

Fisica Moderna: Corso di Laurea Scienze dei Materiali
Prova scritta: 16/06/2017

Problema 1

Una particella di spin $1/2$ è soggetta ad un campo magnetico uniforme $\vec{B} = B \hat{z}$ diretto lungo l'asse delle z . L'operatore hamiltoniano che descrive l'interazione della particella con il campo magnetico è

$$\hat{H} = -\mu \vec{B} \cdot \vec{s} = -\mu B \hat{s}_z$$

dove $\vec{s} = (\hat{s}_x, \hat{s}_y, \hat{s}_z)$ sono gli operatori di spin, e $\mu > 0$ è un parametro positivo. Si supponga che al tempo $t = 0$ la particella si trovi in uno stato ψ_0 con spin definito lungo la direzione $\vec{n} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$, caratterizzato da

$$\vec{n} \cdot \vec{s} \psi_0 = \frac{\hbar}{2} \psi_0$$

- a) Qual'è la probabilità che la particella abbia spin $s_z = \frac{\hbar}{2}$ al tempo $t = 0$? (Punti 7)
- b) Qual'è la probabilità che la particella abbia spin $s_z = \frac{\hbar}{2}$ al tempo $t > 0$? (Punti 7)
- c) Qual'è la probabilità che la particella abbia spin $s_x = \frac{\hbar}{2}$ al tempo $t > 0$? (Punti 7)

Problema 2

Una particella di massa m senza spin si muove liberamente sull'asse delle x essendo confinata nell'intervallo $0 \leq x \leq L$. La funzione d'onda della particella è

$$\psi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

- a) Qual'è il valore medio di \hat{x} in questo stato? (Punti 5)
- b) Qual'è l'energia media della particella su questo stato? (Punti 8)

Problema 1

- a) Scriviamo lo stato $\psi_0 = \psi(0)$ come combinazione lineare dei due autostati \pm di \hat{s}_z :

$$\psi(0) = x |+\rangle + y |-\rangle$$

Nella base degli autostati di s_z l'operatore $\vec{n} \cdot \vec{s}$ si scrive

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{s} &= \frac{\hbar}{2} \cos \theta \sigma_x + \frac{\hbar}{2} \sin \theta \sigma_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \cos \theta - i \sin \theta \\ \cos \theta + i \sin \theta & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi lo stato ψ_0 è definito dall'equazione agli autovalori

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ovvero

$$y = e^{i\theta} x$$

e

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + e^{i\theta} |-\rangle)$$

La probabilità che la particella abbia $s_z = \frac{\hbar}{2}$ al tempo $t = 0$ è pertanto $\frac{1}{2}$.

- b) Al tempo t lo stato è

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{\frac{i\mu B t}{2}} |+\rangle + e^{i\theta} e^{-\frac{i\mu B t}{2}} |-\rangle)$$

La probabilità che la particella abbia $s_z = \frac{\hbar}{2}$ al tempo t è pertanto $\frac{1}{2}$.

- c) L' autostato di s_x con autovalore $\frac{\hbar}{2}$ è

$$|s_x = \frac{\hbar}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle)$$

Pertanto, l'ampiezza di transizione è

$$\langle s_x = \frac{\hbar}{2} | \psi(t) \rangle = \frac{1}{2} (e^{\frac{i\mu B t}{2}} + e^{i\theta} e^{-\frac{i\mu B t}{2}}) \quad (1)$$

e la probabilità che al tempo t $s_x = \frac{\hbar}{2}$ è

$$|\langle s_x = \frac{\hbar}{2} | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{4} (2 + 2 \cos(\mu B t - \theta)) = \cos^2 \frac{\mu B t - \theta}{2} \quad (2)$$

Problema 2

- a) Dal grafico della funzione d'onda è evidente che il valore medio di x è $\frac{L}{2}$.
- a bis) (Non dato) Calcoliamo la normalizzazione della funzione d'onda

$$\begin{aligned} |\psi|^2 &= \int_0^L dx (\sin(\frac{\pi x}{L}) + \sin^2(\frac{\pi x}{L}))^2 = \frac{L}{\pi} \int_0^\pi d\xi (\sin(\xi) + \sin^2 \xi)^2 = \\ &= \frac{L}{\pi} \int_0^\pi d\xi [\sin^2 \xi + \sin^4 \xi + 2 \sin^3 \xi] = \left(\frac{8}{3} + \frac{7\pi}{8}\right) \frac{L}{\pi} \end{aligned} \quad (3)$$

Calcoliamo il valore medio di x^2 . Abbiamo

$$\begin{aligned} \langle \psi, \hat{x}^2 \psi \rangle &= \int_0^L dx x^2 (\sin(\frac{\pi x}{L}) + \sin^2(\frac{\pi x}{L}))^2 = \\ &= \frac{L^3}{\pi^3} \int_0^\pi d\xi \xi^2 [\sin^2 \xi + \sin^4 \xi + 2 \sin^3 \xi] = \\ &= \frac{L^3}{\pi^3} \left(-\frac{160}{27} - \frac{31\pi}{64} + \frac{4\pi^2}{3} + \frac{7\pi^3}{24}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

per cui

$$\frac{\langle \psi, \hat{x}^2 \psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} = \frac{L^2 - 10240 - 837\pi + 2304\pi^2 + 504\pi^3}{72(64 + 21\pi)} \quad (5)$$

e

$$\Delta x^2 = \frac{L^2 - 10240 - 837\pi + 1152\pi^2 + 126\pi^3}{72(64 + 21\pi)} \quad (6)$$

- c) Abbiamo

$$\hat{H} \psi = \frac{-\hbar^2}{2m} \psi'' = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} \left(\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - 2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right) \quad (7)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \langle \psi, \hat{H} \psi \rangle &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} \int_0^L dx \left(\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - 2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right) \left(\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right) = \\ &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} \frac{L}{\pi} \int_0^\pi d\xi \left(\sin(\xi) - 2 \cos(2\xi) \right) \left(\sin \xi + \sin^2 \xi \right) = \\ &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} \frac{L}{\pi} \left(\pi + \frac{8}{3} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Quindi il valore medio dell'energia è

$$\frac{\langle \psi, \hat{H} \psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} \frac{\pi + \frac{8}{3}}{\frac{8}{3} + \frac{7\pi}{8}} \quad (9)$$

Fisica Moderna: Corso di Laurea Scienze dei Materiali
Prova scritta: 14/07/2017

Problema 1

Un sistema di due spin $1/2$, è descritto da una Hamiltoniana

$$\hat{H} = a \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + b(s_1^z + s_2^z)$$

dove $\vec{s}_i = (s_i^x, s_i^y, s_i^z)$ sono gli operatori di spin delle due particelle e a e b sono parametri reali.

