 0\rangle &= (-\beta a_+^\dagger a_-^\dagger + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} (a_0^\dagger)^2) |0, 0, 0\rangle \end{aligned}$$

D'altra parte lo stato di livello $n = 2$ con $l = 0$ è quello invariante per rotazioni e pertanto si scrive nella base degli oscillatori a_x, a_y, a_z

$$\begin{aligned} |2, 0, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} [(a_x^\dagger)^2 + (a_y^\dagger)^2 + (a_z^\dagger)^2] |0, 0, 0\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} [(a_0^\dagger)^2 - 2a_+^\dagger a_-^\dagger] |0, 0, 0\rangle \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} |2, 2, \pm 2\rangle &= \frac{(a_\pm^\dagger)^2}{\sqrt{2}} |0, 0, 0\rangle \\ |2, 2, \pm 1\rangle &= a_0^\dagger a_\pm^\dagger |0, 0, 0\rangle \\ |2, 2, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} [(a_0^\dagger)^2 + a_+^\dagger a_-^\dagger] |0, 0, 0\rangle \\ |2, 0, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} [(a_0^\dagger)^2 - 2a_+^\dagger a_-^\dagger] |0, 0, 0\rangle \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} M_\pm &= \langle 2, 2, \pm 1 | z | 1, 1, \pm 1 \rangle = \lambda \\ M_0 &= \langle 2, 2, 0 | z | 1, 1, 0 \rangle = \frac{2\lambda}{\sqrt{3}} \\ M' &= \langle 2, 0, 0 | z | 1, 1, 0 \rangle = \frac{2\lambda}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Le ampiezze di transizione al primo ordine per $t \rightarrow +\infty$ sono dunque

$$\begin{aligned} A_{|1,1,\pm 1\rangle \rightarrow |2,2,\pm 1\rangle} &= \frac{i q \lambda E_0}{\hbar} \int_0^\infty dt e^{-\alpha + i\omega t} = \frac{i q \lambda E_0}{\hbar(\alpha - i\omega)} \\ A_{|1,1,0\rangle \rightarrow |2,2,0\rangle} &= -\frac{2 i q \lambda}{\sqrt{3}} \frac{E_0}{\hbar(\alpha - i\omega)} \\ A_{|1,1,0\rangle \rightarrow |2,0,0\rangle} &= -\frac{\sqrt{2} i q \lambda}{\sqrt{3}} \frac{E_0}{\hbar(\alpha - i\omega)} \end{aligned}$$

e le probabilità rispettive

$$P_{|1,1,\pm 1\rangle \rightarrow |2,2,\pm 1\rangle} = \frac{q^2 \lambda^2}{\hbar^2} \frac{E_0^2}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$P_{|1,1,0\rangle \rightarrow |2,2,0\rangle} = \frac{4q^2 \lambda^2}{3\hbar^2} \frac{E_0^2}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$P_{|1,1,0\rangle \rightarrow |2,0,0\rangle} = \frac{2q^2 \lambda^2}{3\hbar^2} \frac{E_0^2}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Domanda 2

L'unica transizione possibile al primo ordine è quella relativa all'elemento di matrice

$$M'' = \langle 0, 0, 0 | z | 2, 1, 0 \rangle = \lambda$$

dove abbiamo usato la seconda delle (954). La probabilità di transizione è dunque

$$P_{|1,1,0\rangle \rightarrow |0,0,0\rangle} = \frac{q^2 \lambda^2}{\hbar^2} \frac{E_0^2}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Domanda 3

Poiché l'interazione è lineare negli operatori di creazione e distruzione l'ampiezza di transizione in uno stato con $n = 3$ al primo ordine in teoria delle perturbazioni è nulla.

Problema 2

Domanda 1

Le autofunzioni del sistema imperturbato sono

$$\psi_{n_1, n_2, n_3}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin \frac{n_1 \pi x}{L} \sin \frac{n_2 \pi y}{L} \sin \frac{n_3 \pi z}{L} \equiv$$

$$\equiv \psi_{n_1}(x) \psi_{n_2}(y) \psi_{n_3}(z)$$

dove $n_i \geq 1$, con $i, 1, 2, 3$, cui corrispondono i livelli

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$$

Il primo livello eccitato ha degenerazione 3 e corrisponde agli stati

$$\psi_{2,1,1}, \quad \psi_{1,2,1}, \quad \psi_{1,1,2}$$

Per il calcolo degli elementi di matrice di V su questo livello è utile calcolare preliminarmente gli integrali

$$\begin{aligned}(\psi_1, \sin \frac{2\pi x}{L} \psi_1) &= \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin^2 \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} = 0 \\(\psi_2, \sin \frac{2\pi x}{L} \psi_2) &= \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin^2 \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} = 0 \\(\psi_1, \sin \frac{2\pi x}{L} \psi_2) &= \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin \frac{\pi x}{L} \sin^2 \frac{2\pi x}{L} = \frac{32}{15\pi}\end{aligned}$$

La matrice della perturbazione V sul primo livello eccitato è pertanto

$$V = \lambda \begin{pmatrix} 0 & \frac{32^2}{15^2 \pi^2} & 0 \\ \frac{32^2}{15^2 \pi^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori dell'energia al primo ordine sono quindi

$$E_{\pm}^{(1)} = E_{2,1,1} \pm \frac{32^2 \lambda}{15^2 \pi^2} \quad E_3^{(1)} = E_{2,1,1}$$

ed i corrispondenti autostati sono

$$\begin{aligned}\psi_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{2,1,1} \pm \psi_{1,1,2}) \\ \psi_3 &= \psi_{1,1,2}\end{aligned}$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 17/09/2010

Problema 1

Siano x_i e L_j , con $i, j = 1, 2, 3$, gli operatori coordinata e momento angolare orbitale di una particella in 3-dimensioni.

