

Esercizi di Elettromagnetismo

Anni accademici 2015-17

Camillo Imbimbo

*Dipartimento di Fisica dell'Università di Genova
Via Dodecaneso, I-16136, Genova, Italia*

Riferimenti bibliografici

- The Feynman lectures on physics: R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M. Sands, Vol. II (Addison-Wesley, Reading MA, 1964). (Traduzione italiana: La fisica di Feynman, Inter European Edition, 1975).
- La fisica di Berkeley, Vol. 2, “Elettricità e Magnetismo” (Zanichelli, Bologna, 1971).
- Classical Electromagnetism, Richard Fitzpatrick:
<http://farside.ph.utexas.edu/teaching/em/lectures/lectures.html>

Più avanzati:

- Teoria dei Campi: L. D. Landau, E. Lifšits, Corso di Fisica Teorica, Vol. 2 (Editori Riuniti-Edizioni Mir, 1976).
- Elettrodinamica dei mezzi continui: L. D. Landau, E. Lifšits, Corso di Fisica Teorica, Vol. 8 (Editori Riuniti-Edizioni Mir, 1976).

Indice

1	Le equazioni di Maxwell	6
1.1	Le equazioni di Maxwell in forma integrale	6
1.2	Le equazioni di Maxwell in forma differenziale	7
1.3	Le unità di misura: convenzioni e fatti fisici	7
2	Elettrostatica nel vuoto	9
2.1	Il campo di una lastra uniformemente carica	9
2.2	Il campo di un guscio sferico carico	10
2.3	Il campo di un guscio cilindrico infinito carico	10
2.4	Il campo di un disco uniformemente carico	11
2.5	Il campo prodotto da una sfera con densità di carica $\propto \cos \theta$	11
2.6	Elettrostatica per conduttori	13
2.6.1	Problema con potenziali fissati	13
2.6.2	La matrice “estesa” delle capacità	17
2.6.3	Problema con cariche fissate	18
2.7	Capacità	20
2.7.1	Matrice delle capacità e capacità relativa	20
2.7.2	Matrice di capacità per due conduttori lontani	21
2.7.3	La matrice delle capacità di un condensatore sferico	24
2.7.4	Capacità di un condensatore cilindrico	26
2.8	Il metodo delle immagini	27
2.8.1	Carica in presenza di un piano conduttore	27
2.8.2	Carica in presenza di sfera conduttrice	29
2.8.3	Sfera conduttrice in campo elettrico uniforme	32
2.8.4	Filo carico in presenza di cilindro conduttore	35
2.8.5	Cilindri conduttori paralleli	36
2.9	Le inversioni conformi dell’equazione di Laplace	39
2.9.1	Inversioni conformi e campi di multipolo	41
2.9.2	Campo di un distribuzione di carica su una sfera	43
2.9.3	Metodo delle immagini ed inversioni conformi	46
2.9.4	Due conduttori sferici lontani	48
2.10	Effetto punta	54
2.11	Cilindro conduttore in campo elettrico uniforme	61
2.12	L’equazione di Poisson in una dimensione	63
2.12.1	$\epsilon \ll 1$	67
2.12.2	$\epsilon \rightarrow 1^-$	70

2.13	Il campo elettrico di dipolo e di quadrupolo	71
2.14	Plasmi	74
2.15	Energia elettrostatica	76
2.15.1	Energia di cristallo ionico	76
3	I dielettrici	77
3.1	Le equazioni dell'elettrostatica nei dielettrici	77
3.2	Le condizioni al contorno per E e D	79
3.3	Il campo elettrico di una sfera uniformemente polarizzata: metodo 1	79
3.4	La sfera uniformemente polarizzata: condizioni al contorno . .	80
3.5	Sfera con polarizzazione $\vec{P}(\vec{x}) = k\vec{x}$	82
3.6	Guscio sferico con polarizzazione $\vec{P}(\vec{x}) = k\frac{\vec{x}}{ \vec{x} ^2}$	82
3.7	Carica in presenza di un dielettrico	83
3.8	Sfera dielettrica in campo elettrico uniforme	84
3.9	Equazione di Clausius-Mossotti per dielettrici	85
3.10	Un modello classico per la polarizzabilità atomica	87
4	Magnetostatica	88
4.1	Il potenziale vettore di un filo rettilineo	88
4.2	Il potenziale vettore di un solenoide infinito	89
4.3	Il campo di dipolo magnetico	92
4.4	Campo di un guscio sferico rotante	92
4.4.1	Medodo alternativo	95
4.5	Campo di due densità di carica cilindriche parallele e sovrapposte	97
4.6	Il campo di un solenoide finito lungo l'asse	99
5	Moto in campi elettromagnetici	101
5.1	Moto in campi elettrico e magnetico ortogonali e uniformi . .	101
6	Magnetismo nella materia	102
6.1	Magnetizzazione	102
6.2	Condizioni al contorno per B ed H	107
6.3	Sfera uniformemente magnetizzata	107
6.4	Ancora sulla superficie sferica carica ruotante	108
6.5	Circuiti magnetici	109

7	La legge del flusso	114
7.1	La compressione del flusso magnetico	116
7.2	La bobina di Rogowski	117
7.3	Una barra conduttrice che scivola in un campo magnetico . . .	118
7.4	Il campo all'interno di un solenoide cilindrico infinito percorso da corrente dipendente dal tempo	119
7.4.1	Corrente di frequenza fissata	123
7.5	Il campo all'esterno di un solenoide infinito percorso da cor- rente dipendente dal tempo (Esercizio Avanzato)	124
7.5.1	Una soluzione singolare	124
7.5.2	La soluzione singolare armonica	126
7.5.3	Il campo nella regione esterna al solenoide	129
8	Energia ed impulso del campo elettromagnetico	131
9	Onde	134
9.1	Un piano infinito percorso da corrente dipendente dal tempo .	134
9.2	Un filo rettilineo infinito percorso da corrente dipendente dal tempo (Esercizio Avanzato)	139
9.3	Equazioni di Maxwell nei dielettrici	140
9.4	Onde nei dielettrici	141
9.4.1	Coefficiente di assorbimento	142
9.4.2	Indice di rifrazione di una miscela	143
9.5	Onde nei metalli	143
9.5.1	Limite di bassa frequenza	144
9.5.2	Limite di alta frequenza	148
9.6	Riflessione e rifrazione	148
9.6.1	Riflessione sui metalli	154
9.6.2	Riflessione totale interna	154
9.6.3	Riflessione e rifrazione in materia con permeabilità ma- gnetica diversa dal vuoto	155
10	Ottica geometrica	158
10.1	L'equazione dell'iconale	158
10.2	L'equazione dei raggi	162
10.3	Matrice di trasmissione di un sistema ottico con simmetria assiale per raggi parassiali	164
10.3.1	Propagazione nello spazio libero	165

10.3.2	Rifrazione attraverso interfaccia planare tra due dielettrici	166
10.3.3	Lente sferica	166
10.3.4	Lente sottile	167
10.3.5	Lenti spesse	169
10.3.6	Matrice di trasmissione per fasci sottili con simmetria assiale: caso generale (Esercizio avanzato)	171
11	Diffrazione	177
11.1	Diffrazione di Fraunhofer	179
11.1.1	Fenditura verticale	182
11.1.2	Diffrazione da una grata	184
11.2	Diffrazione di Fresnel	184
11.3	Apertura circolare: confronto tra approssimazioni di Fraunhofer e Fresnel	188

1 Le equazioni di Maxwell

1.1 Le equazioni di Maxwell in forma integrale

$$\begin{aligned}
 \Phi_S(E) &= \frac{Q_V}{\epsilon_0} & \partial V &= S \\
 \Phi_S(B) &= 0 & \partial S &= 0 \\
 \int_C d\vec{l} \cdot \vec{E} &= -\frac{\partial \Phi_S(B)}{\partial t} & \partial S &= C \\
 \int_C d\vec{l} \cdot \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_S(E)}{\partial t} + \frac{I_S}{\epsilon_0 c^2} & \partial S &= C
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

dove

$$\begin{aligned}
 \Phi_S(E) &\equiv \int_S d^2a \vec{n} \cdot \vec{E} \\
 \Phi_S(B) &\equiv \int_S d^2a \vec{n} \cdot \vec{B}
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

La forza esercitata dal campo elettromagnetico su una carica q che si muove con velocità \vec{v} è data dalla legge di Lorentz

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B} \tag{1.3}$$

Nel sistema di misura internazionale

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} &\equiv 10^{-7} c^2 \frac{\text{newton} \times \text{metro}^2}{\text{coulomb}^2} \approx \\ &\approx 9.0 \cdot 10^9 \frac{\text{newton} \times \text{metro}^2}{\text{coulomb}^2} = 9.0 \cdot 10^9 \frac{\text{volt} \times \text{metro}}{\text{coulomb}} \end{aligned} \quad (1.4)$$

1.2 Le equazioni di Maxwell in forma differenziale

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\epsilon_0 c^2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

La densità di forza esercitata dal campo elettromagnetico è data dalla legge di Lorentz

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (1.6)$$

1.3 Le unità di misura: convenzioni e fatti fisici

Denotiamo con $\tilde{\rho}$, $\vec{\tilde{j}}$, $\vec{\tilde{E}}$ e $\vec{\tilde{B}}$ le grandezze fisiche che compaiono nelle equazioni di Maxwell in un sistema di misura generico. Conveniamo che nel sistema di misura in questione la definizione di forza e delle altre grandezze fisiche non elettriche coincida con quella del sistema internazionale:

$$\vec{f} = \tilde{\rho} \vec{\tilde{E}} + c_L \vec{\tilde{j}} \wedge \vec{\tilde{B}} = \vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (1.7)$$

Abbiamo introdotto una costante c_L (presa uguale ad 1 nel sistema internazionale) nell'espressione per la forza magnetica di Lorentz su una carica in movimento. Deve essere

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \lambda \rho & \vec{\tilde{j}} &= \lambda \vec{j} \\ \vec{\tilde{E}} &= \frac{1}{\lambda} \vec{E} & \vec{\tilde{B}} &= \frac{1}{c_L \lambda} \vec{B} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Le equazioni di Maxwell nel sistema di misura generico si scriveranno

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0 \lambda^2} \equiv c_G \rho \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\
\vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -c_L \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \equiv c_F \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \frac{1}{c^2 c_L} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\epsilon_0 \lambda^2 c^2 c_L} = c_M \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + c_M c_G \vec{j} \quad (1.9)
\end{aligned}$$

Pertanto:

a) La scelta della costante c_G che appare nella legge di Gauss è equivalente alla scelta dell'unità di misura per la carica (ed il campo elettrico). È possibile porre c_G uguale ad 1 (come nel sistema di Gauss razionalizzato), oppure, (sistema di Gauss) uguale a 4π

$$c_G = \frac{1}{\epsilon_0 \lambda^2} = 4\pi \quad (1.10)$$

così che la legge di Coulomb diventi

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2 \hat{r}}{r^2} \quad (1.11)$$

Notiamo però che il *segno* di c_G non dipende dalla scelta dell'unità di misura della carica. Questo corrisponde al fatto, *fisico* ed indipendente dalle scelte convenzionali, che cariche uguali (opposte) si respingono (attragono).

b) Nel sistema internazionale la costante c_F che moltiplica la derivata temporale di \vec{B} nel secondo membro della legge di Faraday è posta uguale a -1 , e la costante c_L che appare nella formula per la componente magnetica della forza di Lorentz è posta uguale a 1. c_F , c_M e c_L in un sistema di misura arbitrario devono soddisfare le relazioni

$$\begin{aligned}
c_L &= -c_F \\
c_F \times c_M &= (-1) \times \frac{1}{c^2} = c_F \times \frac{1}{c^2 c_L} = -\frac{1}{c^2} \quad (1.12)
\end{aligned}$$

In particolare, è possibile cambiare il *segno* di c_F se si fa altrettanto con c_M e c_L . Pertanto il fatto che due correnti parallele (antiparallele) si attraggono (respingono) è un fatto *fisico*, indipendente dalla scelta del sistema di misura.

Nel sistema di Gauss (razionalizzato) si prende

$$c_L = \frac{1}{c} \quad c_F = -\frac{1}{c} \quad c_M = \frac{1}{c} \quad (1.13)$$

c) In definitiva l'unica costante *fisica*, cioè indipendente dal sistema di misura elettromagnetico, che compare nelle equazioni di Maxwell è la costante $\frac{1}{c^2}$. Il fatto che questa costante sia positiva corrisponde al fatto — fisico — che l'invarianza delle equazioni di Maxwell è quella di Lorentz e la segnatura dello spazio tempo è quella Minkowskiana.

2 Elettrostatica nel vuoto

$$\begin{aligned} \Phi_S(E) &= \frac{Q_V}{\epsilon_0} & \partial V &= S \\ \int_C d\vec{l} \cdot \vec{E} &= 0 & \partial S &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.1 Il campo di una lastra uniformemente carica

Una densità di carica elettrica *uniforme* ρ_0 è confinata nella regione di spazio compresa tra $x = 0$ e $x = d$. Si calcoli il campo elettrico ovunque nello spazio. Si supponga che non ci siano altre cariche neanche all'infinito.

Il campo a grande distanza dalla lastra è quello di un piano uniformemente carico con densità di carica superficiale pari a

$$\sigma = \rho_0 d \quad (2.15)$$

Pertanto

$$\vec{E}(x) = \begin{cases} \frac{\rho d}{2\epsilon_0} \vec{e}_x & x > d \\ -\frac{\rho d}{2\epsilon_0} \vec{e}_x & x < 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Per $x \in [0, d]$ usiamo il teorema di Gauss

$$\frac{\rho d}{2\epsilon_0} A + E_x(x) A = \frac{A x \rho_0}{\epsilon_0} \quad (2.17)$$

ovvero

$$\vec{E}(x) = E_x(x) \vec{e}_x = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(x - \frac{d}{2}\right) \quad 0 \leq x \leq d \quad (2.18)$$

2.2 Il campo di un guscio sferico carico

Un guscio sferico di raggi a and b , con $a < b$, è carico con densità di carica $\rho(r)$. Si calcoli il campo elettrico ovunque nello spazio. Si consideri il caso particolare in cui $\rho(r) = \rho_0 e^{-\alpha r}$.

Applicando il teorema di Gauss

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ -\frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r & a < r < b \\ -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r & r > b \end{cases} \quad (2.19)$$

dove

$$Q(r) = \int_a^r 4\pi s^2 ds \rho(s) \quad (2.20)$$

2.3 Il campo di un guscio cilindrico infinito carico

Un guscio cilindrico infinito di raggi a and b , con $a < b$, è carico con densità di carica $\lambda(\rho)$. Si calcoli il campo elettrico ovunque nello spazio.

Applicando il teorema di Gauss nell'interno del guscio cilindrico

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_a^\rho 2\pi s ds \lambda(s) h = E_\rho(\rho) 2\pi \rho h \quad (2.21)$$

otteniamo

$$\vec{E}(\rho) = E_\rho(\rho) \vec{e}_\rho = \frac{1}{2\pi\rho\epsilon_0} \int_a^\rho 2\pi s ds \lambda(s) \quad a \leq \rho \leq b \quad (2.22)$$

All'interno e all'esterno del guscio abbiamo invece

$$\vec{E}(\rho) = \begin{cases} 0 & \rho < a \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \vec{e}_\rho & \rho > b \end{cases} \quad (2.23)$$

dove

$$\lambda = \int_a^b 2\pi s ds \lambda(s) \quad (2.24)$$

2.4 Il campo di un disco uniformemente carico

Si calcoli il campo elettrico prodotto da un disco di raggio R e densità di carica σ uniforme nei punti P posti sull'asse ortogonale al disco passante per il centro. Si verifichi che quando P si trova ad una distanza $|z|$ dal centro del disco il campo si riduce a quello di una carica puntiforme mentre per $|z| \ll R$ il campo è quello di un piano uniformemente carico.

$$\begin{aligned} E_z(0, 0, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{d\rho 2\pi\rho\sigma z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\sigma}{4\epsilon_0} \int_0^{R^2} \frac{d\xi}{(\xi + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{z\sigma}{4\epsilon_0} \left[\frac{-2}{(\xi + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^{R^2} = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{(R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

Per $|z| \gg R$

$$E_z(0, 0, z) \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{|z|} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} \right) \right] = \frac{\sigma\pi R^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{|z|^3} \quad (2.26)$$

Per $|z| \ll R$

$$E_z(0, 0, z) \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{R} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{z^2}{R^2} \right) \right] \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \quad (2.27)$$

2.5 Il campo prodotto da una sfera con densità di carica $\propto \cos\theta$

Vogliamo calcolare il campo elettrico prodotto da una densità di carica superficiale

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta = \sigma_0 \hat{r} \cdot \hat{x} \quad (2.28)$$

posta sulla superficie di una sfera. Sia \vec{x}_P il punto *interno* ad una sfera di raggio a nel quale vogliamo calcolare il potenziale. Scegliamo il sistema di coordinate in maniera tale che

$$\vec{x}_P = (0, 0, z_P) \quad 0 \leq z_P \leq a \quad (2.29)$$

Sia \vec{x}_N il punto sulla superficie della sfera che è il “polo nord” della densità di carica (2.28): se

$$\vec{x}' = a (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (2.30)$$

è un punto generico sulla sfera, la densità di carica in \vec{x}' è

$$\sigma(\vec{x}') = \sigma_0 \frac{\vec{x}_N \cdot \vec{x}'}{a^2} \quad (2.31)$$

Attraverso una rotazione dell'asse delle z che preserva le coordinate \vec{x}_P possiamo prendere \vec{x}_N nella forma

$$\vec{x}_N = a (\sin \alpha, 0, \cos \alpha) \quad (2.32)$$

dove α è l'angolo tra \vec{x}_P e \vec{x}_N . Pertanto

$$\sigma(\vec{x}') = \sigma_0 (\sin \alpha \sin \theta \cos \phi + \cos \alpha \cos \theta) \quad (2.33)$$

La distanza tra \vec{x}_P e \vec{x}' si scrive

$$|\vec{x}_P - \vec{x}'| = a \sqrt{\sin^2 \theta + (\cos \theta - \frac{z_P}{a})^2} = a \sqrt{1 + \frac{z_P^2}{a^2} - 2 \frac{z_P}{a} \cos \theta} \quad (2.34)$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\frac{4 \pi \epsilon_0 \phi(\vec{x}_P)}{a \sigma_0} &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{d\theta \sin \theta (\sin \alpha \sin \theta \cos \phi + \cos \alpha \cos \theta)}{\sqrt{1 + \frac{z_P^2}{a^2} - 2 \frac{z_P}{a} \cos \theta}} = \\
&= 2 \pi \cos \alpha \int_0^\pi \frac{d\theta \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1 + \frac{z_P^2}{a^2} - 2 \frac{z_P}{a} \cos \theta}} = \\
&= 2 \pi \cos \alpha \int_{-1}^1 \frac{dt t}{\sqrt{1 + \frac{z_P^2}{a^2} - 2 \frac{z_P}{a} t}} = \\
&= 2 \pi \cos \alpha \frac{-(1 + \frac{z_P^2}{a^2} + \frac{z_P}{a} t) \sqrt{1 + \frac{z_P^2}{a^2} - 2 \frac{z_P}{a} t}}{3 \frac{z_P^2}{a^2}} \Big|_{-1}^1 = \\
&= -\frac{2 \pi a^2 \cos \alpha}{3 z_P^2} \left[\left(1 + \frac{z_P^2}{a^2} + \frac{z_P}{a}\right) \left(1 - \frac{z_P}{a}\right) + \right. \\
&\quad \left. - \left(1 + \frac{z_P^2}{a^2} - \frac{z_P}{a}\right) \left(1 + \frac{z_P}{a}\right) \right] = \\
&= -\frac{2 \pi a^2 \cos \alpha}{3 z_P^2} \left[\frac{2 z_P}{a} - \frac{2 z_P}{a} - \frac{2 z_P^3}{a^3} \right] = \frac{4 \pi z_P \cos \alpha}{3 a}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

In definitiva

$$\phi(\vec{x}_P) = \frac{z_P \sigma_0 \cos \alpha}{3 \epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{3 \epsilon_0} \vec{x}_P \cdot \hat{x}_N \tag{2.36}$$

e

$$\vec{E}(\vec{x}_P) = -\frac{\sigma_0}{3 \epsilon_0} \hat{x}_N \tag{2.37}$$

2.6 Elettrostatica per conduttori

2.6.1 Problema con potenziali fissati

Si consideri una distribuzione di cariche puntiformi q_a , poste nei punti \vec{x}_a , con $a = 1, 2, \dots$, in presenza di conduttori ideali C_α aventi bordi $S_\alpha = \partial C_\alpha$,

$\alpha = 1, 2, \dots$ Il potenziale elettrostatico $\phi(\vec{x})$ soddisfa le seguenti condizioni

1. $\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = 0$ per $\vec{x} \neq \vec{x}_a$ e $\vec{x} \notin C_\alpha$
 2. $\phi(x)|_{S_\alpha} = V_\alpha = \text{costante}$
 3. $\phi(x) \rightarrow \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_a|} + \text{parte finita}$ per $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_a$
 4. $\phi(x) \rightarrow 0$ per $|\vec{x}| \rightarrow +\infty$
- (2.38)

Sotto opportune ipotesi di regolarità per C_α e S_α , è possibile dimostrare l'esistenza della funzione armonica $\phi(\vec{x})$ nella regione di spazio

$$M_3 \equiv \mathbf{R}^3 / (\cup_\alpha C_\alpha \cup_a \{\vec{x}_a\}) \quad (2.39)$$

al di fuori dei conduttori e delle cariche, che soddisfa le condizioni (2.38) con potenziali V_α fissati. La dimostrazione dell'esistenza della soluzione di (2.38) è non banale.

D'altra parte l'unicità di tale soluzione, se esiste, è dimostrabile in modo elementare: si consideri l'identità valida per una generica funzione scalare $\phi(\vec{x})$

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \phi(\vec{x})) = (\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \phi) + \phi \vec{\nabla}^2 \phi \quad (2.40)$$

Supponiamo esistano due soluzioni $\phi_1(\vec{x})$ e $\phi_2(\vec{x})$ di (2.38), e consideriamo la funzione scalare

$$\varphi(\vec{x}) \equiv \phi_1(\vec{x}) - \phi_2(\vec{x}) \quad (2.41)$$

Dalle (2.38) discende immediatamente che questa funzione soddisfa

1. $\vec{\nabla}^2 \varphi(\vec{x}) = 0$ per $\vec{x} \neq \vec{x}_a$ e $\vec{x} \notin C_\alpha$
 2. $\varphi(x)|_{S_\alpha} = 0$
 3. $\varphi(x) \rightarrow \text{finita}$ per $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_a$
 4. $\varphi(x) \rightarrow 0$ per $|\vec{x}| \rightarrow +\infty$
- (2.42)

Pertanto in M_3 vale

$$\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \varphi(\vec{x})) = (\vec{\nabla} \varphi) \cdot (\vec{\nabla} \varphi) \quad \vec{x} \in M_3 \quad (2.43)$$

Integrando su M_3 otteniamo

$$\int_{M_3} d^3\vec{x} \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \varphi(\vec{x})) = \int_{M_3} d^3\vec{x} |\vec{\nabla} \varphi|^2 \quad (2.44)$$

Applicando il teorema di Gauss al membro a sinistra otteniamo

$$\int_{\partial M_3} d^2 a \varphi \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) = \int_{M_3} d^3 \vec{x} |\vec{\nabla} \varphi|^2 \quad (2.45)$$

Il bordo ∂M_3 è composto dall'unione di: a) le superfici S_α dei conduttori C_α ; b) le sfere $S_\epsilon^{(a)}$ di raggio $\epsilon > 0$, centrate nei punti \vec{x}_a dove risiedono le cariche, con $\epsilon \rightarrow 0^+$; c) una sfera S_R di raggio R centrata nell'origine, con $R \rightarrow +\infty$. Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial M_3} d^2 a \phi \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) &= \sum_\alpha \int_{S_\alpha} d^2 a \phi \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) + \\ &+ \sum_a \int_{S_\epsilon^{(a)}} d^2 a \varphi \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) + \\ &+ \int_{S_R} d^2 a \varphi \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) = \\ &= \sum_a \int_{S_\epsilon^{(a)}} d^2 a \varphi \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) + \int_{S_R} d^2 a \varphi \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) \end{aligned} \quad (2.46)$$

perché $\varphi(x)|_{S_\alpha} = 0$. D'altronde sia $\varphi(x)$ che $\vec{\nabla} \varphi(\vec{x})$ si mantengono *limitate* su $S_\epsilon^{(a)}$ quando $\epsilon \rightarrow 0^+$, grazie alla terza equazione in (2.42). Pertanto

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{S_\epsilon^{(a)}} d^2 a \varphi \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) = 0 \quad (2.47)$$

I campi $\phi_{1,2}(x)$ sono prodotti da delle distribuzioni di carica compatte. Pertanto

$$|\vec{\nabla} \phi_{1,2}(x)| \rightarrow \frac{C}{|\vec{x}|^2} \quad \text{per } |\vec{x}| \rightarrow +\infty \quad (2.48)$$

e lo stesso per la funzione $\varphi(x) = \phi_1(x) - \phi_2(x)$. Inoltre la quarta equazione in (2.42) assicura che¹

$$\varphi(x) \rightarrow \frac{C}{|\vec{x}|} \quad \text{per } |\vec{x}| \rightarrow +\infty \quad (2.49)$$

¹Si noti che la condizione che $\phi(x)$ si annulli all'infinito è essenziale per dimostrare l'unicità della soluzione con potenziali fissati. Un semplice esempio di questa necessità è il problema di una sfera conduttrice di raggio a a potenziale fissato V_0 . Il potenziale $\phi(x) = \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$ soddisfa, per ogni valore di α le prime tre condizioni in (2.38). Analogamente $\varphi(x) = \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$ soddisfa le prime tre equazioni in (2.42), per tutti gli α . Ma non è una costante.

Quindi

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} d^2 a \varphi \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) = 0 \quad (2.50)$$

In definitiva

$$\int_{\partial M_3} d^2 a \varphi \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) = 0 \quad (2.51)$$

e quindi, dalla (2.45),

$$\int_{M_3} d^3 \vec{x} |\vec{\nabla} \varphi|^2 = 0 \quad (2.52)$$

Poiché $|\vec{\nabla} \varphi|^2$ è definita positiva, ne consegue che

$$\vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) = 0 \quad \text{per } \vec{x} \in M_3 \quad (2.53)$$

$\varphi(\vec{x})$ è dunque costante in M_3 . Ma dalla seconda delle (2.42) sappiamo che $\varphi(\vec{x})$ si annulla su S_α . Conseguentemente $\varphi(\vec{x})$ è nulla in tutto M_3

$$\varphi(\vec{x}) = 0 \quad \text{per } \vec{x} \in M_3 \quad (2.54)$$

Le due soluzioni $\phi_{1,2}$ pertanto coincidono.

Poiché la soluzione del problema (2.38) esiste ed è unica, ne consegue che fissati i potenziali V_α dei conduttori, le cariche sugli stessi conduttori sono fissate

$$Q_\alpha = \int_{S_\alpha} d^2 a \sigma(\vec{x}) = \epsilon_0 \int_{S_\alpha} d^2 a \vec{n} \cdot \vec{E}(\vec{x}) \quad (2.55)$$

Le cariche Q_α sono pertanto funzioni $Q_\alpha(V_\alpha)$ dei potenziali V_α . D'altronde è facile vedere che queste funzioni devono essere *lineari*. Lasciamo questa dimostrazione come esercizio per il lettore. Quindi

$$Q_\alpha = \sum_{\beta} C_{\alpha\beta} V_\beta \quad (2.56)$$

La matrice $C_{\alpha\beta}$ dipende soltanto dalla geometria del sistema di conduttori (e delle cariche q_a), e viene detta la matrice delle capacità del sistema di conduttori. Alcune proprietà di questa matrice sono determinate da argomenti generali².

²In particolare risulta che: a) la matrice delle capacità è simmetrica $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$; b) la matrice $C_{\alpha\beta}$ è definita positiva. In particolare $C_{\alpha\alpha} > 0$. Inoltre $C_{\alpha\beta} < 0$ per $\alpha \neq \beta$. Queste proprietà derivano dalla possibilità di scrivere l'energia U del sistema di conduttori come una forma quadratica $U = \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{2} C_{\alpha\beta} V_\alpha V_\beta$.

2.6.2 La matrice “estesa” delle capacità

Il problema a potenziali fissati è usualmente formulato con la condizione che di scegliere la costante arbitraria nella definizione di potenziale in modo che il potenziale “all’infinito” si annulli. Alternativamente, possiamo immaginare di racchiudere il sistema di conduttori con un conduttore C_∞ posto a distanza molto grande, sulla cui superficie S_∞ il potenziale assume un valore arbitrario V_∞ . In questo caso la relazione (2.56) si riscrive attraverso una matrice delle capacità *estesa* $\tilde{C}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$ dove gli indici $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ assumono il valore aggiuntivo $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = \infty$, corrispondente al conduttore C_∞ , oltre a correre sugli indici α e β . $\tilde{C}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$ contiene la sotto-matrice $C_{\alpha\beta}$, ovvero $C_{\alpha\beta} = \tilde{C}_{\alpha\beta}$, e soddisfa la condizione aggiuntiva

$$\sum_{\tilde{\beta}} \tilde{C}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = 0 \quad (2.57)$$

che riflette il fatto che aggiungere una costante al potenziale non cambia il campo elettrico e quindi le cariche. Le relazioni (2.56) si scrivono allora

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \sum_{\beta} C_{\alpha\beta} V_\beta + \tilde{C}_{\alpha\infty} V_\infty \\ Q_\infty &= \sum_{\alpha} \tilde{C}_{\alpha\infty} V_\alpha + \tilde{C}_{\infty\infty} V_\infty \end{aligned} \quad (2.58)$$

Dalla (2.57) otteniamo

$$\tilde{C}_{\alpha\infty} = - \sum_{\beta} C_{\alpha\beta} \quad \tilde{C}_{\infty\infty} = - \sum_{\beta} C_{\infty\beta} \quad (2.59)$$

Per cui

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \sum_{\beta} C_{\alpha\beta} (V_\beta - V_\infty) \\ Q_\infty &= - \sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} V_\beta - \sum_{\beta} C_{\infty\beta} V_\infty = \\ &= - \sum_{\alpha} Q_\alpha - \sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} V_\infty - \sum_{\beta} C_{\infty\beta} V_\infty = \\ &= - \sum_{\alpha} Q_\alpha - \sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} V_\infty + \sum_{\beta\alpha} C_{\alpha\beta} V_\infty = - \sum_{\alpha} Q_\alpha \end{aligned} \quad (2.60)$$

Vediamo quindi che la formulazione con la matrice estesa $\tilde{C}_{\alpha\beta}$ è del tutto equivalente alla formulazione che fa uso della sotto-matrice $C_{\alpha\beta}$, tenendo conto della sostituzione $V_\alpha \rightarrow V_\alpha - V_\infty$: i potenziali che compaiono nella (2.56) vanno cioè interpretati come quelli *relativi* all'infinito, e la carica sul conduttore all'infinito è opposta alla somma delle cariche dei conduttori al finito.

2.6.3 Problema con cariche fissate

Una variante del problema (2.38) è quella in cui le cariche sui conduttori sono date. Fisicamente questo corrisponde ad un sistema di conduttori *isolati*.

1. $\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = 0$ per $\vec{x} \neq \vec{x}_a$ e $\vec{x} \notin C_\alpha$
2. $Q_\alpha = -\epsilon_0 \int_{S_\alpha} d^2a \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{x})$
3. $\phi(x) \rightarrow \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_a|} + \text{parte finita}$ per $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_a$ (2.61)

La dimostrazione dell'unicità della soluzione di questo problema è analoga a quella del problema a potenziali fissati. Si definisca come prima la differenza delle due eventuali soluzioni

$$\varphi(\vec{x}) \equiv \phi_1(\vec{x}) - \phi_2(\vec{x}) \quad (2.62)$$

Questa funzione soddisfa le equazioni

1. $\vec{\nabla}^2 \varphi(\vec{x}) = 0$ per $\vec{x} \neq \vec{x}_a$ e $\vec{x} \notin C_\alpha$
2. $\epsilon_0 \int_{S_\alpha} d^2a \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) = 0$
3. $\varphi(x) \rightarrow \text{finita}$ per $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_a$ (2.63)

Consideriamo allora l'integrale di superficie, come nella sottosezione precedente

$$\begin{aligned} \int_{\partial M_3} d^2a \varphi \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) &= \sum_\alpha \int_{S_\alpha} d^2a \varphi \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) + \\ &+ \sum_a \int_{S_\epsilon^{(a)}} d^2a \varphi \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) + \\ &+ \int_{S_R} d^2a \varphi \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) \end{aligned} \quad (2.64)$$

$\varphi(\vec{x})$ è costante su S_α , anche se in questo caso non sappiamo se sia nullo o meno. Chiamiamo V_α questa costante:

$$\int_{S_\alpha} d^2a \varphi \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) = V_\alpha \int_{S_\alpha} d^2a \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) = 0 \quad (2.65)$$

per la seconda delle (2.63). Inoltre il contributo delle sfere che circondano le cariche si annulla nel limite $\epsilon \rightarrow 0^+$ come nel caso di potenziali fissati, perché la terza equazione in (2.63) è la stessa. Per quanto riguarda il contributo all'infinito, siccome le cariche totali dei conduttori sono fissate, per qualunque potenziale che soddisfa (2.61), vale

$$\left| \vec{\nabla} \phi(x) \right| \rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}|^2} + O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^3}\right) \quad \text{per } |\vec{x}| \rightarrow \infty \quad (2.66)$$

dove Q è la carica totale dei conduttori e delle cariche puntiformi. Quindi

$$\left| \vec{\nabla} \varphi(x) \right| \rightarrow O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^3}\right) \quad \text{per } |\vec{x}| \rightarrow \infty \quad (2.67)$$

da cui

$$\varphi(x) \rightarrow \text{costante} + O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^2}\right) \quad \text{per } |\vec{x}| \rightarrow \infty \quad (2.68)$$

Questo garantisce che

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} d^2a \varphi \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) = 0 \quad (2.69)$$

In definitiva

$$\int_{\partial M_3} d^2a \varphi \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) = 0 = \int_{M_3} d^3\vec{x} |\vec{\nabla} \varphi|^2 \quad (2.70)$$

La conclusione è che

$$\varphi(\vec{x}) = \text{costante} \quad \vec{x} \in M_3 \quad (2.71)$$

Si osservi che in questo caso non possiamo affermare che questa costante sia nulla. La ragione è che in effetti se $\phi(\vec{x})$ è una soluzione del problema a cariche fissate (2.61), $\phi(\vec{x}) + \text{costante}$ è anche una soluzione dello stesso problema. D'altra parte il campo elettrico non dipende da questa costante: quindi il campo elettrico corrispondente al problema con le cariche fissate è univocamente determinato una volta specificate le cariche.

Si osservi anche che nel problema a cariche fissate non è stato necessario specificare l'ulteriore condizione che il potenziale si annulli all'infinito, per garantire l'unicità della soluzione.

2.7 Capacità

2.7.1 Matrice delle capacità e capacità relativa

Consideriamo un sistema di due conduttori

$$\begin{aligned}Q_1 &= C_{11} V_1 + C_{12} V_2 \\Q_2 &= C_{12} V_1 + C_{22} V_2\end{aligned}\tag{2.72}$$

Supponiamo che sui due conduttori ci siano cariche uguali in modulo e opposte in segno

$$Q_1 = -Q_2\tag{2.73}$$

La capacità relativa C tra i due conduttori è definita come

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2}\tag{2.74}$$

Esprimiamo C in termini della matrice delle capacità. Dalla (2.73)

$$(C_{11} + C_{12}) V_1 + (C_{12} + C_{22}) V_2 = 0\tag{2.75}$$

ovvero

$$V_2 = -\frac{C_{11} + C_{12}}{C_{12} + C_{22}} V_1\tag{2.76}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}C &= \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{C_{11} V_1 - C_{12} \frac{C_{11} + C_{12}}{C_{12} + C_{22}} V_1}{V_1 + \frac{C_{11} + C_{12}}{C_{12} + C_{22}} V_1} = \\&= \frac{C_{11} (C_{12} + C_{22}) - C_{12} (C_{11} + C_{12})}{C_{12} + C_{22} + C_{11} + C_{12}} = \\&= \frac{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}{2 C_{12} + C_{22} + C_{11}}\end{aligned}\tag{2.77}$$

Possiamo anche esprimere C in termini degli elementi della *matrice inversa* delle capacità C_{ab}^{-1}

$$\begin{aligned}\frac{1}{C} &= \frac{V_1 - V_2}{Q_1} = \frac{(C_{11}^{-1} - C_{12}^{-1}) Q_1 - (C_{12}^{-1} - C_{22}^{-1}) Q_1}{Q_1} = \\&= C_{11}^{-1} + C_{22}^{-1} - 2 C_{12}^{-1}\end{aligned}\tag{2.78}$$

2.7.2 Matrice di capacità per due conduttori lontani

Consideriamo due conduttori di capacità C_1 e C_2 , posti ad una distanza d grande rispetto alle loro dimensioni. Nel limite di $d \rightarrow +\infty$ la matrice delle capacità diventa diagonale

$$(C)_{ab}(d) = \begin{pmatrix} C_{11}(d) & C_{12}(d) \\ C_{12}(d) & C_{22}(d) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \quad \text{per } d \rightarrow +\infty \quad (2.79)$$

Supponiamo ora d grande ma finito: se poniamo una carica Q_1 sul primo conduttore, mentre sul secondo conduttore prendiamo $Q_2 = 0$, i potenziali V_1 e V_2 sono determinati dai coefficienti della *matrice inversa* C_{ab}^{-1}

$$V_1 = C_{11}^{-1} Q_1 \quad V_2 = C_{12}^{-1} Q_1 \quad (2.80)$$

D'altronde se il conduttore 2 è scarico, il potenziale V_2 è, trascurando le dimensioni del conduttore e l'effetto della polarizzazione indotta, il potenziale coulombiano creato dalla carica Q_1 posta alla distanza d

$$V_2 \approx \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 d} \quad (2.81)$$

Quindi

$$C_{12}^{-1} = C_{21}^{-1} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d} \quad (2.82)$$

Mentre

$$C_{11}^{-1} \approx \frac{1}{C_1} \quad C_{22}^{-1} \approx \frac{1}{C_2} \quad (2.83)$$

Dunque

$$(C^{-1})_{ab}(d) \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d} & \frac{1}{C_2} \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

La matrice C_{ab} è pertanto, in questa approssimazione

$$\begin{aligned} (C)_{ab}(d) &\approx \frac{1}{\frac{1}{C_1 C_2} - \frac{1}{(4\pi\epsilon_0 d)^2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 d} \\ -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 d} & \frac{1}{C_1} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{C_1 C_2}{(4\pi\epsilon_0 d)^2}} \begin{pmatrix} C_1 & -\frac{C_1 C_2}{4\pi\epsilon_0 d} \\ -\frac{C_1 C_2}{4\pi\epsilon_0 d} & C_2 \end{pmatrix} \approx \\ &\approx \begin{pmatrix} C_1 \left(1 + \frac{C_1 C_2}{(4\pi\epsilon_0 d)^2}\right) & -\frac{C_1 C_2}{4\pi\epsilon_0 d} \\ -\frac{C_1 C_2}{4\pi\epsilon_0 d} & C_2 \left(1 + \frac{C_1 C_2}{(4\pi\epsilon_0 d)^2}\right) \end{pmatrix} \quad (2.85) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo trascurato termini superiori in $\frac{1}{d}$ che in ogni caso non sono catturati dall'approssimazione fatta. Calcoliamo la capacità relativa in questa approssimazione

$$\frac{1}{C} = C_{11}^{-1} + C_{22}^{-1} - 2 C_{12}^{-1} \approx \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{2 \pi \epsilon_0 d} \quad (2.86)$$

ovvero

$$\begin{aligned} C &\approx \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{2 \pi \epsilon_0 d}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \frac{1}{1 - \frac{C_1 C_2}{2 \pi \epsilon_0 d (C_1 + C_2)}} \approx \\ &\approx \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \left(1 + \frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_2)} \frac{1}{2 \pi \epsilon_0 d} \right) \end{aligned} \quad (2.87)$$

Come esempio, consideriamo due conduttori sferici di raggio R_1 e R_2 posti ad una distanza d . Poiché

$$C_1 = 4 \pi \epsilon_0 R_1 \quad C_2 = 4 \pi \epsilon_0 R_2 \quad (2.88)$$

la capacità relativa è per $d \gg R_1, R_2$ approssimata da

$$\frac{4 \pi \epsilon_0}{C} \approx \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{2}{d} \quad (2.89)$$

ovvero

$$\frac{C}{4 \pi \epsilon_0} \approx \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left(1 + \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)} \frac{2}{d} \right) \quad (2.90)$$

La nostra analisi ha quindi determinato la prima correzione di ordine $\frac{1}{d}$ nell'espansione in potenze di $\frac{1}{d}$ della capacità relativa $C(d)$.

Ripetiamo questa analisi nel caso di due conduttori infiniti cilindrici, paralleli, di raggi R_1 ed R_2 . In questo caso il potenziale creato dal cilindro conduttore con carica λ_1 in assenza dell'altro cilindro è

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{\lambda_1}{2 \pi \epsilon_0} \log \frac{|\vec{r} - \vec{r}_1|}{R} \quad (2.91)$$

è indeterminato a meno di una costante che non possiamo fissare dalla richiesta che il potenziale si annulli all'infinito perché il potenziale diverge all'infinito. Gli elementi della matrice delle capacità *per unità di lunghezza*

sono pertanto determinati a meno di una costante. Supponendo di porre una carica λ_1 sul primo conduttore e di collegare il secondo conduttore, scarico,

$$V_1 = C_{11}^{-1} \lambda_1 \quad V_2 = C_{12}^{-1} \lambda_1 \quad (2.92)$$

quando d è grande possiamo usare il potenziale (2.91)

$$2 \pi \epsilon_0 C_{11}^{-1} \approx -\log \frac{R_1}{R} \quad 2 \pi \epsilon_0 C_{12}^{-1} \approx -\log \frac{d}{R} \quad (2.93)$$

Si noti che in questo caso il coefficiente C_{12} non si annulla per grandi distanze. Analogamente, considerando una carica λ_2 sul secondo cilindro in presenza del conduttore 1 scarico posto a grande distanza

$$2 \pi \epsilon_0 C_{22}^{-1} \approx -\log \frac{R_2}{R} \quad 2 \pi \epsilon_0 C_{12}^{-1} \approx -\log \frac{d}{R} \quad (2.94)$$

Nella capacità relativa l'indeterminazione sul potenziale si cancella

$$\begin{aligned} \frac{2 \pi \epsilon_0}{C} &= 2 \pi \epsilon_0 (C_{11}^{-1} - C_{12}^{-1}) + 2 \pi \epsilon_0 (C_{22}^{-1} - C_{12}^{-1}) \approx \\ &\approx \log \frac{d}{R_1} + \log \frac{d}{R_2} = \log \frac{d^2}{R_1 R_2} \end{aligned} \quad (2.95)$$

Vediamo che nel caso con simmetria cilindrica la nostra approssimazione ha determinato la correzione finita al termine grande $\log d^2$ nell'espansione in potenze di $\frac{R_{1,2}}{d}$. I termini successivi, che vanno a zero per $d \rightarrow \infty$ non sono catturati da questo semplice ragionamento.

Calcoliamo ora l'energia di un sistema di due conduttori lontani, di cariche Q_1 e Q_2 . Dalla formula generale otteniamo nell'approssimazione data

$$\begin{aligned} U(d) &= \frac{1}{2} (C_{11}^{-1} Q_1^2 + C_{22}^{-1} Q_2^2 + 2 C_{12}^{-1} Q_1 Q_2) = \\ &\approx \frac{Q_1^2}{2 C_1} + \frac{Q_2^2}{2 C_2} + \frac{Q_1 Q_2}{4 \pi \epsilon_0 d} \end{aligned} \quad (2.96)$$

La forza tra i due condensatori è quindi

$$F = -\frac{\partial U(d)}{\partial d} \approx \frac{Q_1 Q_2}{4 \pi \epsilon_0 d^2} \quad (2.97)$$

come ci si aspetta a priori.

2.7.3 La matrice delle capacità di un condensatore sferico

Consideriamo due conduttori ideali, concentrici, il primo una sfera raggio r_1 ed il secondo un guscio sferico di raggio minore $r_2 > r_1$ e raggio maggiore r_3 , posti a potenziali fissati V_1 e V_2 rispettivamente. Siano Q_1 e Q_2 le rispettive cariche sui due conduttori.

Il potenziale ha la forma

$$\phi(r) = \begin{cases} V_1 & 0 \leq r \leq r_1 \\ \frac{\alpha}{r} + \phi_0 & r_1 \leq r \leq r_2 \\ V_2 & r_2 \leq r \leq r_3 \\ \frac{\beta}{r} & r \geq r_3 \end{cases} \quad (2.98)$$

Imponendo la continuità di $\phi(r)$ otteniamo

$$\phi(r) = \begin{cases} V_1 & 0 \leq r \leq r_1 \\ \frac{V_2 - V_1}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) + V_1 & r_1 \leq r \leq r_2 \\ V_2 & r_2 \leq r \leq r_3 \\ V_2 \frac{r_3}{r} & r \geq r_3 \end{cases} \quad (2.99)$$

Il campo elettrico è radiale di intensità

$$E(r) = \begin{cases} 0 & 0 \leq r < r_1 \\ \frac{V_2 - V_1}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} \frac{1}{r^2} & r_1 \leq r \leq r_2 \\ 0 & r_2 < r < r_3 \\ V_2 \frac{r_3}{r^2} & r \geq r_3 \end{cases} \quad (2.100)$$

Sia Q_1 la carica sul primo conduttore. La carica Q_2 sul secondo conduttore si scrive come

$$Q_2 = Q_2^- + Q_2^+ \quad (2.101)$$

dove Q_2^- (Q_2^+) è la carica sulla superficie interna (esterna) del guscio sferico.