- a) Determinare la matrice che rappresenta \hat{H} nella base $\{|\pm, \pm\rangle\}$ degli autostati di $\{\hat{s}_1^z, \hat{s}_2^z\}$. (Punti 5)
- b) Determinare gli autovettori e gli autovalori di \hat{H} . (Punti 6)
- c) Determinare quali fra i 3 seguenti operatori commutano con \hat{H} (Punti 5) :

$$(\vec{s}_1 + \vec{s}_2)^2 \quad s_1^x + s_2^x \quad s_1^z + s_2^z$$

- d) Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato $\psi_0 = |+-\rangle$. Qualè la probabilità che al tempo $t > 0$ il sistema si trovi nello stato $\psi_1 = |-+\rangle$? (Punti 6)

Problema 2

Una particella di massa m senza spin si muove liberamente sull'asse delle x essendo confinata nell'intervallo $0 \leq x \leq L$. La funzione d'onda della particella è

$$\psi(x) = x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

- a) Qual'è il valore medio di \hat{p} in questo stato? (Punti 7)
- b) Qual'è l'energia media della particella su questo stato? (Punti 7)

Problema 1

- a) La matrice che rappresenta \hat{H} è

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \langle ++ | \hat{H} | ++ \rangle & \langle ++ | \hat{H} | -- \rangle & \langle ++ | \hat{H} | +- \rangle & \langle ++ | \hat{H} | -+ \rangle \\ \langle -- | \hat{H} | ++ \rangle & \langle -- | \hat{H} | -- \rangle & \langle -- | \hat{H} | +- \rangle & \langle -- | \hat{H} | -+ \rangle \\ \langle +- | \hat{H} | ++ \rangle & \langle +- | \hat{H} | -- \rangle & \langle +- | \hat{H} | +- \rangle & \langle +- | \hat{H} | -+ \rangle \\ \langle -+ | \hat{H} | ++ \rangle & \langle -+ | \hat{H} | -- \rangle & \langle -+ | \hat{H} | +- \rangle & \langle -+ | \hat{H} | -+ \rangle \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \frac{a\hbar^2}{4} + b\hbar & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{4} - b\hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a\hbar^2}{4} & \frac{a\hbar^2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{a\hbar^2}{2} & -\frac{a\hbar^2}{4} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

- b) Autovalori ed autovettori di \hat{H} sono

$$\begin{aligned} |S = 1, S_z = +1\rangle &= |++\rangle & E_{1,1} &= \frac{a\hbar^2}{4} + b\hbar \\ |S = 1, S_z = -1\rangle &= |--\rangle & E_{1,-1} &= \frac{a\hbar^2}{4} - b\hbar \\ |S = 1, S_z = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle) & E_{1,0} &= \frac{a\hbar^2}{4} \\ |S = 0, S_z = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle) & E_{0,0} &= -\frac{3a\hbar^2}{4} \end{aligned} \quad (11)$$

- c) $(\vec{s}_1 + \vec{s}_2)^2$ e $s_1^z + s_2^z$ commutando con \hat{H} .
- d)

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|S = 1, S_z = 0\rangle + |S = 0, S_z = 0\rangle) \\
\psi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|S = 1, S_z = 0\rangle - |S = 0, S_z = 0\rangle) \\
\psi(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\frac{at}{\hbar}} |S = 1, S_z = 0\rangle + e^{i\frac{3at}{4\hbar}} |S = 0, S_z = 0\rangle) \\
\langle - + | \psi(t) \rangle &= \frac{1}{2} \langle |S = 1, S_z = 0\rangle - |S = 0, S_z = 0\rangle, \\
&\quad , e^{-i\frac{at}{4\hbar}} |S = 1, S_z = 0\rangle + e^{i\frac{3at}{4\hbar}} |S = 0, S_z = 0\rangle \rangle = \\
&= \frac{1}{2} (e^{-i\frac{at}{4\hbar}} - e^{i\frac{3at}{4\hbar}}) \\
P(t) &= |\langle - + | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{4} (2 - 2 \cos \frac{at}{\hbar}) = \sin^2 \frac{at}{2\hbar} \quad (12)
\end{aligned}$$

Problema 2

- a) Calcoliamo la normalizzazione della funzione d'onda

$$\begin{aligned}
|\psi|^2 &= \int_0^L dx x^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \\
&= \frac{L^3}{\pi^3} \int_0^1 d\xi \xi^2 \sin^2 \xi = \frac{L^3}{\pi^3} \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\right) \quad (13)
\end{aligned}$$

Calcoliamo il valore medio di p . Abbiamo

$$\begin{aligned}
\langle \psi, \hat{p} \psi \rangle &= -i \hbar \int_0^L dx \psi(x) \psi'(x) = \\
&= -i \hbar \frac{1}{2} \int_0^L dx \frac{d}{dx} (\psi(x)^2) = \\
&= -i \hbar \frac{1}{2} (\psi(L)^2 - \psi(0)^2) = 0 \quad (14)
\end{aligned}$$

per cui

$$\frac{\langle \psi, \hat{p} \psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} = 0 \quad (15)$$

- b) Abbiamo

$$\hat{H} \psi = \frac{-\hbar^2}{2m} \psi'' = \frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} - \frac{\pi^2}{L^2} x \sin \frac{\pi x}{L} \right) \quad (16)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \langle \psi, \hat{H} \psi \rangle &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} \int_0^L dx \left(-\frac{2L}{\pi} \cos \frac{\pi x}{L} + x \sin \frac{\pi x}{L} \right) x \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right) = \\ &= \frac{\hbar^2 L}{2m \pi} \int_0^1 d\xi \left(-2\xi \cos \xi \sin \xi + \xi^2 \sin^2 \xi \right) = \end{aligned} \quad (17)$$

Quindi il valore medio dell'energia è

$$\frac{\langle \psi, \hat{H} \psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} \frac{\int_0^1 d\xi \left(-2\xi \cos \xi \sin \xi + \xi^2 \sin^2 \xi \right)}{\int_0^1 d\xi \xi^2 \sin^2 \xi} \quad (18)$$

Fisica Moderna: Corso di Laurea Scienze dei Materiali
Prova scritta: 13/09/2017

Problema 1

Una particella di massa m si muove in un potenziale centrale

$$V(r) = -\frac{A}{r^\alpha}$$

dove $A > 0$ e $1 < \alpha < 2$ sono due parametri reali.