Domanda 1 (Punti 8)

Si calcoli il commutatore

$$[\vec{L}^2, x_i]$$

in termini di x_i e L_j . Si utilizzi questo risultato per mostrare che

$$\langle \alpha', l', m' | x_i | \alpha, 0, 0 \rangle = 0 \quad \text{se } l' \neq 1$$

dove $|\alpha, l, m\rangle$ sono stati con valori definiti l e m di \vec{L}^2 e L_z e altri numeri quantici α .

Problema 2

L'evoluzione di un sistema a tre stati $|n\rangle$, $n = 1, 2, 3$ è governata da un'Hamiltoniana dipendente dal tempo t che, nella base data, si scrive

$$H = \frac{1}{1 + \alpha^2 t^2} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

con $\alpha > 0$, a e b reali. Al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato $\psi(t = 0) = |1\rangle$.

Domanda 1 (Punti 12)

Si consideri H una perturbazione e si calcolino fino al *secondo* ordine (incluso) in teoria delle perturbazioni le probabilità di transizione negli stati $|2\rangle$ e $|3\rangle$ per $t \rightarrow +\infty$

Domanda 2 (Punti 14)

Si calcolino le stesse probabilità esattamente.

Prova Scritta del 17/09/2010: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

$$\begin{aligned} [\vec{L}^2, x_i] &= L_j [L_j, x_i] + [L_j, x_i] L_j = i \hbar \epsilon_{jik} (L_j x_k + x_k L_j) = \\ &= i \hbar \epsilon_{jik} (i \hbar \epsilon_{jkl} x_l + 2 x_k L_j) = 2 \hbar^2 x_i + 2 i \hbar \epsilon_{jik} x_k L_j \end{aligned}$$

Quindi

$$\vec{L}^2 x_i |\alpha, 0, 0\rangle = (2 \hbar^2 x_i + 2 i \hbar \epsilon_{jik} x_k L_j + x_i \vec{L}^2) |\alpha, 0, 0\rangle$$

Ma

$$L_j |\alpha, 0, 0\rangle = 0 \quad \vec{L}^2 |\alpha, 0, 0\rangle = 0$$

Pertanto

$$\vec{L}^2 x_i |\alpha, 0, 0\rangle = 2 \hbar^2 (x_i |\alpha, 0, 0\rangle)$$

Pertanto lo stato

$$x_i |\alpha, 0, 0\rangle$$

è autostato di \vec{L}^2 con momento angolare $l = 1$. È pertanto ortogonale a stati con $l' \neq 1$.

Problema 2

Domanda 1

L'ampiezza di transizione al tempo $t \rightarrow \infty$ nello stato $|2\rangle$ al primo ordine in teoria delle perturbazioni è

$$A_2^{(1)} = -i \frac{a}{\hbar} \int_0^\infty \frac{dt'}{1 + \alpha^2 (t')^2} = -i \frac{a \pi}{2 \hbar \alpha}$$

L'ampiezza nello stato $|3\rangle$ è evidentemente nulla al primo ordine.

Calcoliamo il contributo del secondo ordine alle ampiezze. Il contributo del secondo ordine a A_2 è nullo. Dunque fino al secondo ordine

$$A_2 = A_2^{(1)} + \dots = -i \frac{a \pi}{2 \hbar \alpha} \quad P_2 = \frac{a^2 \pi^2}{4 \hbar^2 \alpha^2} + \dots$$

Quello a A_3 è invece

$$\begin{aligned} A_3^{(2)} &= -\frac{ab}{\hbar^2} \int_0^\infty \frac{dt'}{1 + \alpha^2 (t')^2} \int_0^{t'} \frac{dt''}{1 + \alpha^2 (t'')^2} = -\frac{ab}{\hbar^2} \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty \frac{dt'}{1 + \alpha^2 (t')^2} \right]^2 = \\ &= -\frac{ab}{2\hbar^2 \alpha^2} \left[\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} \right]^2 = -\frac{ab \pi^2}{8\hbar^2 \alpha^2} \end{aligned}$$

e, al secondo ordine,

$$P_3 = \frac{a^2 b^2 \pi^4}{64 \hbar^4 \alpha^4} + \dots$$

Domanda 2

Calcoliamo autovettori ed autovalori della matrice H . L'equazione agli autovalori

$$\det \begin{pmatrix} -E & a & 0 \\ a & -E & b \\ 0 & b & -E \end{pmatrix} = -E (E^2 - (a^2 + b^2)) = 0$$

ha soluzioni

$$E_0 = 0 \quad E_\pm = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$$

Gli autovettori corrispondenti sono

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (b, 0, -a) \quad v_\pm = \frac{1}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}} (a, E_\pm, b)$$

sia $\psi(t)$ lo stato al tempo t . Decomponiamolo nella base $\{v, v_\pm\}$

$$\psi(t) = c_0(t) v_0 + c_+(t) v_+ + c_-(t) v_-$$

L'equazione di evoluzione di Schrödinger diventa

$$\begin{aligned} i \hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} &= i \hbar \dot{c}_0(t) v_0 + i \hbar \dot{c}_+(t) v_+ + i \hbar \dot{c}_-(t) v_- = \\ &= \frac{1}{1 + \alpha^2 t^2} (E_+ c_+(t) v_+ + E_- c_-(t) v_-) \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} i \hbar \dot{c}_0(t) &= 0 \\ i \hbar \dot{c}_\pm(t) &= \frac{1}{1 + \alpha^2 t^2} E_\pm c_\pm(t) \end{aligned}$$