Dalla (2.100) otteniamo

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= 4 \pi \epsilon_0 \frac{V_1 - V_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \\
 Q_2^- &= -4 \pi \epsilon_0 \frac{V_1 - V_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \\
 Q_2^+ &= 4 \pi \epsilon_0 V_2 r_3 \\
 Q_2 &= -4 \pi \epsilon_0 \frac{V_1 - V_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} + 4 \pi \epsilon_0 V_2 r_3
 \end{aligned} \tag{2.102}$$

La matrice dei coefficienti di capacità è quindi

$$(C)_{ab} = 4 \pi \epsilon_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} & -\frac{1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \\ -\frac{1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} & \frac{1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} + r_3 \end{pmatrix} \tag{2.103}$$

Prendiamo

$$Q_1 = -Q_2 \tag{2.104}$$

In questo caso, dalla (2.103), otteniamo

$$V_2 = 0 \tag{2.105}$$

La capacità relativa C dei due conduttori è quindi

$$C = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{4 \pi \epsilon_0}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \tag{2.106}$$

in accordo con la formula generale (2.77)

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2 C_{12}} = 4 \pi \epsilon_0 \frac{\frac{1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \left(\frac{1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} + r_3 \right) - \frac{1}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^2}}{\frac{2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} + r_3 - \frac{2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}} = \\
 &= 4 \pi \epsilon_0 \frac{\frac{1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} r_3}{r_3} = 4 \pi \epsilon_0 \frac{1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}
 \end{aligned} \tag{2.107}$$

2.7.4 Capacità di un condensatore cilindrico

Due conduttori ideali, il primo un cilindro infinito di raggio r_1 ed il secondo un guscio cilindrico con lo stesso asse del primo, di raggio interno $r_2 > r_1$ e spessore d , sono posti a potenziali fissati V_1 e V_2 rispettivamente. Siano λ_1 e λ_2 le cariche per unità di lunghezza sui due conduttori.

Il potenziale ha la forma

$$\phi(r) = \begin{cases} V_1 & 0 \leq r \leq r_1 \\ \alpha \log r + \phi_0 & r_1 \leq r \leq r_2 \\ V_2 & r_2 \leq r \leq r_2 + d \\ \beta \log r + \phi_1 & r \geq r_2 + d \end{cases} \quad (2.108)$$

Imponendo la continuità di $\phi(r)$ otteniamo

$$\phi(r) = \begin{cases} V_1 & 0 \leq r \leq r_1 \\ \frac{V_2 - V_1}{\log \frac{r_2}{r_1}} \log \frac{r}{r_1} + V_1 & r_1 \leq r \leq r_2 \\ V_2 & r_2 \leq r \leq r_2 + d \\ -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{r}{r_2 + d} + V_2 & r \geq r_2 + d \end{cases} \quad (2.109)$$

e per il campo elettrico

$$E(r) = \begin{cases} 0 & 0 \leq r < r_1 \\ -\frac{V_2 - V_1}{\log \frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{r} & r_1 \leq r \leq r_2 \\ 0 & r_2 < r < r_2 + d \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & r \geq r_2 + d \end{cases} \quad (2.110)$$

dove λ è un parametro *arbitrario*. Dobbiamo specificare il valore di λ per avere una soluzione univocamente determinata: le ipotesi del teorema di unicità per il problema a potenziali fissati in questo caso infatti non valgono. Specificamente non vale la quarta condizione nelle (2.38), in quanto, per λ generico, non possiamo imporre la condizione che il potenziale si annulli all'infinito. In questo caso pertanto la matrice delle capacità non è definita.

La capacità relativa tra i due conduttori è invece ben definita. Infatti la soluzione del problema con cariche fissate, λ_1 e λ_2 , è determinata, come nel

caso solito, a meno di una costante additiva³

$$\phi(r) = \begin{cases} V_1 & 0 \leq r \leq r_1 \\ -\frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{r}{r_1} + V_1 & r_1 \leq r \leq r_2 \\ -\frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{r_2}{r_1} + V_1 & r_2 \leq r \leq r_2 + d \\ -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{r}{r_2 + d} - \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{r_2}{r_1} + V_1 & r \geq r_2 + d \end{cases} \quad (2.111)$$

La differenza tra i potenziali dei due conduttori è

$$V_1 - V_2 = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{r_2}{r_1} \quad (2.112)$$

La capacità relativa C per unità di lunghezza è pertanto

$$C = \frac{\lambda_1}{V_1 - V_2} = 2\pi\epsilon_0 \frac{1}{\log \frac{r_2}{r_1}} \quad (2.113)$$

2.8 Il metodo delle immagini

2.8.1 Carica in presenza di un piano conduttore

La densità di carica indotta

Sia z l'asse ortogonale al piano che passa per la carica q , a la distanza di questa dal piano. Usiamo un sistema di coordinate cilindriche con centro sul piano. La carica immagine $-q$ ha coordinate $(0, 0, -a)$. Il potenziale è

$$\phi(\rho, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z+a)^2}} \right] \quad (2.114)$$

La densità di carica sul conduttore è

$$\sigma(\rho) = \epsilon_0 E_z|_{z=0} = \frac{q}{4\pi} \left[\frac{z-a}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{z+a}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \right]_{z=0} = -\frac{qa}{2\pi} \frac{1}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.115)$$

Verifichiamo che la carica totale indotta è $-q$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\rho 2\pi\rho\sigma(\rho) &= -qa \int_0^\infty \frac{d\rho\rho}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{qa}{2} \int_{a^2}^\infty \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} = \\ &= -qa \frac{1}{a} = -q \end{aligned} \quad (2.116)$$

³Come ricordato nella sottosezione 2.6.3, l'unicità, a meno di una costante additiva, della soluzione del problema di Laplace a cariche fissate non richiede che il potenziale si annulli all'infinito.

Il campo creato dalla carica indotta deve annullare il campo per $z < 0$. Quindi *deve* essere, per $z > 0$

$$\begin{aligned} \frac{q}{\sqrt{\rho_0^2 + (z+a)^2}} &= - \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\theta \sigma(\rho)}{\sqrt{z^2 + (\rho \cos \theta - \rho_0)^2 + \rho^2 \sin^2 \theta}} = \\ &= \frac{aq}{2\pi} \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\theta}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{z^2 + \rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0 \rho \cos \theta}} \end{aligned} \quad (2.117)$$

od, equivalentemente

$$\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + (|z|+1)^2}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{z^2 + \rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0 \rho \cos \theta}} \quad (2.118)$$

È relativamente agevole verificare quest'identità agli ordini più bassi nello sviluppo in potenze di ρ_0^2

$$\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + (z+1)^2}} = \frac{1}{|z|+1} - \frac{1}{2} \frac{\rho_0^2}{(|z|+1)^3} + \dots \quad (2.119)$$

Mentre

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{\rho}{(\rho^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{z^2 + \rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0 \rho \cos \theta}} &= \frac{\rho}{2\pi (\rho^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{z^2 + \rho^2}} + \\ &- \frac{\rho^2 \rho_0 \cos \theta}{2\pi (1 + \rho^2)^{\frac{3}{2}} (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \rho_0^2 \frac{\rho (\rho^2 - 2z^2 + 3\rho^2 \cos 2\theta)}{8\pi (1 + \rho^2)^{\frac{3}{2}} (\rho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \dots \end{aligned} \quad (2.120)$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{z^2 + \rho^2}} &= \frac{1}{(z^2 - 1)} \left[-\frac{\sqrt{\rho^2 + z^2}}{\sqrt{1 + \rho^2}} \right]_0^\infty = \frac{|z| - 1}{z^2 - 1} = \\ &= \frac{1}{1 + |z|} \\ &- \int_0^\infty \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\rho^2 \cos \theta}{2\pi (1 + \rho^2)^{\frac{3}{2}} (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \\ &\int_0^\infty \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\rho (\rho^2 - 2z^2 + 3\rho^2 \cos 2\theta)}{8\pi (1 + \rho^2)^{\frac{3}{2}} (\rho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1}{2(1 + |z|)^3} \end{aligned} \quad (2.121)$$

Sembra difficile calcolare direttamente l'integrale in (2.118) per ρ_0^2 arbitrario con metodi elementari.

2.8.2 Carica in presenza di sfera conduttrice

Sia R il raggio della sfera conduttrice e x_0 la distanza di una carica q dal centro della sfera. Vogliamo determinare la distanza \bar{x} lungo l'asse tra il centro della sfera e la carica dove collocare una carica immagine q' . Supponiamo dapprima che la sfera si trovi ad un *potenziale costante* $V_0 = 0$. Scegliamo il centro degli assi cartesiani nel centro della sfera, l'asse x lungo l'asse tra il centro della sfera e la carica q . Sia P un punto di coordinate $\vec{r} = (x, y, z)$. Siano r_1 ed r_2 le distanze di P rispettivamente dalla carica q nella posizione $(x_0, 0, 0)$ e dalla carica immagine q' nella posizione $(\bar{x}_0, 0, 0)$:

$$r_1 = \sqrt{(x_0 - x)^2 + y^2 + z^2} \quad r_2 = \sqrt{(x - \bar{x}_0)^2 + y^2 + z^2} \quad (2.122)$$

Per P sulla sfera deve essere

$$\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} = 0 \quad (2.123)$$

In particolare quando $r_1 = x_0 - R$ allora $r_2 = R - \bar{x}_0$:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{R - \bar{x}_0}{x_0 - R} = -\frac{q'}{q} \quad (2.124)$$

e quando $r_1 = R + x_0$, $r_2 = R + \bar{x}_0$

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{R + \bar{x}_0}{x_0 + R} = -\frac{q'}{q} \quad (2.125)$$

Pertanto

$$\bar{x}_0 = \frac{R^2}{x_0} \quad q' = -\frac{R}{x_0} q \quad (2.126)$$

Dunque

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r} - x_0 \hat{x}|} - \frac{R}{x_0} \frac{1}{|\vec{r} - \frac{R^2}{x_0} \hat{x}|} \right] \quad (2.127)$$

dove \hat{x} è il versore lungo l'asse delle x . Se P è sulla sfera $\vec{r} = R \hat{n}$

$$\phi(R \vec{n}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|R \hat{n} - x_0 \hat{x}|} - \frac{1}{|x_0 \hat{n} - R \hat{x}|} \right] = 0 \quad (2.128)$$

poiché

$$\begin{aligned} |R\hat{n} - x_0\hat{x}|^2 &= R^2 + x_0^2 - 2Rx_0\cos\theta \\ |x_0\hat{n} - R\hat{x}|^2 &= R^2 + x_0^2 - 2Rx_0\cos\theta \end{aligned} \quad (2.129)$$

dove θ è l'angolo tra \vec{r} e \hat{x} .

Se la sfera è ad un potenziale $V_0 \neq 0$ possiamo aggiungere una carica

$$q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R \quad (2.130)$$

al centro della sfera. Il potenziale diventa

$$\phi_{V_0}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r} - x_0\hat{x}|} - \frac{R}{x_0} \frac{1}{|\vec{r} - \frac{R^2}{x_0}\hat{x}|} + \frac{4\pi\epsilon_0 R V_0}{q|\vec{r}|} \right] \quad (2.131)$$

Se la sfera ha una carica fissata Q dobbiamo aggiungere, invece della carica q'' , una carica

$$q''' = -q' + Q = \frac{R}{x_0}q + Q \quad (2.132)$$

al centro della sfera. Il potenziale diventa

$$\phi_Q(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r} - x_0\hat{x}|} - \frac{R}{x_0} \frac{1}{|\vec{r} - \frac{R^2}{x_0}\hat{x}|} \right] + \frac{(Q + \frac{R}{x_0}q)}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}|} \quad (2.133)$$

Esercizio: determinare la densità superficiale di carica indotta per $V_0 = 0$.

Calcoliamo la densità di carica sulla sfera nel caso $V_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{V_0=0}(\theta) &= -\epsilon_0 \frac{\partial\phi}{\partial r} \Big|_{|\vec{r}|=R} = \frac{q}{4\pi} \left[\frac{R - x_0\cos\theta}{|\vec{r} - x_0\hat{x}|^3} - \frac{R}{x_0} \frac{R - \frac{R^2}{x_0}\cos\theta}{|\vec{r} - \frac{R^2}{x_0}\hat{x}|^3} \right] \\ &= \frac{qR}{4\pi|R\hat{n} - x_0\hat{x}|^3} \left[1 - \frac{x_0^2}{R^2} \right] = \\ &= \frac{q}{4\pi R^2} \frac{\left[1 - \frac{x_0^2}{R^2} \right]}{\left| 1 + \frac{x_0^2}{R^2} - 2\frac{x_0}{R}\cos\theta \right|^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (2.134)$$

Il rapporto tra le densità superficiali di carica nel punto più vicino e più lontano dalla carica q è

$$\frac{\sigma(\theta = 0)}{\sigma(\theta = \pi)} = \left(\frac{R + x_0}{R - x_0} \right)^3 \quad (2.135)$$

Esercizio: si calcoli il momento di dipolo indotto per $Q = 0$.

Consideriamo il caso di una sfera metallica neutra isolata, con carica fissata $Q = 0$:

$$\phi_{Q=0}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r} - x_0 \hat{x}|} - \frac{R}{x_0} \frac{1}{|\vec{r} - \frac{R^2}{x_0} \hat{x}|} + \frac{R}{x_0} \frac{1}{|\vec{r}|} \right] \quad (2.136)$$

Il momento di dipolo indotto sulla sfera è quello delle due cariche immagine

$$\vec{p} = -\frac{R}{x_0} q \frac{R^2}{x_0} \hat{x} = -\frac{R^3 q}{x_0^2} \hat{x} \quad (2.137)$$

Verifichiamo questo risultato a partire dalla densità di carica superficiale:

$$\begin{aligned} \sigma_{Q=0}(\theta) = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi_{Q=0}(r)}{\partial r} \Big|_{r=R} &= \frac{q}{4\pi R^2} \left[\frac{\left[1 - \frac{x_0^2}{R^2}\right]}{\left|1 + \frac{x_0^2}{R^2} - 2 \frac{x_0}{R} \cos \theta\right|^{\frac{3}{2}}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{R}{x_0} \right] \end{aligned} \quad (2.138)$$

Il momento di dipolo di questa distribuzione di carica è diretto lungo \hat{x} , quindi

$$\begin{aligned} p &= 2\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta R^2 \sigma_{Q=0}(\theta) R \cos \theta = \\ &= \frac{qR}{2} \int_{-1}^1 dt t \left[\frac{\left(1 - \frac{x_0^2}{R^2}\right)}{\left[1 + \frac{x_0^2}{R^2} - 2 \frac{x_0}{R} t\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{R}{x_0} \right] = \\ &= \frac{qR}{2} \left(-\frac{2R^2}{x_0^2}\right) = -\frac{qR^3}{x_0^2} \end{aligned} \quad (2.139)$$

Esercizio: determinare la forza esercitata dalla carica indotta sulla carica q .

Nel caso di potenziale fissato:

$$\begin{aligned} F_q &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{R x_0}{|x_0^2 - R^2|^2} + \frac{4\pi\epsilon_0 R V_0}{q x_0^2} \right] = \\ &= \begin{cases} -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{x_0^3} + \frac{q R V_0}{x_0^2} & \text{per } \frac{x_0}{R} \gg 1 \\ -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x_0 - R)^2} & \text{per } \frac{x_0}{R} \approx 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.140)$$

Nel caso di carica fissata Q :

$$\begin{aligned} F_q &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{Rx_0}{|x_0^2 - R^2|^2} + \frac{R}{x_0^3} \right] + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 x_0^2} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x_0^2} \left[Q - \frac{qRx_0^3}{|x_0^2 - R^2|^2} + \frac{Rq}{x_0} \right] \end{aligned} \quad (2.141)$$

Per $x_0 \gg R$ otteniamo naturalmente

$$F_q \approx \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 x_0^2} \quad \text{per } \frac{x_0}{R} \gg 1 \quad (2.142)$$

Per $x_0 \approx R$

$$\begin{aligned} F_q \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x_0^2} \left[-q \frac{R^2}{4|x_0 - R|^2} - \frac{qR}{2|x_0 - R|} + Q + q + \right. \\ \left. + O(|x_0 - R|) \right] \end{aligned} \quad (2.143)$$

Notiamo che anche quando il segno di Q e q è lo stesso, per posizioni della carica sufficientemente vicine alla sfera, la forza diventa *attrattiva*. Questa distanza critica è data da

$$x_0 - R \sim \frac{R}{2} \sqrt{\frac{q}{Q}} \quad (2.144)$$

Nel caso di elettroni nei metalli, questo effetto spiega la resistenza ad rimuovere un elettrone dalla superficie, nonostante la repulsione delle altre cariche.

2.8.3 Sfera conduttrice in campo elettrico uniforme

Consideriamo una sfera conduttrice posta a potenziale nullo⁴ di raggio R il cui centro coincide con l'origine del sistema di coordinate posta nel campo di due cariche opposte $\pm Q$ poste lungo l'asse delle x nelle posizioni $\mp a$. Le due cariche immagine $\mp Q \frac{R}{a}$ saranno poste lungo l'asse delle x nelle posizioni

⁴Poiché la carica immagine totale è nulla non c'è differenza in questo problema tra il caso in cui la sfera conduttrice sia a potenziale fissato nullo o a carica fissata nulla.

$\mp \frac{R^2}{a}$. Il potenziale è

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{|\vec{r} + a\hat{x}|} - \frac{Q}{|\vec{r} - a\hat{x}|} + \frac{R}{a} \frac{Q}{|\vec{r} - \frac{R^2}{a}\hat{x}|} - \frac{R}{a} \frac{Q}{|\vec{r} + \frac{R^2}{a}\hat{x}|} \right] \quad (2.145)$$

Consideriamo il limite di questa espressione per

$$a \gg R \quad a \gg |\vec{r}| \quad (2.146)$$

per il quale valgono le approssimazioni

$$\begin{aligned} \frac{1}{|a\hat{x} \pm \vec{r}|} &= \frac{1}{a} \mp \frac{\vec{r} \cdot \hat{x}}{a^2} + O\left(\frac{|\vec{r}|^2}{a^2}\right) \\ \frac{1}{|\vec{r} \pm \frac{R^2}{a}\hat{x}|} &= \frac{1}{|\vec{r}|} \mp \frac{R^2}{a} \frac{\hat{x} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} + O\left(\frac{R^2}{a^2}\right) \end{aligned} \quad (2.147)$$

che sostituite nella (2.145) danno

$$\phi(\vec{r}) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{2\vec{r} \cdot \hat{x}}{a^2} + \frac{R}{a} \frac{2\vec{r} \cdot \hat{x}}{r^3} \frac{R^2}{a} \right] \quad (2.148)$$

Il campo prodotto dalle cariche Q diventa quindi in questo limite un campo \vec{E}_0 uniforme sulla sfera pari a

$$\vec{E}_0 = E_0 \hat{x} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \hat{x} \quad (2.149)$$

Prendendo quindi $a \rightarrow \infty$ e allo stesso tempo $Q \rightarrow \infty$, mantenendo $E_0 = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$ costante, otteniamo per il campo al di fuori della sfera conduttrice immersa in un campo uniforme \vec{E}_0 il risultato

$$\phi(\vec{r}) = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + R^3 \frac{\vec{E}_0 \cdot \vec{r}}{r^3} = -E_0 r \cos\theta + \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} \quad (2.150)$$

Il campo indotto è pertanto quello di un dipolo $\vec{p} = p\hat{x}$, con⁵

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0 \quad (2.151)$$

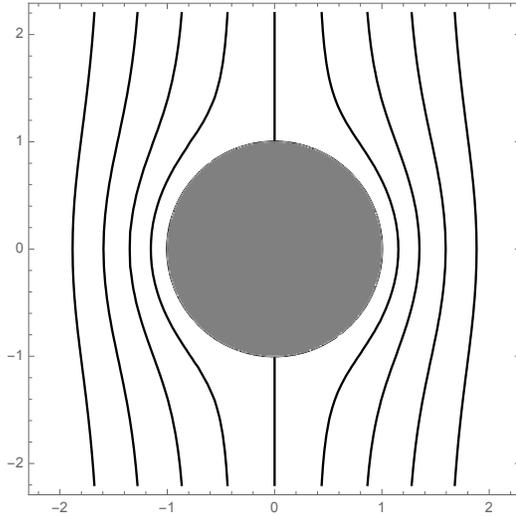


Figura 1: *Il potenziale per una sfera conduttrice in campo elettrico uniforme.*

Le linee equipotenziali in un piano parallelo al campo elettrico esterno che passa per il centro della sfera sono raffigurate in Fig. 1. La *polarizzabilità* della sfera conduttrice è dunque $4 \pi \epsilon_0 R^3$.

Esercizio: determinare la densità di carica indotta.

$$\sigma(\theta) = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=R} = \epsilon_0 E_0 \left(\cos \theta + \frac{2 R^3 \cos \theta}{R^3} \right) = 3 \epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (2.152)$$

Poiché il campo prodotto dalla densità di carica indotta del problema precedente deve annullare esattamente il campo all'interno del conduttore, il campo elettrico prodotto da una densità di carica sferica

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta = \sigma_0 \hat{r} \cdot \hat{x} \quad (2.153)$$

è costante all'interno della stessa ed è pari a

$$\vec{E}_\sigma = -\frac{\sigma_0}{3 \epsilon_0} \hat{x} \quad (2.154)$$

Riotteniamo in questa maniera il risultato ricavato in maniera molto più laboriosa nella sezione (2.5) utilizzando la formula di Coulomb.

⁵Come verifica della (2.151) si osservi che per $a \gg R$, le due cariche immagini formano un dipolo lungo l'asse delle x di momento $\frac{RQ}{a} \times \frac{2R^2}{a} = R^3 4 \pi \epsilon_0 E_0$.

2.8.4 Filo carico in presenza di cilindro conduttore

Consideriamo un cilindro conduttore, con asse coincidente con quello dell'asse z , di raggio R in presenza di un filo carico parallelo all'asse z , posto a distanza x_0 dall'asse del cilindro. Sia λ la carica per unità di lunghezza del filo carico. $\vec{x}_0 = x_0 \hat{x}$ la posizione del filo. Poniamo un filo immagine dentro il cilindro conduttore nella posizione $\vec{x}_0 = \frac{R^2}{x_0} \hat{x}$. Il potenziale nel punto

$$\vec{x} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z} \quad (2.155)$$

Il potenziale risultante è

$$\phi_0(\vec{x}) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log |\rho \hat{\rho} - x_0 \hat{x}| - \frac{\bar{\lambda}}{2\pi\epsilon_0} \log |\rho \hat{\rho} - \bar{x}_0 \hat{x}| \quad (2.156)$$

Poiché

$$|R \hat{\rho} - \bar{x}_0 \hat{x}|^2 = R^2 + \frac{R^4}{x_0^2} - 2 \frac{R^3}{x_0} \hat{\rho} \cdot \hat{x} = \frac{R^2}{x_0^2} |\rho \hat{\rho} - x_0 \hat{x}|^2 \quad (2.157)$$

Il potenziale sulla superficie del cilindro è costante se

$$\bar{\lambda} = -\lambda \quad (2.158)$$

e vale

$$\phi_0(R \hat{\rho}) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{x_0}{R} \quad (2.159)$$

Possiamo porre un filo immagine di carica arbitraria anche al centro del cilindro, mantenendo costante il valore del potenziale sulla superficie del conduttore. Otteniamo così la soluzione

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{|\rho \hat{\rho} - x_0 \hat{x}|}{|\rho \hat{\rho} - \bar{x}_0 \hat{x}|} - \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{\rho}{\rho_0} \quad (2.160)$$

Il valore del potenziale sul bordo del cilindro conduttore è

$$\phi(R \hat{\rho}) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{x_0}{R} - \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{R}{\rho_0} \quad (2.161)$$

Se fissiamo il valore del potenziale sul cilindro

$$V_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{x_0}{R} - \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{R}{\rho_0} \quad (2.162)$$

arriviamo alla soluzione

$$\phi_{V_0}(\vec{x}) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{|\rho\hat{\rho} - x_0\hat{x}|}{|\rho\hat{\rho} - \bar{x}_0\hat{x}|} \frac{R}{x_0} - \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{\rho}{R} + V_0 \quad (2.163)$$

La soluzione contiene ancora un parametro arbitrario λ_0 : la soluzione a potenziali fissati non è unica in questo caso. Abbiamo spiegato nella sezione (2.7.4) che questa circostanza è collegata col fatto che, diversamente dal caso della sfera, per $\lambda_0 \neq 0$ non è possibile scegliere la costante additiva arbitraria del potenziale in maniera tale che il potenziale si annulli all'infinito. Il potenziale diverge a $\rho \rightarrow \infty$ per $\lambda_0 \neq 0$. Se

$$\lambda_0 = 0 \quad (2.164)$$

il limite del potenziale per $\rho \rightarrow \infty$ rimane finito

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \phi_{V_0}(\vec{x}) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{R}{x_0} + V_0 \quad (2.165)$$

Questa è la soluzione “a potenziale fissato”. La carica indotta sul conduttore è $-\lambda$.

Il problema con carica fissata è invece determinato a meno di una costante arbitraria. Se la carica totale del conduttore è λ_c dobbiamo prendere

$$\lambda_0 = \lambda_c + \lambda \quad (2.166)$$

e otteniamo la soluzione a “carica fissata”

$$\phi_{\lambda_c}(\vec{x}) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{|\rho\hat{\rho} - x_0\hat{x}|}{|\rho\hat{\rho} - \bar{x}_0\hat{x}|} \frac{R}{x_0} - \frac{\lambda_c + \lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{\rho}{R} \quad (2.167)$$

2.8.5 Cilindri conduttori paralleli

Consideriamo due cilindri conduttori paralleli di raggi R_1 ed R_2 , con gli assi posti a distanza d . Supponiamo per il momento che i due conduttori siano esterni tra loro, ovvero che

$$d > R_1 + R_2 \quad (2.168)$$

Prendiamo l'asse del cilindro di raggio R_1 coincidente con l'asse delle z , e quella del cilindro R_2 con l'asse parallelo all'asse delle z passante per $\vec{d} = d\hat{x}$.

Cerchiamo la soluzione ponendo due fili carichi immagine di carica opposta $\pm\lambda$ all'interno dei due cilindri

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{|\rho\hat{\rho} - x_0\hat{x}|}{|\rho\hat{\rho} - \bar{x}_0\hat{x}|} \quad (2.169)$$

Imponiamo che il filo in \bar{x}_0 sia l'immagine del filo in x_0 rispetto alle inversioni del cilindro di raggio R_1

$$x_0\bar{x}_0 = R_1^2 \quad x_0 > R_1 \quad \bar{x}_0 < R_1 \quad (2.170)$$

e che il filo in x_0 sia l'immagine del filo in \bar{x}_0 rispetto alle inversioni del cilindro di raggio R_2 :

$$(d - x_0)(d - \bar{x}_0) = R_2^2 \quad d - x_0 < R_2 \quad d - \bar{x}_0 > R_2 \quad (2.171)$$

ovvero

$$x_0 + \bar{x}_0 = \frac{d^2 + R_1^2 - R_2^2}{d} \quad (2.172)$$

Risolvendo (2.170) e (2.172) otteniamo

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{d^2 + R_1^2 - R_2^2 + \sqrt{(d^2 + R_1^2 - R_2^2)^2 - 4d^2R_2^2}}{2d} \\ \bar{x}_0 &= \frac{d^2 + R_1^2 - R_2^2 - \sqrt{(d^2 + R_1^2 - R_2^2)^2 - 4d^2R_2^2}}{2d} \end{aligned} \quad (2.173)$$

Il potenziale sul cilindro di raggio R_1 (di carica $-\lambda$) è

$$V_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{x_0}{R_1} \quad (2.174)$$

Il potenziale sul cilindro di raggio R_2 (di carica λ) è

$$V_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{d - \bar{x}_0}{R_2} \quad (2.175)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} &= \frac{V_2 - V_1}{\lambda} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{d - \bar{x}_0}{R_2} \frac{x_0}{R_1} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{d x_0 - R_1^2}{R_1 R_2} = \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{d^2 - R_1^2 - R_2^2 + \sqrt{(d^2 - R_1^2 - R_2^2)^2 - 4R_1^2 R_2^2}}{2R_1 R_2} = \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \log \left[\frac{d^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1 R_2} + \sqrt{\frac{(d^2 - R_1^2 - R_2^2)^2}{4R_1^2 R_2^2} - 1} \right] \end{aligned} \quad (2.176)$$

Verifichiamo questa formula nel limite in cui i due conduttori sono molto lontani

$$d \gg R_1 + R_2 \quad (2.177)$$

ovvero

$$\frac{d^2 - R_1^2 - R_2^2}{2 R_1 R_2} \gg 1 \quad (2.178)$$

Utilizziamo l'espansione valida per grandi x

$$\begin{aligned} \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) &= \log\left(x + x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) = \\ &= \log\left[x + x\left(1 - \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\right] = \\ &= \log\left[2x\left(1 - \frac{1}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\right] = \log(2x) - \frac{1}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right) \end{aligned} \quad (2.179)$$

Pertanto, per grandi d , la capacità relativa diventa

$$\begin{aligned} \frac{2\pi\epsilon_0}{C} &= \log \frac{d^2 - R_1^2 - R_2^2}{R_1 R_2} - \frac{1}{4} \frac{4 R_1^2 R_2^2}{(d^2 - R_1^2 - R_2^2)^2} + \dots = \\ &= \log\left[\frac{d^2}{R_1 R_2} \left(1 - \frac{R_1^2 + R_2^2}{d^2}\right)\right] - \frac{R_1^2 R_2^2}{d^4} + \dots \end{aligned} \quad (2.180)$$

dove i termini trascurati sono di ordine ancora più alto in $\frac{R_{1,2}}{d}$. Fermanoci pertanto ai termini di ordine $\frac{R_{1,2}^2}{d^2}$ otteniamo

$$\frac{2\pi\epsilon_0}{C} = \log \frac{d^2}{R_1 R_2} - \frac{R_1^2 + R_2^2}{d^2} + \dots \quad (2.181)$$

Il primo termine è in accordo con la formula (2.95), mentre il termine di ordine $\frac{1}{d^2}$ è troppo piccolo per essere catturato dal ragionamento esposto in sezione (2.7.2).

Esercizio: Abbiamo ottenuto questa formula assumendo che i cilindri fossero esterni l'un l'altro: $d > R_1 + R_2$. Dimostrare che nel caso in cui un cilindro è interno all'altro, ovvero per $d < |R_2 - R_1|$, vale la formula

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \log\left[\frac{R_1^2 + R_2^2 - d^2}{2 R_1 R_2} + \sqrt{\frac{(R_1^2 + R_2^2 - d^2)^2}{4 R_1^2 R_2^2} - 1}\right] \quad (2.182)$$

Verifichiamo questa formula nel limite in cui i due cilindri hanno assi coincidenti: sostituendo $d = 0$ nella formula sopra otteniamo

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{R_2}{R_1} \quad R_2 > R_1 \quad (2.183)$$

in accordo con la (2.113).

2.9 Le inversioni conformi dell'equazione di Laplace

Sia $\phi(\vec{x})$ una funzione armonica in una certa regione dello spazio

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = 0 \quad (2.184)$$

Allora la funzione

$$\tilde{\phi}(\vec{x}) = \frac{R}{|\vec{x}|} \phi\left(\frac{R^2}{|\vec{x}|^2} \vec{x}\right) \quad (2.185)$$

è pure armonica

$$\vec{\nabla}^2 \tilde{\phi}(\vec{x}) = 0 \quad (2.186)$$

Per dimostrarlo poniamo

$$y^i = \frac{R^2 x^i}{|\vec{x}|^2} \quad f(|\vec{x}|) = \frac{R}{|\vec{x}|} \quad (2.187)$$

Abbiamo

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \phi(y) + f \frac{\partial \phi}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \quad (2.188)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \tilde{\phi}(\vec{x}) &= \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x^i} = \vec{\nabla}^2 f \phi(y) + 2 \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} + \\ &+ f \left(\frac{\partial \phi}{\partial y^j} \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^i \partial x^i} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^k \partial y^j} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right) \end{aligned} \quad (2.189)$$

Poiché

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}^2 f &= 0 \\
\frac{\partial f}{\partial x^i} &= -\frac{R x^i}{|\vec{x}|^3} \\
\frac{\partial y^j}{\partial x^i} &= \frac{R^2 \delta^{ij}}{|\vec{x}|^2} - \frac{2 R^2 x^i x^j}{|\vec{x}|^4} \\
\frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} &= R^4 \left(\frac{\delta^{ij}}{|\vec{x}|^2} - \frac{2 x^i x^j}{|\vec{x}|^4} \right) \left(\frac{\delta^{ik}}{|\vec{x}|^2} - \frac{2 x^i x^k}{|\vec{x}|^4} \right) = \frac{R^4 \delta^{kj}}{|\vec{x}|^4} \\
\frac{\partial^2 y^j}{\partial x^i \partial x^i} &= -\frac{2 R^2 x^j}{|\vec{x}|^4}
\end{aligned} \tag{2.190}$$

deduciamo

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}_x^2 \tilde{\phi}(\vec{x}) &= \frac{\partial \phi}{\partial y^j} \left(2 \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} + f \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^i \partial x^i} \right) + \\
&+ f \frac{R^4}{|\vec{x}|^4} \vec{\nabla}_y^2 \phi(y) = \\
&= \frac{\partial \phi}{\partial y^j} \left(-2 \frac{R x^i}{|\vec{x}|^3} \left(\frac{R^2 \delta^{ij}}{|\vec{x}|^2} - \frac{2 R^2 x^i x^j}{|\vec{x}|^4} \right) - \frac{2 R^3 x^j}{|\vec{x}|^5} \right) + \\
&+ f \frac{R^4}{|\vec{x}|^4} \vec{\nabla}_y^2 \phi(y) = \frac{R^5}{|\vec{x}|^5} \vec{\nabla}_y^2 \phi(y)
\end{aligned} \tag{2.191}$$

Questo dimostra che se $\phi(\vec{x})$ è armonica anche $\tilde{\phi}(\vec{x})$ lo è. Inoltre se $\phi(\vec{x})$ soddisfa l'equazione di Poisson

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \tag{2.192}$$

allora il potenziale trasformato soddisfa

$$\vec{\nabla}^2 \tilde{\phi}(\vec{x}) = -\frac{R^5}{|\vec{x}|^5} \frac{\rho(\vec{y})}{\epsilon_0} \equiv -\frac{\tilde{\rho}(\vec{x})}{\epsilon_0} \tag{2.193}$$

Questo vuol dire che sotto l'inversione conforme un potenziale $\phi(\vec{x})$ associato ad una densità di carica $\rho(\vec{x})$ si trasforma in un potenziale $\tilde{\phi}(\vec{x})$ associato alla densità di carica

$$\tilde{\rho}(\vec{x}) = \frac{R^5}{|\vec{x}|^5} \rho\left(\frac{R^2}{|\vec{x}|^2} \vec{x}\right) \tag{2.194}$$

Esercizio: Si dimostri che in dimensione $d = 2$ le inversioni conformi che lasciano invariante l'equazione di Laplace sono

$$\tilde{\phi}(\vec{x}) = \phi\left(\frac{R^2}{|\vec{x}|^2}\vec{x}\right) \quad \text{in 2 dimensioni} \quad (2.195)$$

La legge di trasformazione per la densità di carica che lascia invariata l'equazione di Poisson è invece

$$\tilde{\rho}(\vec{x}) = \frac{R^4}{|\vec{x}|^4} \rho\left(\frac{R^2}{|\vec{x}|^2}\vec{x}\right) \quad \text{in 2 dimensioni} \quad (2.196)$$

In effetti, possiamo ripartire dalla (2.189), sostituendo in essa $f = 1$:

$$\begin{aligned} \partial_i^2 \tilde{\phi}(x) &= \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^i \partial x^i} \frac{\partial \phi(y)}{\partial y^j} + \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial^2 \phi(y)}{\partial y^k \partial y^j} = \\ &= \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^i \partial x^i} \frac{\partial \phi(y)}{\partial y^j} + \frac{R^4}{|\vec{x}|^4} \frac{\partial^2 \phi(y)}{\partial y^j \partial y^j} \end{aligned} \quad (2.197)$$

Abbiamo l'identità valida in dimensione d

$$\frac{\partial^2 y^j}{\partial x^i \partial x^i} = (4 - 2d) \frac{R^2 x^j}{|\vec{x}|^4} \quad (2.198)$$

Questa espressione si annulla quindi per $d = 2$. Pertanto

$$\vec{\nabla}_x^2 \tilde{\phi}(x) = \frac{R^4}{|\vec{x}|^4} \vec{\nabla}_y^2 \phi(y) \quad \text{in 2 dimensioni} \quad (2.199)$$

2.9.1 Inversioni conformi e campi di multipolo

La funzione *costante*

$$\phi_0(x) = Q \quad (2.200)$$

è ovviamente armonica. La funzione armonica ottenuta applicando la trasformazione conforme (2.185) (prendendo $R = 1$ per semplicità) è

$$\tilde{\phi}_0(x) = \frac{Q}{|\vec{x}|} \quad (2.201)$$

ovvero nient'altro che il campo coulombiano.

Consideriamo ora la funzione *lineare*

$$\phi_1(x) = \vec{p} \cdot \vec{x} \quad (2.202)$$

pure ovviamente armonica. La funzione armonica ottenuta applicando la trasformazione conforme (2.185) è questa volta

$$\tilde{\phi}_1(x) = \frac{1}{|\vec{x}|} \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} \quad (2.203)$$

ovvero è il campo di *dipolo*⁶.

La funzione *quadratica*

$$\phi_2(x) = \sum_{ij} M_{ij} x^i x^j \quad (2.204)$$

è armonica se e solo se

$$\sum_i M_{ii} = 0 \quad (2.205)$$

La funzione armonica ottenuta applicando la trasformazione conforme (2.185) è

$$\tilde{\phi}_2(x) = \frac{\sum_{ij} M_{ij} x^i x^j}{|\vec{x}|^5} \quad (2.206)$$

è il cosiddetto campo di *quadrupolo*.

La generalizzazione di questa costruzione è a questo punto evidente. Consideriamo la funzione polinomiale omogenea di grado n

$$\phi_n(x) = \sum_{i_1 i_2 i_3 \dots} M_{i_1 i_2 i_3 \dots} x^{i_1} x^{i_2} x^{i_3} \dots \quad (2.207)$$

dove $M_{i_1 i_2 i_3 \dots}$ è un tensore *simmetrico* con n indici. Questa funzione è armonica se

$$\sum_i M_{iii\dots} = 0 \quad (2.208)$$

⁶A meno di un fattore moltiplicativo $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ che in questa sottosezione trascureremo per semplicità.

Pertanto la seguente funzione è anche armonica

$$\tilde{\phi}_n(x) = \sum_{i_1 i_2 i_3 \dots} \frac{M_{i_1 i_2 i_3 \dots} x^{i_1} x^{i_2} x^{i_3} \dots}{|\vec{x}|^{2n+1}} \quad (2.209)$$

Questo è il campo di *multi-polo*⁷. In generale dato un campo $\phi(x)$ generato da una distribuzione di carica arbitraria, *compatta*, il campo a grandi distanze dalla distribuzione si può scrivere come una serie

$$\phi(\vec{x}) = \tilde{\phi}_0(x) + \tilde{\phi}_1(x) + \tilde{\phi}_2(x) + \dots + \tilde{\phi}_n(x) \dots \quad (2.210)$$

dove i coefficienti Q, \vec{p}, M_{ij} etc., detti di *multipolo* dipendono dalla distribuzione di carica data.

2.9.2 Campo di un distribuzione di carica su una sfera

Si consideri una distribuzione di carica superficiale $\sigma(\theta, \phi)$ su una sfera di raggio R . Sia $\phi_\sigma(\vec{x})$ il campo elettrostatico generato da σ .

Consideriamo la trasformazione conforme con parametro R : secondo la (2.194) il trasformato della densità di carica superficiale $\sigma(\vec{x})$ è

$$\tilde{\sigma}(\vec{x}) = \frac{R^5}{|\vec{x}|^5} \sigma\left(\frac{R^2}{|\vec{x}|^2} \vec{x}\right) = \sigma(\vec{x}) \quad (2.211)$$

perché la distribuzione di carica ha supporto sulla sfera $|\vec{x}| = R$. Quindi Il potenziale $\tilde{\phi}_\sigma(\vec{x})$ soddisfa la stessa equazione di Poisson di $\phi_\sigma(\vec{x})$ e pertanto è invariante per trasformazioni conformi⁸:

$$\tilde{\phi}_\sigma(\vec{x}) = \phi_\sigma(\vec{x}) \quad (2.215)$$

⁷Non è difficile dimostrare che i polinomi omogenei di grado n formano uno spazio vettoriale di dimension $\frac{3 \cdot 4 \dots (3+n-1)}{n!}$. I polinomi armonici di grado n formano un sottospazio di dimensione $2n + 1$.

⁸ È possibile verificare questa affermazione direttamente. $\phi_\sigma(\vec{x})$ è la somma dei campi generati da elementi di carica $\Delta Q = \sigma \Delta$ centrati su punti \vec{x}_R posti sulla sfera

$$\Delta \Phi = \frac{\Delta Q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_R|} \quad (2.212)$$

Agendo con una trasformazione conforme (2.185) su questo campo otteniamo

$$\Delta \tilde{\Phi} = \frac{R \Delta Q}{4 \pi \epsilon_0 |\vec{x}|} \frac{1}{\left| \frac{R^2 \vec{x}}{|\vec{x}|^2} - \vec{x}_R \right|} \quad (2.213)$$

Cerchiamo le distribuzioni di carica $\sigma(\theta, \phi)$ tali che il campo *al di fuori della sfera* sia il *campo di multipolo*, introdotto nella sezione precedente:

$$\phi_\sigma(\vec{x}) = \tilde{\phi}_n(\vec{x}) \quad \text{per } |\vec{x}| \geq R \quad (2.216)$$

Poiché il campo deve essere invariante per trasformazioni conformi, ne consegue che il campo *interno della sfera carica* deve essere necessariamente il campo polinomiale $\phi_n(\vec{x})$

$$\phi_\sigma(\vec{x}) = \phi_n(\vec{x}) \quad \text{per } |\vec{x}| \leq R \quad (2.217)$$

La distribuzione di carica σ è data da

$$\sigma(\theta, \phi) = \epsilon_0 \left[\frac{\partial \phi_n}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{\phi}_n}{\partial r} \right]_{|\vec{x}|=R} \quad (2.218)$$

Esprimiamo dunque $\phi_n(\vec{x})$ e $\tilde{\phi}_n(\vec{x})$ in termini di coordinate polari⁹. Poiché $\phi_n(\vec{x})$ è un polinomio *omogeneo* di grado n avremo

$$\begin{aligned} \phi_n(\vec{x}) &= \sum_{i_1 i_2 i_3 \dots} M_{i_1 i_2 i_3 \dots} x^{i_1} x^{i_2} x^{i_3} \dots = r^n P_n(\theta, \phi) \\ \tilde{\phi}_n(\vec{x}) &= \frac{R^{2n+1}}{r^{n+1}} P_n(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (2.219)$$

dove abbiamo reintrodotta il parametro R che nella (2.209) avevamo posto uguale ad 1. Quindi

$$\sigma_n(\theta, \phi) = \epsilon_0 (2n + 1) R^{n-1} P_n(\theta, \phi) \quad (2.220)$$

In definitiva il campo prodotto dalla distribuzione superficiale sferica $\sigma_n(\theta, \phi)$ è

$$\phi_\sigma(\vec{x}) = \begin{cases} \phi_n(\vec{x}) = \frac{R}{(2n+1)\epsilon_0} \frac{r^n}{R^n} \sigma_n(\theta, \phi) & \text{per } r \leq R \\ \tilde{\phi}_n(\vec{x}) = \frac{R}{(2n+1)\epsilon_0} \frac{R^{n+1}}{r^{n+1}} \sigma_n(\theta, \phi) & \text{per } r \geq R \end{cases} \quad (2.221)$$

che coincide con $\Delta\Phi$ perché

$$\begin{aligned} |\vec{x}|^2 \left| \frac{R^2 \vec{x}}{|\vec{x}|^2} - \vec{x}_R \right|^2 &= |\vec{x}|^2 \left(\frac{R^4}{|\vec{x}|^2} + \vec{x}_R^2 - 2 \frac{R^2 \vec{x}_R \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^2} \right) = \\ &= R^4 + R^2 \vec{x}^2 - 2 R^2 \vec{x}_R \cdot \vec{x} = R^2 |\vec{x} - \vec{x}_R|^2 \end{aligned} \quad (2.214)$$

⁹ $x_1 = r \sin \theta \cos \phi, x_2 = r \sin \theta \sin \phi, x_3 = r \cos \theta.$

Vediamo che il campo prodotto dalla distribuzione di carica $\sigma_n(\theta, \phi)$ coincide *all'esterno della sfera* esattamente col campo di multipolo con momenti di multipolo parametrizzati dalla matrice $M_{i_1, i_2, \dots}$.

Consideriamo diversi esempi di applicazione di questa formula:

- $n = 0$. In questo caso P_0 è una costante, σ anche, ϕ_σ è costante dentro la sfera, dove quindi $\vec{E} = 0$. Fuori dalla sfera

$$\phi_\sigma(\vec{x}) = \frac{R^2}{\epsilon_0 r} \sigma \quad r > R \quad (2.222)$$

ovvero il risultato ben noto che il campo all'esterno è quello generato da una carica puntiforme di carica $Q = 4\pi R^2 \sigma$ posta nel centro della sfera.

- $n = 1$. In questo caso

$$P_1(\theta, \phi) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|} = p \cos \theta \quad (2.223)$$

se scegliamo \vec{p} lungo l'asse delle z . Dunque

$$\sigma(\theta, \phi) = 3\epsilon_0 p \cos \theta = \sigma_0 \cos \theta \quad (2.224)$$

e

$$\phi_\sigma(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} r \cos \theta & \text{per } r \leq R \\ \frac{\sigma_0 R^2}{3\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} & \text{per } r \geq R \end{cases} \quad (2.225)$$

Riotteniamo in questo modo il risultato derivato in altro modo nella sottosezione (2.5).

- $n = 2$. In questo caso

$$\begin{aligned} P_2(\theta, \phi) &= \frac{M_{ij} x^i x^j}{|\vec{x}|^2} = \\ &= M_{11} \sin^2 \theta \cos^2 \phi + M_{22} \sin^2 \theta \sin^2 \phi + M_{33} \cos^2 \theta + \\ &+ 2 M_{12} \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi + 2 M_{13} \sin \theta \cos \theta \cos \phi + \\ &+ 2 M_{23} \sin \theta \cos \theta \cos \phi \end{aligned} \quad (2.226)$$

dove M_{ij} è una qualunque matrice simmetrica con traccia nulla:

$$M_{11} + M_{22} + M_{33} = 0 \quad (2.227)$$

Possiamo per esempio prendere

$$M_{12} = M_{13} = M_{23} = 0 \quad M_{11} = M_{22} = -\frac{M_{33}}{2} \equiv d \quad (2.228)$$

Con questa scelta per M_{ij} la distribuzione di carica è

$$\begin{aligned} \sigma(\theta, \phi) &= 5 \epsilon_0 R P_2(\theta, \phi) = 5 \epsilon_0 R d (\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta) = \\ &\equiv \sigma_0 (1 - 3 \cos^2 \theta) \quad \sigma_0 \equiv 5 \epsilon_0 R d \end{aligned} \quad (2.229)$$

ed il potenziale corrispondente

$$\phi_\sigma(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{5 \epsilon_0 R} r^2 (1 - 3 \cos^2 \theta) & \text{per } r \leq R \\ \frac{\sigma_0 R^4}{5 \epsilon_0} \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{r^3} & \text{per } r \geq R \end{cases} \quad (2.230)$$

2.9.3 Metodo delle immagini ed inversioni conformi

Si consideri il campo elettrostatico prodotto da sfera conduttrice posta a potenziale fissato V_0 in presenza di una carica q posta nel punto \vec{x}_0 . Il campo ha la forma

$$\phi(\vec{x}) = \phi_q(\vec{x} - \vec{x}_0) + \phi_\sigma(\vec{x}) \quad (2.231)$$

dove $\phi_q(\vec{x} - \vec{x}_0)$ è il campo coulombiano prodotto dalla carica q , mentre $\phi_\sigma(\vec{x})$ è il campo prodotto dalla distribuzione di carica superficiale σ indotta sulla superficie della sfera conduttrice.