- a) Calcolare i livelli energetici ed i raggi delle orbite circolari con la regola di quantizzazione di Bohr. (Punti 7)
- b) Si prenda $m = m_{elettrone}$, $\alpha = \frac{3}{2}$ e $A = 1 \text{ ev} \times \text{Angströms}^{3/2}$. Si calcoli il raggio e l'energia del livello di Bohr più basso. (Punti 6)

Problema 2

Una particella di massa m senza spin si muove liberamente sull'asse delle x rimanendo confinata nell'intervallo $0 \leq x \leq L$. La funzione d'onda della particella al tempo $t = 0$ è

$$\psi(x) = \sin \frac{\pi x}{L} + \sqrt{3} \sin \frac{5\pi x}{L}$$

- a) Qual'è il valore medio dell'energia in questo stato? (Punti 6)
- b) Qual'è la probabilità che al tempo $t > 0$ la particella si trovi nello stato fondamentale? (Punti 7)
- c) Qual'è la probabilità che al tempo $t > 0$ la particella si trovi ancora nello stato $\psi(x)$? (Punti 7)

Problema 1

- a)

Le orbite circolari classiche sono determinate dall'equazione

$$\frac{m v^2}{r} = \frac{A \alpha}{r^{\alpha+1}} \Rightarrow v^2 = \frac{A \alpha}{m r^\alpha}$$

Il momento angolare di un'orbita di raggio r è quindi

$$L = m v r = \frac{\sqrt{A \alpha m}}{r^{\frac{\alpha}{2}-1}}$$

La condizione di quantizzazione di Bohr dà quindi per i raggi

$$L_n = n \hbar = \frac{\sqrt{A \alpha m}}{r_n^{\frac{\alpha}{2}-1}}$$

ovvero

$$r_n = \left(\frac{\sqrt{A \alpha m}}{n \hbar} \right)^{\frac{2}{\alpha-2}} = \left(\frac{n^2 \hbar^2}{A \alpha m} \right)^{\frac{1}{2-\alpha}}$$

e

$$E_n = \frac{1}{2} m v_n^2 - \frac{A}{r_n^\alpha} = -\frac{1}{2} \frac{A(2-\alpha)}{r_n^\alpha} = -\frac{1}{2} \frac{A^{\frac{2}{2-\alpha}} (2-\alpha) (\alpha m)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}}{(n \hbar)^{\frac{2\alpha}{2-\alpha}}}$$

- b)

$$r_1 = \frac{4}{9} \frac{\hbar^4}{m^2 A^2} = 2.5 \cdot 10^{-9} m$$

$$E_1 = -\frac{3^3}{2^5} \frac{m^3 A^4}{\hbar^6} = 3.12 \cdot 10^{-22} J = 1.95 \cdot 10^{-3} eV$$

Problema 2

- a) Lo stato normalizzato si può scrivere come combinazione lineare di autostati dell'energia

$$\psi = \frac{1}{2} (|E_1\rangle + \sqrt{3} |E_5\rangle)$$

dove

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2 m L^2}$$

sono i livelli e $|E_n\rangle$ sono le autofunzioni normalizzate.

L'energia media è quindi

$$\langle \hat{H} \rangle = \frac{E_1 + 3 E_5}{4} = 19 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2 m L^2}$$

- b) Al tempo t lo stato è

$$\psi(t) = \frac{1}{2} (e^{-\frac{i E_1 t}{\hbar}} |E_1\rangle + \sqrt{3} e^{-\frac{i E_5 t}{\hbar}} |E_5\rangle)$$

La probabilità che la particella si trovi nello stato $|E_1\rangle$ al tempo $t > 0$ è quindi

$$P_{E_1}(t) = |\langle E_1 | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{4}$$

- c) La probabilità che al tempo $t > 0$ la particella si trovi ancora nello stato $\psi(x)$ è

$$\begin{aligned} P_{\psi(0)}(t) &= |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{16} \left| e^{-\frac{i E_1 t}{\hbar}} + 3 e^{-\frac{i E_5 t}{\hbar}} \right|^2 \\ &= \frac{1}{16} \left(10 + 6 \cos \frac{(E_5 - E_1) t}{\hbar} \right) = \\ &= \frac{1}{16} \left(10 + 6 \cos \frac{12 \pi^2 \hbar t}{m L^2} \right) \end{aligned}$$

Fisica Moderna: Corso di Laurea Scienze dei Materiali
Prova scritta: 31/01/2018

Problema 1

Lo spazio degli stati di un sistema quantistico è generato da una base ortonormale $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. L'Hamiltoniana in questa base è descritta dalla matrice

$$H = \begin{pmatrix} \epsilon & \delta_1 & 0 \\ \delta_1 & \epsilon & \delta_2 \\ 0 & \delta_2 & \epsilon \end{pmatrix}$$

dove ϵ , δ_1 e δ_2 sono numeri reali. Al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato

$$\psi_0 = |1\rangle$$

- a) Qual'è il valore medio dell'energia in questo stato? (Punti 5)
- b) Qual'è l'energia dello stato fondamentale? (Punti 7)
- c) Qual'è la probabilità che al tempo $t = 0$ la particella si trovi nello stato fondamentale? (Punti 15)

Problema 2

Una particella di massa m senza spin si muove liberamente sull'asse delle x rimanendo confinata nell'intervallo $0 \leq x \leq L$. Al tempo $t = 0$ la funzione d'onda della particella è

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi x}{L} + i \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{3\pi x}{L}$$

- a) Qual'è il valore medio dell'energia in questo stato? (Punti 4)
- b) Qual'è il valor medio di x in questo stato ? (Punti 4)
- c) Qual'è la probabilità che al tempo $t > 0$ la particella si trovi nello stato fondamentale? (Punti 6)
- d) Qual'è la probabilità che al tempo $t > 0$ la particella si trovi ancora nello stato $\psi(x)$? (Punti 6)

Problema 1

- a) Qual'è il valore medio dell'energia in questo stato? Il valor medio dell'energia nello stato $|1\rangle$ è

$$\langle 1|H|1\rangle = \epsilon$$

- b) Qual'è l'energia dello stato fondamentale? Gli autovalori di H sono determinati da

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{pmatrix} \epsilon - E & \delta_1 & 0 \\ \delta_1 & \epsilon - E & \delta_2 \\ 0 & \delta_2 & \epsilon - E \end{pmatrix} = \\ &= (\epsilon - E) [(\epsilon - E)^2 - \delta_2^2] - \delta_1 [\delta_1 (\epsilon - E)] = \\ &= (\epsilon - E) [(\epsilon - E)^2 - \delta_2^2 - \delta_1^2] \end{aligned}$$

Pertanto gli autovalori dell'energia sono

$$E_1 = \epsilon - \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2} \quad E_2 = \epsilon \quad E_3 = \epsilon + \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$$

Lo stato fondamentale ha energia $E_1 = \epsilon - \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$.