Le soluzioni, espresse in funzione dei coefficienti c_0, c_{\pm} al tempo $t = 0$ sono

$$c_0(t) = c_0(0) \quad c_{\pm}(t) = c_{\pm}(0) e^{-i \frac{E_{\pm}}{\hbar \alpha} \arctan \alpha t}$$

Nel limite $t \rightarrow \infty$ otteniamo

$$c_0(+\infty) = c_0(0) \quad c_{\pm}(+\infty) = c_{\pm}(0) e^{-i \frac{\pi E_{\pm}}{2 \hbar \alpha}}$$

Calcoliamo $c_0(0), c_{\pm}(0)$.

$$\begin{aligned} |1\rangle &= (1, 0, 0) = \langle v_0|1\rangle v_0 + \langle v_+|1\rangle v_+ + \langle v_-|1\rangle v_- = \\ &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} v_0 + \frac{a}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}} v_+ + \frac{a}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}} v_- \end{aligned}$$

In definitiva

$$c_0(+\infty) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad c_{\pm}(+\infty) = \frac{a}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}} e^{-i \frac{\pi E_{\pm}}{2 \hbar \alpha}}$$

Lo stato a $t \rightarrow +\infty$ è pertanto

$$\psi(+\infty) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} v_0 + \frac{a e^{-i \frac{\pi E_+}{2 \hbar \alpha}}}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}} v_+ + \frac{a e^{-i \frac{\pi E_-}{2 \hbar \alpha}}}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}} v_-$$

Le ampiezze di transizione negli stati $|n\rangle$ per $n = 1, 2, 3$ sono dunque

$$\begin{aligned} A_1 &= \langle 1|\psi(+\infty)\rangle = \frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{a^2 e^{-i \frac{\pi E_+}{2 \hbar \alpha}}}{2(a^2 + b^2)} + \frac{a^2 e^{-i \frac{\pi E_-}{2 \hbar \alpha}}}{2(a^2 + b^2)} = \\ &= \frac{b^2 + a^2 \cos \frac{\pi \sqrt{a^2 + b^2}}{2 \hbar \alpha}}{a^2 + b^2} \\ A_2 &= \langle 2|\psi(+\infty)\rangle = \frac{a e^{-i \frac{\pi E_+}{2 \hbar \alpha}}}{2 \sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{a e^{-i \frac{\pi E_-}{2 \hbar \alpha}}}{2 \sqrt{a^2 + b^2}} = \\ &= -i \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \frac{\pi \sqrt{a^2 + b^2}}{2 \hbar \alpha} \\ A_3 &= \langle 3|\psi(+\infty)\rangle = -\frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{ab e^{-i \frac{\pi E_+}{2 \hbar \alpha}}}{2(a^2 + b^2)} + \frac{ab e^{-i \frac{\pi E_-}{2 \hbar \alpha}}}{2(a^2 + b^2)} = \\ &= \frac{-ab + ab \cos \frac{\pi \sqrt{a^2 + b^2}}{2 \hbar \alpha}}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 14/10/2010

Problema 1

Una particella di massa m e spin $1/2$ diffonde nel potenziale

$$V = \frac{g}{m} [e^{-\mu|\vec{x}|} \vec{p} \cdot \vec{S} + \vec{p} \cdot \vec{S} e^{-\mu|\vec{x}|}]$$

dove \vec{x} , \vec{p} , \vec{S} sono, rispettivamente, gli operatori posizione, impulso e spin della particella e $\mu > 0$ è un numero reale e positivo.

Domanda 1 (Punti 7)

Si calcoli, in approssimazione di Born, l'ampiezza di diffusione differenziale per uno stato iniziale con spin definito lungo la direzione di moto, senza misurazione dello stato di spin finale.

Domanda 2 (Punti 9)

Si calcolino le due sezioni d'urto differenziali di Born per processi con stato iniziale con spin uguale a $+\hbar/2$ lungo la direzione di moto e stati finali con spin $\pm\hbar/2$ lungo la direzione di moto.

Problema 2

Due oscillatori armonici di frequenze ω_1 ed ω_2 sono accoppiati dalla perturbazione dipendente dal tempo

$$V(t) = \hbar\omega(t) (a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)$$

dove $a_{1,2}$ ($a_{1,2}^\dagger$) sono gli operatori di discesa (salita) dei due oscillatori e

$$\omega(t) = \omega e^{-\lambda t} \quad \lambda > 0 \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|1, 0\rangle$, dove $|n_1, n_2\rangle$ sono gli autostati del sistema imperturbato di energia $E_{n_1, n_2} = \hbar\omega_1(n_1 + 1/2) + \hbar\omega_2(n_2 + 1/2)$.

Domanda 1 (Punti 6)

Si calcoli all'ordine più basso in ω la probabilità che al tempo $t \rightarrow \infty$ il sistema sia transitato nello stato $|n_1, n_2\rangle$.

Domanda 2 (Punti 10)

Nel caso $\omega_1 = \omega_2$, si calcoli esattamente la probabilità che al tempo t (*finito*), il sistema sia transitato nello stato $|0, 1\rangle$.