Abbiamo dimostrato nella sottosezione precedente che $\phi_\sigma(\vec{x})$ è invariante per trasformazioni conformi, con parametro R pari al raggio della sfera:

$$\tilde{\phi}_\sigma(\vec{x}) = \phi_\sigma(\vec{x}) \quad (2.232)$$

Questo significa che il potenziale generato dalla densità di carica sul conduttore all'esterno è uguale alla inversione conforme di quello generato all'interno. D'altronde all'interno del conduttore il campo elettrico è nullo: pertanto il potenziale $\phi_\sigma(\vec{x})$ all'interno della sfera soddisfa :

$$\phi_\sigma(\vec{x}) + \phi_q(\vec{x} - \vec{x}_0) = V_0 \quad \text{per } |\vec{x}| \leq R \quad (2.233)$$

dove V_0 è il potenziale costante della sfera conduttrice. Quindi, dalla (2.232), deduciamo il valore del potenziale generato dalla densità di carica sul conduttore all'esterno della sfera

$$\phi_\sigma(\vec{x}) = \tilde{\phi}_\sigma(\vec{x}) = -\tilde{\phi}_q(\vec{x} - \vec{x}_0) + V_0 \frac{R}{|\vec{x}|} \quad \text{per } |\vec{x}| \geq R \quad (2.234)$$

In questa equazione $\tilde{\phi}_q$ è la funzione ottenuta per trasformazione conforme (2.185) della ϕ_q ¹⁰

$$\tilde{\phi}_q(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{R}{|\vec{x}_0|} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \frac{R^2\vec{x}_0}{|\vec{x}_0|^2}|} \quad (2.237)$$

Ne consegue che il potenziale fuori dal conduttore si scrive

$$\phi(\vec{x}) = \phi_q(\vec{x} - \vec{x}_0) - \tilde{\phi}_q(\vec{x} - \vec{x}_0) + V_0 \frac{R}{|\vec{x}|} \quad \text{per } |\vec{x}| \geq R \quad (2.238)$$

Riotteniamo in questo modo la soluzione ottenuta col metodo delle immagini.

Possiamo analizzare in modo analogo il caso di una sfera conduttrice immersa in un campo elettrico uniforme costante \vec{E}_0 . Il campo $\phi_\sigma(\vec{x})$ generato dalla distribuzione di carica sul conduttore in questo caso deve cancellare il campo elettrico costante dentro la sfera, quindi

$$\phi_\sigma(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{E}_0 \quad \text{per } |\vec{x}| \leq R \quad (2.239)$$

¹⁰Per convincersene si usi l'identità $|\frac{R^2}{|\vec{x}|^2} \vec{x} - \vec{x}_0| = \frac{|\vec{x}_0|}{|\vec{x}|} |\vec{x} - \frac{R^2}{|\vec{x}_0|^2} \vec{x}_0|$. Alternativamente, si usi la regola per la trasformazione della densità di carica (2.194): la densità di carica di una carica q posta in \vec{x}_0 è

$$\rho(\vec{x}) = q \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (2.235)$$

La densità di carica trasformata è quindi

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\vec{x}) &= q \frac{R^5}{|\vec{x}|^5} \delta\left(\frac{R^2}{|\vec{x}|^2} \vec{x} - \vec{x}_0\right) = q \frac{R^5}{|\vec{x}|^5} \frac{\delta(\vec{x} - \frac{R^2}{|\vec{x}_0|^2} \vec{x}_0)}{|\det \frac{\partial y^i}{\partial x^j}|} = q \frac{R^5}{|\vec{x}|^5} \frac{\delta(\vec{x} - \frac{R^2}{|\vec{x}_0|^2} \vec{x}_0)}{\frac{R^6}{|\vec{x}|^6}} = \\ &= q \frac{|\vec{x}|}{R} \delta\left(\vec{x} - \frac{R^2}{|\vec{x}_0|^2} \vec{x}_0\right) = q \frac{R}{|\vec{x}_0|} \delta\left(\vec{x} - \frac{R^2}{|\vec{x}_0|^2} \vec{x}_0\right) \end{aligned} \quad (2.236)$$

dove $|\det \frac{\partial y^i}{\partial x^j}| = \frac{R^6}{|\vec{x}|^6}$ è lo jacobiano della inversione conforme $y^i = \frac{R^2}{|\vec{x}|^2} \vec{x}$.

Poiché il campo $\phi_\sigma(\vec{x})$ è invariante per trasformazioni conformi,

$$\phi_\sigma(\vec{x}) = \frac{R}{|\vec{x}|} \phi_\sigma\left(\frac{R^2}{|\vec{x}|^2} \vec{x}\right) = \frac{R^3}{|\vec{x}|^3} \vec{x} \cdot \vec{E}_0 \quad \text{per } |\vec{x}| \geq R \quad (2.240)$$

Il campo generato dalla distribuzione di carica sulla superficie della sfera all'esterno della sfera è pertanto il campo di un dipolo con momento di dipolo

$$\vec{p} = 4 \pi \epsilon_0 R^3 \vec{E}_0 \quad (2.241)$$

in accordo con la (2.151). Il campo totale all'esterno della sfera è in definitiva

$$\phi(\vec{x}) = -\vec{x} \cdot \vec{E}_0 + \phi_\sigma(\vec{x}) = -\vec{x} \cdot \vec{E}_0 + \frac{R^3}{|\vec{x}|^3} \vec{x} \cdot \vec{E}_0 \quad \text{per } |\vec{x}| \geq R \quad (2.242)$$

2.9.4 Due conduttori sferici lontani

Consideriamo due sfere conduttrici S_a e S_b di raggio, rispettivamente, a e b , i cui centri si trovano ad una distanza d grande rispetto ad a e b . Vogliamo determinare la matrice delle capacità di questo sistema. Consideriamo quindi la situazione in cui la sfera di raggio a ha carica Q e la sfera di raggio b carica nulla: denotati con V_a e V_b , i potenziali delle due sfere, i coefficienti della matrice inversa delle capacità sono

$$C_{aa}^{-1} = \frac{V_a}{Q} \quad C_{ab}^{-1} = \frac{V_b}{Q} \quad (2.243)$$

Per convenienza poniamo il centro \vec{x}_b della sfera S_b nell'origine delle coordinate $\vec{x}_b = 0$, e il centro \vec{x}_a della sfera S_a in

$$\vec{x}_a = -\vec{d} = -d \hat{z} \quad (2.244)$$

Siano $\phi_{\sigma_a}(x)$ e $\phi_{\sigma_b}(x)$ i potenziali generati dalle densità di carica superficiale sulle sfere S_a e S_b . $\phi(x)$, il potenziale totale, è

$$\phi(x) = \phi_{\sigma_a}(x) + \phi_{\sigma_b}(x) \quad (2.245)$$

Sappiamo che il potenziale $\phi(x)$ deve essere costante nella regione *all'interno* del conduttore S_b

$$\phi(\vec{x}) = V_b = \phi_{\sigma_a}(\vec{x}) + \phi_{\sigma_b}(\vec{x}) \quad \text{per } |\vec{x}| \leq b \quad (2.246)$$

D'altronde abbiamo visto nella sezione precedente, che $\phi_{\sigma_b}(x)$ è invariante per inversioni conformi rispetto alla sfera S_b :

$$\phi_{\sigma_b}(\vec{x}) = \frac{b}{|\vec{x}|} \phi_{\sigma_b}\left(\frac{b^2}{|\vec{x}|}\vec{x}\right) \quad \text{per } |\vec{x}| \geq b \quad (2.247)$$

Quindi

$$\phi_{\sigma_b}(\vec{x}) = V_b \frac{b}{|\vec{x}|} - \frac{b}{|\vec{x}|} \phi_{\sigma_a}\left(\frac{b^2}{|\vec{x}|}\vec{x}\right) \quad \text{per } |\vec{x}| \geq b \quad (2.248)$$

Il potenziale $\phi_{\sigma_a}(\vec{x})$ generato dalla sfera S_a è regolare nella regione interna alla sfera S_b

$$\phi_{\sigma_a}(\vec{x}) = \phi_{\sigma_a}(0) + \vec{x} \cdot \vec{\nabla} \phi_{\sigma_a}(0) + O(x^2) \quad \text{per } |\vec{x}| \leq b \quad (2.249)$$

Pertanto

$$\phi_{\sigma_a}\left(\frac{b^2}{|\vec{x}|}\vec{x}\right) = \phi_{\sigma_a}(0) + \frac{b^2}{|\vec{x}|^2} \vec{x} \cdot \vec{\nabla} \phi_{\sigma_a}(0) + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{per } |\vec{x}| \geq b \quad (2.250)$$

per cui la (2.248) diventa

$$\phi_{\sigma_b}(\vec{x}) = (V_b - \phi_{\sigma_a}(0)) \frac{b}{|\vec{x}|} - \frac{b^3}{|\vec{x}|^3} \vec{x} \cdot \vec{\nabla} \phi_{\sigma_a}(0) + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \text{per } |\vec{x}| \geq b \quad (2.251)$$

Il primo termine è un termine di monopolo, il secondo un termine di dipolo e quelli successivi potenziali di multipolo di ordine più alto. Avendo supposto il conduttore S_b scarico, il termine di monopolo deve annullarsi, ovvero

$$V_b = \phi_{\sigma_a}(\vec{x}_b) \quad (2.252)$$

dove $\vec{x}_b = 0$ è la posizione del centro della sfera S_b . Concludiamo quindi che il potenziale della sfera S_b è uguale al valore del potenziale generato dalla sfera S_a nel suo centro. Inoltre, sempre dalla (2.251) otteniamo una relazione tra il potenziale generato dalla sfera S_b al suo esterno e il valore del potenziale generato dalla sfera S_a nella regione interna di S_b :

$$\begin{aligned} \phi_{\sigma_b}(\vec{x}) &= -\frac{b^3}{|\vec{x}|^3} \vec{x} \cdot \vec{\nabla} \phi_{\sigma_a}(0) + O\left(\frac{1}{x^3}\right) = \\ &= -\frac{b}{|\vec{x}|} \left[\phi_{\sigma_a}\left(\frac{b^2}{|\vec{x}|}\vec{x}\right) - \phi_{\sigma_a}(0) \right] \quad \text{per } |\vec{x}| \geq b \end{aligned} \quad (2.253)$$

Possiamo ripetere una analisi identica per il potenziale all'interno di S_a :

$$\phi(\vec{x}) = V_a = \phi_{\sigma_a}(\vec{x}) + \phi_{\sigma_b}(\vec{x}) \quad \text{per } |\vec{x} - \vec{x}_a| \leq a \quad (2.254)$$

Questa volta usiamo il fatto che $\phi_{\sigma_a}(x)$ è invariante per inversioni conformi rispetto alla sfera S_a .

$$\phi_{\sigma_a}(\vec{x}) = \frac{a}{|\vec{y}|} \phi_{\sigma_a}(\vec{x}_a + \frac{a^2}{|\vec{y}|^2} \vec{y}) \quad \text{per } |\vec{x} - \vec{x}_a| \geq a \quad (2.255)$$

dove abbiamo posto

$$\vec{y} \equiv \vec{x} - \vec{x}_a \quad (2.256)$$

Deduciamo quindi che

$$\phi_{\sigma_a}(\vec{x}) = V_a \frac{a}{|\vec{y}|} - \frac{a}{|\vec{y}|} \phi_{\sigma_b}(\vec{x}_a + \frac{a^2}{|\vec{y}|^2} \vec{y}) \quad \text{per } |\vec{x} - \vec{x}_a| \geq a \quad (2.257)$$

Poiché il potenziale $\phi_{\sigma_b}(\vec{x})$ generato dalla sfera S_b è regolare nella regione interna alla sfera S_a

$$\phi_{\sigma_b}(\vec{x}) = \phi_{\sigma_b}(\vec{x}_a) + \vec{y} \cdot \vec{\nabla} \phi_{\sigma_b}(\vec{x}_a) + O\left(\frac{y^2}{a^2}\right) \quad \text{per } |\vec{x} - \vec{x}_a| \leq a \quad (2.258)$$

la (2.257) diventa

$$\begin{aligned} \phi_{\sigma_a}(\vec{x}) &= (V_a - \phi_{\sigma_b}(\vec{x}_a)) \frac{a}{|\vec{y}|} - \frac{a^3}{|\vec{y}|^3} \vec{y} \cdot \vec{\nabla} \phi_{\sigma_b}(\vec{x}_a) + O\left(\frac{a^3}{y^3}\right) = \\ &= (V_a - \phi_{\sigma_b}(\vec{x}_a)) \frac{a}{|\vec{y}|} - \frac{a}{|\vec{y}|} \left[\phi_{\sigma_b}(\vec{x}_a + \frac{a^2}{|\vec{y}|^2} \vec{y}) - \phi_{\sigma_b}(\vec{x}_a) \right] \\ &\text{per } |\vec{x} - \vec{x}_a| \geq a \end{aligned} \quad (2.259)$$

Abbiamo assunto che la sfera S_a abbia carica Q : pertanto il termine di monopolo dell'espansione (2.259) deve soddisfare

$$V_a = \phi_{\sigma_b}(\vec{x}_a) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (2.260)$$

Concludiamo che il potenziale della sfera S_a è uguale alla somma del potenziale che avrebbe in assenza della sfera S_b e di quello generato dalla sfera S_b

nel centro di S_a . Inoltre, sempre dalla (2.259) otteniamo la relazione tra il potenziale generato dalla sfera S_a al suo esterno e il potenziale generato dalla sfera S_b nella regione interna di S_a :

$$\begin{aligned}\phi_{\sigma_a}(\vec{x}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{y}|} - \frac{a^3}{|\vec{y}|^3} \vec{y} \cdot \vec{\nabla} \phi_{\sigma_b}(\vec{x}_a) + O\left(\frac{a^3}{y^3}\right) = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{y}|} - \frac{a}{|\vec{y}|} \left[\phi_{\sigma_b}\left(\vec{x}_a + \frac{a^2}{|\vec{y}|^2} \vec{y}\right) - \phi_{\sigma_b}(\vec{x}_a) \right] \\ \text{per } |\vec{x} - \vec{x}_a| &\geq a\end{aligned}\quad (2.261)$$

Le formule (2.260) e (2.252) sono esatte, e determinano, attraverso le (2.243), i coefficienti C_{aa}^{-1} e C_{ab}^{-1} una volta noti $\phi_{\sigma_a}(x_b)$ e $\phi_{\sigma_b}(x_a)$. Questi sono a loro volta fissati dalle (2.253) e (2.261)

$$\begin{aligned}\phi_{\sigma_a}(\vec{x}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{y}|} - \frac{a}{|\vec{y}|} \left[\phi_{\sigma_b}\left(\vec{x}_a + \frac{a^2}{|\vec{y}|^2} \vec{y}\right) - \phi_{\sigma_b}(\vec{x}_a) \right] \quad \text{per } |\vec{y}| \geq a \\ \phi_{\sigma_b}(\vec{x}) &= -\frac{b}{|\vec{x}|} \left[\phi_{\sigma_a}\left(\frac{b^2}{|\vec{x}|^2} \vec{x}\right) - \phi_{\sigma_a}(0) \right] \quad \text{per } |\vec{x}| \geq b\end{aligned}\quad (2.262)$$

che formano un sistema di equazioni accoppiato per $\phi_{\sigma_a}(\vec{x})$ e $\phi_{\sigma_b}(\vec{x})$.

Nel seguito di questa sottosezione illustriamo come usare le equazioni (2.262) in maniera *iterativa* per ottenere uno sviluppo di $\phi_{\sigma_a}(x_b)$ e $\phi_{\sigma_b}(x_a)$ in serie di potenze di $\frac{1}{d}$.

Partiamo dall'approssimazione piú bassa, quella in cui le sfere sono infinitamente lontane. In questo caso le distribuzioni di carica sulle sfere sono uniformi, $\sigma_a = \frac{Q}{4\pi a^2}$ e $\sigma_b = 0$, e quindi

$$\begin{aligned}\phi_{\sigma_a}(x) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{y}|} + \dots \quad \text{per } |\vec{y}| \geq a \\ \phi_{\sigma_b}(x) &= 0 + \dots \quad \text{per } |\vec{x}| \geq b\end{aligned}\quad (2.263)$$

Sostituendo queste approssimazioni nelle formule (2.260) e (2.252) ricaviamo le approssimazioni di ordine piú basso

$$\begin{aligned}4\pi\epsilon_0 C_{aa}^{-1} &= \frac{4\pi\epsilon_0 V_a}{Q} = \frac{1}{a} + \dots \\ 4\pi\epsilon_0 C_{ab}^{-1} &= \frac{4\pi\epsilon_0 V_b}{Q} = \frac{1}{d} + \dots\end{aligned}\quad (2.264)$$

già derivate in sezione 2.7.2 con ragionamenti piú elementari.

L'ansatz (2.263) soddisfa la prima equazione del sistema (2.262), ma non la seconda: sostituendo l' approssimazione (2.263) per $\phi_{\sigma_a}(x)$ nella seconda equazione del sistema (2.262) otteniamo una migliore stima per $\phi_{\sigma_b}(x)$

$$\frac{4 \pi \epsilon_0 \phi_{\sigma_b}(\vec{x})}{Q} = -\frac{b}{|\vec{x}|} \left[\frac{1}{|\vec{d} + \frac{b^2}{|\vec{x}|^2} \vec{x}|} - \frac{1}{d} \right] = \frac{b^3}{|\vec{x}|^3} \frac{\vec{d} \cdot \vec{x}}{d^3} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad (2.265)$$

Questo nuovo valore per $\phi_{\sigma_b}(x)$ non soddisfa ora la prima equazione del sistema (2.262): sostituendolo in questa equazione, ricaviamo una nuova correzione per $\phi_{\sigma_a}(x)$. Iterando questo procedimento si ottengono stime sempre più accurate dei due potenziali $\phi_{\sigma_a}(x)$ e $\phi_{\sigma_b}(x)$. Vedremo che già dopo un solo ciclo di iterazione si ottengono i valori per i coefficienti di capacità che sono quelli corretti a meno di termini di ordine piuttosto alto in $\frac{1}{d}$: per la precisione, otterremo C_{aa}^{-1} a meno di termini di ordine $\frac{1}{d^9}$ e C_{ab}^{-1} a meno di termini dell'ordine di $\frac{1}{d^{12}}$.

Il risultato (2.265) ha una interpretazione fisica semplice: sotto l'influenza del campo prodotto dalla sfera S_a , il conduttore S_b acquista un momento di dipolo indotto \vec{p}_b

$$\vec{p}_b = Q \frac{b^3}{d^3} \vec{d} \quad (2.266)$$

in accordo con la formula (2.151) per il momento di dipolo indotto in una sfera conduttrice di raggio b immersa in un campo uniforme $\frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\vec{d}}{d^3}$. Naturalmente il campo elettrico prodotto dalla sfera S_a non è perfettamente uniforme, e quindi la sfera conduttrice S_b acquista anche dei momenti di multipolo di ordine superiore, proporzionali a potenze più alte di $\frac{1}{d}$, che sono in effetti contenuti nella (2.265)

Dalle (2.265) e (2.260) ricaviamo la seguente approssimazione per il coefficiente di capacità C_{aa}^{-1} :

$$\begin{aligned} 4 \pi \epsilon_0 C_{aa}^{-1} &= \frac{1}{a} + \frac{4 \pi \epsilon_0 \phi_{\sigma_b}(\vec{x}_a)}{Q} = \frac{1}{a} - \frac{b}{d^2} \left[\frac{1}{|1 - \frac{b^2}{d^2}|} - 1 \right] = \\ &= \frac{1}{a} - \frac{b^3}{d^4} \frac{1}{(1 - \frac{b^2}{d^2})} = \frac{1}{a} - \frac{b^3}{d^4} - \frac{b^5}{d^6} - \frac{b^7}{d^8} + O\left(\frac{1}{d^{10}}\right) \end{aligned} \quad (2.267)$$

Risulta che questa approssimazione è corretta fino ai termini di ordine $\frac{1}{d^8}$ inclusi.

Possiamo ora inserire l'approssimazione per $\phi_{\sigma_b}(x)$ (2.265) nella prima equazione del sistema (2.262), ottenendo così una nuova stima per $\phi_{\sigma_a}(x)$

$$\begin{aligned}
\frac{4 \pi \epsilon_0 \phi_{\sigma_a}(\vec{x})}{Q} &= \frac{1}{|\vec{y}|} + \\
&- \frac{a}{|\vec{y}|} \left\{ -\frac{b}{|\vec{x}_a + \frac{a^2}{|\vec{y}|^2} \vec{y}|} \left[\frac{1}{|\vec{d} + \frac{b^2}{|\vec{x}_a + \frac{a^2}{|\vec{y}|^2} \vec{y}|} (\vec{x}_a + \frac{a^2}{|\vec{y}|^2} \vec{y})|} - \frac{1}{d} \right] + \right. \\
&+ \left. \frac{b}{|\vec{x}_a|} \left[\frac{1}{|\vec{d} + \frac{b^2}{|\vec{x}_a|^2} \vec{x}_a|} - \frac{1}{d} \right] \right\} = \\
&= \frac{1}{|\vec{y}|} + \frac{2 a^3 b^3}{d^6} \frac{1 - \frac{b^2}{2d^2}}{(1 - \frac{b^2}{d^2})^2} \frac{\vec{d} \cdot \vec{y}}{|\vec{y}|^3} + O\left(\frac{1}{y^3}\right) = \\
&= \frac{1}{|\vec{y}|} + \frac{\vec{p}_a \cdot \vec{y}}{|\vec{y}|^3} + O\left(\frac{1}{y^3}\right) \tag{2.268}
\end{aligned}$$

dove

$$\vec{p}_a \equiv Q \frac{2 a^3 b^3}{d^6} \frac{1 - \frac{b^2}{2d^2}}{(1 - \frac{b^2}{d^2})^2} \vec{d} \tag{2.269}$$

è il momento di dipolo indotto sul conduttore S_a . Un modo di verificare questo risultato è il seguente: il conduttore S_b produce un campo elettrico di dipolo $\vec{E}_{p_b}(\vec{x})$ che vale nel centro $\vec{x}_a = -\vec{d}$ della sfera S_a

$$4 \pi \epsilon_0 \vec{E}_{p_b}(\vec{x}_a) = \frac{3 \vec{p}_b \cdot \vec{x}_a \vec{x}_a - |\vec{x}_a|^2 \vec{p}_b}{|\vec{x}_a|^5} = \frac{2 p_b \vec{d}}{d^4} \tag{2.270}$$

dove p_b è il momento di dipolo di S_b riportato in (2.266). Questo campo elettrico quasi uniforme induce un momento di dipolo del conduttore S_a dato dalla (2.151),

$$\vec{p}_a = 4 \pi \epsilon_0 a^3 \vec{E}_{p_b} = \frac{2 a^3 p_b \vec{d}}{d^4} = Q \frac{2 a^3 b^3 \vec{d}}{d^6} \tag{2.271}$$

in accordo con il risultato ottenuto (2.269), a meno di termini di ordine superiore in $\frac{1}{d}$ che tengono conto della non completa uniformità del campo \vec{E}_{p_b} nella regione dove si trova il conduttore S_a .

Sostituendo la (2.268) nella (2.252) otteniamo la seguente stima per il coefficiente di capacità di mutua induzione

$$\begin{aligned}
C_{ab}^{-1} &= \frac{4\pi\epsilon_0\phi_{\sigma_a}(\vec{x}_b)}{Q} = \frac{1}{d} + \\
& - \frac{a}{d} \left[-\frac{b}{|\vec{d} + \frac{a^2}{d^2}\vec{d}|} \left[\frac{1}{|\vec{d} + \frac{b^2}{|\vec{d} + \frac{a^2}{d^2}\vec{d}|}(-\vec{d} + \frac{a^2}{|d|^2}\vec{d})|} - \frac{1}{d} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{b}{d} \left[\frac{1}{|\vec{d} - \frac{b^2}{d^2}\vec{d}|} - \frac{1}{d} \right] \right] = \\
& = \frac{1}{d} - \frac{ab}{d^3} \left[-\frac{1}{1 - \frac{a^2}{d^2} - \frac{b^2}{d^2}} + \frac{1}{1 - \frac{a^2}{d^2}} + \frac{1}{1 - \frac{b^2}{d^2}} - 1 \right] = \\
& = \frac{1}{d} + \frac{a^3b^3}{d^7} \frac{2 - \frac{a^2}{d^2} - \frac{b^2}{d^2}}{(1 - \frac{a^2}{d^2})(1 - \frac{b^2}{d^2})(1 - \frac{a^2+b^2}{d^2})} = \\
& = \frac{1}{d} + \frac{2a^3b^3}{d^7} + \frac{3a^3b^3(a^2+b^2)}{d^9} + \\
& + \frac{4a^7b^3 + 6a^5b^5 + 4a^3b^7}{d^{11}} + O\left(\frac{1}{d^{12}}\right) \tag{2.272}
\end{aligned}$$

Risulta che l'approssimazione ottenuta è corretta fino ai termini di ordine $\frac{1}{d^{11}}$ inclusi. Questo metodo iterativo risulta essere molto efficiente per calcolare i termini di ordine molto elevato dell'espansione in potenze inverse di d dei coefficienti C_{aa}^{-1} e C_{ab}^{-1} : un altro ciclo di iterazione permette di ottenere i valori dei coefficienti di capacità corretti fino all'ordine di $\sim \frac{1}{d^{20}}$.

2.10 Effetto punta

Consideriamo una “punta” formata da due semipiani conduttori, posti a potenziale nullo, ortogonali al piano (x, y) , il cui spigolo comune è l'asse delle z . Sia α , con $0 < \alpha < 2\pi$, l'angolo formato dai due semi-piani e prendiamo la proiezione sul piano (x, y) di uno dei due semipiani coincidente con il semi-asse positivo delle x e quella del secondo con la semiretta che parte dall'origine di equazione $y = \tan \alpha x$. Sia $0 < \theta < \alpha$ la zona di spazio esterna ai conduttori, nei quali si trovano delle distribuzioni di cariche che supporremo invarianti per traslazione lungo z . I due semipiani conduttori formano quindi una punta vera e propria per $\pi < \alpha < 2\pi$, mentre per $0 < \alpha < \pi$, lo spazio racchiuso dai conduttori è in realtà concavo.

Poiché il problema è invariante per traslazioni lungo z , il potenziale $\phi(x, y)$ all'esterno dei conduttori è indipendente da z e soddisfa l'equazione di Laplace in 2 dimensioni

$$\vec{\nabla}^2 \phi(x, y) = (\partial_x^2 + \partial_y^2) \phi(x, y) = 0 \quad (2.273)$$

Per lo studio di questo problema è conveniente passare alle coordinate polari, in termini delle quali l'equazione di Laplace si scrive

$$\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \phi(r, \theta)) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \phi(r, \theta) = 0 \quad (2.274)$$

Il potenziale $\phi(r, \theta)$ si deve annullare sui semipiani conduttori, definiti dalle semi-rette $\theta = 0$ e $\theta = \alpha$. Consideriamo pertanto le funzioni di prova

$$\phi_n(r, \theta) = R_n(r) \sin\left(\frac{\theta n \pi}{\alpha}\right) \quad 0 \leq \theta \leq \alpha \quad (2.275)$$

che hanno la proprietà di annullarsi sulle semirette $\theta = 0$ e $\theta = \alpha$:

$$\phi_n(r, 0) = \phi_n(r, \alpha) = 0 \quad (2.276)$$

Inserendo queste funzioni prova nell'equazione di Laplace (2.274), otteniamo

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} R_n(r) \right) - \frac{n^2 \pi^2}{\alpha^2} R_n(r) = 0 \quad (2.277)$$

Ponendo

$$r \frac{d}{dr} = \frac{d}{d\eta} \quad (2.278)$$

ovvero effettuando il cambio di variabili

$$\frac{d\eta}{dr} = \frac{1}{r} \Rightarrow r = C e^\eta \quad (2.279)$$

l'equazione diventa

$$\frac{d^2}{d\eta^2} R_n(\eta) - \frac{n^2 \pi^2}{\alpha^2} R_n(\eta) = 0 \quad (2.280)$$

la cui soluzione generale è

$$R_n(\eta) = A_n e^{\frac{n\pi\eta}{\alpha}} + B_n e^{-\frac{n\pi\eta}{\alpha}} \quad (2.281)$$

Ritornando alla variabile r , e riassorbendo la costante C nelle costanti A_n e B_n , otteniamo

$$R_n(r) = A_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}} + B_n r^{-\frac{n\pi}{\alpha}} \quad (2.282)$$

In definitiva, la funzione

$$\phi_n(r, \theta) = (A_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}} + B_n r^{-\frac{n\pi}{\alpha}}) \sin\left(\frac{\theta n \pi}{\alpha}\right) \quad (2.283)$$

è armonica e soddisfa le condizioni al bordo (2.276).

Poiché l'equazione di Laplace è lineare, una combinazione lineare arbitraria di queste funzioni è ancora una funzione armonica che soddisfa le stesse condizioni (2.276)

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}} + B_n r^{-\frac{n\pi}{\alpha}}) \sin\left(\frac{\theta n \pi}{\alpha}\right) \quad (2.284)$$

Nel nostro caso, il potenziale deve essere nullo sulle semi-rette $\theta = 0$ e $\theta = \alpha$, e quindi anche nell'origine $r = 0$. Pertanto, dobbiamo $B_n = 0$ nella (2.284) per ottenere un'espressione valida *in un intorno dell'origine*:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{\theta n \pi}{\alpha}\right) \quad 0 \leq \theta \leq \alpha \quad (2.285)$$

Questa espressione definisce quindi, in un intorno dell'origine, una soluzione dell'equazione di Laplace nel settore $0 \leq \theta \leq \alpha$, che soddisfa le condizioni al bordo (2.276): è possibile dimostrare (ma non lo faremo qui), che *ogni* soluzione dell'equazione di Laplace che soddisfa le stesse condizioni al bordo si può scrivere in questa forma, con una scelta opportuna dei coefficienti A_n , almeno in una regione intorno al punto $r = 0$. I coefficienti A_n dipendono dalla distribuzione di carica all'esterno del conduttore: ad ogni distribuzione di carica, invariante per traslazioni lungo z , nella regione $0 < \theta < \alpha$, corrispondono determinati valori dei coefficienti A_n .

Vogliamo adesso discutere il comportamento di una soluzione generica (2.285) nelle vicinanze della punta, ovvero per $r \rightarrow 0$. In questo caso, il termine dominante in $\phi(r, \theta)$ sarà quello con $n = 1$

$$\phi(r, \theta) = A_1 r^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{\theta \pi}{\alpha}\right) + \dots \quad \text{per } r \rightarrow 0 \quad (2.286)$$

Calcoliamo il corrispondente campo elettrico

$$E_\theta(r, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi(r, \theta)}{\partial \theta} = A_1 \frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \cos\left(\frac{\theta \pi}{\alpha}\right) + \dots \quad \text{per } r \rightarrow 0 \quad (2.287)$$

In prossimità dei semi-piani conduttori per i quali $\sin\left(\frac{\theta \pi}{\alpha}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\theta \pi}{\alpha}\right) = \pm 1$, otteniamo

$$E_\theta(r, 0) = -E_\theta(r, \alpha) = A_1 \frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}-1} + \dots \quad \text{per } r \rightarrow 0 \quad (2.288)$$

La densità di carica è pertanto

$$\sigma(r, 0) = \sigma(r, \alpha) = A_1 \epsilon_0 \frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}-1} + \dots \quad \text{per } r \rightarrow 0 \quad (2.289)$$

Vediamo quindi che per

$$\frac{\pi}{\alpha} - 1 < 0 \quad (2.290)$$

ovvero per

$$\alpha > \pi \quad (2.291)$$

il campo elettrico in prossimità dello spigolo $r = 0$ *diverge*. La condizione $\alpha > \pi$ è esattamente la condizione che i due piani conduttori formino una punta. Il fatto che il campo e la densità di carica siano molto elevati in vicinanza della punta è conosciuto come *effetto punta*. Nel caso di una punta molto stretta, $\alpha \rightarrow 2\pi$ e quindi il campo diverge come

$$E_\theta(r, 0) \rightarrow \frac{A_1}{2} r^{-\frac{1}{2}} + \dots \quad \text{per } \alpha \rightarrow 2\pi \quad (2.292)$$

Per $\alpha < \pi$ l'interno dei due conduttori è una regione concava. In questo caso la stesse formule (2.288)-(2.289) dimostrano che campo e la densità di carica, si annulla in prossimità dello spigolo.

Vogliamo ora determinare i coefficienti A_n per qualche distribuzione di carica particolare. A questo scopo si noti che la funzione (2.285) è armonica *per qualunque valore* di α . Questo fatto è legato alla seguente proprietà dell'equazione di Laplace in 2 dimensioni: se $\phi(r, \theta)$ è una soluzione di (2.274), allora la funzione

$$\tilde{\phi}(\tilde{r}, \tilde{\theta}) = \phi(r, \theta) \quad (2.293)$$

ottenuta effettuando il cambio di variabili

$$\tilde{r} = r^{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \tilde{\theta} = \frac{\pi}{\alpha} \theta \quad (2.294)$$

in $\phi(r, \theta)$, è ancora armonica:

$$\tilde{r} \partial_{\tilde{r}} (\tilde{r} \partial_{\tilde{r}} \tilde{\phi}(\tilde{r}, \tilde{\theta})) + \partial_{\tilde{\theta}}^2 \phi(\tilde{r}, \tilde{\theta}) = 0 \quad (2.295)$$

Per dimostrare questo fatto è sufficiente notare che

$$r \partial_r = \frac{\pi}{\alpha} \tilde{r} \partial_{\tilde{r}} \quad \partial_\theta = \frac{\pi}{\alpha} \partial_{\tilde{\theta}} \quad (2.296)$$

Supponiamo pertanto di conoscere $\phi(r, \theta)$ per un problema di conduttori con $\alpha = \pi$ (ovvero per un piano conduttore): in altre parole supponiamo che $\phi(r, \theta)$ sia il potenziale armonico in $0 \leq \theta \leq \pi$, con

$$\phi(r, 0) = \phi(r, \pi) = 0 \quad (2.297)$$

prodotto da una certa distribuzione di cariche invarianti per traslazioni lungo z in $0 \leq \theta \leq \pi$. Allora, effettuando il cambio di variabili

$$r \rightarrow r^{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \theta \rightarrow \frac{\pi}{\alpha} \theta \quad (2.298)$$

otterremo una funzione armonica in $0 \leq \theta \leq \alpha$, che soddisfa le condizioni

$$\phi(r, 0) = \phi(r, \alpha) = 0 \quad (2.299)$$

Questa funzione trasformata è pertanto la soluzione del problema con semipiani conduttori che formano tra loro un angolo α e con la distribuzione di carica che si ottiene dalla distribuzione di carica originale attraverso le trasformazioni (2.298).

Poiché per $\alpha = \pi$ i due semi-piani conduttori formano in realtà un piano, la soluzione può in questo caso essere determinata attraverso il metodo delle immagini. Si supponga per concretezza che la distribuzione di carica nella regione $0 < \theta < \pi$ sia un filo carico, parallelo all'asse delle z , posto in $x = 0$

e $y = d$. Il metodo delle immagini dà come soluzione

$$\begin{aligned}
\phi(x, y) &= -\frac{\lambda}{2\pi} (\log(x^2 + (y - d)^2) - \log(x^2 + (y + d)^2)) = \\
&= -\frac{\lambda}{2\pi} \log \frac{r^2 + d^2 - 2rd \sin \theta}{r^2 + d^2 + 2rd \sin \theta} = \\
&= -\frac{\lambda}{2\pi} \log \frac{1 + \frac{r^2}{d^2} - 2\frac{r}{d} \sin \theta}{1 + \frac{r^2}{d^2} + 2\frac{r}{d} \sin \theta} = \\
&= \frac{\lambda}{2\pi} \log \frac{1 + \frac{2\frac{r}{d} \sin \theta}{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{1 - \frac{2\frac{r}{d} \sin \theta}{1 + \frac{r^2}{d^2}}} \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (2.300)
\end{aligned}$$

Ricordando che

$$\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O(x^7) \quad (2.301)$$

ricaviamo

$$\begin{aligned}
\phi(r, \theta) &= \frac{\lambda}{\pi} \left[\frac{2\frac{r}{d} \sin \theta}{1 + \frac{r^2}{d^2}} + \frac{1}{3} \left(\frac{2\frac{r}{d} \sin \theta}{1 + \frac{r^2}{d^2}} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{2\frac{r}{d} \sin \theta}{1 + \frac{r^2}{d^2}} \right)^5 + \dots \right] = \\
&= \frac{\lambda}{\pi} \left[\frac{2r}{d} \sin \theta + \frac{r^3}{d^3} \left(\frac{8}{3} \sin^3 \theta - 2 \sin \theta \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{r^5}{d^5} \left(\frac{32}{5} \sin^5 \theta - 8 \sin^3 \theta + 2 \sin \theta \right) + O(r^7) \right] = \\
&= \frac{\lambda}{\pi} \left[\frac{2r}{d} \sin \theta - \frac{2}{3} \frac{r^3}{d^3} \sin 3\theta + \frac{2}{5} \frac{r^5}{d^5} \sin 5\theta + O(r^7) \right] \quad (2.302)
\end{aligned}$$

Possiamo constatare che il potenziale ammette effettivamente la rappresentazione in (2.285), con coefficienti

$$\alpha = \pi \quad A_{2k} = 0 \quad A_{2k+1} = (-1)^k \frac{2\lambda}{(2k+1)\pi d^{2k+1}} \quad (2.303)$$

La soluzione del problema per il quale i semipiani conduttori si trovano a $\theta = 0$ e $\theta = \alpha \neq \pi$ e per cui il filo carico si trova sulla semiretta

$$\theta = \frac{\alpha}{2} \quad (2.304)$$

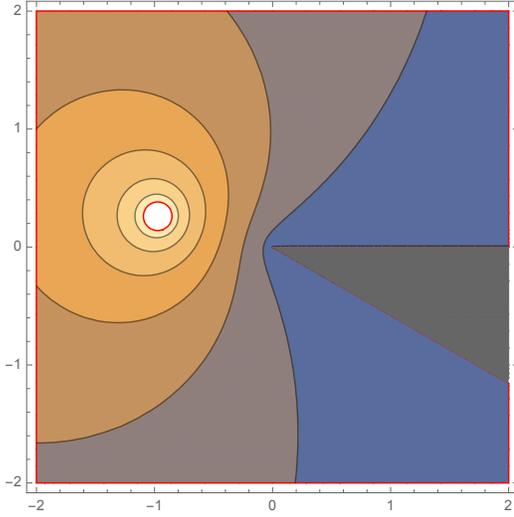


Figura 2: Il potenziale di un filo carico in presenza di semipiani conduttori che formano una “punta” di angolo $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

alla distanza dal centro d sarà pertanto ottenuta dalla (2.300) effettuando le sostituzioni (2.298), e mandando $d \rightarrow d_{\alpha}^{\frac{\pi}{\alpha}}$

$$\phi(r, \theta) = \frac{\lambda}{2\pi} \log \frac{r^{\frac{2\pi}{\alpha}} + d_{\alpha}^{\frac{2\pi}{\alpha}} + 2r^{\frac{\pi}{\alpha}} d_{\alpha}^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\theta\pi}{\alpha}}{r^{\frac{2\pi}{\alpha}} + d_{\alpha}^{\frac{2\pi}{\alpha}} - 2r^{\frac{\pi}{\alpha}} d_{\alpha}^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\theta\pi}{\alpha}} \quad (2.305)$$

La densità di carica sui piani conduttori è

$$\sigma(r, \alpha) = \frac{\epsilon_0 \lambda}{2\pi} \frac{4r^{\frac{\pi}{\alpha}-1} d_{\alpha}^{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{\pi}{\alpha}}{r^{\frac{2\pi}{\alpha}} + d_{\alpha}^{\frac{2\pi}{\alpha}}} \quad (2.306)$$

Il campo elettrico prodotto dalla distribuzione di carica in $r = 0$, in assenza dei piani conduttori sarebbe

$$\frac{\lambda}{2\pi d} \quad (2.307)$$

Il campo elettrico in presenza dei conduttori è invece, intorno a $r = 0$

$$\frac{\lambda}{2\pi} \frac{4\pi}{\alpha} \frac{r^{\frac{\pi}{\alpha}}}{d_{\alpha}^{\frac{\pi}{\alpha}}} \frac{1}{r} \quad (2.308)$$

Il rapporto, ovvero l'effetto "amplificante" della punta, è quindi

$$\frac{4\pi}{\alpha} \left(\frac{d}{r}\right)^{1-\frac{\pi}{\alpha}} \quad (2.309)$$

che è un numero molto grande se $\alpha > \pi$ e $r \ll d$.

2.11 Cilindro conduttore in campo elettrico uniforme

Consideriamo un cilindro conduttore di raggio R il cui asse coincide con l'asse delle z , immerso in un campo elettrico uniforme $\vec{E}_0 = E_0 \hat{x}$ diretto lungo l'asse delle x . Consideriamo il potenziale $\phi(r, \theta)$ all'esterno del cilindro conduttore. Per ragioni di simmetria

$$\phi(r, -\theta) = \phi(r, \theta) \quad (2.310)$$

Pertanto cerchiamo soluzioni della equazione di Laplace in due dimensioni della forma

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\theta \quad r \geq R \quad (2.311)$$

Per r grandi il potenziale deve diventare quello di un campo omogeneo uniforme

$$\phi(r, \theta) \rightarrow -E_0 r \cos \theta + \dots \quad \text{per } r \rightarrow \infty \quad (2.312)$$

Pertanto dobbiamo porre $a_n = 0$ per $n > 1$ e $a_1 = -E_0$

$$\phi(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^{-n} \cos n\theta \quad (2.313)$$

La componente del campo elettrico tangente alla superficie $r = R$ deve annullarsi

$$\partial_{\theta} \phi(r, \theta) \Big|_{r=R} = 0 = E_0 R \sin \theta - \sum_{n=1}^{\infty} b_n R^{-n} n \sin n\theta \quad (2.314)$$

Dunque

$$E_0 R \sin \theta = b_1 R^{-1} \sin \theta \Leftrightarrow b_1 = E_0 R^2 \quad (2.315)$$

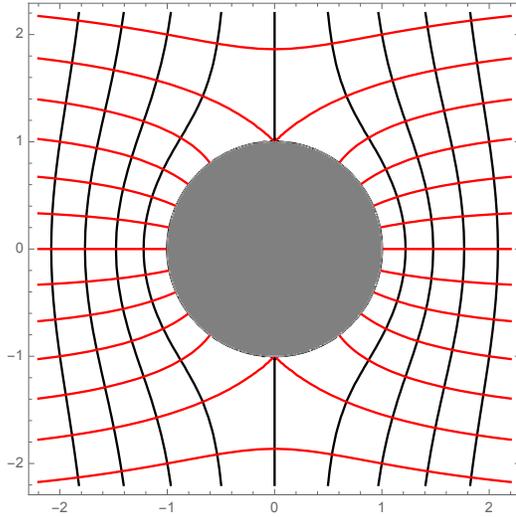


Figura 3: Le linee di potenziale (in nero) e le linee del campo elettrico (in rosso) per un cilindro conduttore (in grigio) immerso in un campo elettrico uniforme.

e

$$b_n = 0 \quad n > 1 \quad (2.316)$$

In definitiva

$$\phi(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + E_0 \frac{R^2}{r} \cos \theta \quad r \geq R \quad (2.317)$$

Le linee equipotenziali e le linee di forza del campo elettrico sono mostrate in Fig. 3.