- c) Qual'è la probabilità che al tempo $t = 0$ la particella si trovi nello stato fondamentale? Gli autovettori sono determinati dall'equazione

$$\begin{pmatrix} \epsilon - E & \delta_1 & 0 \\ \delta_1 & \epsilon - E & \delta_2 \\ 0 & \delta_2 & \epsilon - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad (19)$$

ovvero

$$\begin{aligned} (\epsilon - E)x + \delta_1 y &= 0 \\ (\epsilon - E)y + \delta_1 x + \delta_2 z &= 0 \\ (\epsilon - E)z + \delta_2 y &= 0 \end{aligned}$$

Per $E = \epsilon = E_2$

$$y = 0 \quad z = -\frac{\delta_1}{\delta_2} x$$

Quindi il corrispondente autovettore normalizzato è

$$\psi_2 = \frac{\delta_2 |1\rangle - \delta_1 |3\rangle}{\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}}$$

Per $E_{1,3} = \epsilon \mp \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$

$$x = -\frac{\delta_1}{\epsilon - E_{1,3}} \quad y = \mp \frac{\delta_1}{\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}} \quad z = \mp \frac{\delta_2}{\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}}$$

Quindi i corrispondenti autovettori normalizzati sono

$$\psi_1 = \frac{-\delta_1 |1\rangle + \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2} |2\rangle - \delta_2 |3\rangle}{\sqrt{2} \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}}$$

$$\psi_3 = \frac{\delta_1 |1\rangle + \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2} |2\rangle + \delta_2 |3\rangle}{\sqrt{2} \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}}$$

Lo stato $|1\rangle$ espresso in termini della base degli autostati è

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \psi_1 \langle \psi_1 | 1 \rangle + \psi_2 \langle \psi_2 | 1 \rangle + \psi_3 \langle \psi_3 | 1 \rangle = \\ &= \frac{-\delta_1 \psi_1 + \sqrt{2} \delta_2 \psi_2 + \delta_1 \psi_3}{\sqrt{2} \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}} \end{aligned}$$

La probabilità che la particella si trovi nello stato fondamentale è quindi

$$P_0 = \frac{\delta_1^2}{2(\delta_1^2 + \delta_2^2)}$$

Problema 2

- a) Qual'è il valore medio dell'energia in questo stato?

Poiché gli autostati dell'energia sono

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n \pi x}{L}$$

lo stato $\psi_0(x)$ si scrive

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{L}{2}} \psi_1(x) + \frac{i}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{L}{2}} \psi_3(x)$$

Pertanto il valor medio dell'energia è

$$\begin{aligned}\langle H \rangle &= \frac{\frac{1}{2} \frac{L}{2} E_1 + \frac{1}{3} \frac{L}{2} E_3}{\frac{1}{2} \frac{L}{2} + \frac{1}{3} \frac{L}{2}} = \frac{\frac{1}{2} E_1 + \frac{1}{3} E_3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{3 E_1 + 2 E_3}{5} = \\ &= \frac{3 + 2 \cdot 9}{5} \frac{\hbar^2 \pi^2}{2 m L^2} = \frac{21}{10} \frac{\hbar^2 \pi^2}{m L^2}\end{aligned}$$

- b) Qual'è il valor medio di x in questo stato ?

La distribuzione di probabilità

$$\begin{aligned}|\psi_0(x)|^2 &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi x}{L} + i \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{3\pi x}{L} \right|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3} \sin^2 \frac{3\pi x}{L}\end{aligned}$$

è simmetrica rispetto al punto $x = \frac{L}{2}$. Pertanto il valor medio di x è

$$\langle \hat{x} \rangle = \frac{L}{2}$$

- c) Qual'è la probabilità che al tempo $t > 0$ la particella si trovi nello stato fondamentale?

La probabilità che la particella si trovi nello stato fondamentale è

$$P_0 = \frac{\left| \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{L}{2}} \right|^2}{\frac{1}{2} \frac{L}{2} + \frac{1}{3} \frac{L}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{5}$$

- d) Qual'è la probabilità che al tempo $t > 0$ la particella si trovi ancora nello stato $\psi(x)$? Lo stato al tempo t ha funzione d'onda

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{i E_1 t}{\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{L}{2}} \psi_1(x) + e^{-\frac{i E_3 t}{\hbar}} \frac{i}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{L}{2}} \psi_3(x)$$

L'ampiezza di transizione nello stato ψ_0 è

$$\langle \psi_0, \psi(t) \rangle = \left(e^{-\frac{i E_1 t}{\hbar}} \frac{1}{2} + e^{-\frac{i E_3 t}{\hbar}} \frac{1}{3} \right) \frac{L}{2}$$

mentre i moduli quadri sono

$$\langle \psi_0, \psi_0 \rangle = \langle \psi(t), \psi(t) \rangle = \frac{L}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{6} \frac{L}{2}$$

Pertanto la probabilità di transizione nello stato ψ_0 al tempo t è

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{\left| e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \frac{1}{2} + e^{-\frac{iE_3 t}{\hbar}} \frac{1}{3} \right|^2}{\frac{5^2}{6^2}} = \frac{\left| 3e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} + 2e^{-\frac{iE_3 t}{\hbar}} \right|^2}{25} = \\ &= \frac{13 + 12 \cos \frac{(E_3 - E_1)t}{\hbar}}{25} = \frac{13 + 12 \cos \frac{4\pi^2 \hbar t}{mL^2}}{25} \end{aligned}$$

Fisica Moderna: Corso di Laurea Scienze dei Materiali
Prova scritta: 22/02/2018

Problema 1

Lo spazio degli stati di un sistema quantistico è generato da una base ortonormale $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$. L'Hamiltoniana in questa base è descritta dalla matrice