Prova Scritta del 14/10/2010: Soluzione

Problema 1

Le ampiezze di Born per stati iniziali e finali di spin α e β sono

$$\begin{aligned}
 f_{\beta\alpha}(\vec{k}, \vec{k}') &= -\frac{g}{2\pi\hbar^2} \frac{\hbar^2}{2} (\vec{k}' \cdot \vec{\sigma}_{\beta\alpha} + \vec{\sigma}_{\beta\alpha} \cdot \vec{k}) \int d^3\vec{x} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x} - \mu|\vec{x}|} = \\
 &= -\frac{g}{4\pi} (\vec{k}' + \vec{k}) \cdot \vec{\sigma}_{\beta\alpha} 2\pi \int_0^\infty dr r^2 e^{-\mu r} \int_{-1}^1 e^{iqr} = \\
 &= -\frac{g}{2qi} (\vec{k}' + \vec{k}) \cdot \vec{\sigma}_{\beta\alpha} \int_0^\infty dr r (e^{-(\mu-iq)r} - e^{-(\mu+iq)r}) = \\
 &= -\frac{g}{2qi} (\vec{k}' + \vec{k}) \cdot \vec{\sigma}_{\beta\alpha} \left[\frac{1}{(\mu-iq)^2} - \frac{1}{(\mu+iq)^2} \right] = \\
 &= -(\vec{k}' + \vec{k}) \cdot \vec{\sigma}_{\beta\alpha} \frac{2\mu g}{(\mu^2 + q^2)^2}
 \end{aligned}$$

dove \vec{k}, \vec{k}' sono i vettori d'onda iniziali e finali,

$$\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$$

e $\vec{\sigma}$ sono le matrici di Pauli.

La sezione d'urto differenziale, sommando sugli stati finali, per uno stato di spin iniziale α , è

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma_\alpha}{d\Omega} &= [(\vec{k}' + \vec{k}) \cdot \vec{\sigma}]_{\alpha\alpha}^2 \frac{4\mu^2 g^2}{(\mu^2 + q^2)^4} = \\
 &= (\vec{k}' + \vec{k})^2 \frac{4m^2 \mu^2 g^2}{(\mu^2 + q^2)^4} = \\
 &= 8\mu^2 g^2 k^2 \frac{1 + \cos\theta}{(\mu^2 + q^2)^4} = \\
 &= \frac{\mu^2 g^2}{16k^6} \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{(\frac{\mu^2}{4k^2} + \sin^2 \frac{\theta}{2})^4}
 \end{aligned}$$

dove θ è l'angolo di diffusione

$$\vec{k} \cdot \vec{k}' = k^2 \cos\theta$$

e non dipende, quindi, dallo stato di spin iniziale.

Domanda 2

Prendiamo l'asse delle z lungo il momento \vec{k} dello stato iniziale. Quindi lo stato di spin iniziale $|\alpha\rangle$ è

$$|\alpha\rangle = \left| +\frac{1}{2} \right\rangle$$

Scegliamo l'asse delle x in modo che la diffusione avvenga nel piano x, z :

$$\vec{k}' = k (\sin \theta, 0, \cos \theta)$$

Quindi

$$\vec{k} + \vec{k}' = k (\sin \theta, 0, \cos \theta + 1)$$

e

$$\begin{aligned} (\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{\sigma} &= 2k \cos \frac{\theta}{2} (\sin \frac{\theta}{2} \sigma_x + \cos \frac{\theta}{2} \sigma_z) = \\ &= 2k \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Gli stati di spin finale sono invece dati da

$$\frac{\vec{S} \cdot \vec{k}'}{k} |\beta_{\pm}\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\beta_{\pm}\rangle$$

ovvero

$$(\sin \theta \sigma_x + \cos \theta \sigma_z) |\beta_{\pm}\rangle = \pm |\beta_{\pm}\rangle$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} |\beta_{\pm}\rangle = |\beta_{\pm}\rangle$$

da cui

$$\begin{aligned} |\beta_{+}\rangle &= \cos \frac{\theta}{2} \left| +\frac{1}{2} \right\rangle + \sin \frac{\theta}{2} \left| -\frac{1}{2} \right\rangle \\ |\beta_{-}\rangle &= \sin \frac{\theta}{2} \left| +\frac{1}{2} \right\rangle - \cos \frac{\theta}{2} \left| -\frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

Le ampiezze di diffusione sono pertanto

$$\begin{aligned}
 f_+ &= \cos \frac{\theta}{2} f_{11} + \sin \frac{\theta}{2} f_{21} = \\
 &= -2k \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) \frac{2\mu g}{(\mu^2 + q^2)^2} = \\
 &= -2k \cos \frac{\theta}{2} \frac{2\mu g}{(\mu^2 + q^2)^2} = \\
 f_- &= \sin \frac{\theta}{2} f_{11} - \cos \frac{\theta}{2} f_{21} = \\
 &= -2k \cos \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) \frac{2\mu g}{(\mu^2 + q^2)^2} = 0
 \end{aligned}$$

e le sezioni d'urto differenziali

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma_+}{d\Omega} &= 16\mu^2 g^2 k^2 \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{(\mu^2 + q^2)^2} = \frac{\mu^2 g^2}{16k^6} \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\mu^2}{4k^2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^4} \\
 \frac{d\sigma_-}{d\Omega} &= 0
 \end{aligned}$$

Problema 2

Domanda 1

L'operatore d'interazione ha elementi di matrice nulli tra stati con $n_1 + n_2$ diverso. Pertanto l'unico stato diverso dallo stato iniziale in cui sono possibili transizioni è $|0, 1\rangle$:

$$\langle 0, 1 | V_{int}(t) | 1, 0 \rangle = \hbar \omega e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} e^{-\lambda t}$$

L'ampiezza di transizione in questo stato al primo ordine in ω è quindi

$$A(+\infty) = -\frac{i}{\omega} \int_0^\infty dt' e^{i(\omega_2 - \omega_1)t'} e^{-\lambda t'} = -\frac{\omega}{\lambda + i(\omega_1 - \omega_2)}$$

La corrispondente probabilità è

$$P(+\infty) = \frac{\omega^2}{\lambda^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2}$$