La densità di carica superficiale sul cilindro è

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 \partial_r \phi(r, \theta) \Big|_{r=R} = \epsilon_0 \left(E_0 \cos \theta + E_0 \frac{R^2}{R^2} \cos \theta \right) = 2 \epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (2.318)$$

Il momento di dipolo indotto per unità di lunghezza è diretto lungo l'asse delle x e vale

$$\begin{aligned} p_x &= \int_0^{2\pi} d\theta R \sigma(\theta) R \cos \theta = 2 R^2 \epsilon_0 E_0 \int_0^{2\pi} d\theta \cos^2 \theta = \\ &= 2 \pi \epsilon_0 R^2 E_0 \end{aligned} \quad (2.319)$$

2.12 L'equazione di Poisson in una dimensione

L'equazione di Poisson in 1 dimensione si scrive

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0} \quad (2.320)$$

Vogliamo applicare questa equazione per la descrizione di una situazione in cui degli elettroni vengono emessi in $x = 0$ con *velocità nulla* da un elettrodo (catodo) posto ad un potenziale fissato

$$\phi(0) = 0 \quad (2.321)$$

Gli elettroni si muovono lungo x fino a $x = L$ dove vengono raccolti da un altro elettrodo (anodo) posto ad un potenziale fissato

$$\phi(d) = V \quad (2.322)$$

La velocità degli elettroni nel punto x è determinata dalla conservazione dell'energia

$$0 = \frac{1}{2} m_e v^2(x) - e \phi(x) \quad (2.323)$$

cioè

$$v(x) = \sqrt{\frac{2e}{m_e} \phi(x)} \quad (2.324)$$

La corrente tra anodo e catodo è

$$I = -A \rho(x) v(x) \quad (2.325)$$

(gli elettroni hanno carica negativa e I è positiva) dove A è la sezione del fascio e $\rho(x)$ è la densità di carica degli elettroni. In condizioni stazionarie I è costante e

$$\rho(x) = -\frac{I}{A \sqrt{\frac{2e}{m_e} \phi(x)}} \quad (2.326)$$

In definitiva

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = \frac{I \sqrt{\frac{m_e}{2e}}}{A \epsilon_0 \sqrt{\phi(x)}} \quad (2.327)$$

Per studiare quest'equazione differenziale converrà usare delle variabili adimensionate. Introduciamo quindi

$$\varphi(\xi) \equiv \frac{\phi(x)}{V} \quad \xi \equiv \frac{x}{d} \quad (2.328)$$

Le condizioni agli estremi (2.321) e (2.322) diventano per la funzione adimensionata $\varphi(\xi)$

$$\varphi(0) = 0 \quad \varphi(1) = 1 \quad (2.329)$$

L'equazione (2.327) si riscrive come

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = \frac{I d^2 \sqrt{\frac{m_e}{2e}}}{A \epsilon_0 V^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \quad (2.330)$$

L'equazione dipende esclusivamente dalla costante moltiplicativa, adimensionata, che appare nel membro di destra è, che denoteremo come

$$R \equiv \frac{4 I d^2}{A \epsilon_0 V^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{m_e}{2e}} \quad (2.331)$$

così che l'equazione differenziale diventa

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = \frac{R}{4} \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \quad (2.332)$$

Per risolvere quest'equazione riscriviamola come

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = -\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{R}{2} \varphi^{\frac{1}{2}} \right) \quad (2.333)$$

che sono le equazioni del moto classiche di una particella di coordinata φ e di massa 1, che si muove in un potenziale unidimensionale

$$V(\varphi) = -\frac{R}{2} \varphi^{\frac{1}{2}} \quad (2.334)$$

con ξ che svolge il ruolo del tempo. Poiché l'energia di questo sistema si conserva, otteniamo l'equazione del primo ordine

$$\frac{1}{2} \varphi'^2 - \frac{R}{2} \varphi^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \epsilon^2 \quad (2.335)$$

dove ϵ^2 è una costante indipendente da ξ . Poiché $\varphi(0) = 0$, ϵ^2 deve essere positivo

$$\epsilon^2 = \varphi'^2(0) \quad (2.336)$$

ϵ è quindi il modulo della derivata della funzione $\varphi(\xi)$ nel punto $\xi = 0$. Fissato ϵ quindi, la soluzione $\varphi(\xi)$, con $\varphi(0) = 0$ è univocamente determinata. Dalle definizioni (2.328), risulta che

$$\epsilon = \frac{d\phi'(0)}{V} = \frac{E_0 d}{V} \quad (2.337)$$

dove E_0 è il modulo del campo elettrico al catodo

L'equazione (2.335) è a variabili separabili:

$$\varphi' = \sqrt{\epsilon^2 + R \varphi^{\frac{1}{2}}} \quad (2.338)$$

da cui

$$\int_0^\varphi \frac{dz}{\sqrt{\epsilon^2 + R z^{\frac{1}{2}}}} = \xi \quad (2.339)$$

dove abbiamo imposto la condizione $\varphi(0) = 0$. Risolvendo

$$\begin{aligned} \sqrt{R} \xi &= \int_0^\varphi \frac{dz}{\sqrt{\frac{\epsilon^2}{R} + z^{\frac{1}{2}}}} = \int_{\frac{\epsilon^2}{R}}^{\frac{\epsilon^2}{R} + \sqrt{\varphi}} \frac{2 dy (y - \frac{\epsilon^2}{R})}{\sqrt{y}} = \\ &= \left[\frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{4\epsilon^2}{R} y^{\frac{1}{2}} \right]_{\frac{\epsilon^2}{R}}^{\frac{\epsilon^2}{R} + \sqrt{\varphi}} = \\ &= \frac{4}{3} \left[\left(\frac{\epsilon^2}{R} + \sqrt{\varphi} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3\epsilon^2}{R} \left(\frac{\epsilon^2}{R} + \sqrt{\varphi} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2\epsilon^3}{R^{\frac{3}{2}}} \right] \end{aligned} \quad (2.340)$$

Calcoliamo anche la carica totale compresa nel diodo:

$$\begin{aligned} Q &= A \int_0^d dx \rho(x) = -\epsilon_0 A \int_0^d dx \phi''(x) = -\epsilon_0 A (\phi'(d) - \phi'(0)) = \\ &= -\frac{\epsilon_0 A V}{d} (\varphi'(1) - \varphi'(0)) = -\frac{\epsilon_0 A V}{d} (\sqrt{\epsilon^2 + R} - \epsilon) = \\ &= -\frac{\epsilon_0 A V \sqrt{R}}{d} \left(\sqrt{1 + \frac{\epsilon^2}{R}} - \frac{\epsilon}{\sqrt{R}} \right) \end{aligned} \quad (2.341)$$

La capacità del sistema relativa a quella di un condensatore con armature di superficie A separate da una distanza d è quindi

$$c(\mu) \equiv \frac{|Q|}{V} \frac{d}{\epsilon_0 A} = \sqrt{R} \left(\sqrt{1 + \frac{\epsilon^2}{R}} - \frac{\epsilon}{\sqrt{R}} \right) \quad (2.342)$$

L'equazione (2.340) determina ξ in funzione di φ , e quindi, in modo implicito, $\varphi(\xi)$. Poiché per ottenere la funzione inversa $\varphi(\xi)$ bisognerebbe risolvere un'equazione di terzo grado, studieremo le proprietà di $\varphi(\xi)$ in modo implicito. La condizione $\varphi(1) = 1$ fornisce la relazione tra R e ϵ :

$$\frac{3\sqrt{R}}{4} = \left(\frac{\epsilon^2}{R} + 1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3\epsilon^2}{R} \left(\frac{\epsilon^2}{R} + 1\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2\epsilon^3}{R^{\frac{3}{2}}} \quad (2.343)$$

Il coefficiente $R(\epsilon)$ determina il rapporto $\frac{I}{V^{\frac{3}{2}}}$

$$I = R(\epsilon) \frac{A\epsilon_0}{4d^2} \sqrt{\frac{2e}{m_e}} V^{\frac{3}{2}} \quad (2.344)$$

Cominciamo col notare che se $\epsilon = 0$, cioè per campo elettrico nullo al catodo, allora

$$\frac{3\sqrt{R}}{4} = 1 \Rightarrow I = \frac{4}{9} \frac{A\epsilon_0}{d^2} \sqrt{\frac{2e}{m_e}} V^{\frac{3}{2}} \quad \text{per } \epsilon = 0 \quad (2.345)$$

che è la famosa relazione di *Child-Langmuir* tra tensione e corrente, valida quando il campo elettrico è nullo al catodo. Per $\epsilon = 0$ la relazione tra ξ e φ si semplifica

$$\xi = \varphi^{\frac{3}{4}} \quad \text{per } \epsilon = 0 \quad (2.346)$$

e può essere invertita agevolmente

$$\varphi(\xi) = \xi^{\frac{4}{3}} \quad \text{per } \epsilon = 0 \quad (2.347)$$

Per studiare la relazione $R = R(\epsilon)$ definita dalla (2.343) nel caso generale è conveniente introdurre la variabile ausiliaria

$$\mu = \frac{\epsilon}{\sqrt{R}} \quad (2.348)$$

La (2.343) si riscrive in termini di μ

$$\sqrt{R} = \frac{4}{3} [(\mu^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 3\mu^2 (\mu^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + 2\mu^3] \quad (2.349)$$

Questa relazione e la definizione di μ

$$\epsilon = \sqrt{R} \mu = \frac{4\mu}{3} [(\mu^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 3\mu^2 (\mu^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + 2\mu^3] \quad (2.350)$$

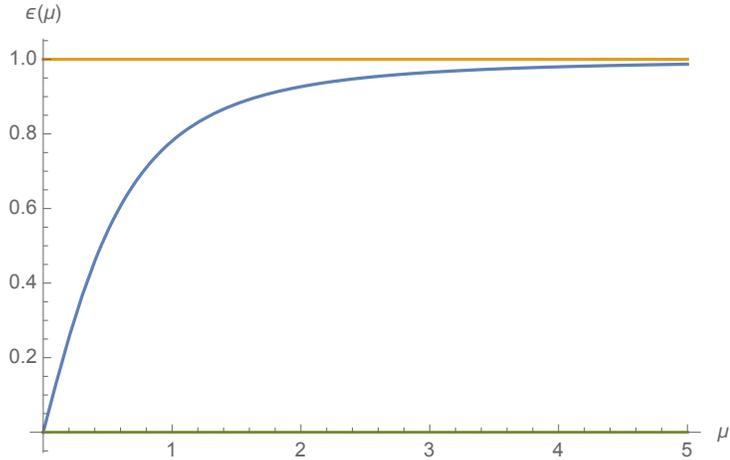


Figura 4: La funzione $\epsilon(\mu)$.

definiscono due funzioni $R(\mu)$ e $\epsilon(\mu)$ e quindi, parametricamente, la relazione tra ϵ ed R . La capacit  relative del diodo in funzione di μ  :

$$c(\mu) = \frac{4}{3} [(\mu^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 3\mu^2 (\mu^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + 2\mu^3] (\sqrt{1 + \mu^2} - \mu) \quad (2.351)$$

La funzione $\epsilon(\mu)$   graficata in Fig.4. Da questo grafico si evince che esiste un'unico valore di ϵ compreso in $[0, 1]$ per ogni μ positivo. Il valore $\epsilon \rightarrow 0$ corrisponde a $\mu \rightarrow 0$, mentre $\epsilon \rightarrow 1^-$ per $\mu \rightarrow +\infty$. Quindi le relazioni (2.349) e (2.350) sono invertibili e definiscono effettivamente una funzione univoca $R(\epsilon)$. Il grafico della $\sqrt{R(\mu)}$   mostrato in Fig. 5. Vediamo che $R(\mu)$   massimo e pari a $\frac{4}{9}$ per $\mu = 0$ ovvero per $\epsilon = 0$. Per $\mu \rightarrow +\infty$, ovvero per $\epsilon \rightarrow 1^-$, $R(\mu)$ va a zero. In Fig. 6   graficata la capacit  del diodo in funzione di μ . Nel seguito consideriamo separatamente i casi $\mu \ll 1$ e $\mu \gg 1$, per determinare il comportamento analitico di R in termini di ϵ nei due limiti $\epsilon \rightarrow 0+$ e $\epsilon \rightarrow 1^-$.

2.12.1 $\epsilon \ll 1$

Per $\mu \ll 1$

$$f(\mu) \equiv 1 + \frac{3}{2}\mu^2 - 3\mu^2 + O(\mu^3) = 1 - \frac{3}{2}\mu^2 + O(\mu^3) \quad (2.352)$$

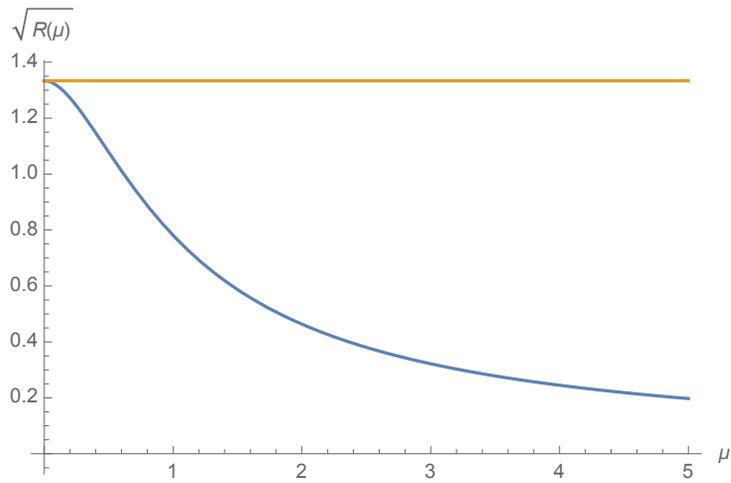


Figura 5: *La funzione $\sqrt{R(\mu)}$.*

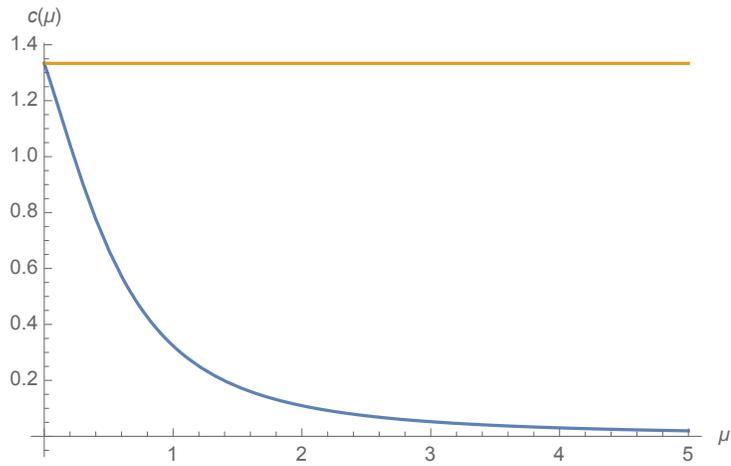


Figura 6: *La funzione $c(\mu)$.*

Quindi

$$\epsilon = \frac{4\mu}{3} \left(1 - \frac{3}{2}\mu^2 + O(\mu^3)\right) \quad (2.353)$$

Pertanto quando $\mu \rightarrow 0$, il campo elettrico al catodo $\epsilon \rightarrow 0$ si annulla. Sostituendo nell'espressione per R otteniamo

$$\sqrt{R} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{3}{2}\mu^2 + O(\mu^3)\right) = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{9}{16} \epsilon^2 + O(\epsilon^3)\right) \quad (2.354)$$

Quindi

$$R(\epsilon) = \frac{4I d^2}{A \epsilon_0 V^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{m_e}{2e}} = \frac{16}{9} \left(1 - \frac{27}{16} \epsilon^2 + O(\epsilon^3)\right) \quad (2.355)$$

è la correzione alla relazione tra corrente e potenziale nel caso di ϵ piccolo ma non nullo. Vediamo che per $\epsilon > 0$ la corrente diminuisce a parità di voltaggio.

Per quanto riguarda il potenziale $\varphi(\xi)$, dobbiamo distinguere due regimi. Quello in cui $\xi \rightarrow 0$ e tale che $\sqrt{\varphi(\xi)} \ll \mu^2$. In questo regime

$$\sqrt{R}\xi = \frac{\varphi}{\mu} \left(1 + O\left(\frac{\sqrt{\varphi}}{\mu^2}\right)\right) \quad (2.356)$$

ovvero

$$\varphi(\xi) = \mu \sqrt{R}\xi \left(1 + O\left(\frac{\sqrt{\varphi}}{\mu^2}\right)\right) = \epsilon \xi \left(1 + O\left(\frac{\sqrt{\varphi}}{\mu^2}\right)\right) \quad (2.357)$$

come doveva essere, visto che $\varphi'(0) = \epsilon$. Quando invece ξ è abbastanza grande che $\sqrt{\varphi(\xi)} \gg \mu^2$,

$$\frac{4}{3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{9}{16} \epsilon^2 + O(\epsilon^3)\right) \xi = \frac{4}{3} \varphi^{\frac{3}{4}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\mu^2}{\sqrt{\varphi}} + O\left(\frac{\varphi}{\mu^4}\right)\right) \quad (2.358)$$

ovvero

$$\varphi(\xi) = \xi^{\frac{4}{3}} \left(1 - \frac{9}{8} \epsilon^2 \left(1 - \frac{1}{\xi^{\frac{2}{3}}}\right) + O(\epsilon^3)\right) \quad (2.359)$$

Vediamo quindi che un piccolo campo al catodo $\epsilon > 0$ ha l'effetto di rimuovere la singolarità nell'intorno di $\xi = 0$ della derivata seconda della soluzione $\xi^{\frac{4}{3}}$ ad $\epsilon = 0$, ritornando per ξ sufficientemente grandi al comportamento $\propto \xi^{\frac{4}{3}}$.

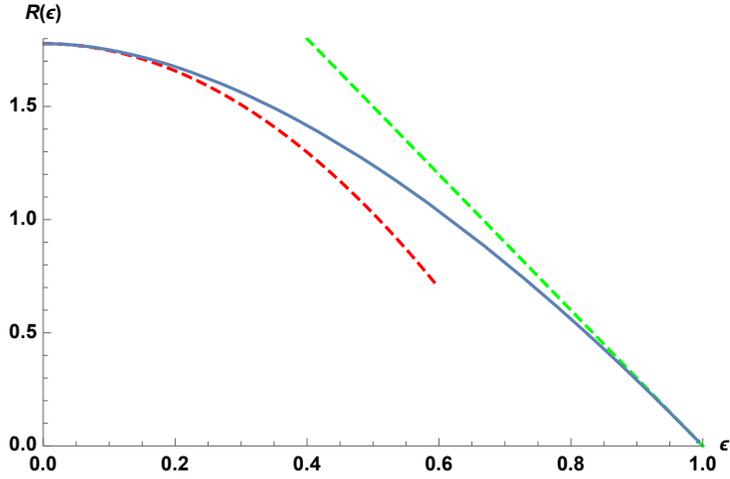


Figura 7: La funzione $R(\epsilon)$.

2.12.2 $\epsilon \rightarrow 1^-$

Nel limite $\mu \gg 1$:

$$\begin{aligned}
 f(\mu) &= \mu^3 \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{8} \frac{1}{\mu^4} + O\left(\frac{1}{\mu^6}\right) \right]^2 \times \\
 &\times \left[3 + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu^2} + O\left(\frac{1}{\mu^4}\right) \right] = \frac{3}{4\mu} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\mu^2} + O\left(\frac{1}{\mu^4}\right) \right] \times \\
 &\times \left[1 + \frac{1}{6} \frac{1}{\mu^2} + O\left(\frac{1}{\mu^4}\right) \right] = \frac{3}{4\mu} \left[1 - \frac{1}{3} \frac{1}{\mu^2} + O\left(\frac{1}{\mu^4}\right) \right] \quad (2.360)
 \end{aligned}$$

Quindi

$$\epsilon(\mu) = \left[1 - \frac{1}{3} \frac{1}{\mu^2} + O\left(\frac{1}{\mu^4}\right) \right] \quad (2.361)$$

Pertanto quando $\mu \rightarrow +\infty$ il campo al catodo ϵ tende a 1 (da sinistra). Passando alle variabili dimensionate, vediamo che il valore limite del campo elettrico al catodo è

$$\phi'(0) = \frac{V}{d} \varphi'(0) \rightarrow \frac{V}{d} \quad (2.362)$$

Nel limite di grandi μ , R tende a zero

$$\begin{aligned}
 R(\epsilon) &= \frac{1}{\mu^2} \left[1 - \frac{1}{3} \frac{1}{\mu^2} + O\left(\frac{1}{\mu^4}\right) \right]^2 = \frac{1}{\mu^2} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{1}{\mu^2} + O\left(\frac{1}{\mu^4}\right) \right] = \\
 &= 3(1 - \epsilon) \left[1 + O((1 - \epsilon)^2) \right] \quad (2.363)
 \end{aligned}$$

Quindi nel limite $\epsilon \rightarrow 1^-$ la corrente va a zero come

$$I = \frac{A \epsilon_0 V^{\frac{3}{2}}}{4 d^2} \sqrt{\frac{m_e}{2e}} 3(1 - \epsilon) [1 + O((1 - \epsilon)^2)] \quad (2.364)$$

Per quanto riguarda il potenziale, abbiamo

$$\varphi(\xi) = \xi [1 + (\sqrt{\xi} - 1)(1 - \epsilon) + O((1 - \epsilon)^2)] \quad (2.365)$$

Il campo è quindi una piccola perturbazione del campo elettrico costante che sarebbe la soluzione nel vuoto in assenza di correnti.

Il grafico di R in funzione di ϵ , insieme alle approssimazioni (2.355) e (2.363) per $\epsilon \rightarrow 0$ e $\epsilon \rightarrow 1$ è mostrato in Fig. 7. Il meccanismo fisico che spiega questo comportamento è il seguente. Supponiamo di partire da una situazione in cui il potenziale iniziale tra le due piastre è quello lineare $\phi(x) = -\frac{V}{d}x$, corrispondente ad un campo elettrico costante $E_{max} = \frac{V}{d}$, ovvero $\epsilon = 1$. Questa è una soluzione dell'equazione di Poisson solo se $I = 0$, cioè se non passa corrente tra le piastre. Supponiamo ora di aumentare la temperatura del catodo in modo che diventi possibile per il campo $E_{max} = \frac{V}{d}$ riuscire ad strappare degli elettroni di conduzione dal catodo, così che una corrente I cominci a fluire tra le piastre. La nuvola di elettroni che si formerà al catodo creerà un campo elettrico diretto in senso *opposto* a quello originale. Quindi il campo al catodo tenderà a diminuire: $\epsilon < 1$. Fin tanto che il campo al catodo è ancora sufficientemente intenso da riuscire a estrarre gli elettroni dal metallo la densità di carica al catodo continuerà ad aumentare, e, di conseguenza, il campo ϵ a diminuire. La situazione di equilibrio sarà raggiunta quando il campo ϵ è diventato così piccolo da non essere più sufficiente per estrarre elettroni. Questo valore minimo di ϵ dipende dal catodo, dalla sua temperatura per esempio: se la temperatura del catodo è sufficientemente alta, ϵ sarà molto piccolo. Al limite per $\epsilon = 0$ la corrente e la densità di carica non possono più aumentare, avendo raggiunto il valore di Child-Langmuir (2.345).

2.13 Il campo elettrico di dipolo e di quadrupolo

Il potenziale elettrostatico nel punto $\vec{r} = x^i \vec{e}_i$, con $i = 1, 2, 3$, prodotto da una distribuzione di cariche $\{q_a\}$ poste nelle posizioni $\{\vec{d}_a\}$, con $a = 1, 2, \dots$, è

$$4 \pi \epsilon_0 \phi(\vec{r}) = \sum_a \frac{q_a}{|\vec{r} - \vec{d}_a|} = \frac{1}{|\vec{r}|} \sum_a \frac{q_a}{\sqrt{1 - 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}_a}{r^2} + \frac{d_a^2}{r^2}}} \quad (2.366)$$

Useremo lo sviluppo di Taylor

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \dots \quad (2.367)$$

con

$$x = -2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}_a}{r^2} + \frac{d_a^2}{r^2} \quad (2.368)$$

Dunque

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}_a}{r^2} + \frac{d_a^2}{r^2}}} = 1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}_a}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{d_a^2}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{(\vec{r} \cdot \vec{d}_a)^2}{r^4} + \dots \quad (2.369)$$

e

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0\phi(\vec{r}) &= \frac{\sum_a q_a}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{r} \cdot \sum_a q_a \vec{d}_a}{|\vec{r}|^3} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{3 \sum_a q_a (\vec{r} \cdot \vec{d}_a)^2}{|\vec{r}|^5} - \frac{\sum_a q_a d_a^2}{|\vec{r}|^3} \right] + \dots \\ &= \frac{Q}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{|\vec{r}|^3} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{3 x^i x^j \sum_a q_a (\vec{d}_a)^i (\vec{d}_a)^j}{|\vec{r}|^5} - \frac{\sum_a q_a \vec{d}_a \cdot \vec{d}_a}{|\vec{r}|^3} \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.370)$$

dove $(\vec{d}_a)^i$, con $i = 1, 2, 3$, sono le componenti cartesiane del vettore \vec{d}_a . Il potenziale di dipolo è quindi

$$\phi_{dipolo}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{|\vec{r}|^3} \quad (2.371)$$

dove

$$\vec{p} \equiv \sum_a q_a \vec{d}_a \quad (2.372)$$

è il vettore che descrive il momento di dipolo. Il campo elettrico corrispondente è

$$\vec{E}_{dipolo} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{p} \cdot \hat{r} \hat{r} - \vec{p}}{r^3} \quad (2.373)$$

Il potenziale di quadrupolo si scrive invece

$$\phi_{quadrupolo}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_i x_j M^{ij}}{|\vec{r}|^5} \quad (2.374)$$

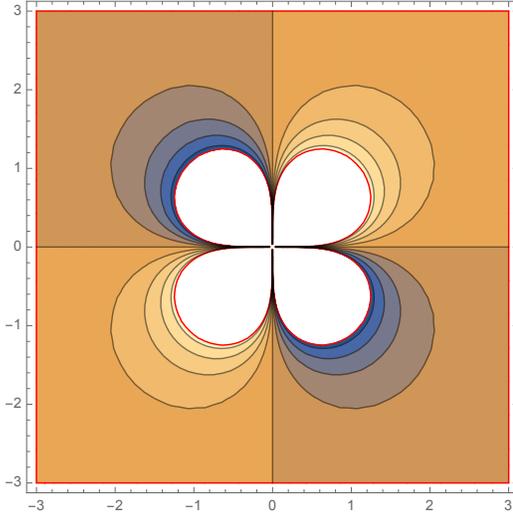


Figura 8: Il campo di quadrupolo (2.380) sul piano $z = 0$.

dove M^{ij} , con $i, j = 1, 2, 3$ è il tensore dei momenti di quadrupolo

$$M^{ij} = \frac{1}{2} \sum_a q_a \left[3 (\vec{d}_a)^i (\vec{d}_a)^j - \delta^{ij} \vec{d}_a \cdot \vec{d}_a \right] \quad (2.375)$$

Il campo elettrico corrispondente è

$$E_{quadrupolo}^i = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{M^{jk}}{r^7} (5 x^i x^j x^k - r^2 (\delta^{ij} x^k + \delta^{ik} x^j)) \quad (2.376)$$

Si noti che M^{ij} è simmetrico ed ha traccia nulla:

$$\sum_i M_i^i = \frac{1}{2} \sum_i q_a \left[3 \vec{d}_a^2 - 3 \vec{d}_a \cdot \vec{d}_a \right] = 0 \quad (2.377)$$

Esercizio: si calcolino i momenti ed il campo di quadrupolo per una distribuzione di carica data da due dipoli paralleli orientati in senso opposto.

Supponiamo la distribuzione di carica sia formata da quattro cariche poste ai vertici di un quadrato di lato a , posto nel piano (x, y) , centrato nell'origine

$$\begin{aligned} \vec{d}_1 &= \frac{1}{2} (a, a, 0) & \vec{d}_2 &= \frac{1}{2} (a, -a, 0) \\ \vec{d}_3 &= \frac{1}{2} (-a, -a, 0) & \vec{d}_4 &= \frac{1}{2} (-a, a, 0) \end{aligned} \quad (2.378)$$

con $q_1 = q_3 = q = -q_2 = -q_4$. La carica totale ed il momento di dipolo di questa distribuzione sono nulli. Il momento di quadropolo è

$$\begin{aligned}
M^{xx} &= \frac{1}{2} \sum_a q_a (2 (d_a^x)^2 - (d_a^y)^2) = \frac{1}{2} \sum_a q_a \frac{a^2}{4} = 0 \\
M^{yy} &= \frac{1}{2} \sum_a q_a (2 (d_a^y)^2 - (d_a^x)^2) = \frac{1}{2} \sum_a q_a \frac{a^2}{4} = 0 \\
M^{xy} &= \frac{3}{2} \sum_a q_a d_a^x d_a^y = \frac{3}{2} 4 \times q \frac{a^2}{4} = \frac{3}{2} a^2 q \\
M^{zx} &= M^{zy} = M^{zz} = 0
\end{aligned} \tag{2.379}$$

Il potenziale di quadropolo di questa distribuzione è pertanto

$$\phi^{(4)}(\vec{r}) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{3 a^2 q}{2} \frac{xy}{r^5} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{3 a^2}{2} \frac{\sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi}{r^3} \tag{2.380}$$

ed il campo elettrico

$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{3 a^2}{2} \frac{3 x^2 y - 2 z^2 y - 2 y^3}{r^7} \\
E_y &= \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{3 a^2}{2} \frac{3 y^2 x - 2 z^2 x - 2 x^3}{r^7} \\
E_z &= \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{3 a^2}{2} \frac{5 x y z}{r^7}
\end{aligned} \tag{2.381}$$

Le linee equipotenziali sul piano $z = 0$ del campo di quadropolo (2.380) sono graficate in Fig. 8.

2.14 Plasmi

Sia $\rho_{el}(\vec{x}, t)$ la densità di un gas di elettroni immersi in una densità ρ_0 di ioni positivi (pesanti e, quindi, approssimativamente immobili), uniforme ed indipendente dal tempo. Sia $\vec{s}(\vec{x}, t)$ lo spostamento dalla posizione di equilibrio degli elettroni in \vec{x} . Sia V un certo volume contenente, all'equilibrio, $N_0 = V \rho_0$ elettroni. In una configurazione in cui lo spostamento degli elettroni è caratterizzata da $\vec{s}(\vec{x}, t)$, lo stesso numero di elettroni N_0 si trova in un volume

$$V[\vec{s}] = V + \int_{\partial V} \vec{s} \cdot \hat{n} d^2 a = \int_V (1 + \vec{\nabla} \cdot \vec{s}) d^3 V \tag{2.382}$$

Corrispondentemente la densità elettronica per la configurazione $\vec{s}(\vec{x}, t)$ è

$$\rho_{el}[\vec{s}] = \frac{\rho_0}{1 + \vec{\nabla} \cdot \vec{s}} \quad (2.383)$$

dove ρ_0 è la densità all'equilibrio. Pertanto l'equazione di Gauss diventa

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q_e \rho_0}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{1 + \vec{\nabla} \cdot \vec{s}} \right) = \frac{q_e \rho_0}{\epsilon_0} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{s}}{1 + \vec{\nabla} \cdot \vec{s}} \quad (2.384)$$

dove si è tenuto conto che all'equilibrio la densità di carica elettronica e ionica si equivalgono. Per piccole perturbazioni dell'equilibrio

$$|\vec{\nabla} \cdot \vec{s}| \ll 1 \quad (2.385)$$

l'equazione di Gauss diventa

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q_e \rho_0}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{s} \quad (2.386)$$

e dunque

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{E} - \frac{q_e \rho_0}{\epsilon_0} \vec{s} \right] = 0 \quad (2.387)$$

Tenuto conto che per $\vec{s} = 0$ il campo elettrico deve annullarsi, otteniamo

$$\vec{E} = \frac{q_e \rho_0}{\epsilon_0} \vec{s} \quad (2.388)$$

L'equazione del moto degli elettroni diventa

$$m \frac{d\vec{s}}{dt^2} = -\frac{q_e^2 \rho_0}{\epsilon_0} \vec{s} \quad (2.389)$$

Il moto degli elettroni è dunque un moto elastico caratterizzato dalla frequenza

$$\omega_{plasma}^2 = \frac{q_e^2 \rho_0}{m \epsilon_0} = \frac{4 \pi e^2 \rho_0}{m} \quad (2.390)$$

detta *frequenza di plasma* del metallo in questione.

2.15 Energia elettrostatica

2.15.1 Energia di cristallo ionico

Consideriamo un cristallo cubico, di passo a , sui cui siti sono posti cariche (ioni) $\pm e$ positivi e negativi. Vogliamo calcolare l'energia elettrostatica di uno ione nel reticolo. L'esempio concreto è Na^+Cl^- . Sperimentalmente l'energia per molecola necessaria per separare $NaCl$ in ioni (che è l'energia di vaporizzazione del cristallo più l'energia di ionizzazione) è

$$U_{sper} \approx 7.92 \frac{ev}{molecola} \quad (2.391)$$

(che è equivalente a 183 kcal/mole). Il passo reticolare per il $NaCl$ è

$$a = 2.81 \cdot 10^{-8} \text{ cm} \quad (2.392)$$

Calcoleremo l'energia U di uno ione nel campo creato da tutti gli altri ioni del reticolo. Questa energia è il doppio dell'energia da associare ad ogni singolo ione, in quanto l'energia è da assegnarsi alle coppie cariche. Quindi U è uguale all'energia per molecola:

$$U = \frac{e^2}{a} \sum_{\{n_1, n_2, n_3\} \neq \{0,0,0\}} \frac{(-1)^{(n_1+n_2+n_3)}}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \quad (2.393)$$

dove la somma su $n_{1,2,3}$ è sugli interi relativi. Decomponiamo la tripla somma come segue

$$U = \frac{e^2}{a} \left[U_0 + \sum_{\{n_1, n_2\} \neq \{0,0\}} U_{n_1, n_2} \right] \quad (2.394)$$

dove

$$U_0 = 2 \sum_{n_3=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n_3}}{n_3} = -2 \log 2 \approx -1.386 \quad (2.395)$$

e per $\{n_1, n_2\} \neq \{0, 0\}$,

$$U_{n_1, n_2} = (-1)^{(n_1+n_2)} \sum_{n_3=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n_3}}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \quad (2.396)$$

Usiamo il risultato per il potenziale di una catena di ioni:

$$U_{n_1, n_2} = 4(-1)^{(n_1+n_2)} \left[K_0(\pi \sqrt{n_1^2 + n_2^2}) + K_0(3\pi \sqrt{n_1^2 + n_2^2}) + \dots \right] \quad (2.397)$$

I numeri U_{n_1, n_2} decrescono rapidamente all'aumentare di $\sqrt{n_1^2 + n_2^2}$:

$$\begin{aligned} U &= \frac{e^2}{a} \left[U_0 + 4U_{1,0} + 4U_{1,1} + 4U_{2,0} + 8U_{2,1} + 4U_{2,2} + \dots \right] = \\ &\approx \frac{e^2}{a} \left[-1.3863 - 0.47266 + 0.109088 + \right. \\ &\quad \left. + 0.0146654 - 0.0132376 + 0.0001837 + \dots \right] = \\ &= -\frac{e^2}{a} 1.7476 \end{aligned} \quad (2.398)$$

Per $a = 2.81 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$

$$\frac{e^2}{a} \approx 27.2 \text{ ev} \times \frac{a_{Bohr}}{a} = 5.122 \text{ ev} \quad (2.399)$$

Dunque

$$U_{elettrostatico} \approx -8.95 \text{ ev} \quad (2.400)$$

La ragione principale della differenza tra il valore teorico e quello sperimentale è che non abbiamo tenuto conto dell'energia elettrostatica di repulsione degli ioni a distanza ravvicinate. Questo effetto abbassa il valore teorico a -7.99 ev . Un altro effetto trascurato è l'energia associata alle vibrazioni del cristallo.

3 I dielettrici

3.1 Le equazioni dell'elettrostatica nei dielettrici

Supponiamo che una molecola neutra posta in un campo elettrico \vec{E} acquisti la polarizzazione $\vec{p} = q\vec{r}$, in quanto il centro di carica degli elettroni (di carica totale $-q$) si sposta di una distanza $-\vec{r}$ dal centro di carica dei nuclei atomici. Se ci sono N molecole per unità di volume, il vettore *densità di polarizzazione* è

$$\vec{P}(\vec{r}) = N\vec{p} \quad (3.1)$$

Consideriamo un mezzo dielettrico descritto da una densità di polarizzazione $\vec{P}(\vec{x})$. Il potenziale elettrostatico creato da \vec{P} ad una distanza \vec{x} grande rispetto alle dimensioni dei dipoli è

$$\begin{aligned} 4 \pi \epsilon_0 \phi_p(\vec{x}) &= \int d^3 \vec{x}' \frac{\vec{P}(\vec{x}') \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \\ &= \int d^3 \vec{x}' \vec{P}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = - \int d^3 \vec{x}' \frac{\vec{\nabla}_{\vec{x}'} \cdot \vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned} \quad (3.2)$$

La variazione di densità di polarizzazione dà quindi origine ad una *densità carica di polarizzazione* ρ_{pol}

$$\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (3.3)$$

La densità di carica totale si scrive pertanto come

$$\rho = \rho_{lib} + \rho_{pol} \quad (3.4)$$

dove ρ_{lib} è la densità di carica dovuta alle cariche libere, che rappresenta un eccesso od un deficit di elettroni nel mezzo. L'equazione di Gauss si scrive

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{lib} + \rho_{pol}}{\epsilon_0} \quad (3.5)$$

Definendo

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (3.6)$$

l'equazione si riscrive in termini della densità di carica libera

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{lib} \quad (3.7)$$

o, in termini di flusso,

$$\Phi(\vec{D}; S) = Q_{lib}(V) \quad (3.8)$$

dove V è un volume il cui bordo è la superficie chiusa S .

La relazione tra \vec{P} e \vec{E} è *approssimativamente* lineare in molti materiali:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (3.9)$$

dove χ_e è la *suscettibilità* elettrica. Dunque

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \equiv \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (3.10)$$

dove

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e \quad (3.11)$$

è la *costante dielettrica* o *permissività relativa*.

Nel caso in cui χ_e è costante al variare del punto, l'equazione di Gauss diventa

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{lib}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (3.12)$$

Quindi i campi elettrici prodotti da cariche libere in un mezzo dielettrico sono ridotti di un fattore ϵ_r relativamente al vuoto. La polarizzazione delle molecole o degli atomi produce dei campi elettrici in opposizione a quelli prodotti dalle cariche libere. Quindi la capacità di un condensatore riempito di dielettrico è *aumentata* di un fattore ϵ_r rispetto a quella dello stesso condensatore nel vuoto.

3.2 Le condizioni al contorno per E e D

Consideriamo due dielettrici con costanti dielettriche ϵ_1 ed ϵ_2 separati da una superficie S . Vogliamo determinare le condizioni al contorno di \vec{E} e \vec{D} su S .

Prendiamo una scatola gaussiana tra i due mezzi, di altezza infinitesima, con le facce piatte parallele a S . Siccome le cariche libere nella scatola tendono a zero se il volume tende a zero, abbiamo dal teorema di Gauss (3.8) per \vec{D}

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{n}_{12} = \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_{12} \quad (3.13)$$

cioè la componente *normale* alla superficie S di \vec{D} è continua.

Applicando invece

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \quad (3.14)$$

ad un piccolo cammino Γ tra i due mezzi, con i lati lunghi paralleli ad S ed i lati ortogonali di lunghezza infinitesima, otteniamo

$$\vec{E}_1 \wedge \vec{n}_{12} = \vec{E}_2 \wedge \vec{n}_{12} \quad (3.15)$$

cioè la componente *tangente* di \vec{E} alla superficie è continua.

3.3 Il campo elettrico di una sfera uniformemente polarizzata: metodo 1

Il campo di una sfera di raggio R uniformemente polarizzata può essere pensato come la sovrapposizione dei campi di due sfere uniformemente cariche,

di segno opposto, spostate di una grandezza $d \ll R$ lungo l'asse z . La densità di polarizzazione uniforme è

$$\vec{P} = \frac{3Q}{4\pi R^3} \vec{d} \quad (3.16)$$

Il potenziale di una sfera uniformemente carica è

$$\phi_Q(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & \text{per } r > R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3R^2 - r^2}{2R^3} & \text{per } r < R \end{cases} \quad (3.17)$$

Il campo della sfera uniformemente polarizzata è dunque

$$\phi_P(r) = -\vec{d} \cdot \vec{\nabla} \phi_Q(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{R^3}{3\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} & \text{per } r > R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{R^3} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{3\epsilon_0} & \text{per } r < R \end{cases} \quad (3.18)$$

Il campo elettrico esterno è quello di un dipolo con

$$\vec{p} = Q \vec{d} = \frac{4\pi R^3 \vec{P}}{3} \quad (3.19)$$

Il campo elettrico interno è costante

$$\vec{E}_P = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (3.20)$$

Questa formula coincide con la formula (2.154) ottenuta attraverso un altro procedimento: infatti la densità di carica superficiale di polarizzazione è, secondo la regola generale,

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} = P \cos \theta \quad (3.21)$$

3.4 La sfera uniformemente polarizzata: condizioni al contorno

Il campo elettrico esterno ad una sfera uniformemente polarizzata, con

$$\vec{P} = P \hat{z} \quad (3.22)$$

è quello di un dipolo di momento

$$\vec{p} = \frac{4\pi a^3 P}{3} \hat{z} \quad (3.23)$$

dove a è il raggio della sfera:

$$\vec{E}_{est} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{p} \cdot \hat{r} \hat{r} - \vec{p}}{r^3} \quad (3.24)$$

La componente normale del campo elettrico esterno sulla superficie della sfera è

$$E_{est}^{(n)} = \frac{p}{2\pi a^3 \epsilon_0} \cos \theta = \frac{2P}{3\epsilon_0} \cos \theta \quad (3.25)$$

dove θ è l'angolo della normale rispetto all'asse z . La componente tangenziale del campo elettrico esterno è

$$\hat{r} \wedge \vec{E}_{est} = -\frac{\hat{r} \wedge \hat{z} p}{4\pi a^3 \epsilon_0} = \frac{\sin \theta p}{4\pi a^3 \epsilon_0} \hat{y} = \frac{\sin \theta P}{3\epsilon_0} \hat{y} \quad (3.26)$$

Il vettore di spostamento \vec{D} interno alla sfera è

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_{int} + P \hat{z} \quad (3.27)$$

La componente normale di \vec{D} interno è

$$D_{int}^{(n)} = \epsilon_0 \sin \theta E_x^{(int)} + \cos \theta (\epsilon_0 E_z^{(int)} + P) \quad (3.28)$$

mentre la componente tangenziale del campo elettrico è

$$\hat{r} \wedge \vec{E}_{int} = (-\cos \theta E_y^{(int)}, \cos \theta E_x^{(int)} - \sin \theta E_z^{(int)}, \sin \theta E_y^{(int)}) \quad (3.29)$$

Le condizioni di continuità danno

$$\begin{aligned} \frac{2P}{3} \cos \theta &= \epsilon_0 \sin \theta E_x^{(int)} + \cos \theta (\epsilon_0 E_z^{(int)} + P) \\ \frac{\sin \theta P}{3\epsilon_0} &= \cos \theta E_x^{(int)} - \sin \theta E_z^{(int)} \\ E_y^{(int)} &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

cioè

$$\begin{aligned} -\frac{P}{3\epsilon_0} \cos \theta &= \sin \theta E_x^{(int)} + \cos \theta E_z^{(int)} \\ \frac{P}{3\epsilon_0} \sin \theta &= \cos \theta E_x^{(int)} - \sin \theta E_z^{(int)} \\ E_y^{(int)} &= 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

la cui soluzione è

$$E_x^{(int)} = 0 \quad E_y^{(int)} = 0 \quad E_z^{(int)} = -\frac{P}{3\epsilon_0} \quad (3.32)$$

3.5 Sfera con polarizzazione $\vec{P}(\vec{x}) = k\vec{x}$

Le densità di carica di volume e di superficie di polarizzazione sono

$$\begin{aligned}\rho_p &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -3k \\ \sigma_p &= kR\end{aligned}\quad (3.33)$$

dove R è il raggio della sfera. Il campo elettrico esterno è quindi

$$\vec{E}_{est} = \frac{-\frac{4\pi}{3} R^3 3k + 4\pi R^2 k R}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = 0 \quad |\vec{x}| \geq R \quad (3.34)$$

Il campo elettrico interno è

$$\vec{E}_{int} = \frac{-\frac{4\pi}{3} |\vec{x}|^3 3k}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = -\frac{k}{\epsilon_0} \vec{x} \quad |\vec{x}| \leq R \quad (3.35)$$

Verifichiamo le condizioni al bordo per \vec{D} ed \vec{E} .

$$\begin{aligned}\vec{D}_{int} &= \epsilon_0 \vec{E}_{int} + k\vec{x} = 0 \\ \vec{D}_{est} &= \epsilon_0 \vec{E}_{est} = 0 \\ \hat{r} \wedge \vec{E}_{int} &= 0 \\ \hat{r} \wedge \vec{E}_{est} &= 0\end{aligned}\quad (3.36)$$

3.6 Guscio sferico con polarizzazione $\vec{P}(\vec{x}) = k\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2}$

Densità di carica di polarizzazione di volume e superficiali

$$\begin{aligned}\rho_p &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{k}{|\vec{x}|^2} \\ \sigma_p^{(a)} &= -\frac{k}{a} \quad \sigma_p^{(b)} = \frac{k}{b}\end{aligned}\quad (3.37)$$

dove a e b sono i raggi del guscio sferico. Il campo elettrico è

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{-4\pi a k - 4\pi (r-a)k}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = -\frac{k}{\epsilon_0 r} \vec{e}_r & a < r < b \\ \frac{-4\pi a k + 4\pi b k - 4\pi (b-a)k}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = 0 & r > b \end{cases} \quad (3.38)$$

Deriviamo lo stesso risultato partendo dall'equazione di Gauss per il campo di spostamento. Il problema è a simmetria radiale, quindi da

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (3.39)$$

deduciamo che

$$\vec{D} = 0 \quad (3.40)$$

ovunque. Pertanto $\vec{E} = 0$ per $r < a$ and $r > b$ mentre

$$\vec{E} = \frac{\vec{D} - \vec{P}}{\epsilon_0} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} = -\frac{k}{\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2} \quad (3.41)$$

per $a < r < b$ in accordo con (3.38).

3.7 Carica in presenza di un dielettrico

Supponiamo che il piano (x, y) delimiti la superficie tra due dielettrici, con costanti dielettriche relative ϵ_1 (ϵ_2) per $z > 0$ ($z < 0$). Una carica q è posta nel punto $P = (0, 0, d)$. Si vuole calcolare il campo elettrico risultante. Il metodo delle immagini suggerisce l'ansatz

$$4\pi\epsilon_0\phi(x, y, z) = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_1 r_1} + \frac{q'}{\epsilon_1 r_2} & z > 0 \\ \frac{q''}{\epsilon_2 r_1} & z < 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

dove

$$r_1^2 = x^2 + y^2 + (z - d)^2 \quad r_2^2 = x^2 + y^2 + (z + d)^2 \quad (3.43)$$

Vogliamo determinare q' e q'' dalla richiesta che

$$\begin{aligned} E_x^{(1)}(x, y, 0) &= E_x^{(2)}(x, y, 0) \\ E_y^{(1)}(x, y, 0) &= E_y^{(2)}(x, y, 0) \\ \epsilon_1 E_z^{(1)}(x, y, 0) &= \epsilon_2 E_z^{(2)}(x, y, 0) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Le condizioni di continuità delle componenti tangenziali di \vec{E} danno

$$\frac{q + q'}{\epsilon_1} = \frac{q''}{\epsilon_2} \quad (3.45)$$

mentre la continuità della componente normale di \vec{D} impone

$$-q + q' = -q'' \quad (3.46)$$

Deduciamo

$$\begin{aligned} q'' &= \frac{2q}{1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = \frac{2\epsilon_2 q}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \\ q' &= \frac{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - 1}{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} + 1} q = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q \end{aligned} \quad (3.47)$$

La densità di carica sulla superficie $z = 0$ è

$$\begin{aligned} \sigma_P &= \left[\vec{P}_z^{(2)} - \vec{P}_z^{(1)} \right]_{z=0} = \left[\epsilon_0 (\epsilon_2 - 1) \vec{E}^{(2)} - \epsilon_0 (\epsilon_1 - 1) \vec{E}^{(1)} \right]_{z=0} = \\ &= \epsilon_0 \left[\vec{E}^{(1)} - \vec{E}^{(2)} \right]_{z=0} = \\ &= \frac{1}{4\pi(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \left[d \frac{-q + q'}{\epsilon_1} - \frac{-dq''}{\epsilon_2} \right] = \\ &= -\frac{dq''}{4\pi(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \left[\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right] = \\ &= -\frac{dq}{2\pi} \frac{1}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \end{aligned} \quad (3.48)$$

3.8 Sfera dielettrica in campo elettrico uniforme

Assumiamo che il campo elettrico e la densità di polarizzazione all'interno della sfera siano uniformi. Vediamo se questa assunzione è consistente. All'interno della sfera dielettrica deve valere

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}_{int} \quad (3.49)$$

D'altronde il campo elettrico interno è la somma del campo esterno uniforme $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$ e del campo generato dalla densità di carica di polarizzazione alla superficie della sfera

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} = P \cos \theta \quad (3.50)$$

Sappiamo che questo campo è $-\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$, dunque

$$\vec{E}_{int} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (3.51)$$

e quindi

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \left(\vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3 \epsilon_0} \right) \quad (3.52)$$

da cui

$$\vec{P} = \epsilon_0 \frac{3 \chi}{3 + \chi} \vec{E}_0 \quad (3.53)$$

e

$$\vec{E}_{int} = \frac{3}{3 + \chi} \vec{E}_0 \quad (3.54)$$

Il campo esterno è dunque il campo uniforme più il campo di dipolo generato dalla distribuzione di carica superficiale σ_p

$$\vec{E}_{est} = \vec{E}_0 + \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{3 \vec{p} \cdot \hat{r} \hat{r} - \vec{p}}{r^3} \quad (3.55)$$

dove

$$\vec{p} = \frac{4 \pi}{3} a^3 P \quad (3.56)$$

Verifichiamo che le condizioni al contorno per il campo elettrico sono quelle corrette:

$$\begin{aligned} \hat{r} \cdot \vec{E}_{est} \Big|_{r=a} &= E_0 \cos \theta + \frac{2 P}{3 \epsilon_0} \cos \theta \\ \hat{r} \cdot \vec{E}_{int} \Big|_{r=a} &= E_0 \cos \theta - \frac{P}{3 \epsilon_0} \cos \theta \\ (\hat{r} \cdot \vec{E}_{est} - \hat{r} \cdot \vec{E}_{int}) \Big|_{r=a} &= \frac{P}{\epsilon_0} \cos \theta = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Si noti che per $\chi \rightarrow \infty$ otteniamo il risultato per il conduttore ideale.