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \delta & 0 & 0 \\ \delta & 0 & \delta & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \delta \\ 0 & 0 & \delta & 0 \end{pmatrix}$$

dove $\delta > 0$ è un numero reale *positivo*. Il sistema si trova nello stato

$$\psi_0 = |1\rangle + |2\rangle$$

- a) Qual'è il valore medio dell'energia in questo stato? (Punti 5)
- b) Qual'è l'energia dello stato fondamentale? (Punti 7)
- c) Qual'è la probabilità la particella si trovi nello stato fondamentale? (Punti 15)

Problema 2

Un elettrone m (di cui trascuriamo lo spin) si muove liberamente sull'asse delle x rimanendo confinato nell'intervallo $0 \leq x \leq L$, con $L = 10^{-10} m$. Al tempo $t = 0$ la funzione d'onda della particella è

$$\psi_0(x) = \sin \frac{\pi x}{L} + \sqrt{5} i \sin \frac{5 \pi x}{L}$$

- a) Qual'è il valore medio dell'energia in questo stato in elettronvolts? (Punti 4)
- b) Qual'è il valore medio di x espresso in metri in questo stato? (Punti 4)
- c) Qual'è la probabilità che al tempo $t > 0$ la particella si trovi nello stato fondamentale? (Punti 6)
- d) In quali istanti di tempo t la particella si troverà ancora nello stato $\psi_0(x)$ con probabilità 1? (Punti 6)

Problema 1

- a) Qual'è il valore medio dell'energia in questo stato? Abbiamo

$$\begin{aligned}\langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle &= \langle 1 | H_0 | 1 \rangle + \langle 1 | H_0 | 2 \rangle + \langle 2 | H_0 | 1 \rangle + \langle 2 | H_0 | 2 \rangle = \\ &= 0 + \delta + \delta + 0 = 2\delta \\ \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle &= 2\end{aligned}\tag{20}$$

Il valor medio dell'energia nello stato $|\psi_0\rangle$ è quindi

$$\bar{E} = \frac{\langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle}{2} = \delta\tag{21}$$

- b) Qual'è l'energia dello stato fondamentale? Gli autovalori di H sono determinati da

$$\begin{aligned}0 &= \det \begin{pmatrix} -E & \delta & 0 & 0 \\ \delta & -E & \delta & 0 \\ 0 & \delta & -E & \delta \\ 0 & 0 & \delta & -E \end{pmatrix} = \\ &= (-E) [(-E) ((-E)^2 - \delta^2) - \delta^2 (-E)] + \\ &\quad -\delta^2 ((-E)^2 - \delta^2) = \\ &= E^4 - 3\delta^2 E^2 + \delta^4\end{aligned}\tag{22}$$

Pertanto

$$E^2 = \frac{3\delta^2 \pm \sqrt{5}\delta^2}{2}$$

Lo stato fondamentale ha energia

$$E_1 = -\delta \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = -\delta \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\tag{23}$$

Gli altri livelli sono

$$\begin{aligned}
 E_2 &= -\delta \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} = -\delta \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\
 E_3 &= \delta \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} = \delta \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\
 E_4 &= \delta \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \delta \frac{1 + \sqrt{5}}{2}
 \end{aligned} \tag{24}$$

- c) Qual'è la probabilità che il sistema si trovi nello stato fondamentale?
 Gli autovettori sono determinati dall'equazione

$$\begin{pmatrix} -E & \delta & 0 & 0 \\ \delta & -E & \delta & 0 \\ 0 & \delta & -E & \delta \\ 0 & 0 & \delta & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \tag{25}$$

ovvero

$$\begin{aligned}
 -E x_1 + \delta x_2 &= 0 \\
 \delta x_1 - E x_2 + \delta x_3 &= 0 \\
 \delta x_2 - E x_3 + \delta x_4 &= 0 \\
 \delta x_3 - E x_4 &= 0
 \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{\delta}{E} x_2 & x_4 &= \frac{\delta}{E} x_3 \\
 \frac{\delta^2 - E^2}{E} x_2 &= -\delta x_3 \Rightarrow x_2 &= \frac{\delta E}{E^2 - \delta^2} x_3 \\
 x_1 &= \frac{\delta^2}{E^2 - \delta^2} x_3
 \end{aligned} \tag{26}$$

Dunque l'autovettore di energia E normalizzato è

$$|E\rangle = N_E \left(\frac{\delta^2}{E^2 - \delta^2} |1\rangle + \frac{\delta E}{E^2 - \delta^2} |2\rangle + |3\rangle + \frac{\delta}{E} |4\rangle \right) \tag{27}$$

dove N_E è un fattore di normalizzazione Per cui

$$\begin{aligned}
 |E_1\rangle &= N_- \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}} |1\rangle - |2\rangle + |3\rangle - \frac{2}{1+\sqrt{5}} |4\rangle \right) \\
 |E_4\rangle &= N_- \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}} |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle + \frac{2}{1+\sqrt{5}} |4\rangle \right) \\
 |E_2\rangle &= N_+ \left(\frac{2}{1-\sqrt{5}} |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle + \frac{2}{1-\sqrt{5}} |4\rangle \right) \\
 |E_3\rangle &= N_+ \left(\frac{2}{1-\sqrt{5}} |1\rangle - |2\rangle + |3\rangle - \frac{2}{1-\sqrt{5}} |4\rangle \right) \quad (28)
 \end{aligned}$$

I fattori di normalizzazione sono

$$N_- = \frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} \quad N_+ = \frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} \quad (29)$$

La probabilità che il sistema si trovi nello stato fondamentale è

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{|\langle E_1|\psi_0\rangle|^2}{2} = \frac{1}{2} N_-^2 \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}} - 1 \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{5-\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}-1}{(1+\sqrt{5})^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{(\sqrt{5}-1)^3}{32} = \frac{5-2\sqrt{5}}{20}
 \end{aligned}$$

Problema 2

- a) Qual'è il valore medio dell'energia in questo stato?

Poiché gli autostati normalizzati dell'energia sono

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

lo stato $\psi_0(x)$ è equivalente alla funzione d'onda

$$\tilde{\psi}_0(x) = \psi_1(x) + i\sqrt{5}\psi_5(x)$$

Pertanto il valor medio dell'energia è

$$\begin{aligned}
 \langle H \rangle &= \frac{E_1 + 5E_5}{1+5} = \frac{1+5 \cdot 25}{6} \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} = \\
 &= 21 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} = 21 \times 37.37 \text{ ev} = 785.0 \text{ ev}
 \end{aligned}$$

- b) Qual'è il valor medio di x in questo stato ?