Domanda 2

Un modo di ottenere il risultato è osservare che il termine $(2n + 1)$ -esimo della teoria delle perturbazioni è

$$\begin{aligned} A^{(2n+1)}(t) &= (-i)^{2n+1} \omega^{2n+1} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{2n}} dt_{2n+1} e^{-\lambda(t_1+\cdots+t_{2n+1})} = \\ &= \frac{(-i)^{2n+1}}{(2n+1)!} \omega^{2n+1} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \cdots \int_0^t dt_{2n+1} e^{-\lambda(t_1+\cdots+t_{2n+1})} = \\ &= \frac{(-i)^{2n+1}}{(2n+1)!} \omega^{2n+1} \left[\int_0^t dt_1 e^{-\lambda t_1} \right]^{2n+1} = \\ &= \frac{-i(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{\omega^{2n+1}}{\lambda^{2n+1}} (1 - e^{-\lambda t})^{2n+1} \end{aligned}$$

L'ampiezza esatta è pertanto

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{(2n+1)}(t) = -i \sin \left[\frac{\omega}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \right]$$

e la probabilità

$$P(t) = \sin^2 \left[\frac{\omega}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \right]$$

Un metodo alternativo consiste nel risolvere l'equazione di Schrödinger nella rappresentazione dell'interazione per il sotto-sistema degenere formato dal sottospazio di H_0 di livello 1:

$$\begin{aligned} i \hbar \dot{A}_1(t) &= \hbar \omega(t) A_2(t) \\ i \hbar \dot{A}_2(t) &= \hbar \omega(t) A_1(t) \end{aligned}$$

dove

$$\psi_{int}(t) = A_1(t)|1, 0\rangle + A_2(t)|0, 1\rangle$$

La soluzione di questo sistema⁶ con la condizione iniziale

$$A_1(t) = 1 \quad A_2(t) = 0$$

è

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \frac{1}{2} \left[e^{i \frac{\omega}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})} + e^{-i \frac{\omega}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})} \right] \\ A_2(t) &= \frac{1}{2} \left[e^{i \frac{\omega}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})} - e^{-i \frac{\omega}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})} \right] \end{aligned}$$

in accordo col risultato ottenuto risommando la serie perturbativa.

⁶Un sistema analogo è stato risolto in uno degli esercizi delle passate sessioni d'esame.

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 1/2/2011

Problema 1

Gli stati di una particella di spin $1/2$ sono $|\alpha, S_z\rangle$ dove $S_z = \pm\frac{1}{2}$ è la proiezione dello spin lungo l'asse z , ed $\alpha = 1, 2$ è un numero quantico orbitale che assume due valori. L'Hamiltoniana che descrive la particella si scrive

$$H_0 = h \otimes \mathbb{I}_2 + b \otimes \sigma_3$$

dove h e b sono delle matrici 2×2 che agiscono sul numero quantico α

$$h = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$$

mentre la matrice identità \mathbb{I}_2 e la matrice di Pauli σ_3 agiscono sugli indici di spin.

Domanda 1 (Punti 6)

Si determinino gli stati stazionari e i livelli di energia del sistema.

Domanda 2 (Punti 12)

Si supponga che al tempo $t = 0$ la particella si trovi nello stato

$$\psi(0) = |1, +\frac{1}{2}\rangle$$

Qual'è la probabilità che al tempo $t > 0$ la particella abbia $\alpha = 2$? Si trovino le espressioni limite per questa probabilità nei limiti: a) $b \gg \epsilon$; b) $b \ll \epsilon$.

Domanda 3 (Punti 4)

Si risponda alla stessa domanda in 2, nel caso in cui lo stato iniziale sia una mistura di stati $|1, +\frac{1}{2}\rangle$ e $|1, -\frac{1}{2}\rangle$, con probabilità rispettive di $1/3$ e $2/3$.

Problema 2

Una particella di spin $3/2$ e di momento magnetico μ è immersa in un campo magnetico uniforme costante $\vec{B} = (0, 0, B)$, diretto lungo l'asse delle z , la cui interazione con la particella è descritta dall'Hamiltoniana

$$H_0 = -\frac{\mu B}{\hbar} S_z$$

dove S_z è lo spin della particella. Al tempo $t = 0$ viene acceso uno campo magnetico uniforme

$$\vec{b} = (b(t), 0, 0) \quad b(t) = b_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Si supponga che al tempo $t = 0$ la particella sia nello stato $S_z = -\frac{3}{2} \hbar$.

Domanda 1 (Punti 10)

Si calcoli, al secondo ordine in teoria delle perturbazioni, la probabilità di transizione al tempo $t \rightarrow +\infty$ in uno stato con $S_z \neq -\frac{3}{2} \hbar$

Prova Scritta del 1/2/2011: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

L'hamiltoniana del sistema nella base $\{|1, +\rangle, |2, +\rangle, |1, -\rangle, |2, -\rangle\}$ è

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & \epsilon & 0 & 0 \\ \epsilon & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & \epsilon \\ 0 & 0 & \epsilon & b \end{pmatrix}$$

Poiché si tratta di una matrice a blocchi il problema degli autovettori ed autovalori si riduce a quello delle sottomatrici 2×2 :

$$\begin{aligned} E_+^{(1)} &= \sqrt{b^2 + \epsilon^2} & E_+^{(2)} &= -\sqrt{b^2 + \epsilon^2} \\ E_-^{(1)} &= -\sqrt{b^2 + \epsilon^2} & E_-^{(2)} &= \sqrt{b^2 + \epsilon^2} \end{aligned}$$