3.9 Equazione di Clausius-Mossotti per dielettrici

Consideriamo un dielettrico caratterizzato da una densità di polarizzazione \vec{P} , separato dal vuoto da una superficie S . Supponiamo dunque che \vec{P} sia discontinuo attraverso S , e si annulli bruscamente nel passaggio dal dielettrico

al vuoto. Sia V un cilindro gaussiano infinitamente sottile che attraversa la superficie S : la carica di polarizzazione racchiusa in questo volume è

$$\Delta Q_p = \int_V \rho_{pol} = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = - \int_{\partial V} \vec{P} \cdot \hat{n} = \vec{P} \cdot \hat{n}_{12} \Delta A \quad (3.58)$$

dove \hat{n}_{12} è la normale alla superficie S , nella direzione dielettrico-vuoto, e ΔA è l'area della base del cilindro V . Pertanto la densità di carica superficiale indotta dalla polarizzazione sulla superficie S è

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}_{12} \quad (3.59)$$

Consideriamo ora una *cavità* in un dielettrico. Sia \vec{E} il campo nel dielettrico, \vec{P} il vettore densità di polarizzazione e \vec{E}_0 il campo nella cavità. Poiché σ_P tende a *ridurre* l'intensità del campo elettrico nel dielettrico, tenderà in generale ad *aumentare* quella nella cavità.

Per una cavità stretta parallela al campo elettrico

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \quad (3.60)$$

Per una cavità piatta ortogonale al campo elettrico

$$\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} = \vec{E}_0 \quad (3.61)$$

Per una cavità sferica

$$\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = \vec{E}_0 \quad (3.62)$$

L'ultimo risultato discende dal fatto che il campo elettrico dentro una sfera uniformemente polarizzata è

$$\vec{E}_{sfera} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (3.63)$$

come dimostrato in (3.20). Nel modello di Clausius-Mossotti \vec{E}_0 è identificato col campo locale sentito da una molecola di liquido dielettrico. Dunque

$$\vec{P} = \rho \alpha \epsilon_0 \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right) \quad (3.64)$$

dove ρ è la densità e α la polarizzabilità atomica. Pertanto

$$\vec{P} = \frac{\rho \alpha}{1 - \frac{\rho \alpha}{3}} \epsilon_0 \vec{E} \quad (3.65)$$

cioè la suscettibilità elettrica è

$$\chi_e = \epsilon_r - 1 = \frac{\rho \alpha}{1 - \frac{\rho \alpha}{3}} \quad (3.66)$$

($\epsilon_r \equiv \kappa$ è la costante dielettrica, e $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ è la permittività).

Un esempio è il solfuro di carbonio, CS_2 . Per il gas

$$\chi_{gas}^{sper} = 0.0029 = \rho_{gas} \alpha \quad (3.67)$$

Inoltre

$$\frac{\rho_{liquido}}{\rho_{gas}} = 381 \quad (3.68)$$

Quindi

$$\chi_{liquido}^{teorico} = \frac{381 \times 0.0029}{1 - \frac{381 \times 0.0029}{3}} = 1.75 \quad (3.69)$$

mentre

$$\chi_{liquido}^{sper} = 1.64 \quad (3.70)$$

Si noti che senza la correzione di Clausius-Mossotti il valore di $\chi_{liquido}$ predetto sarebbe $\chi_{liquido} = \rho_{liquido} \alpha = 381 \times 0.0029 \approx 1.10$, molto più lontano dal valore sperimentale.

3.10 Un modello classico per la polarizzabilità atomica

Schematizziamo gli elettroni negli atomi come degli oscillatori armonici. In presenza di campo elettrico

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + m \omega_0^2 \vec{x} = q_e \vec{E} \quad (3.71)$$

Per campi elettrici di frequenza ω

$$\vec{x}(\omega) = \frac{q_e \vec{E}_\omega}{m (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3.72)$$

Per campi costanti

$$\vec{x}_0 = \frac{q_e \vec{E}_0}{m \omega_0^2} \quad (3.73)$$

ed il momento di dipolo indotto è

$$\vec{p} = \frac{q_e^2 \vec{E}_0}{m \omega_0^2} = \frac{4 \pi e^2}{m \omega_0^2} \epsilon_0 \vec{E}_0 \equiv \alpha \epsilon_0 \vec{E}_0 \quad (3.74)$$

con

$$\alpha = \frac{4 \pi e^2}{m \omega_0^2} \quad (3.75)$$

e

$$\chi_{gas} = \epsilon_r - 1 = \alpha \rho = \frac{4 \pi e^2 \rho}{m \omega_0^2} \quad (3.76)$$

Facciamo delle stime per l'idrogeno (trascuriamo la differenza tra polarizzabilità atomica e molecolare).

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{E_{Bohr}^2}{\hbar^2} = \frac{e^4}{4 \hbar^2 a_{Bohr}^2} \\ \alpha &= \frac{16 \pi \hbar^2 a_{Bohr}^2}{m e^2} = 16 \pi a_{Bohr}^3 \\ \rho &= \frac{N}{V} = \frac{P}{k T} \approx \frac{1.01 \cdot 10^5 \text{ newton/m}^2}{1.38 \cdot 10^{-23} \times 273 \text{ Joules}} = 0.268 \cdot 10^{20} \frac{1}{\text{cm}^3} \\ \chi_{H_2}^{teorico} &= \alpha \rho \approx 16 \cdot \pi \cdot 0.529^3 \cdot 10^{-24} \cdot 0.268 \cdot 10^{20} = 0.00020 \\ \chi_{H_2}^{sper} &= 0.00026 \end{aligned} \quad (3.77)$$

Per l'elio

$$\begin{aligned} \omega_0^2(He) &\approx \frac{(24.5 \text{ ev})^2}{\hbar^2} \approx 1.801^2 \times \omega_0^2(H) \\ \chi_{He}^{teorico} &= \frac{\chi(H_2)^{teorico}}{1.801^2} \approx 0.000061 \\ \chi_{He}^{sper} &= 0.000068 \end{aligned} \quad (3.78)$$

4 Magnetostatica

4.1 Il potenziale vettore di un filo rettilineo

$$\vec{A}(1) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 c^2} \int \frac{\vec{j}(2) dV_2}{r_{12}} \quad (4.1)$$

La densità di corrente per un filo rettilineo di sezione πa^2 , disposto lungo z e percorso da una corrente I , è

$$\vec{j} = j_z \hat{z} = \frac{I}{\pi a^2} \hat{z} \quad (4.2)$$

Dunque la componente del potenziale vettore non nulla è

$$A_z(1) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 \pi a^2 c^2} \int \frac{I dV_2}{r_{12}} \quad (4.3)$$

che coincide con l'espressione per il potenziale elettrostatico di una distribuzione di carica lineare infinita di densità di carica lineare λ , con

$$\lambda = \frac{I}{c^2} \quad (4.4)$$

Dunque

$$A_z = -\frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \log \rho = -\frac{I}{2 \pi \epsilon_0 c^2} \log \rho \quad (4.5)$$

Il campo magnetico è

$$\begin{aligned} B_z &= \partial_x A_y - \partial_y A_x = 0 \\ B_x &= \partial_y A_z - \partial_z A_y = -\frac{I y}{2 \pi \epsilon_0 c^2 \rho^2} \\ B_y &= \partial_z A_x - \partial_x A_z = \frac{I x}{2 \pi \epsilon_0 c^2 \rho^2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.2 Il potenziale vettore di un solenoide infinito

Sia z l'asse di simmetria del solenoide, a il suo raggio. La densità di corrente è

$$j_x = -j_0 \sin \phi \quad j_y = j_0 \cos \phi \quad j_z = 0 \quad (4.7)$$

dove

$$j_0 = \frac{n I}{d} \quad (4.8)$$

dove n è il numero di spire per unità di lunghezza e d è lo spessore radiale del solenoide. A_y è dunque identico al campo elettrostatico creato da un cilindro infinito con una distribuzione di carica superficiale

$$\sigma(\phi) = \sigma_0 \cos \phi = \frac{j_0 d}{c^2} \cos \phi = \frac{n I}{c^2} \cos \phi \quad (4.9)$$

(in quanto $\frac{\sigma_0}{d} = \rho_0$ è la densità di carica di volume.). A sua volta questo potenziale elettrostatico si può ottenere per derivazione lungo x del potenziale elettrostatico creato da un cilindro infinito densità di carica uniforme ρ_0 :

$$\phi_{cil.unif.}(\rho) = \begin{cases} -\frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0} \log \frac{\rho}{a} & \text{per } \rho > a \\ -\frac{\rho_0}{4\epsilon_0}(\rho^2 - a^2) & \text{per } \rho \leq a \end{cases} \quad (4.10)$$

Dunque il campo elettrostatico generato dal cilindro con carica superficiale

$$\sigma(\phi) = \sigma_0 \cos \phi = \rho_0 d \cos \phi \quad (4.11)$$

è

$$\phi_y(\rho) = -d \partial_x \phi_{cil.unif.}(\rho) = \begin{cases} \frac{\sigma_0 a^2 x}{2\epsilon_0 \rho^2} & \text{per } \rho > a \\ \frac{\sigma_0 x}{2\epsilon_0} & \text{per } \rho \leq a \end{cases} \quad (4.12)$$

Quindi per il potenziale vettore otteniamo

$$A_y(\rho) = \begin{cases} \frac{n I a^2 x}{2\epsilon_0 c^2 \rho^2} & \text{per } \rho > a \\ \frac{n I x}{2\epsilon_0 c^2} & \text{per } \rho \leq a \end{cases} \quad (4.13)$$

Analogamente

$$A_x(\rho) = \begin{cases} -\frac{n I a^2 y}{2\epsilon_0 c^2 \rho^2} & \text{per } \rho > a \\ -\frac{n I y}{2\epsilon_0 c^2} & \text{per } \rho \leq a \end{cases} \quad (4.14)$$

Calcoliamo quindi il campo magnetico

$$B_z(\rho) = \partial_x A_y - \partial_y A_x = \begin{cases} \frac{n I a^2}{2\epsilon_0 c^2} \left[\frac{1}{\rho^2} - \frac{2x^2}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2} - \frac{2y^2}{\rho^4} \right] = 0 & \text{per } \rho > a \\ \frac{n I}{\epsilon_0 c^2} & \text{per } \rho \leq a \end{cases} \quad (4.15)$$

Per apprezzare l'utilità di pensare al cilindro con distribuzione di carica $\sigma(\theta) \propto \cos \theta$ come due cilindri di carica uniforme e di segno opposto, spostati leggermente uno dall'altro, proviamo a calcolare il potenziale (4.12)

direttamente attraverso la formula di Coulomb:

$$\begin{aligned}
\phi_y(\rho, \phi) &= \frac{a \sigma_0}{4 \pi \epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz \times \\
&\times \int_0^{2\pi} \frac{d\theta \cos \theta}{\sqrt{(\rho \cos \phi - a \cos \theta)^2 + (\rho \sin \phi - a \sin \theta)^2 + z^2}} = \\
&= -\frac{a \sigma_0}{4 \pi \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \cos \theta \log \left[(\rho \cos \phi - a \cos \theta)^2 + \right. \\
&\quad \left. + (\rho \sin \phi - a \sin \theta)^2 \right] = \\
&= -\frac{a \sigma_0}{4 \pi \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \cos \theta \log \left[\rho^2 + a^2 - 2 a \rho \cos(\theta - \phi) \right] = \\
&= -\frac{a \sigma_0}{4 \pi \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \cos \theta \cos \phi \log \left[\rho^2 + a^2 - 2 a \rho \cos \theta \right] = \\
&= -\frac{a \sigma_0 \cos \phi}{4 \pi \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \cos \theta \log \left[\rho^2 + a^2 - a \rho (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \right] = \\
&= -\frac{a \sigma_0 \cos \phi}{4 \pi \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i\theta} \log \left[\frac{\rho^2}{a^2} + 1 - \frac{\rho}{a} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \right] = \\
&= \frac{a i \sigma_0 \cos \phi}{4 \pi \epsilon_0} \oint_{|\zeta|=1} d\zeta \log \left[\left(\frac{\rho}{a} - \zeta \right) \left(\frac{\rho}{a} - \frac{1}{\zeta} \right) \right] = \\
&= \frac{a i \sigma_0 \cos \phi}{4 \pi \epsilon_0} \oint_{|\zeta|=1} d\zeta \log \left[\frac{\left(\frac{\rho}{a} - \zeta \right) \left(\zeta - \frac{a}{\rho} \right)}{\zeta} \right] \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Se $\rho < a$ la funzione

$$f(\zeta) = \log \left[\frac{\left(\frac{\rho}{a} - \zeta \right) \left(\zeta - \frac{a}{\rho} \right)}{\zeta} \right] \tag{4.17}$$

ha un taglio tra $\zeta = 0$ e $\zeta = \frac{\rho}{a}$, ed un altro taglio, fuori dal cerchio $|\zeta| = 1$, tra $\zeta = \frac{a}{\rho}$ e $\zeta = +\infty$. Se invece $\rho > a$ il taglio interno al cerchio è tra $\zeta = 0$ e $\zeta = \frac{a}{\rho}$ mentre quello esterno è tra $\zeta = \frac{\rho}{a}$ e $\zeta = +\infty$. La discontinuità al taglio interno è quella del $(-\log \zeta)$, cioè $-2\pi i$. L'integrale in (4.16) è dato dall'integrale della discontinuità sul taglio interno:

$$\phi_y(\rho, \phi) = \frac{a \sigma_0 \cos \phi}{2 \epsilon_0} \begin{cases} \frac{\rho}{a} & \text{per } \rho < a \\ \frac{a}{\rho} & \text{per } \rho > a \end{cases} \tag{4.18}$$

in accordo con la (4.12).

4.3 Il campo di dipolo magnetico

Consideriamo una spira percorsa da corrente I . Possiamo decomporre la spira in spire infinitesime rettangolari, poste nel piano (x, y) di lati a e b . Il campo totale sarà la somma delle spire rettangolari infinitesime. Consideriamo il campo A_x prodotto da una spira rettangolare infinitesima. Questo campo è identico al campo scalare prodotto da due distribuzioni lineari di carica, di segno opposto, di lunghezza a poste a distanza b l'una dall'altra in direzione y , con densità lineare di carica

$$\lambda_x = \rho_x S = \frac{j_x}{c^2} S = \frac{I}{c^2} \quad (4.19)$$

dove S è la sezione del filo della spira. Il campo elettrostatico è quello di un dipolo di momento diretto lungo y

$$p_y = -a \lambda_x b = \frac{a b I}{c^2} \quad (4.20)$$

Dunque A_x in un punto posto a distanza $\vec{R} = (x, y, z)$ dalla spira è

$$A_x = -\frac{I a b}{4 \pi \epsilon_0 c^2} \frac{y}{R^3} \quad (4.21)$$

Analogamente

$$A_y = \frac{I a b}{4 \pi \epsilon_0 c^2} \frac{x}{R^3} \quad (4.22)$$

e naturalmente

$$A_z = 0 \quad (4.23)$$

Dunque introducendo

$$\vec{\mu} = I a b \hat{z} \quad (4.24)$$

abbiamo

$$\vec{A} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 c^2} \frac{\vec{\mu} \wedge \vec{R}}{R^3} \quad (4.25)$$

4.4 Campo di un guscio sferico rotante

Un guscio sferico di raggio a e densità di carica superficiale uniforme σ ruota intorno ad un asse fissato a velocità angolare costante ω .

Calcoliamo prima il campo in *approssimazione di dipolo*. Prendiamo l'asse delle z lungo l'asse di rotazione, cioè $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$. Poiché la distribuzione di corrente è la somma di spire di corrente circolari giacenti su piani ortogonali a z il momento di dipolo magnetico è diretto lungo z

$$\vec{\mu} = \mu \hat{z} \quad (4.26)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^\pi dI \pi a^2 \sin^2 \theta = \int_0^\pi \sigma a d\theta (\omega a \sin \theta) \pi a^2 \sin^2 \theta = \\ &= \pi a^4 \sigma \omega \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta = \\ &= \pi a^4 \sigma \omega \int_{-1}^1 dt (1 - t^2) = \frac{4\pi a^4 \sigma \omega}{3} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Dunque

$$\vec{\mu} = \frac{4\pi a^4 \sigma \vec{\omega}}{3} \quad (4.28)$$

Il campo vettore a grandi distanze è pertanto

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi c^2 \epsilon_0} \frac{\vec{\mu} \wedge \vec{x}}{|\vec{x}|^3} = \frac{a^4 \sigma}{3 c^2 \epsilon_0} \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{x}}{|\vec{x}|^3} \quad (4.29)$$

ed il campo magnetico

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\sigma a^4}{3 \epsilon_0 c^2} \frac{3\vec{\omega} \cdot \vec{x} \vec{x} - |\vec{x}|^2 \vec{\omega}}{|\vec{x}|^5} \quad (4.30)$$

Calcoliamo ora il campo *esattamente*. Faremo il calcolo in *tre modi*. Il primo modo, esposto qui sotto, sarà quello di calcolare direttamente l'integrale di Biot-Savart. Il secondo modo esposto nella sottosezione 4.4.1 sfrutta la simmetria del problema e l'equazione di Ampère. Il terzo modo discusso nella sezione 6.4 farà uso della soluzione del problema di una sfera magnetizzata in modo uniforme.

La densità di corrente superficiale in un punto \vec{x}' sulla superficie sferica è

$$\vec{K}(\vec{x}') = \sigma \omega \wedge \vec{x}' \quad (4.31)$$

Pertanto il potenziale vettore nel punto \vec{x} si scrive

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 c^2 \vec{A}(\vec{x}) &= \int_S d^2 a' \frac{\sigma \vec{\omega} \wedge \vec{x}'}{|\vec{x}' - \vec{x}|} = \sigma \vec{\omega} \wedge \int_S \frac{d^2 a' \vec{x}'}{|\vec{x}' - \vec{x}|} = \\ &\equiv \sigma \vec{\omega} \wedge \vec{f}(\vec{x}) \end{aligned} \quad (4.32)$$

dove

$$\vec{f}(\vec{x}) = \int_S \frac{d^2 a' \vec{x}'}{|\vec{x}' - \vec{x}|} \quad (4.33)$$

Sia \hat{z} il versore lungo l'asse delle z , e siano (a, θ, ϕ) le coordinate polari del punto \vec{x}' : abbiamo

$$\hat{z} \cdot \vec{f}(\vec{x}) = \int_S \frac{d^2 a' a \cos \theta}{(a^2 + |\vec{x}|^2 - 2|\vec{x}| a \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.34)$$

Questo integrale è pari al potenziale *elettrostatico* prodotto da una distribuzione di carica su una superficie sferica, la cui densità di carica superficiale è

$$\tilde{\sigma}(\theta) = 4\pi\epsilon_0 a \cos \theta \quad (4.35)$$

Abbiamo visto in sezione 2.5 che il potenziale elettrostatico per una tale distribuzione sferica superficiale di carica è

$$\hat{z} \cdot \vec{f}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{4\pi a}{3} \frac{a^3}{|\vec{x}|^3} \vec{x} \cdot \hat{z} & \text{per } |\vec{x}| \geq a \\ \frac{4\pi a}{3} \vec{x} \cdot \hat{z} & \text{per } |\vec{x}| \leq a \end{cases} \quad (4.36)$$

per cui

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \vec{\omega} \wedge \vec{f}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 a^4 \sigma}{3} \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{x}}{|\vec{x}|^3} & \text{per } |\vec{x}| \geq a \\ \frac{\mu_0 \sigma a}{3} \vec{\omega} \wedge \vec{x} & \text{per } |\vec{x}| \leq a \end{cases} \quad (4.37)$$

Il campo magnetico all'esterno della sfera è pertanto quello di un dipolo magnetico

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 \sigma a^4}{3} \frac{3\vec{\omega} \cdot \vec{x} \vec{x} - |\vec{x}|^2 \vec{\omega}}{|\vec{x}|^5} \quad |\vec{x}| > a \quad (4.38)$$

mentre il campo magnetico all'interno alla sfera è costante

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{2\mu_0 \sigma a \vec{\omega}}{3} \quad |\vec{x}| < a \quad (4.39)$$

4.4.1 Metodo alternativo

Deriviamo il campo magnetico per la superficie sferica rotante usando considerazioni di simmetria e l'equazione di Ampère.

La forma più generale per il campo vettore \vec{A} , compatibile con l'invarianza per rotazioni ed il fatto che \vec{A} è un vettore *polare* per riflessioni di parità¹¹

$$\vec{A} = \vec{\omega} \wedge \vec{x} f(|\vec{x}|^2) \quad (4.40)$$

dove $f(t)$ è una funzione di una variabile. Il campo \vec{B} corrispondente è

$$\begin{aligned} B_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j A_k = \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} \omega_l x_m f(|\vec{x}|^2)) = \\ &= \epsilon_{ijk} (\epsilon_{klj} \omega_l f + \epsilon_{klm} \omega_l x_m 2x_j f') = \\ &= 2\omega_i f + (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{lj}) \omega_l x_m 2x_j f' = \\ &= 2\omega_i f + 2\omega_i |\vec{x}|^2 f' - 2\vec{\omega} \cdot \vec{x} x_i f' \end{aligned} \quad (4.41)$$

Imponiamo ora la validità dell'equazione di Ampère

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (4.42)$$

La densità di corrente è concentrata sulla superficie della sfera, pertanto per tutti i punti all'interno ed all'esterno della sfera carica rotante S_2 , \vec{B} ha rotore nullo

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = 0 \quad \text{per } \vec{x} \notin S_2 \quad (4.43)$$

Il rotore di (4.41) è

$$\begin{aligned} \epsilon_{kji} \partial_j B_i &= \epsilon_{kji} \partial_j (2\omega_i f + 2\omega_i |\vec{x}|^2 f' - 2\vec{\omega} \cdot \vec{x} x_i f') = \\ &= \epsilon_{kji} (4\omega_i x_j f' + 4\omega_i x_j f' + 4\omega_i |\vec{x}|^2 x_j f'' + \\ &\quad - 2\omega_j x_i f' - 2\vec{\omega} \cdot \vec{x} \delta_{ij} f' - 4\vec{\omega} \cdot \vec{x} x_i x_j f'') = \\ &= 2\epsilon_{kji} \omega_i x_j (5f' + 2|\vec{x}|^2 f'') \end{aligned} \quad (4.44)$$

Dunque per punti non sulla superficie della sfera deve essere

$$5f' + 2|\vec{x}|^2 f'' = 0 \quad (4.45)$$

¹¹ Ricordiamo che \vec{B} è un vettore *assiale*. Poiché $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$, \vec{A} è un vettore *polare*. Si ricordi anche che poiché $\vec{v} = \omega \wedge \vec{x}$, e \vec{x} e \vec{v} sono polari, allora $\vec{\omega}$ è assiale.

Integrando otteniamo

$$f'(t) = \frac{C}{t^{\frac{5}{2}}} \quad t \equiv |\vec{x}|^2 \quad (4.46)$$

dove A è una costante arbitraria. Integrando ancora una volta

$$f(t) = \frac{C_1}{t^{\frac{3}{2}}} + C_2 \quad (4.47)$$

dove $C_1 = -\frac{2}{3}C$ e C_2 è un'altra costante. In definitiva il potenziale vettore deve avere, sia all'interno che all'esterno della sfera, la forma

$$\vec{A} = \vec{\omega} \wedge \vec{x} \left(\frac{C_1}{|\vec{x}|^3} + C_2 \right) \quad (4.48)$$

Sappiamo che per $|\vec{x}| \rightarrow +\infty$ il campo magnetico deve decrescere come un campo di dipolo. Pertanto all'*esterno* della sfera deve essere

$$\vec{A} = C_1 \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{x}}{|\vec{x}|^3} \quad \text{per } |\vec{x}| > a \quad (4.49)$$

Confrontando col momento di dipolo della distribuzione di corrente concludiamo che

$$C_1 = \frac{a^4 \sigma \mu_0}{3} \quad (4.50)$$

D'altra parte all'interno della sfera il campo deve essere regolare, pertanto

$$\vec{A} = C_2 \vec{\omega} \wedge \vec{x} \quad \text{per } |\vec{x}| < a \quad (4.51)$$

Il potenziale deve essere continuo sulla sfera (altrimenti i campi sarebbero divergenti) per cui

$$C_2 = \frac{C_1}{a^3} = \frac{a \sigma \mu_0}{3} \quad (4.52)$$

in accordo con il risultato ottenuto attraverso il calcolo dell'integrale.

Possiamo verificare che il campo magnetico così calcolato soddisfa le condizioni di (dis)continuità sulla superficie della sfera

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot \vec{B}|_{r \rightarrow a^+} &= \hat{n} \cdot \vec{B}|_{r \rightarrow a^-} \\ \hat{n} \wedge \vec{B}|_{r \rightarrow a^+} - \hat{n} \wedge \vec{B}|_{r \rightarrow a^-} &= \mu_0 \sigma \vec{v} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Il campi magnetici all'interno e all'esterno della sfera sono

$$\vec{B}_{int} = 2C_2\vec{\omega} \quad \vec{B}_{ext} = C_1 \frac{3\vec{\omega} \cdot \vec{x}\vec{x} - |\vec{x}|^2\vec{\omega}}{|\vec{x}|^5} \quad (4.54)$$

Quindi dalla prima delle (4.53) otteniamo

$$\hat{n} \cdot \vec{B}|_{r \rightarrow a^+} = \frac{2C_1}{a^3} \omega \cdot \hat{n} = \hat{n} \cdot \vec{B}|_{r \rightarrow a^-} = 2C_2 \omega \cdot \hat{n} \quad (4.55)$$

ovvero riotteniamo la condizione di continuità per \vec{A} :

$$C_2 = \frac{C_1}{a^3} \quad (4.56)$$

La seconda delle (4.53) dà

$$C_1 \frac{-\hat{n} \wedge \vec{\omega}}{a^3} - 2 \frac{C_1}{a^3} \hat{n} \wedge \vec{\omega} = \mu_0 \sigma a \vec{\omega} \wedge \hat{n} \quad (4.57)$$

ossia

$$C_1 = \frac{\mu_0 \sigma a^4}{3} \quad (4.58)$$

4.5 Campo di due densità di carica cilindriche parallele e sovrapposte

Due tubi conduttori cilindrici di sezione circolare di raggio a sono collocati con i loro assi paralleli all'asse delle z , a distanza d tra loro, con $d < 2a$. Siano $C_{\pm} = (\pm d/2, 0, z)$ le posizioni dei due assi dei cilindri. La regione di sovrapposizione dei due cilindri costituita dai punti $P = (x, y, z)$ con

$$(x \pm d/2)^2 + y^2 \leq a^2 \quad (4.59)$$

è rimossa e sostituita con un materiale isolante. Nei due cilindri scorrono delle correnti lungo z in senso opposto stazionarie ed uniformi lungo la sezione trasversa.

Calcoliamo il campo magnetico nella regione (4.59). Il campo magnetico prodotto dalla configurazione indicata è uguale alla somma dei campi magnetici prodotti da due conduttori cilindrici nei quali scorrono delle correnti opposte. Il campo magnetico prodotto da un conduttore cilindrico nel quale

scorre una corrente I uniforme e stazionaria è per ragioni di simmetria normale ai raggi del cilindro e funzione della distanza dall'asse del cilindro ρ . Applichiamo la legge di Ampère per $\rho > a$

$$B(\rho) 2 \pi \rho = \frac{I}{\epsilon_0 c^2} \quad (4.60)$$

ovvero

$$B(\rho) = \frac{I}{\epsilon_0 c^2 2 \pi \rho} \quad \rho > a \quad (4.61)$$

mentre per $\rho < a$ otteniamo

$$B(\rho) 2 \pi \rho = \frac{I}{\epsilon_0 c^2} \frac{\rho^2}{a^2} \quad (4.62)$$

ovvero

$$B(\rho) = \frac{I \rho}{\epsilon_0 c^2 2 \pi a^2} \quad \rho < a \quad (4.63)$$

In termini vettoriali

$$\vec{B} = \frac{I \hat{z} \wedge \vec{\rho}}{\epsilon_0 c^2 2 \pi a^2} \quad \rho < a \quad (4.64)$$

dove

$$\vec{\rho} = x \hat{x} + y \hat{y} \quad (4.65)$$

è il raggio misurato rispetto all'asse del cilindro.

Applichiamo questo risultato alla situazione considerata, il campo nella regione (4.59) è

$$\begin{aligned} \vec{B}(x, y) &= \frac{I_{eff}}{2 \pi \epsilon_0 c^2 a^2} \left(\hat{z} \wedge \left(\vec{\rho} + \frac{d}{2} \hat{x} \right) - \hat{z} \wedge \left(\vec{\rho} - \frac{d}{2} \hat{x} \right) \right) = \\ &= \frac{I_{eff} d}{2 \pi \epsilon_0 c^2 a^2} \hat{z} \wedge \hat{x} = \frac{I_{eff} d}{2 \pi \epsilon_0 c^2 a^2} \hat{y} = \frac{j d}{2 \epsilon_0 c^2} \hat{y} \end{aligned} \quad (4.66)$$

j è la densità di corrente che attraversa uno dei due fili conduttori. I_{eff} non è la corrente totale I che passa in uno dei due conduttori bensì la corrente che, a parità di j , passerebbe nel filo conduttore se la sua sezione fosse cilindrica:

$$I_{eff} = I \frac{\pi a^2}{S} \quad (4.67)$$

dove S è l'area della sezione del conduttore:

$$S = \pi a^2 \left[1 - \frac{2}{\pi} \left(\arccos \frac{d}{2a} - \frac{d}{2a} \sqrt{1 - \frac{d^2}{4a^2}} \right) \right] \quad (4.68)$$

Dunque

$$I_{eff} = \frac{I}{1 - \frac{2}{\pi} \left(\arccos \frac{d}{2a} - \frac{d}{2a} \sqrt{1 - \frac{d^2}{4a^2}} \right)} \quad (4.69)$$

4.6 Il campo di un solenoide finito lungo l'asse

Vogliamo calcolare il campo magnetico del solenoide come sovrapposizione del campo magnetico creato dalle spire circolari di spessore infinitesimo che lo compongono. Determiniamo pertanto, *preliminarmente*, il campo prodotto da una spira circolare di raggio a , nella quale circola una corrente I in senso antiorario, in un punto posto sull'asse della spira. Prendiamo l'asse della spira come asse delle z e l'origine nel centro della spira. Sia

$$\vec{x}_P = z \hat{z} \quad (4.70)$$

il vettore coordinata del punto P sull'asse della spira in cui vogliamo calcolare il campo magnetico. Per ragioni di simmetria il campo magnetico in P è diretto lungo l'asse delle z . Sia

$$\vec{x}' = a (\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}) \quad (4.71)$$

il vettore coordinate di un punto P' sulla spira. Sia

$$d\vec{l} = a (-\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}) d\theta \quad (4.72)$$

l'elemento di lunghezza tangente lungo la spira preso in senso antiorario. La formula di Biot-Savart per il campo magnetico dà

$$\vec{B}(P) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2} \oint \frac{I d\vec{l} \wedge (\vec{x}_P - \vec{x}')}{|\vec{x}_P - \vec{x}'|^3} \quad (4.73)$$

dove l'integrale è preso lungo la spira. Abbiamo pertanto

$$\begin{aligned} d\vec{l} \wedge (\vec{x}_P - \vec{x}') &= \\ &= a d\theta (z \sin \theta \hat{y} + a \sin^2 \theta \hat{z} + z \cos \theta \hat{x} + a \cos^2 \theta \hat{z}) = \\ &= a d\theta (z \sin \theta \hat{y} + z \cos \theta \hat{x} + a \hat{z}) \end{aligned} \quad (4.74)$$

e

$$|\vec{x}_P - \vec{x}'|^3 = (z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} \quad (4.75)$$

In definitiva

$$\vec{B}_{spira}(P) = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{a^2 2\pi}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} = \frac{I}{2\epsilon_0 c^2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} \quad (4.76)$$

Applichiamo questo risultato al solenoide cilindrico di lunghezza L , nel quale scorre una corrente per unità di lunghezza i . Prendiamo l'asse delle z coincidente con l'asse del solenoide e l'origine nel punto medio del solenoide. Vogliamo calcolare il campo magnetico in un punto P sull'asse del solenoide con vettore coordinata

$$\vec{x}_P = z \hat{z} \quad (4.77)$$

Nella spira, posta ad altezza z' , di spessore infinitesimo dz' scorre una corrente $dI = i dz'$. Il campo da essa prodotta nel punto P è pertanto diretto lungo z ed ha intensità

$$dB_z(P) = \frac{i dz'}{2\epsilon_0 c^2} \frac{a^2}{((z - z')^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.78)$$

Il campo generato dal solenoide in P è dunque

$$\begin{aligned} B_z(P) &= \frac{i}{2\epsilon_0 c^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{a^2 dz'}{((z - z')^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{i}{2\epsilon_0 c^2} \int_{-\frac{\frac{L}{2}+z}{a}}^{\frac{\frac{L}{2}-z}{a}} \frac{ds}{(s^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{i}{2\epsilon_0 c^2} \left[\frac{s}{(s^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right]_{-\frac{\frac{L}{2}+z}{a}}^{\frac{\frac{L}{2}-z}{a}} = \\ &= \frac{i}{2\epsilon_0 c^2} \left[\frac{\frac{L}{2} - z}{[(\frac{L}{2} - z)^2 + a^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{L}{2} + z}{[(\frac{L}{2} + z)^2 + a^2]^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (4.79) \end{aligned}$$

Nel limite di solenoide infinitamente lungo $L \gg a$ e $L \gg z$ otteniamo il ben noto risultato

$$B_z(P) \approx \frac{i}{2\epsilon_0 c^2} [1 + 1] = \frac{i}{\epsilon_0 c^2} \quad (4.80)$$

All'estremo del solenoide $z = \frac{L}{2}$ il campo è

$$B_z\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{i}{2\epsilon_0 c^2} \frac{L}{[L^2 + a^2]^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{i}{2\epsilon_0 c^2} \quad a \ll L \quad (4.81)$$

5 Moto in campi elettromagnetici

5.1 Moto in campi elettrico e magnetico ortogonali e uniformi

Prendiamo

$$\vec{E} = E \hat{x} \quad \vec{B} = B \hat{y} \quad (5.1)$$

Sia

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \quad (5.2)$$

Dunque

$$\vec{F} = q E \hat{x} + q B v_x \hat{z} - q B v_z \hat{x} = m (\dot{v}_x \hat{x} + \dot{v}_y \hat{y} + \dot{v}_z \hat{z}) \quad (5.3)$$

ovvero

$$\begin{aligned} m \dot{v}_x &= q E - q B v_z \\ m \dot{v}_y &= 0 \\ m \dot{v}_z &= q B v_x \end{aligned} \quad (5.4)$$

Quindi

$$v_y(t) = v_y^{(0)} \quad (5.5)$$

costante. Prendiamo per semplicità $v_y^{(0)} = 0$. Le altre due equazioni danno

$$\dot{v}_x + i \dot{v}_z \equiv \dot{V} = \frac{q}{m} B i (v_x + i v_z) + \frac{q}{m} E = \frac{q}{m} B i V + \frac{q}{m} E \quad (5.6)$$

dove abbiamo posto

$$V \equiv v_x + i v_z \quad (5.7)$$

Per $E = 0$ la soluzione generale dell'equazione per V è

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t} \quad (5.8)$$

dove ω è la frequenza di ciclotrone

$$\omega = \frac{q B}{m} \quad (5.9)$$

Una soluzione particolare dell'equazione inomogenea con $B \neq 0$ è

$$V = i \frac{E}{B} \quad (5.10)$$

Pertanto la soluzione generale è

$$V(t) = i \frac{E}{B} + V_0 e^{i\omega t} \quad (5.11)$$

Se scegliamo come condizione iniziale

$$V(0) = 0 \quad (5.12)$$

allora

$$V(t) = i \frac{E}{B} (1 - e^{i\omega t}) \quad (5.13)$$

e

$$X(t) = \frac{E}{B\omega} + i \frac{E}{B} t - \frac{E}{B\omega} e^{i\omega t} \quad (5.14)$$

avendo scelto

$$X(0) = 0 \quad (5.15)$$

6 Magnetismo nella materia

6.1 Magnetizzazione

Il potenziale vettore generato da una densità di carica $\vec{j}(x)$ stazionaria è

$$4\pi\epsilon_0 c^2 \vec{A}(x) = \int d^3x' \frac{\vec{J}(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (6.1)$$

Se la distribuzione di carica è confinata in una regione limitata dello spazio, il potenziale a grande distanza è dato da

$$4\pi\epsilon_0 c^2 \vec{A}(x) = \int d^3x' \vec{J}(x') \left(\frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{|\vec{x}|^3} + O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^3}\right) \right) \quad (6.2)$$

La densità di corrente soddisfa l'equazione di continuità nel caso stazionario

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(x) = 0 \quad (6.3)$$

Da questa equazione deduciamo che

$$\partial_j(x_i J_j(x)) = J_i(x) + x_i \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(x) = J_i(x) \quad (6.4)$$

e quindi

$$\int J_i(x') d^3 \vec{x}' = \int \partial_j(x_i J_j(x')) d^3 \vec{x}' = 0 \quad (6.5)$$

se la corrente è confinata in un volume finito. Analogamente, da

$$\partial_j(x_i x_k J_j(x)) = x_k J_i(x) + x_i J_k(x) \quad (6.6)$$

deriviamo

$$\int d^3 \vec{x}' (x'_k J_i(x') + x'_i J_k(x')) = 0 \quad (6.7)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} 4 \pi \epsilon_0 c^2 A_i(x) &= \frac{x_j}{|\vec{x}|^3} \int d^3 \vec{x}' x'_j J_i(x') + O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^3}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{x_j}{|\vec{x}|^3} \int d^3 \vec{x}' (x'_j J_i(x') - x'_i J_j(x')) + O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^3}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{jik} x_j}{|\vec{x}|^3} \int d^3 \vec{x}' (\vec{x}' \wedge \vec{J}(x'))_k + O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^3}\right) = \\ &= \frac{(\vec{m} \wedge \vec{x})_i}{|\vec{x}|^3} + O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^3}\right) \end{aligned} \quad (6.8)$$

dove abbiamo introdotto il *momento magnetico* \vec{m} della distribuzione di corrente data

$$\vec{m} = \int \vec{M}(x) d^3 \vec{x} = \frac{1}{2} \int \vec{x} \wedge \vec{J}(x) d^3 \vec{x} \quad (6.9)$$

e la corrispondente *densità di magnetizzazione* (o di momento magnetico) \vec{M}

$$\vec{M}(x) = \frac{1}{2} \vec{x} \wedge \vec{J}(x) \quad (6.10)$$

Il campo magnetico corrispondente al potenziale vettore di dipolo magnetico (6.8) è

$$\vec{B}(x) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 c^2} \frac{3 \vec{\hat{x}} (\vec{\hat{x}} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{x}|^3} \quad (6.11)$$

Se la densità di corrente è confinata in un anello piano, nel quale passa la corrente I , l'espressione per il momento magnetico della distribuzione di carica diventa

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{x} \wedge \vec{J}(x) d^3\vec{x} = \frac{I}{2} \oint \vec{x} \wedge d\vec{l} = (I \times \text{Area}) \vec{n} \quad (6.12)$$

dove *Area* è l'area dell'anello, e \vec{n} è la normale alla superficie piana il cui bordo è l'anello. Riotteniamo in questo modo il risultato (4.24).

Se la densità di corrente è formata da cariche q_α , di massa M_α che si muovono con velocità \vec{v}_α , allora

$$\vec{J}(x) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_{\alpha}) \quad (6.13)$$

ed il momento magnetico si scrive

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{x}_{\alpha} \wedge \vec{v}_{\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{M_{\alpha}} \vec{L}_{\alpha} = \frac{q}{2M} \vec{L} \quad (6.14)$$

se tutte le particelle hanno lo stesso rapporto $\frac{q_{\alpha}}{M_{\alpha}}$ e \vec{L} è il momento angolare orbitale totale del sistema.

Supponiamo ora di avere un sistema localizzato caratterizzato da una densità di magnetizzazione $\vec{M}(x)$. Il potenziale vettore in un punto \vec{x} lontano dal sistema è

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 c^2 \vec{A}(x) &= \int d^3x' \frac{\vec{M}(x') \wedge (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \\ &= \int d^3x' \vec{M}(x') \wedge \vec{\nabla}_{x'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \int d^3x' \frac{\vec{\nabla}_{x'} \wedge \vec{M}(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Pertanto la densità di magnetizzazione $\vec{M}(x)$ è equivalente ad una densità di corrente

$$\vec{j}_{mag}(x) = \vec{\nabla} \wedge \vec{M} \quad (6.16)$$

È possibile riottenere lo stesso risultato in maniera più elementare ma più laboriosa partendo dall'espressione del momento di dipolo magnetico di un piccolo anello di corrente I di area A :

$$\vec{m} = I A \vec{n} \quad (6.17)$$

Consideriamo per semplicità una densità di magnetizzazione $\vec{M}(x)$ diretta lungo l'asse delle z . Il momento di dipolo magnetico di un volume $\Delta V_{\vec{x}}$ sarà dunque

$$\Delta m_z = \Delta V_{\vec{x}} M_z(\vec{x}) = I_{xy} \Delta x \Delta y \quad (6.18)$$

dove I_{xy} è la corrente che circola nel piano xy associata al volume $\Delta V_{\vec{x}}$. Quindi

$$\Delta z M_z(\vec{x}) = I_{xy}(\vec{x}) \quad (6.19)$$

Consideriamo ora il volume $\Delta V_{\vec{x}+\Delta x \hat{x}}$ contiguo a $\Delta V_{\vec{x}}$, nella direzione x . La corrente associata a questo volume è

$$\Delta z M_z(\vec{x} + \Delta x \hat{x}) = I_{xy}(\vec{x} + \Delta x \hat{x}) \quad (6.20)$$

La corrente effettiva nella direzione y risultante dalla magnetizzazione dei due volumi è

$$\begin{aligned} j_y(\vec{x}) \Delta x \Delta z &= -I_{xy}(\vec{x} + \Delta x \hat{x}) + I_{xy}(\vec{x}) = \\ &= \Delta z (M_z(\vec{x}) - M_z(\vec{x} + \Delta x \hat{x})) \approx -\Delta z \Delta x \partial_x M_z(\vec{x}) \end{aligned} \quad (6.21)$$

Dunque

$$j_y(\vec{x}) = -\partial_x M_z(\vec{x}) \quad (6.22)$$

Analogamente considerando un volume $\Delta V_{\vec{x}+\Delta y \hat{y}}$ contiguo al volume originale nella direzione y otteniamo

$$j_x(\vec{x}) = \partial_y M_z(\vec{x}) \quad (6.23)$$

in accordo con la (6.16), ristretta al caso di $\vec{M} = M_z \hat{z}$.

In presenza di una densità di magnetizzazione \vec{M} e di una densità di polarizzazione \vec{P} , le equazioni di Maxwell possono essere riscritte in termini dei nuovi campi:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{H} &= \vec{B} - \frac{\vec{M}}{c^2 \epsilon_0} \end{aligned} \quad (6.24)$$

come segue

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho_{lib} \\ \epsilon_0 c^2 \vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{con} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.25)$$

dove \vec{j}_{con} è la corrente delle cariche libere¹²

Notiamo che un'altra definizione di \vec{H} è spesso usata

$$\vec{H}' \equiv c^2 \epsilon_0 \vec{H} = c^2 \epsilon_0 \vec{B} - \vec{M} \quad (6.26)$$

\vec{H}' ha le dimensioni della magnetizzazione invece che del campo \vec{B} .

Per una grande classe di materiali la relazione tra \vec{M} e \vec{B} (o \vec{H}) è approssimativamente lineare:

$$\vec{M} = c^2 \epsilon_0 \chi_m \vec{H} = \chi_m \vec{H}' \quad (6.27)$$

dove χ_m è la *suscettibilità magnetica*. Abbiamo

$$\vec{B} = (1 + \chi_m) \vec{H} = \frac{1 + \chi_m}{\epsilon_0 c^2} \vec{H}' \equiv \epsilon_0 c^2 \mu \vec{H} = \mu \vec{H}' \quad (6.28)$$

La grandezza con le dimensioni di $\frac{1}{\epsilon_0 c^2}$

$$\mu = \frac{1 + \chi_m}{\epsilon_0 c^2} \quad (6.29)$$

è detta la *permeabilità magnetica*. Se χ_m è positivo (negativo) il materiale si chiama *paramagnetico* (*diamagnetico*). Per questi materiali χ_m è un numero molto piccolo ($< 10^{-5}$). Per i materiali *ferromagnetici* χ_m può invece essere molto grande (fino a 10^5), anche se in questo caso la relazione tra \vec{B} e \vec{H} non soltanto non è più lineare ma è anche a molti valori (fenomeno dell'isteresi magnetica).