La distribuzione di probabilità

$$\begin{aligned} |\psi_0(x)|^2 &= \left| \sin \frac{\pi x}{L} + i \sqrt{5} \sin \frac{5\pi x}{L} \right|^2 = \\ &= \sin^2 \frac{\pi x}{L} + \sqrt{5} \sin^2 \frac{5\pi x}{L} \end{aligned}$$

è simmetrica rispetto al punto $x = \frac{L}{2}$. Pertanto il valor medio di x è

$$\langle \hat{x} \rangle = \frac{L}{2} = 0.5 \times 10^{-10} \text{ m}$$

- c) Qual'è la probabilità che al tempo $t > 0$ l'elettrone si trovi nello stato fondamentale?

La probabilità che l'elettrone si trovi nello stato fondamentale è

$$P_0 = \frac{|1|^2}{1+5} = \frac{1}{6}$$

- d) Qual'è la probabilità che al tempo $t > 0$ la particella si trovi ancora nello stato $\psi(x)$? Lo stato al tempo t ha funzione d'onda

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \psi_1(x) + e^{-\frac{iE_5 t}{\hbar}} i \sqrt{5} \psi_5(x)$$

L'ampiezza di transizione nello stato ψ_0 è

$$\langle \psi_0, \psi(t) \rangle = (e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} + e^{-\frac{iE_5 t}{\hbar}} 5)$$

mentre i moduli quadri sono

$$\langle \psi_0, \psi_0 \rangle = \langle \psi(t), \psi(t) \rangle = 1 + 5 = 6$$

Pertanto la probabilità di transizione nello stato ψ_0 al tempo t è

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{|e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} + e^{-\frac{iE_5 t}{\hbar}} 5|^2}{6^2} = \\ &= \frac{26 + 10 \cos \frac{(E_5 - E_1)t}{\hbar}}{36} = \frac{13 + 5 \cos \frac{12\pi^2 \hbar t}{mL^2}}{18} \end{aligned}$$

Questa probabilità è pari a 1 quando

$$\frac{12\pi^2 \hbar t}{mL^2} = 2\pi n \Rightarrow t_n = \frac{n}{6\pi} \frac{mL^2}{\hbar} = n 4.58 \times 10^{-18} \text{ sec} \quad (30)$$

Fisica Moderna: Corso di Laurea Scienze dei Materiali
Prova scritta: 18/06/2018

Problema 1

Lo spazio degli stati di un sistema quantistico è generato da una base ortonormale $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. L'energia in questa base è descritta dalla matrice

$$H = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$$

dove $a < 0$ è un numero reale *negativo*. Sia X un osservabile che nella stessa base è descritto dalla matrice

$$X = \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \delta > 0$$

- a) Quali sono i valori medi dell'energia H e di X nello stato $\psi_0 = |1\rangle + i\sqrt{3}|2\rangle$? (Punti 6)
- b) Calcolare gli autovettori e gli autovalori di H (*Suggerimento: Le radici di $n^3 - 3n - 2 = 0$ sono $n = -1$ e $n = 2$*). (Punti 10)
- c) Qual'è il valore medio di X nello stato fondamentale? (Punti 8)
- d) Al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato ψ_0 . Qual'è il valore medio di X al tempo $t > 0$? (Punti 10)

Problema 1

- a) Quali sono i valori medi dell'energia H e di X nello stato $\psi_0 = |1\rangle + i\sqrt{3}|2\rangle$?

La norma di ψ_0 è

$$\langle \psi_0, \psi_0 \rangle = 1 + 3 = 4$$

Il valore medio dell'energia

$$\langle H \rangle = \frac{1}{4} \langle \psi_0, H \psi_0 \rangle = \frac{1}{4} (H_{11} + i\sqrt{3}H_{12} - i\sqrt{3}H_{21} + 3H_{22}) = 0$$

Il valore medio di X

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= \frac{1}{4} \langle \psi_0, X \psi_0 \rangle = \frac{1}{4} (X_{11} + i\sqrt{3}X_{12} - i\sqrt{3}X_{21} + 3X_{22}) = \\ &= \frac{\delta}{4} (1 + 3 \cdot 2) = \frac{7}{4} \delta \end{aligned}$$

- b) Calcolare gli autovettori e gli autovalori di H . Sia

$$\psi_E = x|1\rangle + y|2\rangle + z|3\rangle$$

un autovettore dell'energia di autovalore E . Abbiamo

$$ay + az = Ex$$

$$ax + az = Ey$$

$$ax + ay = Ez$$

da cui

$$z = \frac{E}{a}x - y \Rightarrow$$

$$x(a + E) = y(a + E)$$

$$x\left(a - \frac{E^2}{a}\right) + y(a + E) = 0$$

La seconda equazione implica o $x = y$ o $E = -a$. Se $E = -a$ anche la terza equazione è automaticamente soddisfatta. Pertanto $E = -a$ è un autovalore, e i corrispondenti autovettori sono definiti dalla prima equazione

$$z = -x - y \quad (31)$$

Questo è uno spazio di dimensione 2. Pertanto l'autovalore $E = -a$ è doppiamente degenere. Come base ortonormale di questo spazio possiamo prendere,

$$\psi_{-a;1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |3\rangle) \quad (32)$$

corrispondente alla soluzione $x = 1, y = 0, z = -1$, ed il vettore ortogonale a questo

$$\psi_{-a;2} = \frac{1}{\sqrt{6}} (|1\rangle - 2|2\rangle + |3\rangle) \quad (33)$$

Se $E \neq -a$ abbiamo invece $x = y$, e quindi dalla terza delle equazioni sopra

$$x \left(\left(a - \frac{E^2}{a} \right) + (a + E) \right) = 0 \Rightarrow \frac{E^2}{a^2} - \frac{E}{a} - 2 = 0 \quad (34)$$

perché $x \neq 0$. Le soluzioni dell'equazione per E sono

$$E = \frac{1 \pm 3}{2} a = \begin{cases} 2a \\ -a \end{cases} \quad (35)$$

Il valore $E = -a$ è stato già considerato. Il terzo autovalore per l'energia è pertanto $E = -2a$ e il corrispondente autovettore, che è lo stato fondamentale per $a < 0$, è

$$\psi_{2a;0} = \frac{1}{\sqrt{3}} (|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle) \quad (36)$$

corrispondente alla soluzione $x = y = z$.