I corrispondenti autovettori sono

$$\begin{aligned} \psi_+^{(1)} &= \cos \theta |1, +\rangle + \sin \theta |2, +\rangle & \psi_+^{(2)} &= -\sin \theta |1, +\rangle + \cos \theta |2, +\rangle \\ \psi_-^{(1)} &= \cos \theta |1, -\rangle - \sin \theta |2, -\rangle & \psi_-^{(2)} &= \sin \theta |1, -\rangle + \cos \theta |2, -\rangle \end{aligned}$$

dove

$$\tan \theta = \frac{\epsilon}{b + \sqrt{b^2 + \epsilon^2}}$$

Domanda 2

Decomponiamo lo stato $\psi(0)$ nella base degli autovettori di H_0 :

$$\psi(0) = |1, +\rangle = (\psi_+^{(1)}, \psi(0)) \psi_+^{(1)} + (\psi_+^{(2)}, \psi(0)) \psi_+^{(2)} = \cos \theta \psi_+^{(1)} - \sin \theta \psi_+^{(2)}$$

Pertanto al tempo t lo stato è

$$\psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} t \sqrt{b^2 + \epsilon^2}} \cos \theta \psi_+^{(1)} - e^{\frac{i}{\hbar} t \sqrt{b^2 + \epsilon^2}} \sin \theta \psi_+^{(2)}$$

Le ampiezze di transizione in stati con $\alpha = 2$ sono

$$\begin{aligned} A_+(t) &= (|2, +\rangle, \psi(t)) = e^{-\frac{i}{\hbar} t \sqrt{b^2 + \epsilon^2}} \cos \theta \sin \theta - e^{\frac{i}{\hbar} t \sqrt{b^2 + \epsilon^2}} \sin \theta \cos \theta \\ &= -2i \sin\left(\frac{t}{\hbar} \sqrt{b^2 + \epsilon^2}\right) \cos \theta \sin \theta \\ A_-(t) &= (|2, -\rangle, \psi(t)) = 0 \end{aligned}$$

Pertanto la probabilità di transizione in uno stato con $\alpha = 2$ è

$$P(t) = |A_+(t)|^2 + |A_-(t)|^2 = 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sin^2\left(\frac{t}{\hbar} \sqrt{b^2 + \epsilon^2}\right)$$

Poiché

$$\begin{aligned} 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta &= 4 \frac{\epsilon^2 (b + \sqrt{\epsilon^2 + b^2})^2}{[\epsilon^2 + (b + \sqrt{b^2 + \epsilon^2})^2]^2} = \\ &= \frac{\epsilon^2 (b + \sqrt{\epsilon^2 + b^2})^2}{[b^2 + \epsilon^2 + b \sqrt{\epsilon^2 + b^2}]^2} = \frac{\epsilon^2 (b + \sqrt{\epsilon^2 + b^2})^2}{(b^2 + \epsilon^2) [\sqrt{b^2 + \epsilon^2} + b]^2} = \\ &= \frac{\epsilon^2}{(b^2 + \epsilon^2)} \end{aligned}$$

otteniamo in definitiva

$$P(t) = \frac{\epsilon^2}{(b^2 + \epsilon^2)} \sin^2\left(\frac{t}{\hbar} \sqrt{b^2 + \epsilon^2}\right)$$

Nei limiti richiesti questa espressione diventa

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{\epsilon^2}{b^2} \sin^2\left(\frac{t}{\hbar} |b|\right) & b \gg \epsilon \\ P(t) &= \sin^2\left(\frac{t}{\hbar} |\epsilon|\right) & b \ll \epsilon \end{aligned}$$

Domanda 3

Nel caso in cui lo stato iniziale è lo stato $|1, -\rangle$ il calcolo è identico a quello con spin $+\frac{1}{2}$, con la sostituzione di $\theta \rightarrow -\theta$. La probabilità di transizione dallo stato $|1, -\rangle$ in stati con $\alpha = 2$ è quindi $P(t)$, come nella domanda precedente.

Se lo stato iniziale è una miscela di stati $|1, \pm\rangle$ con probabilità relative p_{\pm} , la probabilità di transizione richiesta è la media, con pesi p_{\pm} , dei risultati per stati iniziali puri. Poiché queste probabilità non dipendono dallo stato di spin, la probabilità di transizione per una miscela è identica a quella per uno stato iniziale puro.

Problema 2

Domanda 1

La perturbazione è

$$V(t) = -\frac{\mu}{\hbar} b(t) S_x = -\frac{b(t)\mu}{2\hbar} (S_+ + S_-)$$

Dunque

$$\begin{aligned}
V(t)|-\frac{3}{2}\rangle &= -\frac{b(t)\mu}{2}\sqrt{3}|-\frac{1}{2}\rangle \\
V(t)|-\frac{1}{2}\rangle &= -\frac{b(t)\mu}{2}(\sqrt{3}|-\frac{3}{2}\rangle + 2|\frac{1}{2}\rangle) \\
V(t)|\frac{1}{2}\rangle &= -\frac{b(t)\mu}{2}(\sqrt{3}|\frac{3}{2}\rangle + 2|-\frac{1}{2}\rangle) \\
V(t)|\frac{3}{2}\rangle &= -\frac{b(t)\mu}{2}\sqrt{3}|\frac{1}{2}\rangle
\end{aligned}$$

La matrice che rappresenta $V(t)$ nella base $\{|-\frac{3}{2}\rangle, |-\frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}\rangle, |\frac{3}{2}\rangle\}$ è pertanto

$$V(t) = -b(t)\mu \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi, se lo stato iniziale è $|-\frac{3}{2}\rangle$, al primo ordine in teoria delle perturbazioni è possibile soltanto la transizione nello stato $|-\frac{1}{2}\rangle$:

$$\begin{aligned}
A_{-\frac{1}{2}}^{(1)}(+\infty) &= \frac{i\mu}{\hbar} \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^\infty dt b(t) e^{i\frac{\mu B}{\hbar}t} = i \frac{\sqrt{3}b\mu}{2} \frac{1}{\frac{\hbar}{\tau} - i\mu B} \\
A_{\frac{1}{2}}^{(1)}(+\infty) &= A_{\frac{3}{2}}^{(1)}(+\infty) = 0
\end{aligned}$$