Poiché

$$\vec{M} = \frac{\epsilon_0 c^2 \chi_m}{1 + \chi_m} \vec{B} \quad (6.30)$$

concludiamo che nei materiali diamagnetici la magnetizzazione ha direzione *opposta* al campo magnetico che la induce. Questo effetto è presente in tutti i materiali è sostanzialmente indipendente dalla temperatura: è dovuto alle extra-correnti atomiche indotte dal campo esterno. Nei materiali paramagnetici ed in quelli ferromagnetici la magnetizzazione indotta ha la *stessa* direzione del campo magnetico. Questo effetto è presente nei materiali costituiti da atomi o molecole con momenti magnetici intrinseci: è dovuto all'allineamento dei momenti magnetici intrinseci degli atomi e dipende quindi dalla temperatura.

¹²Una derivazione più dettagliata delle equazioni di Maxwell (6.25) è presentata nella Sezione 9.3

6.2 Condizioni al contorno per B ed H

Poichè \vec{B} ha divergenza nulla la componente di \vec{B} normale alla superficie che separa due materiali è continua.

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{n}_{21} = \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_{21} \quad (6.31)$$

Poiché \vec{H} soddisfa l'equazione di Ampère, la componente di \vec{H} tangente alla superficie che separa i due materiali è continua, assumendo che non ci siano correnti superficiali di conduzione tra i due materiali

$$\vec{H}_1 \wedge \vec{n}_{21} = \vec{H}_2 \wedge \vec{n}_{21} \quad (6.32)$$

6.3 Sfera uniformemente magnetizzata

Consideriamo una sfera di un materiale magnetico di suscettibilità magnetica χ_m con \vec{M} costante. Vogliamo determinare \vec{H} e \vec{B} . Il problema è formalmente identico a quello della sfera dielettrica, di suscettibilità elettrica χ_e , uniformemente polarizzata con

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (6.33)$$

Questa relazione va confrontata con l'analoga relazione magnetica

$$\vec{M} = \epsilon_0 c^2 \chi_m \vec{H} \quad (6.34)$$

Dunque

$$\begin{aligned} \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} &\leftrightarrow \frac{\vec{M}}{c^2 \epsilon_0} \\ \vec{E} &\leftrightarrow \vec{H} \\ \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} &\leftrightarrow \vec{B} \\ \chi_e &\leftrightarrow \chi_m \end{aligned} \quad (6.35)$$

In effetti i campi in corrispondenza soddisfano le stesse equazioni

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \right) = 0 &\leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{H} + \frac{\vec{M}}{c^2 \epsilon_0} \right) = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 &\leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = 0 \end{aligned} \quad (6.36)$$

Anche le condizioni al bordo corrispondono: attraverso la superficie della sfera, rimangono continue le componenti tangenziali di \vec{E} ed \vec{H} e le componenti normali di $\frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$ e $\vec{B} = \vec{H} + \frac{\vec{M}}{c^2 \epsilon_0}$.

Nel caso della sfera dielettrica, il campo \vec{E} esterno alla sfera è quello di un dipolo elettrico con

$$\vec{p} = \frac{4\pi a^3}{3} \vec{P} \quad (6.37)$$

dove a è il raggio della sfera e \vec{P} la densità di polarizzazione elettrica. Pertanto il campo magnetico esterno alla sfera magnetizzata è quello di un dipolo magnetico \vec{m} con

$$\vec{m} = \frac{4\pi a^3}{3} \vec{M} \quad (6.38)$$

Il campo interno della sfera dielettrica è

$$\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (6.39)$$

Ne consegue il campo \vec{H} all'interno della sfera magnetizzata è

$$\vec{H} = -\frac{\vec{M}}{3c^2 \epsilon_0} \quad (6.40)$$

e quindi

$$\vec{B} = \vec{H} + \frac{\vec{M}}{c^2 \epsilon_0} = \frac{2\vec{M}}{3c^2 \epsilon_0} = -2\vec{H} \quad (6.41)$$

6.4 Ancora sulla superficie sferica carica ruotante

Nel problema precedente, la densità di corrente di magnetizzazione è nulla

$$\vec{J}_m = \vec{\nabla} \wedge \vec{M} = 0 \quad (6.42)$$

perché la magnetizzazione è costante all'interno della sfera. La densità di corrente superficiale dovuta alla discontinuità di \vec{M} alla superficie della sfera è

$$\vec{K} = \vec{M} \wedge \hat{n}|_{r=a} \quad (6.43)$$

dove \vec{n} è la normale alla superficie della sfera. La soluzione del problema precedente implica pertanto che il campo magnetico generato dalla densità di carica superficiale (6.43) è pari a

$$\vec{B}_{int} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M} \quad r < a \quad (6.44)$$

all'interno della sfera e uguale al campo di un dipolo magnetico

$$\vec{m} = \frac{4\pi a^3}{3} \vec{M} \quad (6.45)$$

all'esterno della sfera. D'altra parte la corrente superficiale relativa ad una superficie sferica carica uniformemente e rotante con una velocità angolare $\vec{\omega}$ intorno al suo asse è

$$\vec{K}_\sigma = \sigma \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \sigma a \vec{\omega} \wedge \hat{n}|_{r=a} \quad (6.46)$$

dove σ è la densità superficiale di carica. Confrontando con la (6.43) vediamo che la corrente superficiale della superficie sferica rotante è pari a quella di una sfera uniformemente magnetizzata con

$$\vec{M} = \sigma a \vec{\omega} \quad (6.47)$$

Pertanto il campo magnetico generato all'interno della sfera rotante è

$$\vec{B}_{int} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma a \vec{\omega} \quad r < a \quad (6.48)$$

mentre quello generato all'esterno è quello di un dipolo magnetico con momento magnetico di dipolo pari a

$$\vec{m} = \frac{4\pi a^4 \sigma}{3} \vec{\omega} \quad (6.49)$$

Riotteniamo in questo modo il risultato ottenuto in Sezione 4.4.

6.5 Circuiti magnetici

In presenza di materia la legge di Ampère si scrive

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_C \quad (6.50)$$

dove C è un circuito chiuso e I_C la corrente concatenata con questo circuito.

Prendiamo il circuito C coincidente con una linea di campo magnetico. In questo caso \vec{H} è sempre parallelo al vettore $d\vec{l}$ tangente alla linea di campo, quindi

$$\mu_0 I_C = \oint_C H(l) dl = \oint_C \frac{B(l)}{\mu_r(l)} dl \quad (6.51)$$

dove l è una coordinata lungo la linea di campo C , $B(l)$ il modulo del campo magnetico nel punto l della linea di campo, $\mu(l)$ la permeabilità magnetica relativa del mezzo in quel punto.

Consideriamo ora un piccolo *tubo di flusso* del campo magnetico \vec{B} che circonda la linea di campo C . Sia $S(l)$ la sezione del tubo di flusso ortogonale alla linea di campo C nel punto l . Se la sezione $S(l)$ dell'intorno tubolare è sufficientemente piccola il flusso di \vec{B} attraverso $S(l)$ è

$$\Phi = \int_{S(l)} \vec{B} \cdot \hat{n} \approx B(l) S(l) \quad (6.52)$$

Poichè $S(l)$ delimita un tubo di flusso, il flusso Φ è indipendente da l ma dipende soltanto dal tubo.

Quindi la (6.51) si riscrive

$$I_C = \oint_C \frac{dl}{S(l) \mu(l)} \Phi \quad (6.53)$$

Questa relazione (approssimata) di proporzionalità tra corrente concatenata con un circuito magnetico e flusso magnetico è nota come *legge di Hopkinson*. La grandezza

$$\mathcal{R} \equiv \oint_C \frac{dl}{S(l) \mu(l)} \quad (6.54)$$

viene chiamata *riluttanza* del “circuito” magnetico in questione. La legge di Hopkinson diventa allora

$$I_C = \mathcal{R} \Phi \quad (6.55)$$

Questa relazione viene spesso interpretata come l'analogo della legge Ohm per i “circuiti” magnetici, nella quale il flusso magnetico Φ svolge il ruolo

della corrente, I_C quello della forza elettromotrice — e viene quindi a volte chiamata forza magnetomotrice — e la riluttanza quella della resistenza elettrica

In realtà l'utilità concettuale e pratica di questa analogia è alquanto limitata: in molti contesti può essere più semplice o più appropriato discutere il problema facendo uso direttamente delle equazioni di Maxwell. Si consideri per esempio il “circuito” magnetico costituito da un toroide sul quale sono avvolte in modo uniforme N spire di un filo elettrico che supporta una corrente I . Consideriamo il caso in cui l'interno del toroide sia vuoto e supponiamo piccola la sezione trasversa S del toroide rispetto alla sua lunghezza. In questo caso ovviamente, la legge di Ampère dà

$$\mu_0 N I = B 2 \pi R \Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{2 \pi R} \quad (6.56)$$

dove R è il raggio medio del toroide e B è il modulo del campo magnetico che, per ragioni di simmetria è tangente alla circonferenza interna del toroide. Per ottenere lo stesso risultato attraverso la legge di Hopkinson, dobbiamo calcolare preliminarmente la riluttanza

$$\mathcal{R} = \frac{2 \pi R}{\mu_0 S} \quad (6.57)$$

dove S è la sezione del toroide. Quindi la legge di Hopkinson dà per il flusso

$$\Phi = \frac{N I}{\mathcal{R}} = \frac{N I \mu_0 S}{2 \pi R} \quad (6.58)$$

Da questo deduciamo il campo magnetico

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{N I \mu_0}{2 \pi R} \quad (6.59)$$

in accordo col calcolo diretto. Notiamo che per effettuare il calcolo “à la Hopkinson” dobbiamo è richiesta la conoscenza della sezione S del toroide per calcolare la riluttanza del circuito, quando in effetti, nelle approssimazioni date, questo dato è irrilevante ai fini del calcolo del campo magnetico.

Consideriamo ora il caso in cui il toroide sia completamente riempito con un materiale ferromagnetico con permeabilità μ , con l'eccezione di un piccolo “traferro” di lunghezza d , nel quale c'è il vuoto.

La legge di Ampère dà in questo caso

$$N I = (2 \pi R - d) \frac{B}{\mu} + d \frac{B}{\mu_0} \quad (6.60)$$

ovvero

$$B = \frac{N I}{\frac{2 \pi R - d}{\mu} + \frac{d}{\mu_0}} \quad (6.61)$$

Ripetiamo lo stesso elementare calcolo attraverso usando l'analogia elettrica di Hopkinson. In questo approccio dobbiamo prima calcolare le due riluttanze \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 corrispondenti al tratto di toroide con il nucleo ferromagnetico e quello del traferro

$$\mathcal{R}_1 = \frac{2 \pi R - d}{\mu S} \quad \mathcal{R}_2 = \frac{d}{\mu_0 S} \quad (6.62)$$

Le due riluttanze sono poste in serie, quindi la legge di Hopkinson dà

$$N I = (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2) \Phi \quad \Phi = \frac{N I}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2} \quad (6.63)$$

Questo dà per il campo magnetico

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{N I}{S \mathcal{R}_1 + S \mathcal{R}_2} \quad (6.64)$$

che è naturalmente lo stesso risultato ottenuto più agevolmente senza far uso dell'analogia di Hopkinson.

Nel caso di ferromagneti la relazione tra B e H non è lineare e neanche funzionale, nel senso che il valore di B dipende anche dalla storia precedente di H : in questo caso si dice che c'è *isteresi*, e la situazione è descritta in Figura 9.

Consideriamo il caso di un ferromagnete non-lineare, sempre a forma torodiale di lunghezza $l = 2 \pi R$ e con un traferro di lunghezza d . Sempre nell'ipotesi che $d \ll l$ possiamo supporre B costante nel magnete e nel traferro:

$$B_1 = B_2 \quad (6.65)$$

Per quanto riguarda H , la relazione (6.60) diventa

$$\mu_0 N I = l H_1 + d H_2 = l H_1 + d B_1 \quad (6.66)$$

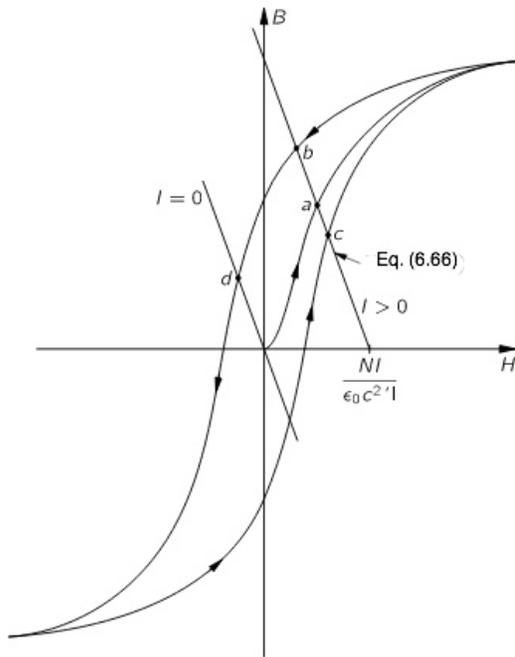


Figura 9: Determinare il campo magnetico in un ferromagnete.

dove H_1 è il modulo del valore di H nel magnete e H_2 quello nel traferro. L'equazione (6.66) descrive una retta nel piano (H, B) . Per conoscere il campo $B_1 = B_2$ è necessario conoscere la relazione tra B ed H , che per un ferromagnete ha la forma descritta in figura 9. Vediamo che l'intersezione tra la retta (6.66) è in generale costituita da diversi punti: il campo B dipende quindi dal modo in cui si è magnetizzato il magnete.

Supponiamo per esempio che $I = 0$ e che il ferromagnete sia stato magnetizzato in modo permanente seguendo la curva a+b. Allora

$$H_1 = -\frac{d}{l} B_1 \quad (6.67)$$

La magnetizzazione all'interno del ferromagnete è

$$M = \frac{B_1 - H_1}{\mu_0} = \left(1 + \frac{d}{l}\right) \frac{B}{\mu_0} \quad (6.68)$$

e B è determinato dall'intersezione d in Figura 9.

7 La legge del flusso

Consideriamo un cammino chiuso che si muove nello spazio. L'applicazione Γ_t che rappresenta il cammino dipende pertanto parametricamente dal tempo t :

$$\Gamma_t : \sigma \rightarrow \vec{x}(\sigma; t) \quad (7.1)$$

Abbiamo indicato con σ una variabile reale sull'intervallo $\sigma \in [0, 1]$ che parametrizza, ad un istante dato t , il cammino Γ_t nello spazio. Poiché il cammino è chiuso, vale la relazione

$$\vec{x}(0, t) = \vec{x}(1, t) \quad (7.2)$$

Definiamo il flusso $\Phi_B(t)$ del campo magnetico \vec{B} ad un dato istante di tempo t :

$$\Phi_B(t) = \int_{S_t} d^2a \vec{B}(\vec{x}, t) \cdot \hat{n} \quad (7.3)$$

dove S_t è una superficie, dipendente dal tempo, il cui bordo coincide con Γ_t

$$\partial S_t = \Gamma_t \quad (7.4)$$

$\Phi_B(t)$ dipende dal tempo sia attraverso la dipendenza temporale del campo magnetico $\vec{B}(\vec{x}, t)$ sia attraverso la dipendenza dal tempo della superficie S_t . Corrispondentemente la variazione di $\Phi_B(t)$ in un intervallo di tempo Δt infinitesimo sarà data dalla somma di due contributi:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_B(t) = \Delta t \int_{S_t} d^2a \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} \cdot \hat{n} + \\ + \left[\int_{S_{t+\Delta t}} d^2a \vec{B} \cdot \hat{n} - \int_{S_t} d^2a \vec{B} \cdot \hat{n} \right] \end{aligned} \quad (7.5)$$

Tenendo conto dell'equazione di Faraday-Maxwell, possiamo riscrivere il primo termine nel membro di destra di quest'equazione come la circuitazione del campo elettrico lungo Γ_t :

$$\Delta t \int_{S_t} d^2a \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\Delta t \int_{\Gamma_t} d\vec{x} \cdot \vec{E} \quad (7.6)$$

Il termine tra parentesi quadre nel membro di destra dell'Eq. (7.5) rappresenta il contributo aggiuntivo alla variazione del flusso dovuta al movimento nello spazio del cammino. Sia $C(t, \Delta t)$ la superficie a forma di cilindro che

ha per basi le superfici S_t e $S_{t+\Delta t}$ e come bordo laterale la superficie anulare $A(t, \Delta t)$ spazzata dal cammino $\Gamma(t)$ nell'intervallo di tempo $[t, t + \Delta t]$. Dall'equazione di Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.7)$$

consegue che il flusso totale attraverso $C(t, \Delta t)$ si annulla. Pertanto

$$\int_{S_{t+\Delta t}} d^2a \vec{B} \cdot \hat{n} - \int_{S_t} d^2a \vec{B} \cdot \hat{n} = - \int_{A(t, \Delta t)} d^2a \vec{B} \cdot \hat{n} \quad (7.8)$$

I vettori

$$\begin{aligned} \vec{e}_t &\equiv \frac{\partial \vec{x}(\sigma, t)}{\partial t} \\ \vec{e}_\sigma &\equiv \frac{\partial \vec{x}(\sigma, t)}{\partial \sigma} \end{aligned} \quad (7.9)$$

sono ambedue tangenti alla superficie anulare $A(t, \Delta t)$, uno nella direzione “parallela” e l'altro in quella “ortogonale” all'asse del cilindro $C(t, \Delta t)$. Pertanto l'elemento di area $\hat{n} d^2a$ normale alla superficie $A(t, \Delta t)$ si scrive

$$\hat{n} d^2a = \vec{e}_\sigma \wedge \vec{e}_t \Delta t \Delta \sigma \quad (7.10)$$

Tenendo conto che

$$\vec{e}_\sigma \Delta \sigma \quad (7.11)$$

è l'elemento di lunghezza infinitesimo lungo il cammino Γ_t mentre

$$\vec{e}_t = \vec{v}(\sigma, t) \quad (7.12)$$

è la velocità con cui si muove nello spazio un punto del cammino Γ_t , riscriviamo la (7.8) come segue

$$\begin{aligned} \int_{S_{t+\Delta t}} d^2a \vec{B} \cdot \hat{n} - \int_{S_t} d^2a \vec{B} \cdot \hat{n} &= - \int_{A(t, \Delta t)} \vec{B} \cdot (\vec{e}_\sigma \wedge \vec{e}_t) \Delta t \Delta \sigma = \\ &= - \int_{A(t, \Delta t)} \vec{e}_\sigma \cdot (\vec{e}_t \wedge \vec{B}) \Delta t \Delta \sigma = - \Delta t \int_{\Gamma_t} d\vec{x} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{B}) \end{aligned} \quad (7.13)$$

In definitiva la variazione del flusso $\Phi_B(t)$ diventa

$$\Delta \Phi_B(t) = - \Delta t \int_{\Gamma_t} d\vec{x} \cdot \vec{E} - \Delta t \int_{\Gamma_t} d\vec{x} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (7.14)$$

ovvero

$$\frac{d\Phi_B(t)}{dt} = - \int_{\Gamma_t} d\vec{x} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (7.15)$$

L'espressione

$$\frac{\vec{F}}{q} = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (7.16)$$

è la forza di Lorentz che agisce su una carica unitaria posta in un punto del cammino Γ_t . La circuitazione di questa forza lungo il cammino Γ_t è chiamata la *forza elettromotrice* lungo il cammino in questione. Denotiamola con \mathcal{E}_{Γ_t} . La legge del flusso (di Faraday) è pertanto

$$\frac{d\Phi_B(t)}{dt} = -\mathcal{E}_{\Gamma_t} \quad (7.17)$$

Questa legge generalizza al caso di cammini in movimento la relazione, diretta conseguenza dell'equazione di Maxwell-Faraday, che si applica a cammini *Fermi*, cioè indipendenti dal tempo:

$$\frac{\partial\Phi_B(t)}{\partial t} = - \int_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{E} \quad (7.18)$$

La legge del flusso implica dunque che possiamo ottenere una forza elettromotrice in un circuito sia tendendo fermo il circuito e facendo variare il campo magnetico, sia tenendo costante il campo magnetico e muovendo il circuito in modo da far variare il flusso magnetico che lo attraversa.

7.1 La compressione del flusso magnetico

Un cilindro metallico di raggio R è collocato in un solenoide coassiale di raggio maggiore di R , che produce un campo magnetico (approssimativamente) uniforme di intensità B lungo l'asse del cilindro. Il cilindro metallico viene improvvisamente compresso (per esempio attraverso l'esplosione di materiale posto tra il solenoide e l'esterno del cilindro metallico) e rapidamente ridotto ad un raggio $r < R$. Si calcoli il campo magnetico B' *medio* all'interno del cilindro dopo la compressione.

La forza elettro-magnetica che agisce sulle cariche all'interno del conduttore supposto ideale deve essere nulla

$$\vec{F} = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = 0 \quad (7.19)$$

Pertanto il flusso attraverso un cerchio C_t che passa attraverso il conduttore cilindrico, posto su un piano ortogonale all'asse e al campo magnetico, rimane costante mentre il cilindro si comprime. Concludiamo che

$$\pi R^2 B = \pi r^2 \vec{B}' \quad (7.20)$$

ovvero il campo magnetico viene aumentato di un fattore proporzionale al rapporto dei quadrati dei raggi dei cilindri prima e dopo la compressione:

$$B' = B \frac{R^2}{r^2} \quad (7.21)$$

7.2 La bobina di Rogowski

Il dispositivo, mostrato schematicamente in Fig. 10¹³, consiste di un cavo conduttore ordinatamente avvolto in foggia elicoidale su un supporto flessibile, per formare una bobina (solenoidale) di lunghezza adeguata. Una estremità del solenoide viene riportata all'origine della bobina passando il cavo di ritorno all'interno del solenoide stesso. La bobina di Rogowski è usata per misurare il valore di una corrente alternata $I(t) = I_0 \sin \omega t$ portata da un filo di corrente che passa attraverso il dispositivo. Non è essenziale che il filo passi per il centro del dispositivo.

Il flusso che passa attraverso ogni spira della bobina è

$$\phi_{spira} = \vec{B} \cdot \hat{n} S \quad (7.22)$$

dove \vec{B} è il campo magnetico prodotto dalla corrente che si vuole misurare, S la sezione della spira del dispositivo, \hat{n} la normale alla spira. Scriviamo

$$\hat{n} = \frac{d\vec{l}}{dl} \quad (7.23)$$

dove dl è un tratto infinitesimo di lunghezza della bobina di Rogowski. Dunque

$$dl \phi_{spira} = \vec{B} \cdot d\vec{l} S \quad (7.24)$$

¹³La figura 10 è adattata da Luque Alfredo, Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=14135709>

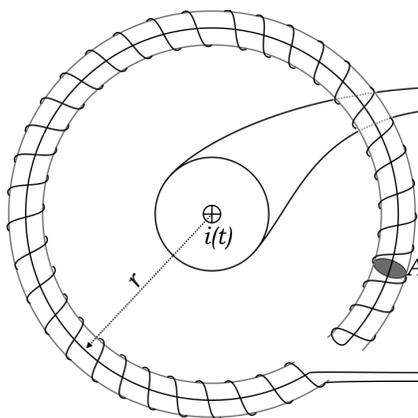


Figura 10: La bobina di Rogowski.

Consideriamo quindi un circuito C chiuso che passa attraverso le spire della bobina:

$$\int_C dl \phi_{spira} = \int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} S = \mu_0 I(t) S \quad (7.25)$$

Sia n il numero di spire per unità di lunghezza della bobina di Rogowski. Abbiamo

$$\int_C n dl \phi_{spira} = \mu_0 I(t) S n \quad (7.26)$$

Ma $n dl$ è precisamente il numero dN di spire nel tratto dl . Quindi $n dl \phi_{spira}$ è il flusso concatenato col tratto dl e l'integrale è il flusso concatenato attraverso tutta la bobina. In definitiva la forza elettromotrice indotta nella bobina è

$$\mathcal{E}_{f.e.m.} = -\mu_0 \dot{I}(t) S n = -\mu_0 I_0 \omega S n \cos \omega t \quad (7.27)$$

7.3 Una barra conduttrice che scivola in un campo magnetico

Una barra di massa m , lunghezza d , resistenza R scivola senza attrito su un piano orizzontale, lungo binari conduttori paralleli, tra i quali una batteria mantiene una forza elettromotrice \mathcal{E}_0 . Un campo magnetico B uniforme e

costante è diretto ortogonalmente al piano dei binari. Supponiamo che la barra sia ferma al tempo $t = 0$: vogliamo determinare il suo moto. Se la barra si muove con velocità v , la forza di Lorentz esercitata su di essa dal campo magnetico è

$$F = dI B = \frac{dB \mathcal{E}}{R} \quad (7.28)$$

dove I è la corrente che scorre attraverso la barra e \mathcal{E} la f.e.m. agli estremi della barra. Abbiamo

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - B v d \quad (7.29)$$

dove il secondo termine è la f.e.m. indotta dalla legge del flusso. Quindi

$$\frac{dB (\mathcal{E}_0 - B v d)}{R} = m \dot{v} \quad (7.30)$$

ovvero

$$\dot{v} + \frac{d^2 B^2}{m R} v = \frac{dB \mathcal{E}_0}{m R} \quad (7.31)$$

La soluzione generale è

$$v(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{dB} + v_0 e^{-\frac{d^2 B^2}{m R} t} \quad (7.32)$$

Se $v(0) = 0$

$$v(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{dB} (1 - e^{-\frac{d^2 B^2}{m R} t}) \quad (7.33)$$

7.4 Il campo all'interno di un solenoide cilindrico infinito percorso da corrente dipendente dal tempo

Consideriamo un solenoide infinito cilindrico di raggio r_0 , con asse lungo l'asse delle z , nel quale circola una corrente superficiale, nel piano ortogonale a z , dipendente dal tempo $K(t)$. Sappiamo che per $K(t)$ indipendente dal tempo, il campo magnetico è nullo all'esterno del solenoide, e non nullo, uniforme, pari a $\mu_0 K$ e diretto lungo l'asse delle z all'interno dello stesso. Vogliamo calcolare il campo magnetico nel caso in cui $K(t)$ dipende dal tempo.

Data la simmetria del sistema, i campi non nulli avranno la forma

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= B(r, t) \hat{z} \\
 \vec{E} &= E(r, t) \vec{e}_\theta = E(r, t) (-\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}) = \\
 &= E(r, t) \left(-\frac{y}{r} \hat{x} + \frac{x}{r} \hat{y}\right)
 \end{aligned} \tag{7.34}$$

dove (r, θ) sono le coordinate polari sul piano (x, y) . L'equazione di Faraday si scrive pertanto

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= (\partial_y E_z - \partial_z E_y) \hat{x} + (\partial_z E_x - \partial_x E_z) \hat{y} + (\partial_x E_y - \partial_y E_x) \hat{z} = \\
 &= \left(\frac{E}{r} + x \frac{x}{r} \partial_r \frac{E}{r} + \frac{E}{r} + y \frac{y}{r} \partial_r \frac{E}{r}\right) \hat{z} = \\
 &= \left(\frac{2E}{r} + r \partial_r \frac{E}{r}\right) \hat{z} = (\partial_r E(r, t) + \frac{E}{r}) \hat{z} = -\partial_t B(r, t) \hat{z}
 \end{aligned} \tag{7.35}$$

ovvero

$$\boxed{\partial_t B(r, t) + \partial_r E(r, t) + \frac{E}{r} = 0} \tag{7.36}$$

L'equazione di Ampère invece diventa

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \partial_y B_z \hat{x} - \partial_x B_z \hat{y} = \\
 &= \partial_r B(r, t) \left(\frac{y}{r} \hat{x} - \frac{x}{r} \hat{y}\right) = -\partial_r B(r, t) \vec{e}_\theta = \\
 &= \frac{1}{c^2} \partial_t E(r, t) \vec{e}_\theta + \mu_0 \vec{J}
 \end{aligned} \tag{7.37}$$

ovvero

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \partial_t E(r, t) + \partial_r B(r, t) = \mu_0 J_\theta(r, t)} \tag{7.38}$$

dove J_θ è la densità di corrente superficiale che scorre lungo il cilindro. J_θ è diversa da zero solo per $r = r_0$. Quindi

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \partial_t E(r, t) + \partial_r B(r, t) = 0 \quad \text{per } r \neq r_0} \tag{7.39}$$

Per una corrente K sulla superficie del cilindro *indipendente* dal tempo la soluzione, *all'interno del solenoide*, è

$$\begin{aligned} B^{(0)}(r, t) &= \mu_0 K(t) & \text{se } \dot{K}(t) = 0 & \text{ e } r < r_0 \\ E^{(0)}(r, t) &= 0 \end{aligned} \quad (7.40)$$

Quando $\dot{K}(t) \neq 0$ (7.40) non soddisfa l'equazione di Faraday (7.36). Ci aspettiamo però che per correnti $K(t)$ *lentamente* variabili la correzione a (7.40) sia piccola. Poniamo quindi

$$\begin{aligned} B(r, t) &= B^{(0)}(r, t) + B^{(1)}(r, t) + \dots = \mu_0 K(t) + B^{(1)}(r, t) + \dots \\ E(r, t) &= E^{(1)}(r, t) + \dots \end{aligned} \quad (7.41)$$

e cerchiamo le correzioni $E^{(1)}(r, t)$ ed $B^{(1)}(r, t)$ — che ci aspettiamo piccole per correnti lentamente variabili — imponendo la validità delle equazioni di Faraday e di Ampère¹⁴. Sostituendo $B^{(0)}(r, t)$ nella (7.36) otteniamo

$$\mu_0 \dot{K}(t) + \frac{1}{r} \partial_r (r E(r, t)) = 0 \quad (7.42)$$

da cui deduciamo

$$E(r, t) = -\mu_0 \dot{K}(t) \frac{r}{2} + \dots \quad (7.43)$$

In effetti la correzione a $E(r, t)$ è piccola quando la derivata rispetto al tempo di $K(t)$ è piccola, ovvero quando la corrente varia lentamente, come ci aspettavamo. Però, con questa correzione per il campo elettrico, è l'equazione di Ampère a non essere più soddisfatta a meno di aggiungere anche a $B^{(0)}(r, t)$ il termine $B^{(1)}(r, t)$ tale che

$$\frac{1}{c^2} \partial_t E(r, t) + \partial_r B^{(1)}(r, t) = -\frac{1}{c^2} \mu_0 \ddot{K}(t) \frac{r}{2} + \partial_r B^{(1)}(r, t) = 0 \quad (7.44)$$

ovvero

$$B(r, t) = \mu_0 K(t) + \mu_0 \ddot{K}(t) \frac{r^2}{2^2 c^2} + \dots \quad (7.45)$$

La correzione a $B(r, t)$ dipende adesso dalla derivata seconda di $K(t)$ — e quindi ci aspettiamo sia ancora più piccola della correzione al campo elettrico

¹⁴Le equazioni per le divergenze dei campi elettrico e magnetico sono automaticamente soddisfatte per campi della forma (7.34).

per campi lentamente variabili. Essa induce però, a sua volta, una correzione ulteriore del campo elettrico per soddisfare l'equazione di Faraday

$$0 = \partial_t B(r, t) + \partial_r E(r, t) + \frac{E}{r} = \frac{1}{c^2} \mu_0 \ddot{K}(t) \frac{r^2}{2} + \frac{1}{r} \partial_r (r E^{(2)}(r, t)) \quad (7.46)$$

ovvero

$$E(r, t) = -\mu_0 \dot{K}(t) \frac{r}{2} - \mu_0 \ddot{K}(t) \frac{r^3}{4 \cdot 2^2 c^2} + \dots \quad (7.47)$$

Il nuovo termine nel campo elettrico richiede una modifica del campo magnetico affinché esso soddisfi l'equazione di Ampère

$$-\mu_0 K^{(4)}(t) \frac{r^3}{4 \cdot 2^2 c^4} + \partial_r B^{(2)}(r, t) = 0 \quad (7.48)$$

dove $K^{(4)}(t)$ denota la derivata quarta della corrente rispetto al tempo. Quindi

$$B(r, t) = \mu_0 i(t) + \mu_0 \ddot{K}(t) \frac{r^2}{2^2 c^2} + \mu_0 K^{(4)}(t) \frac{r^4}{4^2 \cdot 2^2 c^4} + \dots \quad (7.49)$$

Possiamo continuare in questo modo, e ottenere dall'equazione di Faraday

$$0 = \mu_0 K^{(5)}(t) \frac{r^4}{4^2 \cdot 2^2 c^4} + \frac{1}{r} \partial_r (r E^{(3)}(r, t)) \quad (7.50)$$

la correzione successiva al campo elettrico

$$E(r, t) = -\mu_0 \dot{K}(t) \frac{r}{2} - \mu_0 \ddot{K}(t) \frac{r^3}{4 \cdot 2^2 c^2} - \mu_0 K^{(5)}(t) \frac{r^5}{6 \cdot 4^2 \cdot 2^2 c^4} + \dots \quad (7.51)$$

È chiaro che questo procedimento costruisce delle serie per B ed E la cui forma generale è

$$\begin{aligned} B(r, t) &= \mu_0 \left[K(t) + \ddot{K}(t) \frac{r^2}{2^2 c^2} + K^{(4)}(t) \frac{r^4}{4^2 \cdot 2^2 c^4} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + a_{2n} K^{(2n)}(t) \frac{r^{2n}}{c^{2n}} + \dots \right] \\ \frac{E(r, t)}{c} &= -\mu_0 \left[\dot{K}(t) \frac{r}{2c} + \ddot{K}(t) \frac{r^3}{4 \cdot 2^2 c^3} + K^{(5)}(t) \frac{r^5}{6 \cdot 4^2 \cdot 2^2 c^5} + \right. \\ &\quad \left. + \dots + b_{2n+1} K^{(2n+1)}(t) \frac{r^{2n+1}}{c^{2n+1}} + \dots \right] \end{aligned} \quad (7.52)$$

I coefficienti a_{2n} e b_{2n+1} sono determinati dalle equazioni di ricorrenza

$$b_{2n+1} = \frac{a_{2n}}{2n+2} \quad a_{2n+2} = \frac{b_{2n+1}}{2n+2} = \frac{a_{2n}}{(2n+2)^2} \quad (7.53)$$

La soluzione di queste ricorrenze è facilmente ottenuta:

$$a_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{n!^2} \quad (7.54)$$

e

$$b_{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}} \frac{1}{n!^2 (n+1)} \quad (7.55)$$

In definitiva per $r < r_0$ abbiamo ottenuto i campi come serie nelle derivate temporali della corrente:

$$\begin{aligned} B(r, t) &= \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K^{(2n)}(t)}{n!^2} \left(\frac{r}{2c}\right)^{2n} \\ \frac{E(r, t)}{c} &= -\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K^{(2n+1)}(t)}{n!^2 (n+1)} \left(\frac{r}{2c}\right)^{2n+1} \end{aligned} \quad (7.56)$$

7.4.1 Corrente di frequenza fissata

Consideriamo il caso particolare in cui

$$K(t) = K_0 \cos \omega t = K_0 \Re(e^{i\omega t}) \quad (7.57)$$

dove $\Re(z)$ indica la parte reale del numero complesso z . In questo caso le (7.56) danno per i campi nella regione *interna* del solenoide, $r < r_0$,

$$\begin{aligned} B_{int}(r, t) &= \mu_0 K(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!^2} \left(\frac{\omega r}{2c}\right)^{2n} \quad r < r_0 \\ \frac{E_{int}(r, t)}{c} &= \mu_0 \dot{K}(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!^2 (n+1)} \left(\frac{\omega r}{2c}\right)^{2n+1} \end{aligned} \quad (7.58)$$

Le due serie nei membri di destra di queste equazioni definiscono delle funzioni chiamate funzioni di Bessel di prima specie

$$\begin{aligned} J_0(x) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \\ J_1(x) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!^2 (n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} = -J_0'(x) \end{aligned} \quad (7.59)$$

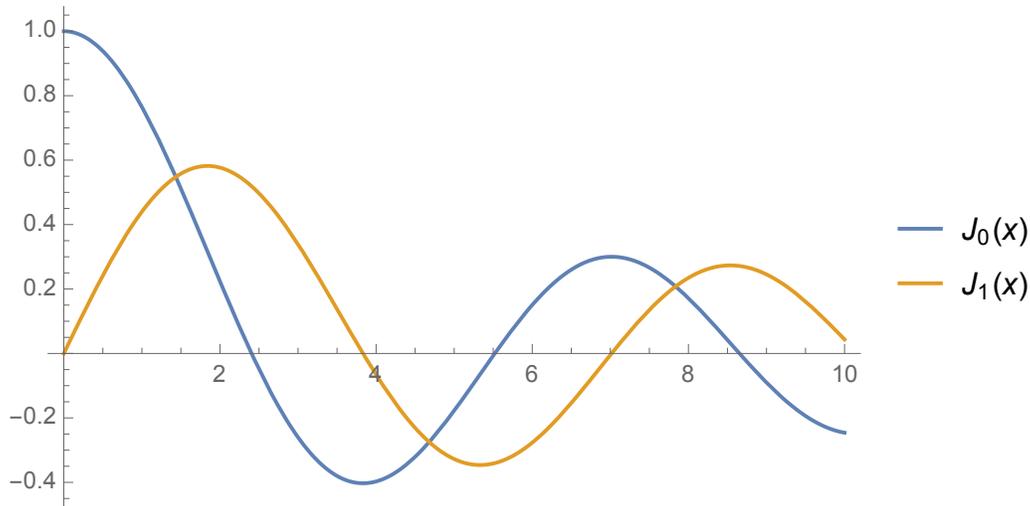


Figura 11: Le funzioni di Bessel di prima specie $J_0(x)$ and $J_1(x)$.

Dunque per $r < r_0$

$$B_{int}(r, t) = \mu_0 K_0 \Re(e^{i\omega t}) J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) = \mu_0 K_0 \cos(\omega t) J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right)$$

$$\frac{E_{int}(r, t)}{c} = \mu_0 K_0 \Re(-i e^{i\omega t}) J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right) = \mu_0 K_0 \sin(\omega t) J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right) \quad (7.60)$$

Il fattore $-i$ davanti al campo elettrico vuol dire, in termini dei campi reali, che questo è sfasato di $\frac{\pi}{2}$ rispetto a quello magnetico. Nel seguito di questa sezione, per brevità ometteremo di indicare esplicitamente il simbolo per la parte reale \Re di fronte alle espressioni per i campi.

7.5 Il campo all'esterno di un solenoide infinito percorso da corrente dipendente dal tempo (Esercizio Avanzato)

7.5.1 Una soluzione singolare

La soluzione precedente è stata ottenuta partendo dalla una soluzione di ordine zero statica (7.40). Esiste un'altra soluzione statica della coppia di

equazioni (7.36) e (7.39):

$$\begin{aligned} B^{(0)}(r, t) &= 0 \\ E^{(0)}(r, t) &= \frac{cC}{r} \end{aligned} \quad (7.61)$$

dove abbiamo introdotto la velocità della luce c per convenienza. Questa soluzione è *singolare* per $r = 0$. Per questa ragione non l'abbiamo considerata per il problema del campo all'interno del solenoide. È possibile però cercare l'estensione di questa soluzione al caso in cui $C(t)$ diventi dipendente dal tempo. Procediamo come nella sezione precedente. Posto

$$\begin{aligned} B(r, t) &= B^{(1)}(r, t) + \dots \\ E(r, t) &= \frac{cC(t)}{r} + E^{(1)}(r, t) \dots \end{aligned} \quad (7.62)$$

e sostituendo nell'equazione di Ampère otteniamo

$$\frac{1}{c} \frac{C'(t)}{r} + \partial_r B^{(1)}(r, t) = 0 \quad (7.63)$$

ovvero

$$B(r, t) = -\frac{1}{c} C'(t) \log \frac{r}{r_0} + \dots \quad (7.64)$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione di Faraday

$$-\frac{1}{c} C''(t) \log \frac{r}{r_0} + \frac{1}{r} \partial_r (r E^{(1)}(r, t)) = 0 \quad (7.65)$$

da cui

$$E(r, t) = \frac{cC(t)}{r} + \frac{1}{c} C'''(t) \left(-\frac{r}{4} + \frac{1}{2} r \log \frac{r}{r_0}\right) + \dots \quad (7.66)$$

Sostituendo nell'equazione di Ampère

$$\frac{1}{c^3} C''''(t) \left(-\frac{r}{4} + \frac{1}{2} r \log \frac{r}{r_0}\right) + \partial_r B^{(2)}(r, t) = 0 \quad (7.67)$$

da cui

$$B(r, t) = -\frac{1}{c} C'(t) \log \frac{r}{r_0} - \frac{1}{c^3} C''''(t) \left(-\frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{4} \log \frac{r}{r_0}\right) + \dots \quad (7.68)$$

È chiaro che procedendo in questo modo possiamo costruire una nuova soluzione delle equazioni di Faraday e di Ampere nel vuoto: poiché questa soluzione è singolare per $r \rightarrow 0$, come risulta da (7.66) e (7.68), denotiamola con $(B_{sing}(r, t), E_{sing}(r, t))$. I primi termini dello sviluppo in serie di derivate di $C(t)$ della soluzione singolare sono

$$\begin{aligned} c B_{sing}(r, t) &= -C'(t) \log \frac{r}{r_0} - C'''(t) \left(-\frac{r^2}{4c^2} + \frac{r^2}{4c^2} \log \frac{r}{r_0} \right) + \dots \\ E_{sing}(r, t) &= \frac{cC(t)}{r} + C'''(t) \left(-\frac{r}{4c} + \frac{1}{2} \frac{r}{c} \log \frac{r}{r_0} \right) + \dots \end{aligned} \quad (7.69)$$

7.5.2 La soluzione singolare armonica

Il nostro obiettivo è determinare il campo nella regione $r > r_0$ esterna al solenoide. La dipendenza temporale dei campi è armonica di frequenza ω come quella per i campi interni

$$\begin{aligned} B(r, t) &= e^{i\omega t} B(r) \\ E(r, t) &= e^{i\omega t} E(r) \end{aligned} \quad (7.70)$$

Per $r > r_0$ però $B(r)$ e $E(r)$ non sono però necessariamente regolari per $r = 0$. Dobbiamo pertanto determinare la soluzione più generale delle equazioni di Faraday ed Ampère. Queste ultime, quando i campi hanno la dipendenza temporale data da (7.70), diventano

$$\begin{aligned} i\omega B(r) + E'(r) + \frac{E(r)}{r} &= 0 \\ \frac{i\omega}{c^2} E(r) + B'(r) &= 0 \end{aligned} \quad (7.71)$$

Si noti che dato $B(r)$, il campo elettrico $E(r)$ si ottiene derivando rispetto a r

$$E(r) = i \frac{c^2}{\omega} B'(r) \quad (7.72)$$

(7.71) è un sistema di due equazioni differenziali ordinarie *lineari* del primo ordine: la soluzione generale è pertanto la combinazione di due soluzioni particolari linearmente indipendenti. Conosciamo già una soluzione di queste equazioni, quella che descrive il campo all'interno del solenoide:

$$B_{reg}(r) = J_0\left(\frac{r\omega}{c}\right) \quad \frac{E_{reg}(r)}{c} = -i J_1\left(\frac{r\omega}{c}\right) = i \frac{c}{\omega} B'_{reg}(r) \quad (7.73)$$

Per determinare un'altra soluzione linearmente indipendente, facciamo uso della seguente osservazione: se $(E_1(r), B_1(r))$ e $(E_2(r), B_2(r))$ sono due soluzioni delle (7.71) la combinazione¹⁵

$$W_{12}(r) = r(E_1(r) B_2(r) - E_2(r) B_1(r)) \quad (7.74)$$

è una costante W_{12} indipendente da r . Infatti

$$\begin{aligned} W'_{12}(r) &= \partial_r(r E_1(r)) B_2(r) - \partial_r(r E_2(r)) B_1(r) + \\ &\quad + r(E_1(r) B'_2(r) - E_2(r) B'_1(r)) = \\ &= -i\omega r B_1(r) B_2(r) + i\omega r B_2(r) B_1(r) + \\ &\quad + i\frac{c^2}{\omega} r (B'_1(r) B'_2(r) - B'_2(r) B'_1(r)) = 0 \end{aligned} \quad (7.75)$$

Pertanto, supponendo di conoscere una soluzione $(E_1(r), B_1(r))$ delle equazioni (7.71), una seconda soluzione $B_2(r)$ deve soddisfare l'equazione differenziale *del primo ordine*

$$B'_1(r) B_2(r) - B'_2(r) B_1(r) = \frac{A_2}{r} \quad (7.76)$$

con A_2 costante indipendente da r . Una soluzione per (7.76) si trova facilmente ponendo

$$B_2(r) = B_1(r) f(r) \quad (7.77)$$

con $f(r)$ incognita e sostituendo nella (7.76)

$$B'_1(r) B_1(r) f(r) - B'_1(r) f(r) B_1(r) - B_1^2(r) f'(r) = \frac{A_2}{r} \quad (7.78)$$

ovvero

$$f'(r) = \frac{A_2}{r B_1^2(r)} \quad (7.79)$$

In definitiva, nota una soluzione di $B_1(r)$, otteniamo una nuova soluzione $B_2(r)$ attraverso l'integrazione

$$B_2(r) = A_2 B_1(r) \int_{\bar{r}}^r \frac{dr'}{r' B_1^2(r')} \quad (7.80)$$

¹⁵ W_{12} è detto il wronskiano delle due soluzioni del sistema di equazioni differenziali (7.71).

La soluzione *generale* delle equazioni di Maxwell (7.71) si scrive

$$B(r) = A_1 B_1(r) + A_2 B_1(r) \int_{\bar{r}}^r \frac{dr'}{r' B_1^2(r')} \quad (7.81)$$

Si noti che il valore \bar{r} dell'estremo inferiore di integrazione in questa formula è arbitrario: una variazione di \bar{r} corrisponde ad aggiungere a $B_2(r)$ una funzione proporzionale a $B_1(r)$ e quindi ad una differente scelta della costante A_1 .

Applichiamo questa formula al caso $B_1(r) = B_{reg}(r) = J_0(\frac{r\omega}{c})$. Poichè

$$J_0(\frac{r\omega}{c}) = 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{r\omega}{c}\right)^2 + \dots \quad r \rightarrow 0 \quad (7.82)$$

abbiamo che la corrispondente $B_2(r)$ ha il seguente comportamento per $r \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} B_2(r) &= J_0(\frac{r\omega}{c}) \int_{\bar{r}}^r \frac{dr'}{r'} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r'\omega}{c}\right)^2 + \dots\right) = \\ &= J_0(\frac{r\omega}{c}) \left(\log \frac{r}{\bar{r}} + \frac{1}{4} \left(\frac{r\omega}{c}\right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\bar{r}\omega}{c}\right)^2 + \dots\right) = \\ &= \log r + a_0(\bar{r}) + O(r) \end{aligned} \quad (7.83)$$

dove $a_0(\bar{r}) = -\log \bar{r} - \frac{1}{4} \left(\frac{\bar{r}\omega}{c}\right)^2 + \dots$ è una costante indipendente da r e dipendente dalla scelta di \bar{r} .