- c) Qual'è il valore medio di X nello stato fondamentale? Il valore medio di X sullo stato fondamentale è

$$\begin{aligned}\langle X \rangle &= \frac{1}{3} (\langle 1| + \langle 2| + \langle 3|) X (|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle) \\ &= \frac{1}{3} (1 + 2 + 3) \delta = 2 \delta\end{aligned}\quad (37)$$

- d) Al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato ψ_0 . Qual'è la probabilità che al tempo $t > 0$ il sistema si trovi ancora nello stato ψ_0 ?

Scriviamo ψ_0 come combinazione lineare della base degli autovettori dell'energia

$$\psi_0 = \psi_{2a;0} \langle \psi_{2a;0}, \psi_0 \rangle + \psi_{-a;1} \langle \psi_{-a;1}, \psi_0 \rangle + \psi_{-a;2} \langle \psi_{-a;2}, \psi_0 \rangle \quad (38)$$

Poiché

$$\begin{aligned}\langle \psi_{2a;0}, \psi_0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (1 + i\sqrt{3}) & \langle \psi_{-a;1}, \psi_0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \langle \psi_{-a;2}, \psi_0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} (1 - 2\sqrt{3}i)\end{aligned}\quad (39)$$

Quindi

$$\psi_0 = \psi_{2a;0} \frac{1}{\sqrt{3}} (1 + i\sqrt{3}) + \psi_{-a;1} \frac{1}{\sqrt{2}} + \psi_{-a;2} \frac{1}{\sqrt{6}} (1 - 2\sqrt{3}i)$$

Al tempo t il sistema si troverà quindi nello stato

$$\begin{aligned}\psi(t) &= e^{-i\frac{2a}{\hbar}t} \psi_{2a;0} \frac{1}{\sqrt{3}} (1 + i\sqrt{3}) + \\ &+ e^{i\frac{a}{\hbar}t} \psi_{-a;1} \frac{1}{\sqrt{2}} + e^{i\frac{a}{\hbar}t} \psi_{-a;2} \frac{1}{\sqrt{6}} (1 - 2\sqrt{3}i)\end{aligned}$$

L'ampiezza nello stato ψ_0 è quindi

$$\begin{aligned}\langle \psi_0, \psi(t) \rangle &= e^{-i\frac{2a}{\hbar}t} \frac{1}{3} |(1 + i\sqrt{3})|^2 + e^{i\frac{a}{\hbar}t} \frac{1}{2} + e^{i\frac{a}{\hbar}t} \frac{1}{6} |1 - 2\sqrt{3}i|^2 = \\ &= e^{-i\frac{2a}{\hbar}t} \frac{4}{3} + e^{i\frac{a}{\hbar}t} \left(\frac{1}{2} + \frac{13}{6} \right) = \\ &= e^{-i\frac{2a}{\hbar}t} \frac{4}{3} + e^{i\frac{a}{\hbar}t} \frac{8}{3}\end{aligned}$$

La probabilità richiesta è quindi

$$\begin{aligned}
 P(t) &= \frac{1}{16} \left| e^{-i \frac{2a}{\hbar} t} \frac{4}{3} + e^{i \frac{a}{\hbar} t} \frac{8}{3} \right|^2 = \\
 &= \frac{1}{16} \left(\frac{16 + 64}{9} + 2 \frac{32}{9} \cos \frac{3at}{\hbar} \right) = \\
 &= \frac{1}{9} \left(5 + 4 \cos \frac{3at}{\hbar} \right)
 \end{aligned}$$

- e) Al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato ψ_0 . Qual'è il valore medio di X al tempo $t > 0$?

Lo stato $\psi(t)$ nella base originale degli autostati di X si scrive

$$\begin{aligned}
 \psi(t) &= \left(e^{-i \frac{2a}{\hbar} t} \frac{1}{3} (1 + i\sqrt{3}) + \right. \\
 &\quad \left. + e^{i \frac{a}{\hbar} t} \frac{1}{2} + e^{i \frac{a}{\hbar} t} \frac{1}{6} (1 - 2\sqrt{3}i) \right) |1\rangle + \\
 &\quad + \left(e^{-i \frac{2a}{\hbar} t} \frac{1}{3} (1 + i\sqrt{3}) - e^{i \frac{a}{\hbar} t} \frac{2}{6} (1 - 2\sqrt{3}i) \right) |2\rangle + \\
 &\quad + \left(e^{-i \frac{2a}{\hbar} t} \frac{1}{3} (1 + i\sqrt{3}) + \right. \\
 &\quad \left. - e^{i \frac{a}{\hbar} t} \frac{1}{2} + e^{i \frac{a}{\hbar} t} \frac{1}{6} (1 - 2\sqrt{3}i) \right) |3\rangle = \\
 &= \frac{1}{3} \left(e^{-i \frac{2a}{\hbar} t} (1 + i\sqrt{3}) + e^{i \frac{a}{\hbar} t} (2 - \sqrt{3}i) \right) |1\rangle + \\
 &\quad + \frac{1}{3} \left(e^{-i \frac{2a}{\hbar} t} (1 + i\sqrt{3}) - e^{i \frac{a}{\hbar} t} (1 - 2\sqrt{3}i) \right) |2\rangle + \\
 &\quad + \frac{1}{3} (1 + i\sqrt{3}) \left(e^{-i \frac{2a}{\hbar} t} - e^{i \frac{a}{\hbar} t} \right) |3\rangle
 \end{aligned}$$

Il valore medio di X sullo stato $\psi(t)$ è

$$\begin{aligned}
 \langle X(t) \rangle &= \frac{1}{4} \langle \psi(t), X \psi(t) \rangle = \frac{\delta}{36} \left[\left| e^{-i \frac{2a}{\hbar} t} (1 + i\sqrt{3}) + e^{i \frac{a}{\hbar} t} (2 - \sqrt{3}i) \right|^2 + \right. \\
 &\quad + 2 \left| e^{-i \frac{2a}{\hbar} t} (1 + i\sqrt{3}) - e^{i \frac{a}{\hbar} t} (1 - 2\sqrt{3}i) \right|^2 + \\
 &\quad \left. + 3 \left| (1 + i\sqrt{3}) (e^{-i \frac{2a}{\hbar} t} - e^{i \frac{a}{\hbar} t}) \right|^2 \right] = \\
 &= \frac{\delta}{36} \left[\left(11 - 2 \cos \frac{3at}{\hbar} + 6\sqrt{3} \sin \frac{3at}{\hbar} \right) + \right. \\
 &\quad + 2 \left(17 + 10 \cos \frac{3at}{\hbar} - 6\sqrt{3} \sin \frac{3at}{\hbar} \right) + \\
 &\quad \left. + 3 \cdot 8 \left(1 - \cos \frac{3at}{\hbar} \right) \right] = \\
 &= \frac{\delta}{12} \left[23 - 2 \cos \frac{3at}{\hbar} - 2\sqrt{3} \sin \frac{3at}{\hbar} \right]
 \end{aligned}$$

Si noti che questa formula dà $\langle X(0) \rangle = \frac{7\delta}{4}$ per $t = 0$, in accordo con quanto ottenuto al punto a).