Al secondo ordine diventa possibile la transizione nello stato $|\frac{1}{2}\rangle$

$$\begin{aligned}
A_{\frac{1}{2}}^{(2)}(+\infty) &= -\frac{\mu^2}{\hbar^2} \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^\infty dt \int_0^t dt' b(t) b(t') e^{i\frac{\mu B}{\hbar}(t'+t)} = \\
&= -\frac{\mu^2}{\hbar^2} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}b^2}{2} \left[\int_0^\infty dt b(t) e^{i\frac{\mu B}{\hbar}t} \right]^2 = -\frac{\sqrt{3}b^2}{4} \frac{\mu^2}{(\frac{\hbar}{\tau} - i\mu B)^2} \\
A_{-\frac{1}{2}}^{(2)}(+\infty) &= A_{\frac{3}{2}}^{(2)}(+\infty) = 0
\end{aligned}$$

Dunque, al secondo ordine perturbativo, le probabilità di transizione sono

$$\begin{aligned}
P_{-\frac{1}{2}}(+\infty) &= |A_{-\frac{1}{2}}^{(1)}(+\infty) + A_{-\frac{1}{2}}^{(2)}(+\infty)|^2 = \frac{3b^2\mu^2}{4} \frac{1}{\frac{\hbar^2}{\tau^2} + \mu^2 B^2} \\
P_{\frac{1}{2}}(+\infty) &= |A_{\frac{1}{2}}^{(1)}(+\infty) + A_{\frac{1}{2}}^{(2)}(+\infty)|^2 = \frac{3b^4}{16} \frac{\mu^4}{(\frac{\hbar^2}{\tau^2} + \mu^2 B^2)^2} \\
P_{\frac{3}{2}}(+\infty) &= 0
\end{aligned}$$

Corso di Meccanica Quantistica 2

Prof. Camillo Imbimbo

Prova Scritta del 7/3/2011

Problema 1

Un sistema di spin $1/2$ interagisce con un campo magnetico costante uniforme $\vec{B} = (0, 0, B)$ attraverso l'Hamiltoniana

$$\hat{H}_0 = -\mu B \hat{S}_z$$

dove μ è proporzionale al momento magnetico del sistema e \hat{S}_z la proiezione dello spin lungo l'asse z . Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nell'autostato di \hat{S}_x con $S_x = +\frac{\hbar}{2}$.

Domanda 1 (Punti 8)

Si calcolino le probabilità che al tempo $t > 0$ il sistema si trovi : (a) nello stato di spin $S_z = \frac{\hbar}{2}$; (b) nello stato di spin $S_x = \frac{\hbar}{2}$.

Domanda 2 (Punti 12)

Si supponga piuttosto che al tempo $t = 0$ venga accesa la perturbazione dipendente dal tempo

$$V(t) = -\mu B' \hat{S}_y e^{-\alpha t} \quad t > 0, \quad \alpha > 0.$$

Si calcoli, al primo ordine in teoria delle perturbazioni, la probabilità (a) della Domanda 1.

Problema 2

Un sistema uni-dimensionale, descritto dal potenziale $V_0(x)$

$$V_0(x) = -\alpha \delta(x) \quad \alpha > 0,$$

si trova nello stato fondamentale. Al tempo $t=0$ viene accesa una perturbazione $V(x, t)$ dipendente dal tempo

$$V(x, t) = (ax + b e^{-q|x|}) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \tau > 0, \quad q > 0$$

con a, b parametri reali.

Domanda 1 (Punti 13)

Si calcoli al primo ordine in teoria delle perturbazioni la distribuzione di probabilità in energia al tempo $t \rightarrow +\infty$ delle particelle estratte dalla buca di potenziale.

Prova Scritta del 7/3/2011: Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Siano $|\pm\rangle$ gli autostati di \hat{S}_z con $S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$. Lo stato iniziale è

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle)$$

Lo stato al tempo t è quindi

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\frac{\mu B t}{2}} |+\rangle + e^{-i\frac{\mu B t}{2}} |-\rangle)$$

La probabilità che il sistema al tempo t abbia $S_z = \frac{\hbar}{2}$ è dunque

$$P_a(t) = \frac{1}{2}$$

La probabilità che il sistema al tempo t abbia $S_x = \frac{\hbar}{2}$ è dunque

$$\begin{aligned} P_b(t) &= |(\psi(0), \psi(t))|^2 = \left| \frac{1}{2} e^{i\frac{\mu B t}{2}} + \frac{1}{2} e^{-i\frac{\mu B t}{2}} \right|^2 = \\ &= \cos^2 \frac{\mu B t}{2} \end{aligned}$$

Domanda 2

La perturbazione in rappresentazione dell'interazione si scrive

$$V_{int}(t) = e^{i\frac{\hat{H}_0 t}{\hbar}} V(t) e^{-i\frac{\hat{H}_0 t}{\hbar}} = -\frac{\mu B'}{2i} (\hat{S}_+ e^{-i\mu B t} - \hat{S}_- e^{i\mu B t}) e^{-\alpha t}$$