Dalla (7.72) deduciamo il corrispondente campo elettrico $E_2(r)$ diverge anch'esso per $r \rightarrow 0$

$$E_2(r) = i \frac{c^2}{\omega} B_2'(r) = i \frac{c^2}{\omega r} + \dots \quad (7.84)$$

Vediamo quindi che la seconda soluzione $(B_2(r), E_2(r))$ è effettivamente singolare per $r \rightarrow 0$.

La soluzione singolare $(B_2(r), E_2(r))$ è definita a meno della normalizzazione e dell'aggiunta di una soluzione regolare $(B_1(r), E_1(r))$: abbiamo visto che questa ultima ambiguità corrisponde all'arbitrarietà della scelta di \bar{r} . Nella letteratura si suole fare una scelta specifica per \bar{r} e della normalizzazione della soluzione singolare e definire corrispondentemente della *funzioni di Bessel di seconda specie*

$$\begin{aligned} B_{sing}(r) &= Y_0\left(\frac{r\omega}{c}\right) = \frac{2}{\pi} \left(\log \frac{r\omega}{c} + \gamma - \log 2 + O(r)\right) \\ \frac{E_{sing}(r)}{c} &= i \frac{c}{\omega} Y_0'\left(\frac{r\omega}{c}\right) = -i Y_1\left(\frac{r\omega}{c}\right) = i \frac{2c}{\pi r \omega} + \dots \end{aligned} \quad (7.85)$$

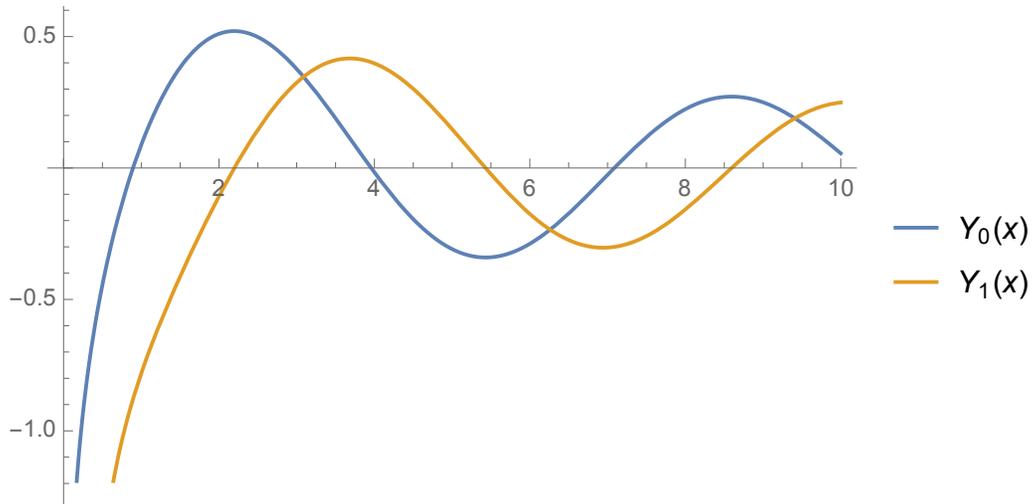


Figura 12: Le funzioni di Bessel di seconda specie $Y_0(x)$ and $Y_1(x)$.

dove $\gamma = 0.577\dots$ è una costante detta di *Eulero-Mascheroni*. Si noti che le (7.85) sono in accordo con le formule generali (7.69), avendo posto in quest'ultime

$$C(t) = i \frac{2c e^{i\omega t}}{\pi \omega} \quad (7.86)$$

7.5.3 Il campo nella regione esterna al solenoide

Il campo esterno al cilindro si scrive quindi come combinazione lineare della soluzione regolare e di quella singolare:

$$\begin{aligned} B_{ext}(r) &= A_1 J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) + A_2 Y_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) \quad r > r_0 \\ \frac{E_{ext}(r)}{c} &= -i A_1 J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right) - i A_2 Y_1\left(\frac{\omega r}{c}\right) \quad r > r_0 \end{aligned} \quad (7.87)$$

mentre il campo all'interno del solenoide è, come abbiamo visto,

$$\begin{aligned} B_{int}(r) &= \mu_0 K_0 J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) \\ \frac{E_{int}(r)}{c} &= -i \mu_0 K_0 J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right) \end{aligned} \quad (7.88)$$

Per determinare A_1 ed A_2 dobbiamo usare le condizioni al contorno per i campi. Il campo magnetico ha una discontinuità attraverso il solenoide proporzionale alla corrente $K(t)$

$$B_{int}(r_0) - B_{ext}(r_0) = \mu_0 K_0 \quad (7.89)$$

Il campo elettrico è continuo invece attraverso la superficie del solenoide

$$B'_{int}(r_0) - B'_{ext}(r_0) = 0 \quad (7.90)$$

Quindi

$$\begin{aligned} (\mu_0 K_0 - A_1) J_0\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) - A_2 Y_0\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) &= \mu_0 K_0 \\ (\mu_0 K_0 - A_1) J_1\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) - A_2 Y_1\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (7.91)$$

da cui

$$\begin{aligned} A_1 &= \mu_0 K_0 + \frac{Y_1\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) \mu_0 K_0}{\Delta} \\ A_2 &= -\frac{J_1\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) \mu_0 K_0}{\Delta} \end{aligned} \quad (7.92)$$

dove Δ è il determinante

$$\Delta = J_1\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) Y_0\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) - J_0\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) Y_1\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) \quad (7.93)$$

Abbiamo dimostrato più sopra che $r_0 \Delta$ è una costante indipendente da r_0 . Possiamo quindi calcolarlo per $r_0 \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} r_0 \Delta &= r_0 \left(\frac{\omega r_0}{2c} + O(r_0^2) \right) \left(\frac{2}{\pi} \log r_0 + \dots \right) + \\ &\quad - r_0 (1 + O(r_0)) \left(-\frac{2c}{\pi r_0 \omega} + \dots \right) = \frac{2c}{\pi \omega} \end{aligned} \quad (7.94)$$

In definitiva per $r > r_0$

$$\begin{aligned} \frac{B_{ext}(r)}{\mu_0 K_0} &= \left(1 + \frac{\pi r_0 \omega Y_1\left(\frac{\omega r_0}{c}\right)}{2c} \right) J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) - \frac{\pi r_0 \omega}{2c} J_1\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) Y_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) \\ \frac{E_{ext}(r)}{\mu_0 K_0 c} &= -i \left(1 + \frac{\pi r_0 \omega Y_1\left(\frac{\omega r_0}{c}\right)}{2c} \right) J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right) + i \frac{\pi r_0 \omega}{2c} J_1\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) Y_1\left(\frac{\omega r}{c}\right) \end{aligned}$$

8 Energia ed impulso del campo elettromagnetico

Consideriamo un sistema di cariche $\rho(\vec{x}, t)$ e correnti $\vec{j}(\vec{x}, t)$. Il lavoro per unità di tempo esercitato dal campo elettromagnetico sulle cariche è

$$W_{mat}(V) = \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} \quad (8.1)$$

dove V è il volume che racchiude il sistema di materia. Sostituendo in quest'espressione l'equazione di Maxwell per la corrente otteniamo

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{j} &= \epsilon_0 c^2 \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \\ &= \epsilon_0 c^2 \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) - \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t} = \\ &= \epsilon_0 c^2 \left[\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B}) \right] - \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t} = \\ &= \epsilon_0 c^2 \left[\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B}) \right] - \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t} = \\ &= -\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 c^2 \vec{E} \wedge \vec{B}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon_0 \vec{E}^2 + c^2 \epsilon_0 \vec{B}^2] = \\ &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{S} - \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \quad (8.2)$$

dove

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \epsilon_0 c^2 \vec{E} \wedge \vec{B} \\ u &= \frac{\epsilon_0}{2} [\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2] \end{aligned} \quad (8.3)$$

Poniamo

$$\begin{aligned} U_{em}(V) &= \int_V u d^3V \\ \Phi_{em}(V) &= \int_{\partial V} \vec{S} \cdot \hat{n} d^2a \end{aligned} \quad (8.4)$$

La (8.2) si riscrive come

$$W_{mat}(V) + \frac{\partial U_{em}}{\partial t} + \Phi_{em}(V) = 0 \quad (8.5)$$

Le eqs. (8.2) ed (8.5) ammettono la seguente interpretazione: u è la *densità di energia* del campo elettromagnetico, $U_{em}(V)$ è l'energia del campo elettromagnetico contenuta nel volume V , \vec{S} il flusso di energia per unità di tempo e di superficie trasportato dal campo, e $\Phi_{em}(V)$ l'energia che attraversa il bordo di V nell'unità di tempo. In questo modo (8.2) esprime una legge di conservazione *locale* dell'energia: cioè la somma del lavoro fatto sulle cariche nell'unità di tempo e nell'unità di volume, della velocità di variazione della densità di energia del campo elettromagnetico e del flusso di energia elettromagnetica è nulla. La (8.5) esprime la corrispondente legge di conservazione *integrata* dell'energia.

Al campo elettromagnetico possiamo associare, seguendo un ragionamento analogo, la densità di impulso:

$$\vec{\mathcal{P}}_{em} = \epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B} \quad (8.6)$$

Ricaviamo la legge di conservazione cui soddisfa l'impulso così definito:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}_{em}}{\partial t} &= \epsilon_0 \left(c^2 \vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} \right) \wedge \vec{B} - \epsilon_0 \vec{E} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \\ &= -\vec{j} \wedge \vec{B} + \epsilon_0 \left(c^2 (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - c^2 B_i \vec{\nabla} B_i + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} - E_i \vec{\nabla} E_i \right) = \\ &= -\vec{j} \wedge \vec{B} - \rho \vec{E} + \\ &+ \epsilon_0 \left(c^2 \partial_j (B_j B_i) - \frac{c^2}{2} \vec{\nabla} B^2 + \partial_j (E_j E_i) - \frac{1}{2} \vec{\nabla} E^2 \right) \end{aligned} \quad (8.7)$$

Poiché la densità di forza esercitata dal campo elettromagnetico sulla materia è

$$\vec{\mathcal{F}} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} = \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}_{mat}}{\partial t} \quad (8.8)$$

otteniamo

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{P}}_{em}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}_{mat}}{\partial t} = \epsilon_0 \left(c^2 \partial_j (B_j \vec{B}) - \frac{c^2}{2} \vec{\nabla} B^2 + \partial_j (E_j \vec{E}) - \frac{1}{2} \vec{\nabla} E^2 \right) \quad (8.9)$$

Riscriviamo quest'equazione come

$$\frac{\partial \mathcal{P}_i^{(tot)}}{\partial t} = -\partial_j T_{ij} \quad (8.10)$$

dove

$$\vec{\mathcal{P}}^{(tot)} = \vec{\mathcal{P}}_{em} + \vec{\mathcal{P}}_{mat} \quad (8.11)$$

è l'impulso totale del campo e della materia, mentre

$$T_{ij} = \delta_{ij} u - \epsilon_0 (E_i E_j + c^2 B_i B_j) \quad (8.12)$$

è un tensore simmetrico a due indici. Se interpretiamo T_{ij} come il flusso della componente i -esima dell'impulso nella direzione j -esima, l'equazione (8.10) esprime la conservazione *locale* dell'impulso totale.

Verifichiamo la correttezza dell'interpretazione di S_i e T_{ij} rispettivamente come il flusso dell'energia e della componente j -esima dell'impulso nella direzione i -esima della radiazione elettromagnetica. Per la radiazione elettromagnetica valgono le relazioni

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \quad |\vec{E}| = c |\vec{B}| \quad (8.13)$$

Notiamo innanzitutto che l'equazione

$$\vec{S} = c^2 \vec{\mathcal{P}}_{em} \quad (8.14)$$

indica che il flusso di energia si propaga nella direzione dell'impulso. Le (8.13) implicano inoltre che

$$|\vec{S}| = c^2 |\vec{\mathcal{P}}_{em}| = c u \quad (8.15)$$

Questa equazione dice che il flusso di energia si propaga con velocità c . Ci aspettiamo quindi che il flusso della componente i -esima del momento in direzione j sia

$$T^{ij} = \frac{\mathcal{P}_{em}^i \mathcal{P}_{em}^j}{|\vec{\mathcal{P}}_{em}|} c = \frac{\mathcal{P}_{em}^i \mathcal{P}_{em}^j}{u} c^2 \quad (8.16)$$

In effetti

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{em}^i \mathcal{P}_{em}^j &= \epsilon_0^2 (\vec{E} \wedge \vec{B})_i (\vec{E} \wedge \vec{B})_j = \\ &= \epsilon_0^2 \left[\delta_{ij} (E^2 B^2 - (\vec{E} \cdot \vec{B})^2) - E_i E_j B^2 - B_i B_j E^2 + \right. \\ &\quad \left. + (E_i B_j + E_j B_i) \vec{E} \cdot \vec{B} \right] \end{aligned} \quad (8.17)$$

Quindi, in virtù delle (8.13),

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{em}^i \mathcal{P}_{em}^j &= \epsilon_0^2 \left[\delta_{ij} \frac{E^4}{c^2} - (E_i E_j + c^2 B_i B_j) B^2 \right] = \\ &= \delta_{ij} \frac{u^2}{c^2} - (E_i E_j + c^2 B_i B_j) \frac{\epsilon_0 u}{c^2} \end{aligned} \quad (8.18)$$

Pertanto

$$\frac{\mathcal{P}_{em}^i \mathcal{P}_{em}^j}{|\vec{\mathcal{P}}_{em}|} c = \delta_{ij} u - \epsilon_0 (E_i E_j + c^2 B_i B_j) \quad (8.19)$$

in accordo con (8.12).

9 Onde

9.1 Un piano infinito percorso da corrente dipendente dal tempo

Sul piano $x = 0$ scorre una corrente superficiale, uniforme, diretta lungo l'asse delle y , e dipendente dal tempo, la cui intensità è $K_y(t)$. Vogliamo determinare i campi generati.

Il problema è invariante per traslazioni lungo y e lungo z . Per questo motivo i campi elettrici e magnetici dipendono solamente di x e t :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}, t) &= (E_x(x, t), E_y(x, t), E_z(x, t)) \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= (B_x(x, t), B_y(x, t), B_z(x, t)) \end{aligned} \quad (9.1)$$

Il problema è anche invariante per le inversioni spaziali P_x, P_z degli assi x e z rispettivamente. Pertanto, denotando con $\vec{E}' \equiv P_x(\vec{E})$ e $\vec{B}' \equiv P_x(\vec{B})$ i campi trasformati per riflessione $x \rightarrow -x$, abbiamo che una configurazione invariante deve soddisfare

$$\begin{aligned} E'_x(x, t) &= -E_x(-x, t) = E_x(x, t) & B'_x(x, t) &= B_x(-x, t) = B_x(x, t) \\ E'_y(x, t) &= E_y(-x, t) = E_y(x, t) & B'_y(x, t) &= -B_y(-x, t) = B_y(x, t) \\ E'_z(x, t) &= E_z(-x, t) = E_z(x, t) & B'_z(x, t) &= -B_z(-x, t) = B_z(x, t) \end{aligned} \quad (9.2)$$

L'invarianza per P_z dà, analogamente,

$$\begin{aligned} E'_x(x, t) &= E_x(x, t) = E_x(x, t) & B'_x(x, t) &= -B_x(x, t) = B_x(x, t) \\ E'_y(x, t) &= E_y(x, t) = E_y(x, t) & B'_y(x, t) &= -B_y(x, t) = B_y(x, t) \\ E'_z(x, t) &= -E_z(x, t) = E_z(x, t) & B'_z(x, t) &= B_z(x, t) = B_z(x, t) \end{aligned} \quad (9.3)$$

Queste ultime tre relazioni implicano

$$B_x(x, t) = B_y(x, t) = E_z(x, t) = 0 \quad (9.4)$$

Inoltre le equazioni di Maxwell per le divergenze danno

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 = \partial_x E_x(x, t) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 = \partial_x B_x(x, t) \quad (9.5)$$

ovvero:

$$E_x(x, t) = E_x(t) \quad B_x(x, t) = B_x(t) \quad (9.6)$$

Questa relazione insieme alla prima delle (9.2) implica

$$E_x(x, t) = 0 \quad (9.7)$$

In definitiva le soluzioni invarianti hanno la forma

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = (0, E_y(x, t), 0) \quad \vec{B}(\vec{x}, t) = (0, 0, B_z(x, t)) \quad (9.8)$$

dove $E_y(x, t)$ è *pari* e $B_z(x, t)$ è *dispari* per $x \rightarrow -x$.

Le equazioni di Maxwell per i rotori danno, per $x \neq 0$:

$$\boxed{\partial_x E_y(x, t) = -\partial_t B_z(x, t) \quad \partial_x B_z(x, t) = -\frac{1}{c^2} \partial_t E_y(x, t)} \quad (9.9)$$

Queste equazioni vanno risolte imponendo le condizioni di (dis)continuità a $x = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (B_z(\epsilon, t) - B_z(-\epsilon, t)) &= -\mu_0 K_y(t) \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (E_y(\epsilon, t) - E_y(-\epsilon, t)) &= 0 \end{aligned} \quad (9.10)$$

Dunque $E_y(x, t)$ è *continuo* in $x = 0$, mentre $B_z(x, t)$ è discontinuo attraverso $x = 0$. Inoltre poichè sappiamo che $E_y(x, t)$ è *pari* e $B_z(x, t)$ è *dispari* per $x \rightarrow -x$, è sufficiente studiare il problema per $x > 0$.

Sappiamo che quando la corrente è costante $\dot{K}(t) = 0$, la soluzione è

$$B_z^{(0)}(x, t) = -\frac{1}{2} \sigma(x) \mu_0 K_y \quad E_y^{(0)}(x, t) = 0 \quad (9.11)$$

dove $\sigma(x) = \frac{x}{|x|}$. Poniamo quindi per correnti *lentamente variabili*

$$\begin{aligned} B_z(x, t) &= -\frac{1}{2} \mu_0 K_y(t) + B_z^{(1)}(x, t) + \dots \quad x > 0 \\ E_y(x, t) &= E_y^{(1)}(x, t) + \dots \end{aligned} \quad (9.12)$$

Sostituiamo quindi questo ansatz nell'equazione di Faraday

$$\partial_x E_y^{(1)}(x, t) = \frac{1}{2} \mu_0 \dot{K}_y(t) \quad (9.13)$$

ovvero

$$E_y(x, t) = \frac{1}{2} \mu_0 \dot{K}_y(t) x + \dots \quad (9.14)$$

A questo punto l'equazione di Ampère richiede una correzione al campo magnetico

$$\partial_x B_z^{(1)}(x, t) = -\frac{1}{c^2} \frac{1}{2} \mu_0 \ddot{K}_y(t) x + \dots \quad (9.15)$$

ovvero

$$B_z(x, t) = -\frac{1}{2} \mu_0 K_y(t) - \frac{1}{2} \mu_0 \ddot{K}_y(t) \frac{x^2}{2c^2} + \dots \quad x > 0 \quad (9.16)$$

A sua volta questa correzione al campo magnetico induce una ulteriore correzione al campo elettrico, per soddisfare l'equazione di Faraday

$$\partial_x E_y^{(2)}(x, t) = \frac{1}{2} \mu_0 \ddot{K}_y(t) \frac{x^2}{2c^2} \quad (9.17)$$

ovvero

$$E_y(x, t) = \frac{1}{2} \mu_0 \dot{K}_y(t) x + \frac{1}{2} \mu_0 \ddot{K}_y(t) \frac{x^3}{3! c^2} + \dots \quad (9.18)$$

È chiaro ora che questo procedimento porta ad una soluzione per il campo elettrico ed il campo magnetico espresse come serie nelle derivate di $K_y(t)$

$$\begin{aligned} B_z(x, t) &= -\frac{1}{2} \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} K_y^{(2n)}(t) \frac{x^{2n}}{(2n)! c^{2n}} \\ E_y(x, t) &= \frac{c}{2} \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} K_y^{(2n+1)}(t) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)! c^{2n+1}} \\ x &> 0 \end{aligned} \quad (9.19)$$

dove $K_y^{(n)}(t)$ indica la derivata n -esima rispetto al tempo di K_y . Confrontando questa espressione con l'espansione in serie di Taylor

$$K_y\left(t + \frac{x}{c}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_y^{(n)}(t)}{n!} \frac{x^n}{c^n} \quad (9.20)$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
 B_z(x, t) &= -\frac{1}{2} \mu_0 \frac{1}{2} \left[K_y\left(t + \frac{x}{c}\right) + K_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \right] \\
 E_y(x, t) &= \frac{c}{2} \mu_0 \frac{1}{2} \left[K_y\left(t + \frac{x}{c}\right) - K_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \right] \\
 x &> 0
 \end{aligned} \tag{9.21}$$

Tenendo conto dell'antisimmetria di B e della simmetria di E abbiamo, per x generico otteniamo la soluzione

$$\begin{aligned}
 B_z(x, t) &= -\frac{1}{2} \mu_0 \frac{\sigma(x)}{2} \left[K_y\left(t + \frac{x}{c}\right) + K_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \right] \\
 E_y(x, t) &= \frac{c}{2} \mu_0 \frac{\sigma(x)}{2} \left[K_y\left(t + \frac{x}{c}\right) - K_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{9.22}$$

Questa soluzione ha la proprietà di ridursi alla soluzione statica nel limite di correnti stazionarie.

Si osservi che possiamo aggiungere alla soluzione (9.22) una qualunque soluzione delle equazioni di Maxwell *nel vuoto* che abbia la stessa simmetria: la nuova soluzione soddisferà le stesse condizioni di (dis)continuità sul piano $x = 0$ della soluzione (9.22). Le soluzioni del vuoto con la stessa simmetria del problema dato sono delle onde uni-dimensionali

$$\begin{aligned}
 B_z(x, t) &= \frac{1}{2} \left[f\left(t + \frac{x}{c}\right) - f\left(t - \frac{x}{c}\right) \right] \\
 E_y(x, t) &= -\frac{c}{2} \left[f\left(t + \frac{x}{c}\right) + f\left(t - \frac{x}{c}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{9.23}$$

con $f(\xi)$ funzione arbitraria di una variabile. La soluzione generale della configurazione data è quindi

$$\begin{aligned}
 B_z(x, t) &= -\frac{1}{2} \mu_0 \frac{\sigma(x)}{2} \left[K_y\left(t + \frac{x}{c}\right) + K_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left[f\left(t + \frac{x}{c}\right) - f\left(t - \frac{x}{c}\right) \right] \\
 E_y(x, t) &= \frac{c}{2} \mu_0 \frac{\sigma(x)}{2} \left[K_y\left(t + \frac{x}{c}\right) - K_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \right] + \\
 &\quad - \frac{c}{2} \left[f\left(t + \frac{x}{c}\right) + f\left(t - \frac{x}{c}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{9.24}$$

La funzione $f(\xi)$ di una singola variabile è determinata dalle condizioni iniziali, per esempio dalla configurazione dei campi al tempo $t = 0$. Determiniamo $f(\xi)$ assumendo che al tempo $t = 0$ la configurazione dei campi sia quella statica:

$$B_z(x, 0) = -\frac{1}{2} \mu_0 \sigma(x) K_0 \quad E_y(x, 0) = 0 \quad (9.25)$$

Allora

$$\begin{aligned} B_z(x, 0) &= -\frac{1}{2} \mu_0 \sigma(x) K_0 = -\frac{1}{2} \mu_0 \frac{\sigma(x)}{2} \left[K_y\left(\frac{x}{c}\right) + K_y\left(-\frac{x}{c}\right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{x}{c}\right) - f\left(-\frac{x}{c}\right) \right] \\ \frac{E_y(x, 0)}{c} &= 0 = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\sigma(x)}{2} \left[K_y\left(\frac{x}{c}\right) - K_y\left(-\frac{x}{c}\right) \right] + \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{x}{c}\right) + f\left(-\frac{x}{c}\right) \right] \end{aligned} \quad (9.26)$$

Sommando membro a membro otteniamo

$$f\left(\frac{x}{c}\right) = \mu_0 \frac{\sigma(x)}{2} \left(K_y\left(\frac{x}{c}\right) - K_0 \right) \quad (9.27)$$

In definitiva

$$\begin{aligned} B_z(x, t) &= -\frac{1}{2} \mu_0 \frac{\sigma(x)}{2} \left[K_y\left(t + \frac{x}{c}\right) + K_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \right] + \\ &\quad + \frac{\mu_0}{2} \left[\frac{\sigma(x + ct)}{2} \left(K_y\left(t + \frac{x}{c}\right) - K_0 \right) - \frac{\sigma(-x + ct)}{2} \left(K_y\left(t - \frac{x}{c}\right) - K_0 \right) \right] \\ E_y(x, t) &= \frac{c}{2} \mu_0 \frac{\sigma(x)}{2} \left[K_y\left(t + \frac{x}{c}\right) - K_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \right] + \\ &\quad - \frac{c \mu_0}{2} \left[\frac{\sigma(x + ct)}{2} \left(K_y\left(t + \frac{x}{c}\right) - K_0 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma(-x + ct)}{2} \left(K_y\left(t - \frac{x}{c}\right) - K_0 \right) \right] \end{aligned} \quad (9.28)$$

Si noti che se $|x| > ct$ i campi sono quelli statici, in accordo con la *causalità relativistica*.

9.2 Un filo rettilineo infinito percorso da corrente dipendente dal tempo (Esercizio Avanzato)

Consideriamo un filo rettilineo infinito percorso da una corrente

$$I(t) = I_0 \cos \omega t = I_0 \Re(e^{i\omega t}) \quad (9.29)$$

In questo caso i campi hanno la forma

$$\begin{aligned} \vec{B} &= B_\theta(r, t) \vec{e}_\theta = e^{i\omega t} B(r) \vec{e}_\theta \\ \vec{E} &= E_z(r, t) \hat{z} = e^{i\omega t} E(r) \hat{z} \end{aligned} \quad (9.30)$$

Le equazioni di Faraday ed Ampère si scrivono

$$i\omega B(r) = E'(r) \quad \frac{i\omega E}{c^2} = B'(r) + \frac{B(r)}{r} \quad (9.31)$$

Il campo $E(r)$ soddisfa pertanto la stessa equazione soddisfatta dal campo $B(r)$ nel problema del solenoide infinito:

$$E'' + \frac{E'}{r} + \frac{\omega^2}{c^2} E(r) = 0 \quad (9.32)$$

Nel limite statico $\omega \rightarrow 0$ la soluzione si deve ridurre alla soluzione

$$B^{(0)}(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \quad E^{(0)}(r) = 0 \quad (9.33)$$

La soluzione del problema è pertanto fornita dalle stesse funzioni di Bessel di seconda specie del problema del solenoide

$$E(r) = \frac{i\mu_0 I_0 \omega}{4} Y_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) \quad B(r) = -\frac{\mu_0 I_0 \omega}{4c} Y_1\left(\frac{\omega r}{c}\right) \quad (9.34)$$

Aggiungendo a questa soluzione la soluzione regolare

$$E_{reg}(r) = A J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) \quad B_{reg}(r) = \frac{iA}{c} J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right) \quad (9.35)$$

otteniamo una soluzione che soddisfa le stesse condizioni al contorno ma che nel limite $\omega \rightarrow 0$ darebbe un campo elettrico non nullo

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} E_{reg}(r) = A \quad (9.36)$$

che non corrisponde alla situazione fisica che stiamo considerando.

9.3 Equazioni di Maxwell nei dielettrici

Ricordiamo che la densità di carica di polarizzazione ρ_{pol} è legata al vettore densità di polarizzazione \vec{P} dalla relazione

$$\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (9.37)$$

Nel caso dinamico abbiamo anche una corrente di polarizzazione

$$\vec{j}_{pol} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (9.38)$$

La densità di carica totale si scrive

$$\rho = \rho_{pol} + \rho_{lib} \quad (9.39)$$

mentre la densità di corrente

$$\vec{j} = \vec{j}_{pol} + \vec{j}' = \vec{j}_{pol} + \vec{j}_{mag} + \vec{j}_{con} \quad (9.40)$$

dove

$$\vec{j}_{mag} = \vec{\nabla} \wedge \vec{M} \quad (9.41)$$

è la densità di corrente dovuta alla densità di magnetizzazione \vec{M} e \vec{j}_{con} è la densità di corrente delle cariche libere. Posto

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{H} &= \vec{B} - \frac{\vec{M}}{c^2 \epsilon_0} \end{aligned} \quad (9.42)$$

le equazioni di Maxwell si riscrivono

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho_{lib} \\ \epsilon_0 c^2 \vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{con} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (9.43)$$

In alcune circostanze esistono delle relazioni *approssimate* tra \vec{D} , \vec{H} e \vec{E} , \vec{B} :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad \vec{B} = (1 + \chi_m) \vec{H} = \epsilon_0 c^2 \mu \vec{H} \quad (9.44)$$

9.4 Onde nei dielettrici

Supponiamo

$$\rho_{lib} = \vec{j}' = \vec{j}_c = 0 \quad (9.45)$$

Allora

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) - \nabla^2 \vec{E} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -\frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (9.46)$$

Dunque

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) \quad (9.47)$$

Questa equazione ha come soluzioni delle onde se la relazione tra la densità di polarizzazione ed il campo elettrico è lineare. Cerchiamo una soluzione della forma

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0(\omega) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad (9.48)$$

L'equazione di Gauss impone

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad (9.49)$$

Prendiamo

$$\begin{aligned} \vec{P}(\vec{x}, t) &= \vec{P}(\omega) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \\ \vec{P}(\omega) &= \epsilon_0 \chi_e(\omega) \vec{E}_0(\omega) \end{aligned} \quad (9.50)$$

dove abbiamo tenuto conto che la suscettibilità dielettrica può dipendere dalla frequenza dell'onda. L'equazione d'onda diventa

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (9.51)$$

dove

$$n^2(\omega) = 1 + \chi_e(\omega) \quad (9.52)$$

Dunque

$$\frac{\omega^2 n^2}{c^2} = k^2 \quad (9.53)$$

Pertanto la velocità di fase dell'onda è

$$v_{fase} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(\omega)} \quad (9.54)$$

$n(\omega)$ è l'indice di rifrazione del mezzo.

Nel caso di materiali densi, abbiamo visto che il fatto che il campo locale è diverso da quello medio, porta alla relazione di Clausius-Mossotti

$$\chi_e(\omega) = \frac{N\alpha(\omega)}{1 - \frac{N\alpha(\omega)}{3}} \quad (9.55)$$

dove $\alpha(\omega)$ è la polarizzabilità atomica, per la quale un modello microscopico che schematizza gli atomi come degli oscillatori dampati dà

$$N\alpha(\omega) = \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (9.56)$$

Abbiamo quindi per l'indice di rifrazione

$$n^2 - 1 = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3}} \quad (9.57)$$

ovvero

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = N\alpha = \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0} \sum_k \frac{1}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 + i\gamma_k\omega} \quad (9.58)$$

dove abbiamo tenuto conto della possibilità che diverse frequenze ω_{0k} siano rilevanti nell'interazione degli atomi coll'onda elettromagnetica.

9.4.1 Coefficiente di assorbimento

Notiamo che l'indice di rifrazione (9.58) ha una parte immaginaria non nulla se $\gamma \neq 0$:

$$n = n_R - i n_I \quad (9.59)$$

n_I è legato al coefficiente di assorbimento β dell'onda nel dielettrico

$$E^2 \propto e^{-\beta z} \quad (9.60)$$

con

$$\beta = \frac{2\omega n_I}{c} \quad (9.61)$$

9.4.2 Indice di rifrazione di una miscela

Nel caso di una miscela di atomi diversi la formula (9.58) diventa

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \sum_j N_j \alpha_j \quad (9.62)$$

Quindi l'indice di un miscela non è semplicemente la media degli indici delle componenti.

Esercizio: Si verifichi la validità di questa formula a partire dai valori misurati di n per una soluzione di acqua e saccarosio per diverse concentrazioni del saccarosio.

9.5 Onde nei metalli

Per i metalli possiamo modificare la teoria dell'indice di rifrazione per i materiali densi tenendo conto che in questo caso il campo locale può essere identificato col campo medio e che $\omega_0 \approx 0$ per i metalli, in quanto gli elettroni di conduzione sono quasi liberi. Dunque

$$n^2 - 1 = N\alpha = \frac{N q_e^2}{m \epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + i \gamma \omega} \quad (9.63)$$

Troviamo la relazione tra γ e la conduttività σ del metallo. La forza che agisce sugli elettroni deve uguagliare la forza di resistenza quando la velocità degli elettroni è quella di deriva

$$\gamma m v_{deriva} = q_e E \quad (9.64)$$

La corrente prodotta dal campo elettrico è

$$j = q_e N v_{deriva} = \frac{q_e^2 N}{\gamma m} E = \sigma E \quad (9.65)$$

ovvero

$$\gamma = \frac{q_e^2 N}{\sigma m} \quad (9.66)$$

Dunque

$$\frac{1}{\tau} \equiv \gamma = \frac{q_e^2 N}{\sigma m} = \frac{\epsilon_0 \omega_{pl}^2}{\sigma} \quad (9.67)$$

dove

$$\omega_{pl}^2 = \frac{q_e^2 N}{\epsilon_0 m} \quad (9.68)$$

è la frequenza di plasma del metallo, introdotta nella sottosezione 2.14. τ è una scala di tempi, e rappresenta il tempo medio tra un urto ed un altro degli elettroni che trasportano la corrente. Introduciamo anche la frequenza associata alla conduttività del metallo

$$\omega_\sigma \equiv \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (9.69)$$

per cui

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_\sigma} \quad (9.70)$$

L'indice di rifrazione dei metalli si scrive

$$\begin{aligned} n^2 &= 1 + \frac{N q_e^2}{m \epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + i \frac{q_e^2 N}{\sigma m} \omega} = 1 + \frac{\sigma}{i \omega \epsilon_0} \frac{1}{i \omega \tau + 1} = \\ &= 1 - i \frac{\omega_\sigma}{\omega} \frac{1}{i \omega \tau + 1} \end{aligned} \quad (9.71)$$

Esistono dunque due regimi estremi per la propagazione di onde elettromagnetiche nei metalli.

9.5.1 Limite di bassa frequenza

Il regime di bassa frequenza è quello per cui

$$\omega \ll \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_\sigma} \quad (9.72)$$

In questo limite la formula (9.71) per l'indice di rifrazione è bene approssimata da:

$$n^2 = 1 - i \frac{\omega_\sigma}{\omega} \quad (9.73)$$

Possiamo distinguere due sotto-casi estremi, del regime di bassa frequenza.

- *Buon conduttore*

In questo caso σ è grande:

$$\omega \ll \omega_\sigma \quad (9.74)$$

per cui

$$n^2 \approx -i \frac{\omega_\sigma}{\omega} = -i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \quad (9.75)$$

e l'indice di rifrazione diventa

$$n \approx (1 - i) \sqrt{\frac{\sigma}{2 \epsilon_0 \omega}} \quad (9.76)$$

L'ampiezza dell'onda elettromagnetica decade con la distanza z di penetrazione dentro il metallo secondo la legge

$$E(z) \propto e^{-z \sqrt{\frac{\sigma \omega}{2 \epsilon_0 c^2}}} \equiv e^{-\frac{z}{\delta}} \quad (9.77)$$

La profondità di penetrazione δ è

$$\delta = \sqrt{\frac{2 \epsilon_0 c^2}{\sigma \omega}} = \sqrt{\frac{2 c^2}{\omega_\sigma \omega}} = \lambda \sqrt{\frac{\omega}{2 \pi^2 \omega_\sigma}} \quad (9.78)$$

dove abbiamo introdotto la lunghezza d'onda dell'onda nel vuoto

$$\lambda = \frac{2 \pi c}{\omega} \quad (9.79)$$

Quindi per un buon conduttore la profondità di penetrazione nel mezzo δ è *molto minore* — per un fattore $\propto \sqrt{\frac{\omega}{\omega_\sigma}}$ — della lunghezza d'onda della radiazione nel vuoto.

- *Cattivo conduttore*

Questo è il limite di piccoli σ

$$\omega_\sigma \ll \omega \quad (9.80)$$

per cui

$$n \approx 1 - i \frac{\omega_\sigma}{2 \omega} \quad (9.81)$$

La profondità di penetrazione δ è quindi

$$\delta = \frac{2 \omega}{\omega_\sigma} \frac{c}{\omega} = \frac{2 c}{\omega_\sigma} = \lambda \frac{\omega}{2 \pi \omega_\sigma} \quad (9.82)$$

Per un cattivo conduttore quindi la profondità di penetrazione è indipendente dalla frequenza ed è *molto maggiore* — per un fattore $\frac{\omega}{\omega_\sigma}$ — della lunghezza d'onda della radiazione.

Consideriamo l'esempio di un tipico metallo buon conduttore, il rame.¹⁶

$$\begin{aligned}
\sigma &= 5.76 \cdot 10^7 \text{ (ohm} \times \text{metri)}^{-1} \\
\frac{1}{\epsilon_0} &\approx 4\pi \times 9.0 \cdot 10^9 \frac{\text{volt} \times \text{metro}}{\text{coulomb}} \\
\omega_\sigma &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 6.51 \cdot 10^{18} \text{ sec}^{-1} \\
\rho_{Cu} &= 8.9 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} \\
N &= \frac{\rho_{Cu}}{\text{peso atomico Cu}} N_{Avogadro} \approx \frac{8.9}{63.5} \times 6.02 \cdot 10^{23} \text{ cm}^{-3} \approx \\
&\approx 8.44 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3} \\
\omega_{Bohr} &\equiv \frac{e^2}{2 a_{Bohr} \hbar} = \frac{e^2}{2 a_{Bohr}} \frac{2\pi c}{h c} \approx \\
&\approx \frac{13.6 \text{ ev} \times 2\pi \times 3 \cdot 10^{10} \text{ cm} \times \text{sec}^{-1}}{12400 \cdot 10^{-8} \text{ ev} \times \text{cm}} \approx 2.067 \cdot 10^{16} \text{ sec}^{-1} \\
\omega_{pl} &= 4\sqrt{\pi} \omega_{Bohr} \sqrt{N a_{Bohr}^3} \approx \\
&\approx 4\sqrt{\pi} \times 2.067 \cdot 10^{16} \text{ sec}^{-1} \sqrt{8.44 \cdot 10^{22} \times (53 \cdot 10^{-8})^3} \approx \\
&\approx 1.643 \cdot 10^{16} \text{ sec}^{-1} \\
\frac{1}{\tau} &= \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_\sigma} \approx 4.14259 \cdot 10^{13} \text{ sec}^{-1} \tag{9.83}
\end{aligned}$$

Nel caso del rame, pertanto, il regime di bassa frequenza è quello per cui

$$\omega \ll 10^{13} \text{ sec}^{-1} \tag{9.84}$$

In questo regime $\omega \ll \omega_\sigma$ e quindi il rame è sempre un buon conduttore. Per esempio per onde di frequenza

$$\omega \approx 10^{10} \text{ sec}^{-1} \tag{9.85}$$

¹⁶Ricordiamo che un numero di atomi di una sostanza eguale al numero di Avogadro N_A ha una massa in grammi numericamente uguale alla massa atomica. Quindi, poiché il peso atomico del rame è 63.5, un numero N_A di atomi di rame hanno una massa di 63.5 gr.

la profondità di penetrazione sarà

$$\delta \approx \sqrt{\frac{2 \times 9 \cdot 10^{20}}{6.51 \cdot 10^{28}}} \text{ cm} \approx 1.66 \cdot 10^{-4} \text{ cm} \quad (9.86)$$

Discutiamo ora la trasmissione della radiazione elettromagnetica in regime di bassa frequenza attraverso l'acqua *pura*, che ha $\epsilon = 80.1 \epsilon_0$, $\sigma = 5 \times 10^{-6} \text{ ohm} \times \text{metro}$, e $\tau = 1.01 \times 10^{-11} \text{ sec}$.

La frequenza associata alla conducibilità dell'acqua pura è

$$\omega_\sigma \approx 5.65 \times 10^5 \text{ sec}^{-1} \quad (9.87)$$

Il regime di bassa frequenza è quello per cui

$$\omega \ll \frac{1}{\tau} \approx 10^{11} \text{ sec}^{-1} \quad (9.88)$$

Dunque per frequenze nell'intervallo

$$\omega_\sigma \approx 10^5 \text{ sec}^{-1} \ll \omega \ll 10^{11} \text{ sec}^{-1} \quad (9.89)$$

l'acqua pura va considerata un cattivo conduttore. La formula di bassa frequenza (9.73) va leggermente modificata per tenere conto che l'acqua è, in condizioni statiche, un dielettrico con una permissività $\epsilon_r = 1 + \chi \neq 1$:

$$n^2 = \epsilon_r - i \frac{\omega_\sigma}{\omega} \quad (9.90)$$

Per cattivi conduttori questa relazione dà

$$n \approx \sqrt{\epsilon_r} - i \frac{\omega_\sigma}{2 \sqrt{\epsilon_r} \omega} \quad (9.91)$$

Pertanto la profondità di penetrazione nell'acqua pura nel regime suddetto è:

$$\delta \approx \frac{2c \sqrt{\epsilon_r}}{\omega_\sigma} \approx 10 \text{ km} \quad (9.92)$$

Problema. Dedurre una formula per l'indice di rifrazione e la profondità di penetrazione per basse frequenze nel caso di conducibilità "intermedia".

9.5.2 Limite di alta frequenza

Nel limite in cui

$$\omega \gg \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_\sigma} \quad (9.93)$$

l'indice di rifrazione diventa

$$n^2 \approx 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2} \quad (9.94)$$

Vediamo dunque che, quando $\omega\tau \gg 1$, ω_{pl} funge da frequenza critica. Per $\omega < \omega_{pl}$ l'indice ha una componente immaginaria e l'onda viene assorbita dal metallo. Mentre per $\omega > \omega_{pl}$ l'indice è reale ed il metallo è “trasparente”. Le stesse equazioni si applicano nel caso della trasmissione di onde elettromagnetiche nella ionosfera. Spiegano perché le onde radio lunghe si trasmettono oltre l'orizzonte, in quanto riflesse dagli strati alti della ionosfera, mentre quelle corte non lo sono. Per comunicare con i satelliti bisogna quindi usare onde corte.

9.6 Riflessione e rifrazione

I campi elettrici e magnetici di un'onda elettromagnetica piana, di frequenza ω , che si propaga in un mezzo con indice di rifrazione n si scrivono

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ \vec{B} &= \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \end{aligned} \quad (9.95)$$

con

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \quad (9.96)$$

Consideriamo due mezzi con indici di rifrazione n_1 ed n_2 a contatto tra loro lungo un piano ortogonale all'asse x . Consideriamo un'onda e.m. incidente \vec{E}_i , di frequenza ω e vettore d'onda \vec{k} che possiamo scegliere nel piano (x, y) . Siano ω' e ω'' le frequenze, rispettivamente, dell'onda riflessa \vec{E}_r e dell'onda trasmessa \vec{E}_t , \vec{k}' e \vec{k}'' i rispettivi vettori d'onda. Abbiamo

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n_1} \quad \frac{\omega'}{k'} = \frac{c}{n_1} \quad \frac{\omega''}{k''} = \frac{c}{n_2} \quad (9.97)$$

Consideriamo le condizioni al bordo, sul piano (y, z) che separa i due dielettrici¹⁷.

L'equazione di Gauss

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (9.98)$$

quando integrata nella direzione x , in un intervallo infinitesimo a cavallo della superficie tra i due mezzi, porta alla condizione

$$D_x^{(1)} = \epsilon_0 E_x^{(1)} + P_x^{(1)} = D_x^{(2)} = \epsilon_0 E_x^{(2)} + P_x^{(2)} \quad (9.99)$$

Cioè la componente di \vec{D} normale al bordo deve essere continua.

Un modo “fisico” di interpretare questa condizione, come pure le altre che seguono, è il seguente. Nella realtà fisica il bordo non è una superficie di discontinuità ma una regione dove i campi variano fortemente, benché con continuità. In questa regione di bordo le equazioni differenziali continuano a valere. Pertanto i termini nell'equazione differenziale che contengono derivate normali rispetto al bordo (rispetto ad x nel nostro caso) devono compensarsi tra loro.

Consideriamo ora l'equazione di Faraday

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9.100)$$

Integriamo ancora nella direzione x , lungo un intervallo infinitesimo a cavallo della superficie (y, z) tra i due mezzi. Otteniamo

$$E_y^{(1)} = E_y^{(2)} \quad E_z^{(1)} = E_z^{(2)} \quad (9.101)$$

cioè la componente del campo elettrico parallela al bordo è continua.

L'equazione per la divergenza di \vec{B}

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (9.102)$$

quando integrata nella direzione x porta alla condizione

$$B_x^{(1)} = B_x^{(2)} \quad (9.103)$$

cioè alla continuità della componente di \vec{B} normale al bordo.

¹⁷Abbiamo già dedotto queste condizioni, separatamente per E, D e B, H , nel caso elettrostatico in Sezione 3.2 e nel caso magnetostatico nella Sezione 6.2.

Infine l'equazione di Maxwell-Ampère, assumendo che $\vec{H} = \vec{B}$,

$$\epsilon_0 c^2 \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (9.104)$$

porta a

$$B_y^{(1)} = B_y^{(2)} \quad B_z^{(1)} = B_z^{(2)} \quad (9.105)$$

IL vettore \vec{E}_i è normale a \vec{k} che giace nel piano (x, y) . Trattiamo separatamente i casi delle due polarizzazioni indipendenti:

a) *Polarizzazione incidente perpendicolare al piano di incidenza (x, y)*

Le condizioni al bordo per \vec{E} sono

$$\begin{aligned} E_i e^{i(\omega t - k_y y)} + (E_r)_z e^{i(\omega' t - k'_y y - k'_z z)} &= (E_t)_z e^{i(\omega'' t - k''_y y - k''_z z)} \\ (E_r)_y e^{i(\omega' t - k'_y y - k'_z z)} &= (E_t)_y e^{i(\omega'' t - k''_y y - k''_z z)} \\ n_1^2 (E_r)_x e^{i(\omega' t - k'_y y - k'_z z)} &= n_2^2 (E_t)_x e^{i(\omega'' t - k''_y y - k''_z z)} \end{aligned} \quad (9.106)$$

Se prendiamo $t = y = 0$ otteniamo in particolare che

$$k'_z = k''_z = 0 \quad (9.107)$$

Questo significa che i vettori d'onde delle onda riflesse e trasmesse giacciono nel piano di incidenza, (x, y) . Prendendo $y = 0$ otteniamo anche

$$\omega = \omega' = \omega'' \quad (9.108)$$

da cui

$$\frac{k}{n_1} = \frac{k'}{n_1} = \frac{k''}{n_2} \quad (9.109)$$

Prendendo $t = 0$ otteniamo

$$k_y = k'_y = k''_y \quad (9.110)$$

Combinando (9.109) e (9.110), concludiamo

$$k_x^2 = (k'_x)^2 \quad (9.111)$$

Poiché l'onda riflessa è diversa da quella incidente, dobbiamo prendere la soluzione

$$k_x = -k'_x \quad (9.112)$$

che esprime il fatto che *l'angolo di incidenza è eguale all'angolo di riflessione*.