Fisica Moderna: Corso di Laurea Scienze dei Materiali
Prova scritta: 16/07/2018

Problema 1

Lo spazio degli stati di un sistema quantistico è generato da una base ortonormale $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. L'energia in questa base è descritta dalla matrice

$$H = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove a e b sono numero reali. Sia X un osservabile che nella stessa base è descritto dalla matrice

$$X = \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \delta > 0$$

- a) Quali sono i valori medi dell'energia H e di X nello stato $\Psi = |1\rangle + \sqrt{2}|2\rangle + |3\rangle$? (Punti 6)
- b) Determinare una base ortonormali di autostati di H (Punti 8)
- c) Al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|1\rangle$. Qual'è il valore medio di X al tempo $t > 0$? (Punti 10)

Problema 2

Un elettrone di massa $m = 9.1 \cdot 10^{-31} kg$ (di cui trascuriamo lo spin) si muove liberamente sull'asse delle x rimanendo confinato nell'intervallo $0 \leq x \leq L$, con $L = 10^{-10} metri$. Al tempo $t = 0$ la funzione d'onda della particella è

$$\psi_0(x) = \sqrt{2} \sin \frac{\pi x}{L} + \sqrt{3} i \sin \frac{3 \pi x}{L}$$

- a) Qual'è il valore medio dell'energia in questo stato in elettronvolts? (Punti 4)
- b) Qual'è la probabilità che al tempo $t = 7 \cdot 10^{-18} sec$ la particella si trovi nello stato $\psi_0(x)$? (Punti 6)

Problema 1

- a) La norma di ψ_0 è

$$\langle \psi_0, \psi_0 \rangle = 1 + 2 + 1 = 4$$

Il valore medio dell'energia

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \frac{1}{4} \langle \psi_0, H \psi_0 \rangle = \frac{1}{4} (1, \sqrt{2}, 1) \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{4} (1, \sqrt{2}, 1) \begin{pmatrix} \sqrt{2}a + b \\ a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\sqrt{2}a + b) \end{aligned}$$

Il valore medio di X

$$\langle X \rangle = \frac{1}{4} \langle \psi_0, X \psi_0 \rangle = \frac{\delta}{4} (1 + 2 \cdot 2 + 3) = 2$$

- b) Sia

$$\psi_E = x |1\rangle + y |2\rangle + z |3\rangle$$

un autovettore dell'energia di autovalore E . Abbiamo

$$\begin{aligned} ay + bz &= Ex \\ ax &= Ey \\ bx &= Ez \end{aligned}$$

Supponiamo $E \neq 0$: in questo caso

$$y = \frac{a}{E} x \quad z = \frac{b}{E} x \Rightarrow E^2 = a^2 + b^2$$

ovvero, in corrispondenza dei due autovalori

$$E_{\pm} = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$$

abbiamo i due autovettori normalizzati

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle \pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} |2\rangle \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} |3\rangle \right)$$

L'autovettore normalizzato corrispondente all'autovalore

$$E = 0$$

è invece

$$x = 0 \quad y = -\frac{b}{a} z$$

ovvero

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-b|2\rangle + a|3\rangle)$$

- c) Lo stato $|1\rangle$ nella base degli autostati di H si scrive

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \psi_0 \langle \psi_0 | 1 \rangle + \psi_+ \langle \psi_+ | 1 \rangle + \psi_- \langle \psi_- | 1 \rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_+ + \psi_-) \end{aligned}$$

Lo stato al tempo t sarà

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-\frac{i}{\hbar} E_+ t} \psi_+ + e^{-\frac{i}{\hbar} E_- t} \psi_-) = \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{i}{\hbar} E_+ t} \left(|1\rangle + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} |2\rangle + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} |3\rangle \right) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{i}{\hbar} E_- t} \left(|1\rangle - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} |2\rangle - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} |3\rangle \right) \right] = \\ &= \cos \frac{t \sqrt{a^2 + b^2}}{\hbar} |1\rangle + \\ &\quad - \frac{ia}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \frac{t \sqrt{a^2 + b^2}}{\hbar} |2\rangle - \frac{ib}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \frac{t \sqrt{a^2 + b^2}}{\hbar} |3\rangle \end{aligned}$$

Il valore medio di X sullo stato $\psi(t)$ è

$$\begin{aligned} \langle X(t) \rangle &= \delta \left[\cos^2 \frac{t \sqrt{a^2 + b^2}}{\hbar} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2a^2 + 3b^2}{a^2 + b^2} \sin^2 \frac{t \sqrt{a^2 + b^2}}{\hbar} \right] \end{aligned}$$

Problema 2

- a) Qual'è il valore medio dell'energia in questo stato in elettronvolts? (Punti 4)

Il valore medio dell'energia è

$$\langle H \rangle = \frac{2E_1 + 3E_3}{5} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \frac{2 + 27}{5} = 218.3 \text{ eV}$$

- b) Qual'è la probabilità che al tempo $t > 0$ la particella si trovi nello stato $\psi_0(x)$? (Punti 6) Lo stato al tempo t è

$$\psi_0(t) = \sqrt{2} e^{-i \frac{E_1 t}{\hbar}} \psi_1 + \sqrt{3} i e^{-i \frac{E_3 t}{\hbar}} \psi_3$$

per cui

$$\langle \psi_0, \psi_0(t) \rangle = 2 e^{-i \frac{E_1 t}{\hbar}} + 3 e^{-i \frac{E_3 t}{\hbar}}$$

e la probabilità richiesta

$$P(t) = \frac{|2 e^{-i \frac{E_1 t}{\hbar}} + 3 e^{-i \frac{E_3 t}{\hbar}}|^2}{25} = \frac{13 + 12 \cos \frac{8\pi^2 \hbar t}{2mL^2}}{25}$$
$$P(7 \cdot 10^{-18} \text{ sec}) = 0.04$$