Lo stato al tempo t in rappresentazione dell'interazione, al primo ordine in B' è pertanto

$$\begin{aligned} \psi_{int}(t) &= \psi(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' V^{(int)}(t') \psi(0) = \\ &= \psi(0) + \frac{\mu B'}{2\hbar} \left(\frac{(1 - e^{-(\alpha+i\mu B)t}) \hat{S}_+}{\alpha + i\mu B} - \frac{(1 - e^{-(\alpha-i\mu B)t}) \hat{S}_-}{\alpha - i\mu B} \right) \psi(0) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle) + \\ &\quad + \frac{\mu B'}{2\sqrt{2}} \left[\frac{(1 - e^{-(\alpha+i\mu B)t}) |+\rangle}{\alpha + i\mu B} - \frac{(1 - e^{-(\alpha-i\mu B)t}) |-\rangle}{\alpha - i\mu B} \right] \end{aligned}$$

L'ampiezza che lo stato si trovi al tempo t in $|+\rangle$ è, a quest'ordine in teoria delle perturbazioni,

$$\begin{aligned} A_a(t) &= (|+\rangle, e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}} \psi_{int}(t)) = e^{\frac{i\mu B t}{2}} (|+\rangle, \psi_{int}(t)) = \\ &= e^{\frac{i\mu B t}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mu B'}{2\sqrt{2}} \frac{(1 - e^{-(\alpha+i\mu B)t})}{\alpha + i\mu B} \right) \end{aligned}$$

La corrispondente probabilità è, allo stesso ordine

$$\begin{aligned} P_a(t) &= \frac{1}{2} + \frac{\mu B'}{4} \left[\frac{(1 - e^{-(\alpha+i\mu B)t})}{\alpha + i\mu B} + \frac{(1 - e^{-(\alpha-i\mu B)t})}{\alpha - i\mu B} \right] = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\mu B'}{2(\alpha^2 + \mu^2 B^2)} \left[\alpha - e^{-\alpha t} [\alpha \cos(\mu B t) - \mu B \sin(\mu B t)] \right] \end{aligned}$$

Problema 2

Domanda 1

La funzione d'onda dello stato legato (ottenuta in un altro esercizio) è

$$\psi_0(x) = \sqrt{k_0} e^{-k_0|x|}$$

dove

$$k_0 \equiv \frac{\alpha m}{\hbar^2} \quad E_0 \equiv -\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$$

Le funzioni d'onda dello spettro continuo, di energia $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} > 0$, sono

$$\begin{aligned} \psi_E^{(-)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (e^{ikx} - e^{-ikx}) \\ \psi_E^{(+)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (e^{ikx} + e^{-2i\theta_E} e^{-ikx}) \quad \tan \theta_E \equiv \frac{k_0}{k} \end{aligned}$$

Lo stato legato è pari per $x \rightarrow -x$. La parte dispari (pari) della perturbazione connette questo stato con gli autostati $\psi_E^{(-)}(x)$ ($\psi_E^{(+)}(x)$) dello spettro continuo. Gli elementi di matrice corrispondenti sono

$$\begin{aligned} M_- &= a(\psi_E^{(-)}, x \psi_0) = 2a \sqrt{\frac{k_0}{4\pi}} \int_0^\infty dx x (e^{(ik-k_0)x} - e^{-(ik+k_0)x}) = \\ &= -2a \sqrt{\frac{k_0}{4\pi}} \frac{\partial}{\partial k_0} \left[\frac{1}{k_0 - ik} - \frac{1}{k_0 + ik} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 8 i a \sqrt{\frac{k_0}{4 \pi}} \frac{k k_0}{(k^2 + k_0^2)^2} \\
M_+ &= b (\psi_E^{(+)}, e^{-q|x|} \psi_0) = 2 b \sqrt{\frac{k_0}{4 \pi}} \int_0^\infty dx (e^{(i k - k_0 - q) x} + \\
&\quad + e^{-2 i \theta_E} e^{-(i k + k_0 + q) x}) = \\
&= 2 b \sqrt{\frac{k_0}{4 \pi}} \left[\frac{1}{k_0 + q - i k} + e^{-2 i \theta_E} \frac{1}{k_0 + q + i k} \right] = \\
&= 2 b \sqrt{\frac{k_0}{4 \pi}} \left[\frac{1}{k_0 + q - i k} + \frac{k - i k_0}{k + i k_0} \frac{1}{k_0 + q + i k} \right] = \\
&= \sqrt{\frac{k_0}{4 \pi}} \frac{2 b}{((k_0 + q)^2 + k^2) (k + i k_0)} \times \\
&\quad \times \left[(k_0 + q + i k) (k + i k_0) + (k - i k_0) (k_0 + q - i k) \right] = \\
&= \sqrt{\frac{k_0}{4 \pi}} \frac{2 b}{((k_0 + q)^2 + k^2) (k + i k_0)} \times 2 q k
\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
|M_-|^2 &= 16 a^2 \frac{k_0}{\pi} \frac{k^2 k_0^2}{(k^2 + k_0^2)^4} \\
|M_+|^2 &= \frac{4 b^2 k^2 q^2 k_0}{\pi ((k_0 + q)^2 + k^2)^2 (k_0^2 + k^2)}
\end{aligned}$$

Posto

$$\Delta \omega \equiv \frac{E - E_0}{\hbar} = \frac{\hbar}{2 m} (k^2 + k_0^2)$$

la distribuzione di probabilità di estrazione al primo ordine in teoria delle perturbazioni si scrive

$$\begin{aligned}
\frac{dP(E)}{dE} &= \frac{m (|M_-|^2 + |M_+|^2)}{k \hbar^4 (\frac{1}{\tau^2} + \Delta \omega^2)} = \frac{4 m k_0 k}{\pi \hbar^4 (\frac{1}{\tau^2} + \Delta \omega^2) (k^2 + k_0^2)} \times \\
&\quad \times \left[\frac{4 a^2 k_0^2}{(k^2 + k_0^2)^3} + \frac{b^2 q^2}{((k_0 + q)^2 + k^2)^2} \right]
\end{aligned}$$