Per quanto riguarda il numero d'onda dell'onda rifratta, le eqs. (9.109) e (9.110) danno

$$\frac{k_x^2 + k_y^2}{n_1^2} = \frac{(k_x'')^2 + k_y^2}{n_2^2} \quad (9.113)$$

cioè

$$(k_x'')^2 = \frac{n_2^2}{n_1^2} k^2 - k_y^2 \quad (9.114)$$

Inoltre sempre dalla (9.109) abbiamo

$$\left(\frac{k_y''}{k''}\right)^2 n_2^2 = \frac{k_y^2}{k^2} n_1^2 \quad (9.115)$$

Notiamo che, quando n_1 e n_2 sono *reali*, allora k e k'' sono anche reali e possiamo definire gli angoli di incidenza θ_i e di rifrazione θ_t come reali:

$$\frac{k_y}{k} = \sin \theta_i \quad \frac{k_y''}{k''} = \sin \theta_t \quad (9.116)$$

La (9.115) diventa allora la *legge di Snell* della rifrazione

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (9.117)$$

Le condizioni al bordo per il campo elettrico si riducono in definitiva alle relazioni

$$\begin{aligned} E_i + (E_r)_z &= (E_t)_z \\ (E_r)_y &= (E_t)_y \\ n_1^2 (E_r)_x &= n_2^2 (E_t)_x \end{aligned} \quad (9.118)$$

Consideriamo le equazioni al bordo per il campo magnetico.

$$\vec{k} \wedge \vec{E}_i + \vec{k}' \wedge \vec{E}_r = \vec{k}'' \wedge \vec{E}_t \quad (9.119)$$

In componenti

$$\begin{aligned} k_y E_i + k_y (E_r)_z &= k_y (E_t)_z \\ -k_x E_i + k_x (E_r)_z &= -k_x'' (E_t)_z \\ -k_x (E_r)_y - k_y (E_r)_x &= k_x'' (E_t)_y - k_y (E_t)_x \end{aligned} \quad (9.120)$$

La terza equazione in (9.120) diventa, tenuto conto delle (9.118)

$$(k_x'' + k_x) (E_r)_y + k_y \left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\right) (E_r)_x = 0 \quad (9.121)$$

L'ortogonalità del campo elettrico e del vettore d'onda impone che

$$k_y (E_r)_y - k_x (E_r)_x = 0 \quad (9.122)$$

Queste due equazioni sono inconsistenti, a meno che $(E_r)_y = (E_r)_x = (E_t)_y = (E_t)_x = 0$. In effetti una soluzione non nulla per i campi richiede

$$\frac{n_2^2}{n_1^2} k_x'' k_x + \frac{n_2^2}{n_1^2} k^2 - k_y^2 = 0 \quad (9.123)$$

Sostituendo (9.114) in questa equazione otteniamo

$$\frac{n_2^2}{n_1^2} k_x + k_x'' = 0 \quad (9.124)$$

incompatibile con la (9.114). Concludiamo che

$$(E_r)_y = (E_r)_x = (E_t)_x = (E_t)_y = 0 \quad (9.125)$$

Le equazioni che determinano E_r e E_t sono in definitiva

$$\begin{aligned} k_x E_r + k_x'' E_t &= k_x E_i \\ E_r - E_t &= -E_i \end{aligned} \quad (9.126)$$

Quindi

$$\begin{aligned} E_r &= E_i \frac{k_x - k_x''}{k_x + k_x''} \\ E_t &= 2 E_i \frac{k_x}{k_x + k_x''} \end{aligned} \quad (9.127)$$

Il coefficiente di riflessione per polarizzazione del campo elettrico normale al piano di incidenza è dunque

$$R_{\perp} = \frac{|E_r|^2}{|E_i|^2} = \left| \frac{k_x - k_x''}{k_x + k_x''} \right|^2 \quad (9.128)$$

Per indici di rifrazione reali possiamo esprimere questo coefficiente in termini degli angoli di incidenza e di rifrazione

$$\begin{aligned} R_{\perp} &= \left| \frac{k \cos \theta_i - k'' \cos \theta_t}{k \cos \theta_i + k'' \cos \theta_t} \right|^2 = \left| \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right|^2 = \\ &= \left| \frac{\sin \theta_t \cos \theta_i - \sin \theta_i \cos \theta_t}{\sin \theta_t \cos \theta_i + \sin \theta_i \cos \theta_t} \right|^2 = \left| \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \right|^2 \end{aligned} \quad (9.129)$$

b) *Polarizzazione incidente parallela al piano di incidenza (x, y)*

Poichè in questo caso \vec{B}_i è diretto lungo z converrà considerare prima le condizioni al bordo per il campo magnetico. Anche in questo caso le condizioni al bordo implicano che B_r e B_t sono diretti lungo l'asse delle z . In modo analogo al caso precedente si ottengono anche le identità delle frequenze delle onde incidente, riflessa e trasmessa, e le relazioni (9.109,9.110,9.112, 9.114) per i vettori d'onda delle onde riflesse e trasmesse. Le condizioni al bordo per i campi magnetici danno pertanto

$$B_r - B_t = -B_i \quad (9.130)$$

Il campo elettrico è dato da

$$\vec{E} = \frac{c}{\omega n^2} \vec{B} \wedge \vec{k} \quad (9.131)$$

Dunque le condizioni di continuità per il campo elettrico danno

$$\begin{aligned} -B_i k_y - B_r k_y &= -B_t k_y \\ \frac{B_i k_x - B_r k_x}{n_1^2} &= \frac{B_t k_x}{n_2^2} \end{aligned} \quad (9.132)$$

In definitiva

$$\begin{aligned} B_r - B_t &= -B_i \\ B_r k_x n_2^2 + B_t k_x n_1^2 &= B_i k_x n_2^2 \end{aligned} \quad (9.133)$$

la cui soluzione è

$$\begin{aligned} B_r &= B_i \frac{k_x n_2^2 - k_x'' n_1^2}{k_x n_2^2 + k_x'' n_1^2} \\ B_t &= 2 B_i \frac{k_x n_2^2}{k_x n_2^2 + k_x'' n_1^2} \end{aligned} \quad (9.134)$$

Il coefficiente di riflessione per polarizzazione del campo elettrico parallelo al piano di incidenza è dunque

$$R_{\parallel} = \frac{|B_r|^2}{|B_i|^2} = \left| \frac{k_x n_2^2 - k_x'' n_1^2}{k_x n_2^2 + k_x'' n_1^2} \right|^2 \quad (9.135)$$

Per indici di rifrazione reali possiamo esprimere questo coefficiente in termini degli angoli di incidenza e di rifrazione

$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= \left| \frac{k \cos \theta_i n_2^2 - k'' \cos \theta_t n_1^2}{k \cos \theta_i n_2^2 + k'' \cos \theta_t n_1^2} \right|^2 = \left| \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \right|^2 = \\ &= \left| \frac{\sin \theta_i \cos \theta_i - \sin \theta_t \cos \theta_t}{\sin \theta_i \cos \theta_i + \sin \theta_t \cos \theta_t} \right|^2 = \left| \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \right|^2 \end{aligned} \quad (9.136)$$

9.6.1 Riflessione sui metalli

Per frequenze sufficientemente basse l'indice di rifrazione dei metalli è immaginario

$$n_{metalli} = -i \frac{\omega_{\sigma}}{\omega} \equiv -in_I \quad (9.137)$$

Il coefficiente di riflessione di luce proveniente da un mezzo con $n = 1$ sul metallo è

$$\begin{aligned} R_{\perp} &= \left| \frac{\cos \theta_i + i n_I \cos \theta_t}{\cos \theta_i - i n_I \cos \theta_t} \right|^2 = \frac{\cos^2 \theta_i + n_I^2 \cos^2 \theta_t}{\cos^2 \theta_i + n_I^2 \cos^2 \theta_t} = 1 \\ R_{\parallel} &= \left| \frac{i n_I \cos \theta_i + \cos \theta_t}{-i n_I \cos \theta_i + \cos \theta_t} \right|^2 = 1 \end{aligned} \quad (9.138)$$

Questo spiega perchè i metalli luccicano.

9.6.2 Riflessione totale interna

Consideriamo la propagazione di luce da un mezzo con $n > 1$ in un mezzo con $n = 1$. La (9.114) diventa

$$(k_x'')^2 = \frac{k^2}{n^2} - k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 - n^2 \sin^2 \theta_i) \quad (9.139)$$

Se

$$\theta_i > \theta_c \quad (9.140)$$

dove

$$\sin \theta_c = \frac{1}{n} \quad (9.141)$$

$k_x'' = \pm i k_I$ è immaginario e l'onda trasmessa ha la forma

$$\vec{E}_t = \vec{E}_0 e^{-x k_I} e^{i \omega t - k_y y} \quad (9.142)$$

Il campo trasmesso si estende per una profondità dell'ordine di $\frac{c}{\omega}$, che è la lunghezza d'onda della luce nel vuoto per la frequenza ω .

9.6.3 Riflessione e rifrazione in materia con permeabilità magnetica diversa dal vuoto

Un'onda elettromagnetica piana sinusoidale di frequenza ω si propaga lungo l'asse delle z in un mezzo materiale che ha indice di rifrazione n_1 (n_2) e permeabilità magnetica μ_1 (μ_2) per $z < 0$ ($z > 0$). Sia:

$$\vec{E}_i(\vec{x}, t) = E_i \hat{x} e^{i k z - i \omega t} \quad z < 0 \quad (9.143)$$

il campo elettrico dell'onda incidente in $z < 0$, dove \hat{x} è il versore lungo l'asse delle x , e E_i la sua ampiezza. Determiniamo il campo elettrico dell'onda riflessa e trasmessa.

Poiché l'onda incide normalmente sulla superficie $z = 0$, gli stessi argomenti svolti nella discussione precedente implicano che le onde riflesse e trasmesse hanno la forma

$$\begin{aligned} \vec{E}_r(\vec{x}, t) &= E_r \hat{x} e^{-i k z - i \omega t} \\ \vec{E}_t(\vec{x}, t) &= E_t \hat{x} e^{i k_t z - i \omega t} \end{aligned} \quad (9.144)$$

dove

$$k_t = \frac{\omega}{v_2} = \frac{\omega n_2}{c} \quad (9.145)$$

e

$$v_2 = \frac{c}{n_2} \quad (9.146)$$

è la velocità di fase nel mezzo con indice di rifrazione n_2 .

La condizione di continuità per la componente tangente al bordo del campo elettrico dà

$$E_r + E_i = E_t \quad (9.147)$$

Il campo magnetico di un onda piana è dato da

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\hat{k} \wedge \vec{E}}{v} \quad (9.148)$$

dove v è la velocità di fase e \hat{k} è il versore lungo \vec{k} . Pertanto i campi magnetici delle onde incidenti riflesse e trasmesse sono diretti lungo l'asse delle y

$$\begin{aligned} \vec{B}_i(\vec{x}, t) &= \frac{E_i}{v_1} \hat{y} e^{i k z - i \omega t} \\ \vec{B}_r(\vec{x}, t) &= -\frac{E_r}{v_1} \hat{y} e^{-i k z - i \omega t} \\ \vec{B}_t(\vec{x}, t) &= \frac{E_t}{v_2} \hat{y} e^{i k_t z - i \omega t} \end{aligned} \quad (9.149)$$

La condizione di continuità della componente tangenziale di $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$ dà pertanto

$$\frac{1}{\mu_1 v_1} (E_i - E_r) = \frac{1}{\mu_2 v_2} E_t \quad (9.150)$$

Sostituendo nella (9.147) otteniamo

$$E_r + E_i = \frac{\mu_2 n_1}{\mu_1 n_2} (E_i - E_r) \quad (9.151)$$

ovvero

$$E_r = E_i \frac{\frac{n_1}{\mu_1} - \frac{n_2}{\mu_2}}{\frac{n_1}{\mu_1} + \frac{n_2}{\mu_2}} \quad (9.152)$$

e

$$E_t = E_i \frac{2 \frac{n_1}{\mu_1}}{\frac{n_1}{\mu_1} + \frac{n_2}{\mu_2}} \quad (9.153)$$

Calcoliamo ora i coefficienti di riflessione e di trasmissione (cioè i rapporti tra la potenza media riflessa o trasmessa e quella incidente). Dimostriamo preliminarmente che il vettore di Poynting in un mezzo di permeabilità magnetica μ si scrive

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu} \quad (9.154)$$

Questa relazione si ottiene dalle equazioni di Maxwell in presenza di materia in maniera del tutto analoga al caso del vuoto: il lavoro fatto sulle cariche libere si scrive

$$\begin{aligned}
\vec{E} \cdot \vec{j}_{cond} &= \epsilon_0 c^2 \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) - \dot{\vec{D}} \cdot \vec{E} = \\
&= \epsilon_0 c^2 \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{E} - \epsilon_0 c^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) - \dot{\vec{D}} \cdot \vec{E} = \\
&= -\epsilon_0 c^2 \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} - \epsilon_0 c^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) - \dot{\vec{D}} \cdot \vec{E}
\end{aligned} \tag{9.155}$$

Posto

$$\vec{B} = \mu_r \vec{H} = \epsilon c^2 \mu \vec{H} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \tag{9.156}$$

con

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \tag{9.157}$$

otteniamo

$$\vec{E} \cdot \vec{j}_{cond} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \left[\epsilon_0 c^2 \vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{D} \cdot \vec{E} \right] - \vec{\nabla} \cdot \frac{(\vec{E} \wedge \vec{B})}{\mu} \tag{9.158}$$

Identifichiamo pertanto la densità di energia immagazzinata nel campo elettromagnetico nel mezzo materiale con l'espressione

$$u = \frac{1}{2} \left[\epsilon_0 c^2 \vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{D} \cdot \vec{E} \right] \tag{9.159}$$

ed il flusso di energia con il vettore \vec{S} nella (9.154).

In particolare, per un'onda elettromagnetica, \vec{S} diventa

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}^2}{\mu v} \hat{k} = \frac{n \vec{E}^2}{\mu c} \hat{k} \tag{9.160}$$

I coefficienti di riflessione e trasmissione sono quindi

$$\begin{aligned}
R &= \frac{|E_r|^2}{|E_i|^2} = \frac{\left(\frac{n_1}{\mu_1} - \frac{n_2}{\mu_2} \right)^2}{\left(\frac{n_1}{\mu_1} + \frac{n_2}{\mu_2} \right)^2} \\
T &= \frac{\mu_1}{n_1} \frac{n_2}{\mu_2} \frac{|E_t|^2}{|E_i|^2} = \frac{\mu_1}{n_1} \frac{n_2}{\mu_2} \frac{4 \frac{n_1^2}{\mu_1^2}}{\left(\frac{n_1}{\mu_1} + \frac{n_2}{\mu_2} \right)^2} = \frac{4 \frac{n_1}{\mu_1} \frac{n_2}{\mu_2}}{\left(\frac{n_1}{\mu_1} + \frac{n_2}{\mu_2} \right)^2}
\end{aligned} \tag{9.161}$$

10 Ottica geometrica

10.1 L'equazione dell'iconale

Le componenti dei campi, elettrico e magnetico — denotiamole, collettivamente con $f(\vec{x}, t)$ — soddisfano le equazione d'onda:

$$\vec{\nabla}^2 f(\vec{x}, t) - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 f(\vec{x}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (10.1)$$

Quando $n(\vec{x})$, l'indice di rifrazione è una costante, questa equazione ammette la soluzione *monocromatica piana*

$$f(\vec{x}, t) = \Re(a e^{-i\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x}}) \quad (10.2)$$

dove

$$\vec{k} = \frac{\omega n}{c} \hat{k} \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \hat{k} \quad (10.3)$$

Nel caso in cui $n(\vec{x})$ dipende dal punto dello spazio è possibile cercare una soluzione approssimata dell'equazione d'onda se la scala su cui varia $n(\vec{x})$ è molto più grande della lunghezza d'onda λ : la soluzione approssimata viene cercata nella forma¹⁸

$$f(\vec{x}, t) = a(\vec{x}, t) e^{i\psi(\vec{x}, t)} \quad (10.4)$$

Sostituendo nell'equazione d'onda otteniamo

$$\begin{aligned} & \vec{\nabla}^2 a(\vec{x}, t) - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 a(\vec{x}, t)}{\partial t^2} + \\ & + i \left[2 \vec{\nabla} a \cdot \vec{\nabla} \psi - 2 \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} + a \left(\vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}, t) - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} \right) \right] + \\ & - a \left[\vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \psi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] = 0 \end{aligned} \quad (10.5)$$

In questa approssimazione il termine grande è ψ , e quindi per soddisfare questa equazione è necessario che

$$\vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \psi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (10.6)$$

¹⁸Omettiamo il simbolo di parte reale nelle formule che seguono.

che è detta equazione dell'iconale.

Per un'onda monocromatica poniamo

$$\psi(\vec{x}, t) = -\omega t + \frac{\omega}{c} \psi_1(\vec{x}) \quad (10.7)$$

In questo caso l'equazione dell'iconale diventa

$$\vec{\nabla} \psi_1 \cdot \vec{\nabla} \psi_1 = n^2 \quad (10.8)$$

ovvero

$$\psi_1(\vec{x}) = n(\vec{x}) \hat{n}(\vec{x}) \quad (10.9)$$

Le superfici con

$$\psi_1(\vec{x}) = \text{costante} \quad (10.10)$$

corrispondono ai *fronti d'onda*. $\hat{n}(\vec{x})$ è il vettore unitario normale nel punto \vec{x} al fronte d'onda passante per \vec{x} e definisce la propagazione dei *raggi*.

Consideriamo anche il termine di ordine successivo nell'equazione d'onda (10.5) nel caso monocromatico

$$2 \vec{\nabla} a \cdot \vec{\nabla} \psi_1 + a \vec{\nabla}^2 \psi_1 = 0 \quad (10.11)$$

ovvero

$$\vec{\nabla} \cdot (a^2 \vec{\nabla} \psi_1) = \vec{\nabla} \cdot (a^2 n(\vec{x}) \hat{n}) = 0 \quad (10.12)$$

Questa equazione dice che il flusso del campo vettoriale

$$\vec{S} \equiv a^2 n(\vec{x}) \hat{n} = a^2 \vec{\nabla} \psi_1 \quad (10.13)$$

si conserva. In effetti questo campo vettoriale è proporzionale al vettore di Poynting dell'onda (9.160) e l'equazione (10.12) è equivalente alla conservazione del flusso di energia:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0 \quad (10.14)$$

Consideriamo il caso un'onda che si propaga in un mezzo con simmetria sferica i cui fronti d'onda sono delle sfere centrate nell'origine

$$\psi_1(\vec{x}) = \phi(r) \quad (10.15)$$

L'equazione dell'iconale

$$(\phi'(r))^2 = n(r)^2 \quad (10.16)$$

ha quindi la soluzione

$$\phi(r) - \phi(r_0) = \pm \int_{r_0}^r dr' n(r') \quad (10.17)$$

Inoltre, poiché

$$\vec{\nabla} \psi_1 = \phi'(r) \frac{\vec{x}}{r} = \pm n(r) \frac{\vec{x}}{r} \quad (10.18)$$

l'equazione (10.12) diventa

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left(a^2 n(r) \frac{\vec{x}}{r} \right) &= \partial_r (a^2 n(r)) + \frac{2}{r} a^2 n(r) = 0 = \\ &= \frac{1}{r^2} \partial_r (a^2 n(r) r^2) = 0 \end{aligned} \quad (10.19)$$

ovvero

$$a^2(r) = \frac{C}{\sqrt{n(r)} r} \quad (10.20)$$

dove C è una costante. In definitiva l'onda si scrive in questo caso

$$f(r, t) = \frac{C}{\sqrt{n(r)} r} e^{-i\omega t \pm i \int_{r_0}^r dr' n(r')} \quad (10.21)$$

Esercizio: Si consideri la trasmissione di una onda piana di frequenza ω che si propaga nella direzione x , attraverso mezzo con indice di rifrazione $n(x)$ di lunghezza L . Si calcoli l'ampiezza dell'onda trasmessa attraverso il mezzo usando l'approssimazione iconale.

Soluzione

Nel caso unidimensionale la soluzione dell'equazione dell'iconale diventa

$$\psi_1(x) = \psi_1(0) + \int_0^x dx' n(x') \quad (10.22)$$

Inoltre la (10.12) si riduce a

$$\partial_x (a^2 n(x)) = 0 \quad (10.23)$$

ovvero

$$a(x) = \frac{C}{\sqrt{n(x)}} \quad (10.24)$$

L'onda piana data dall'iconale è quindi

$$f(x, t) = \frac{C}{\sqrt{n(x)}} e^{-i\omega t + i\frac{\omega}{c} \int_0^x dx' n(x')} \quad (10.25)$$

Il rapporto tra l'ampiezza dell'onda entrante a $x = 0$ e di quella uscente a $x = L$ è quindi

$$\left| \frac{f(L, t)}{f(0, t)} \right| = \sqrt{\frac{n(0)}{n(L)}} \quad (10.26)$$

Risolviamo lo stesso problema facendo uso dell'equazione (9.126) per i campi trasmessi ed incidenti attraverso un piano che separa due mezzi di indice di rifrazione n_1 e n_2

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad (10.27)$$

Denotiamo con $E(x)$ l'ampiezza dell'onda nel punto $x \in [0, L]$. Nell'intervallo Δx sufficientemente piccolo la variazione dell'indice di rifrazione è approssimativamente

$$n(x + \Delta) = n(x) + \Delta x n'(x) + \dots \quad (10.28)$$

Pertanto sostituendo nella (10.27) otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{E(x + \Delta x)}{E(x)} &= 1 + \frac{\Delta x E'(x)}{E(x)} + \dots = 2 \frac{n(x)}{n(x) + n(x + \Delta)} = \\ &= \frac{2n(x)}{2n(x) + \Delta x n'(x)} + \dots = 1 - \frac{\Delta x n'(x)}{2n(x)} + \dots \end{aligned} \quad (10.29)$$

Da cui

$$\frac{E'(x)}{E(x)} = -\frac{n'(x)}{2n(x)} \quad (10.30)$$

Integrando rispetto ad x da $x = 0$ ad $x = L$ deduciamo

$$\ln \frac{E(L)}{E(0)} = -\frac{1}{2} \ln \frac{n(L)}{n(0)} \quad (10.31)$$

ovvero

$$\frac{E(L)}{E(0)} = \sqrt{\frac{n(0)}{n(L)}} \quad (10.32)$$

in accordo con la (10.26).

10.2 L'equazione dei raggi

Nell'approssimazione iconale i raggi sono le normali in ogni punto ai fronti d'onda: pertanto le curve descritte dai raggi sono le curve integrali dell'equazione

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} = \hat{n}(x(\tau)) \quad (10.33)$$

dove $\hat{n}(\vec{x})$ è il vettore normale al fronte d'onda nel punto \vec{x} . Da questa equazione e dall'equazione dell'iconale otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(n(x) \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right) &= \frac{d}{d\tau} (\vec{\nabla} \psi_1(\vec{x})) = \frac{\partial x^j}{\partial \tau} \vec{\nabla} \partial_j \psi_1(\vec{x}) = \\ &= \hat{n}_j \vec{\nabla} \partial_j \psi_1(\vec{x}) = \frac{\partial_j \psi_1}{n(x)} \vec{\nabla} \partial_j \psi_1(\vec{x}) = \frac{1}{n(x)} \vec{\nabla} \frac{\partial_j \psi_1 \partial_j \psi_1}{2} = \\ &= \frac{1}{n(\vec{x})} \vec{\nabla} \frac{n^2(\vec{x})}{2} = \vec{\nabla} n(\vec{x}) \end{aligned} \quad (10.34)$$

che è detta *equazione per i raggi*. Essendo una equazione del secondo ordine nelle derivate temporali, le condizioni iniziali che determinano una soluzione sono il punto di origine del raggio e la sua direzione

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0 \quad \frac{d\vec{x}}{d\tau}(0) = \hat{n}(0) \quad (10.35)$$

Dato $(\vec{x}_0, \hat{n}(0))$ l'equazione (10.34) determina $(\vec{x}, \hat{n}(\vec{x}))$ in ogni punto del raggio.

Consideriamo l'esempio di un mezzo il cui indice di rifrazione $n(\vec{x}) = n(z)$ dipende da una sola coordinata: in questo caso l'equazione per i raggi (10.34) si scrive

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\left(n(z)\frac{dz}{d\tau}\right) &= n'(z) \\ \frac{d}{d\tau}\left(n(z)\frac{dy}{d\tau}\right) &= \frac{d}{d\tau}\left(n(z)\frac{dx}{d\tau}\right) = 0\end{aligned}\quad (10.36)$$

Prendiamo per concretezza il punto iniziale del raggio nel punto $\vec{x}(0) = (0, y_0, z_0)$ e la direzione iniziale del raggio al tempo $\tau = 0$ nel piano (y, z) ,

$$\hat{n}_x(0) = 0 \quad \hat{n}_y(0)^2 + \hat{n}_z(0)^2 = 1 = \hat{n}_y(\tau)^2 + \hat{n}_z(\tau)^2 \quad (10.37)$$

Il raggio resterà nel piano (y, z) per tutti i τ

$$\frac{dy(\tau)}{d\tau} = \hat{n}_y(\tau) = \frac{n(0)}{n(z(\tau))} \hat{n}_y(0) \quad (10.38)$$

Questa equazione mostra che se il raggio avanza in una regione con indice di rifrazione crescente (descrescente) il raggio viene curvato verso (in direzione opposta) all'asse z .

La relazione

$$\hat{n}_z(\tau) = \frac{dz(\tau)}{d\tau} = \sqrt{1 - \hat{n}_y(\tau)^2} = \sqrt{1 - \frac{n^2(0)}{n^2(z(\tau))} \hat{n}_y(0)^2} \quad (10.39)$$

è l'equazione differenziale del primo ordine che determina $z(\tau)$:

$$\tau = \int_{z_0}^z \frac{n(z') dz'}{\sqrt{n^2(z') - n^2(0) \hat{n}_y(0)^2}} \quad (10.40)$$

Consideriamo ora la cosiddetta approssimazione di *fasci sottili*. In questa situazione i raggi sono *parassiali*, ovvero formano angoli piccoli con l'asse di propagazione z . Pertanto valgono le approssimazioni

$$\hat{n}_y \ll 1 \quad \hat{n}_z \approx 1 \quad (10.41)$$

dalle quali otteniamo

$$z(\tau) \approx \tau + z_0 \quad (10.42)$$

e

$$\frac{dy(z)}{dz} = \frac{n(0)}{n(z(\tau))} \hat{n}_y(0) \quad (10.43)$$

In definitiva

$$\begin{aligned} y - y_0 &= \int_{z_0}^z \frac{n(0) dz'}{n(z')} \hat{n}_y(0) \\ \hat{n}_y(z) &= \frac{n(0)}{n(z)} \hat{n}_y(0) \end{aligned} \quad (10.44)$$

Inoltre per raggi parassiali vale

$$\hat{n}_y \approx \theta \quad (10.45)$$

dove θ è l'angolo che il raggio forma con l'asse delle z . Pertanto, nell'approssimazione di raggi sottili, esiste una relazione *lineare* tra (y_0, θ_0) sul piano “entrante” $z = z_0$ e (y, θ) sul piano z “uscente”:

$$\begin{pmatrix} y \\ \theta \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \quad (10.46)$$

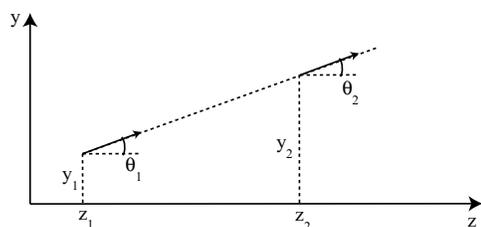
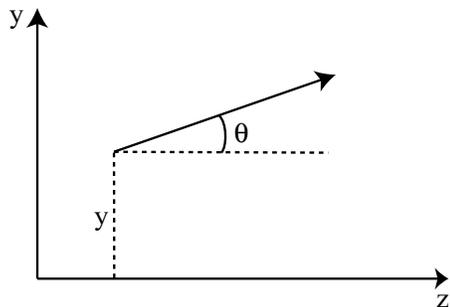
dove

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\ A = 1 \quad C = 0 \quad B &= \int_{z_0}^z \frac{n(0) dz'}{n(z')} \quad D = \frac{n(0)}{n(z)} \end{aligned} \quad (10.47)$$

La matrice che appare nella (10.46) è detta *matrice di trasmissione* del sistema ottico compreso tra z_0 ed z . Le equazioni (10.47) determinano questa matrice per un sistema ottico che ha sia invarianza assiale lungo l'asse delle z che invarianza per traslazioni lungo le direzioni trasverse y ed x . Nella sezione successiva determineremo questa matrice anche per alcuni sistemi leggermente più generali, in cui c'è solo invarianza assiale lungo l'asse di propagazione.

10.3 Matrice di trasmissione di un sistema ottico con simmetria assiale per raggi parassiali

Possiamo specificare un raggio nello spazio, dando due parametri, la distanza y del punto dall'asse di simmetria dall'asse ottico del sistema e la sua



inclinazione θ rispetto allo stesso asse. La matrice di trasmissione connette (y_i, θ_i) per due piani di riferimento $i = 1, 2$. Determiniamo tale matrice per vari sistemi ottici nell' ipotesi in cui i raggi con apertura angolare piccola, i cosiddetti fasci sottili o *parassiali*. In questa sottosezione la direzione di propagazione, che rappresenta l'asse di simmetria assiale, è l'asse delle z .

10.3.1 Propagazione nello spazio libero

In questo caso abbiamo ovviamente

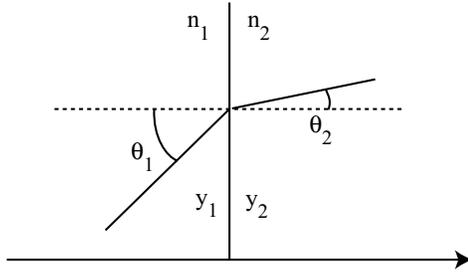
$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \sin \theta_1 d \approx y_1 + \theta_1 d & d &\equiv z_2 - z_1 \\ \theta_2 &= \theta_1 \end{aligned} \quad (10.48)$$

dove abbiamo applicato l'approssimazione dei fasci sottili (o parassiali) cioè con angoli piccoli rispetto all'asse ottico. quindi

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad (10.49)$$

e la matrice di trasmissione ottica è

$$T_{spazio\ libero} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.50)$$



10.3.2 Rifrazione attraverso interfaccia planare tra due dielettrici

In questo caso $z_1 = z_2$ ovvero

$$y_2 = y_1 \quad (10.51)$$

mentre

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (10.52)$$

che nell'approssimazione parassiale diventa

$$\theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \theta_1 \quad (10.53)$$

Pertanto¹⁹

$$T_{interfaccia\ planare} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \quad (10.54)$$

10.3.3 Lente sferica

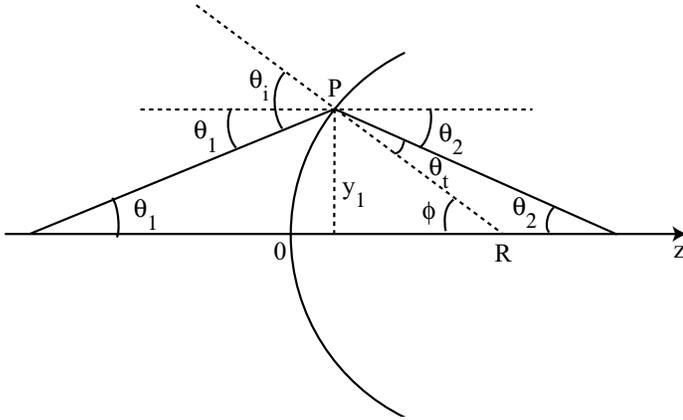
Anche in questo caso

$$y_2 = y_1 \quad (10.55)$$

Siano θ_i e θ_t gli angoli di incidenza e di rifrazione. Per quanto riguarda gli angoli θ_1 e θ_2 abbiamo

$$\theta_1 = \theta_i - \phi \quad \theta_2 = -(\phi - \theta_t) \quad (10.56)$$

¹⁹Questo risultato, come quello precedente, sono già contenuti nelle formule più generali (10.47).



perché θ_2 deve essere considerato negativo. Inoltre

$$y_1 = R \sin \phi \approx R \phi \quad (10.57)$$

e, per la legge di Snell, in approssimazione parassiale,

$$n_2 \theta_t = n_1 \theta_i \quad (10.58)$$

Dunque

$$\theta_2 = -\frac{y_1}{R} + \frac{n_1}{n_2} \left(\theta_1 + \frac{y_1}{R} \right) = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \frac{1}{R} y_1 + \frac{n_1}{n_2} \theta_1 \quad (10.59)$$

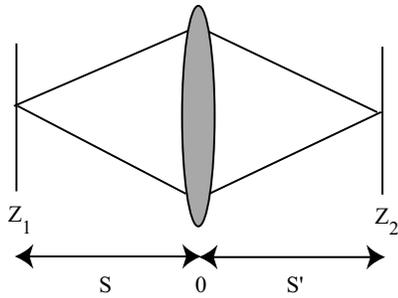
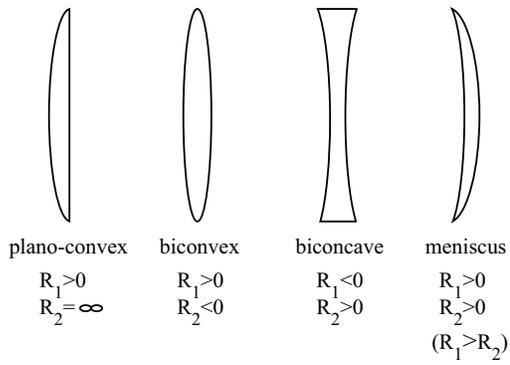
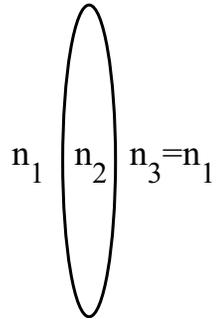
Pertanto

$$T_{lente\ sferica} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \frac{1}{R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \quad (10.60)$$

10.3.4 Lente sottile

Prendiamo il caso in cui $n_3 = n_1 = 1$, $n_2 = n$. La matrice di trasmissione si può ottenere prendendo il prodotto delle matrici di trasmissione di due lenti sferiche con raggi di curvatura R_1 e R_2

$$\begin{aligned} T_{lente\ sottile} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n-1) \frac{1}{R_1} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \frac{1}{R_2} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10.61)$$



dove i raggi di curvatura R_1 e R_2 possono essere positivi o negativi in corrispondenza con i vari tipi di lente: Consideriamo ora una configurazione che coinvolge una lente sottile, in cui i piani z_1 e z_2 sono posti a distanze s ed s' dalla lente sottile. La matrice di trasmissione è in questo caso²⁰

$$\begin{aligned} T(s, s') &= \begin{pmatrix} 1 & s' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - s'(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) & -s + s'(1 + s(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)) \\ -(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) & 1 + s(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10.62)$$

Se vogliamo che tutti i raggi provenienti da un punto y_1 in z_1 finiscano in un punto y_2 del piano z_2 che sia indipendente da θ_2 è necessario che l'elemento sopra la diagonale della matrice sia nullo:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \equiv \frac{1}{f} \quad (10.63)$$

f è chiamata la distanza focale della lente. La matrice di trasmissione della lente sottile si riscrive in termini della distanza focale

$$T_{lente\ sottile} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (10.64)$$

mentre $T(s, s')$ diventa

$$T(s, s') = \begin{pmatrix} \frac{s'}{s} & 0 \\ -\frac{1}{f} & \frac{s}{s'} \end{pmatrix} \quad (10.65)$$

10.3.5 Lenti spesse

Nel caso di lente spessa la matrice di trasmissione è data dal prodotto delle tre matrici

$$\begin{aligned} T_{lente\ spessa} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{nR_1} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + d\frac{1-n}{nR_1} & \frac{d}{n} \\ (1-n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) - d\frac{(1-n)^2}{nR_1R_2} & 1 + d\frac{n-1}{nR_2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10.66)$$

²⁰Definiamo s *negativo* in questa formula.

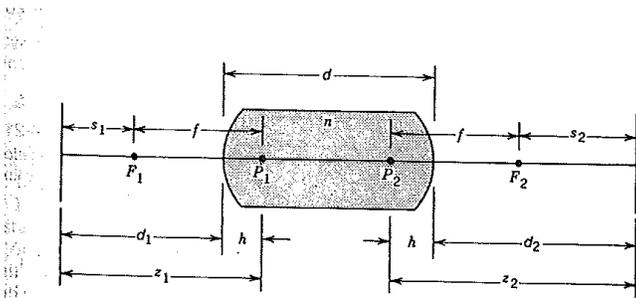
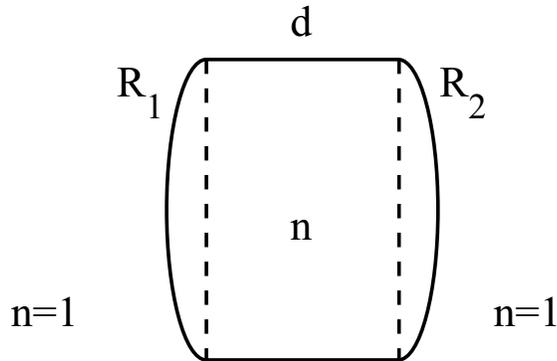


Figure 1.4-4 Imaging with a thick lens. P_1 and P_2 are the principal points and F_1 and F_2 are the focal points.

La distanza focale della lente è determinata dal termine fuori diagonale inferiore C : infatti in corrispondenza di un raggio entrante con $\theta_1 = 0$ si ottiene un raggio uscente con $\theta_2 = C y_1$. Ma la distanza focale f soddisfa

$$y_1 = -f \tan \theta_2 \approx -f \theta_2 \quad (10.67)$$

quindi

$$\frac{1}{f} = -C = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + d \frac{(n-1)^2}{n R_1 R_2} \quad (10.68)$$

Esercizio: Si dimostri che, nel caso $R_1 = -R_2 = R$ vale

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{f} \quad (10.69)$$

se definiamo

$$z_1 = d_1 + h \quad z_2 = d_2 + h \quad (10.70)$$

dove

$$h = \frac{(n-1)fd}{nR} \quad (10.71)$$

10.3.6 Matrice di trasmissione per fasci sottili con simmetria assiale: caso generale (Esercizio avanzato)

Dimostriamo in modo generale, attraverso l'equazione dei raggi, che la relazione tra (y, θ) in entrata ed uscita per un qualunque sistema ottico con simmetria assiale, è *lineare* in approssimazione parassiale. Prendiamo sempre come (y, z) il piano di propagazione del raggio, z l'asse di simmetria assiale²¹. Le equazioni per i raggi si scrivono

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(n(z, y) \frac{dz}{d\tau}) &= \partial_z n(z, y) \\ \frac{d}{d\tau}(n(z, y) \frac{dy}{d\tau}) &= \partial_y n(z, y) \end{aligned} \quad (10.72)$$

e

$$\frac{dz^2}{d\tau} + \frac{dy^2}{d\tau} = 1 \quad (10.73)$$

Nell'ipotesi di raggi parassiali

$$\frac{dz^2}{d\tau} \simeq 1 \quad \frac{dy^2}{d\tau} \ll 1 \quad (10.74)$$

e dunque possiamo porre $z \simeq \tau$. Il raggio è quindi descritto dalla curva $y(z)$ soluzione dell'equazione

$$\frac{d}{dz}(n(z, y(z)) y'(z)) = \partial_y n(z, y(z)) \quad (10.75)$$

con le condizioni iniziali

$$y(0) = y_0 \quad y'(0) \simeq \theta_0 \quad (10.76)$$

²¹Data la simmetria assiale la coordinata y coincide con il raggio delle coordinate cilindriche $\rho = y$.

Dobbiamo ora considerare l'effetto dell'approssimazione parassiale sull'equazione non-lineare (10.75). Sviluppamo questa equazione conservando soltanto i termini del primo ordine nelle quantità piccole $y(z)$ e $y'(z)$. Osserviamo che, l'espansione per piccoli y della funzione $n(z, y)$ ha la forma

$$n(z, y) = n(z, 0) + \frac{\partial_y^2 n(z, 0)}{2} y^2 + \dots \quad (10.77)$$

Infatti, poiché $n(z, y) = n(z, \rho)$ è invariante per rotazioni lungo l'asse delle z , $\partial_\rho n(z, \rho)|_{\rho=0} = 0$, affinché $n(z, y) = n(z, \rho)$ non abbia singolarità sull'asse di simmetria z . Quindi

$$\partial_y n(z, y) = \partial_y^2 n(z, 0) y + \dots \quad (10.78)$$

Sostituendo nella (10.75) e conservando solo i termini del primo ordine, arriviamo finalmente all'equazione *lineare* omogenea

$$n(z, 0) y''(z) + n'(z, 0) y'(z) - \partial_y^2 n(z, 0) y(z) = 0 \quad (10.79)$$

La soluzione generale di questa equazione è la combinazione lineare di due soluzioni indipendenti

$$y(z) = a y_1(z) + b y_2(z) \quad (10.80)$$

Pertanto

$$y'(z) = a y_1'(z) + b y_2'(z) \quad (10.81)$$

I coefficienti a e b sono determinati dalle condizioni iniziali

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (10.82)$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{W_{12}(0)} \begin{pmatrix} y_2'(0) & -y_2(0) \\ -y_1'(0) & y_1(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \quad (10.83)$$

dove

$$W_{12}(z) = y_1(z) y_2'(z) - y_2(0) y_1'(z) \quad (10.84)$$

è il *wronskiano* delle due soluzioni $y_{1,2}(z)$. Osserviamo che

$$\begin{aligned}
n(z, 0) W'_{12}(z) &= y_1(z) n(z, 0) y_2''(z) - y_2(z) n(z, 0) y_1''(z) = \\
&= -y_1(z) (n'(z, 0) y_2'(z) - \partial_y^2 n(z, 0) y_2(z)) + \\
&+ y_2(z) (n'(z, 0) y_1'(z) - \partial_y^2 n(z, 0) y_1(z)) = \\
&= -n'(z, 0) W_{12}(z)
\end{aligned} \tag{10.85}$$

Quindi

$$\frac{d}{dz} (W_{12}(z) n(z, 0)) = 0 \tag{10.86}$$

ovvero $W_{12}(z) n(z, 0)$ è indipendente da z

$$\frac{W_{12}(z)}{W_{12}(0)} = \frac{n(z, 0)}{n(0, 0)} \tag{10.87}$$

In definitiva

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y(z) \\ \theta(z) \end{pmatrix} &= \frac{1}{W_{12}(0)} \begin{pmatrix} y_1(z) & y_2(z) \\ y_1'(z) & y_2'(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2'(0) & -y_2(0) \\ -y_1'(0) & y_1(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} = \\
&\equiv T(0, z) \begin{pmatrix} y_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{10.88}$$

dove T è la matrice di trasmissione ottica tra i piani $z = 0$ e z

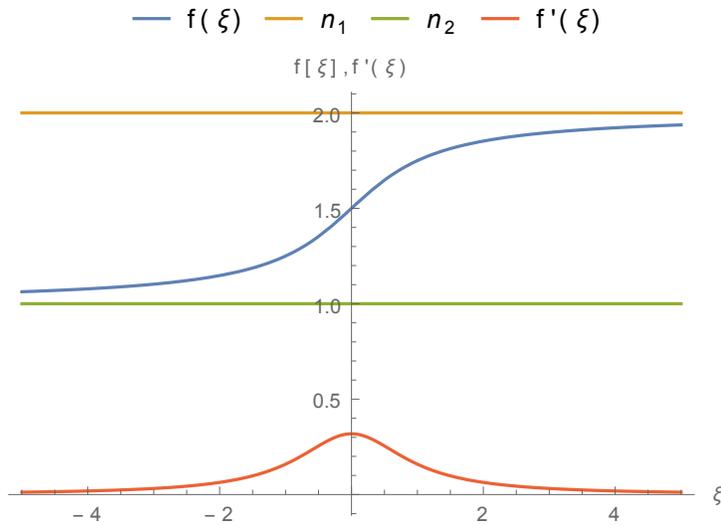
$$T(0, z) = \frac{1}{W_{12}(0)} \begin{pmatrix} y_1(z) & y_2(z) \\ y_1'(z) & y_2'(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2'(0) & -y_2(0) \\ -y_1'(0) & y_1(0) \end{pmatrix} \tag{10.89}$$

Si consideri il determinante di T

$$\det T(0, z) = \frac{\det W_{12}(z)}{\det W_{12}(0)} = \frac{n(z, 0)}{n(0, 0)} \tag{10.90}$$

Abbiamo quindi dimostrato il teorema generale: *il determinante della matrice di trasmissione è eguale al rapporto tra gli indici di rifrazione nei piani di uscita e di entrata.*

Consideriamo ora un sistema ottico tra due piani di entrata e di uscita posti in z_0 e z_1 , nei quali l'indice di rifrazione $n(z_0) = n(z_1) = 1$ è uguale



a 1. Cerchiamo ora le condizioni che devono valere affinché ogni raggio con $y_0 = 0$ sul piano di entrata $z = z_0$ arrivi sul piano $z = z_1$ nel punto $y(z_1) = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \theta(z_1) \end{pmatrix} = T(z_1, z_0) \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \quad (10.91)$$

ovvero

$$y_1(z) y_2(z_0) + y_2(z_1) y_1(z_0) = 0 \rightarrow \frac{y_1(z_1)}{y_1(z_0)} = \frac{y_2(z_1)}{y_2(z_0)} \quad (10.92)$$

Per questo valore di z la matrice di trasmissione ha la forma

$$T(z_0, z_1) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & \frac{1}{A} \end{pmatrix} \quad (10.93)$$

Dunque

$$y_1 = A y_0 \quad \theta_1 = C y_0 + \frac{\theta_0}{A} \quad (10.94)$$

Problema: Derivare la matrice di trasmissione per una lente sferica di raggio R per una lente sferica di raggio R con indice di rifrazione n_2 posta in un mezzo di indice di rifrazione n_1 a partire dall'equazione delle lenti sottili (10.79).

Soluzione. Prendiamo il centro della lente sferica sull'asse z , nel punto $z_R = \sqrt{R^2 - y_0^2} \simeq R - \frac{y_0^2}{2R}$. Per potere applicare le formule (10.89) la funzione $n(z, \rho)$ deve essere continua e derivabile: partiamo quindi dal caso in cui

$$n_\epsilon(z, \rho) = f\left(\frac{(z - z_R)^2 + \rho^2 - R^2}{\epsilon^2}\right) \quad (10.95)$$

dove la funzione $f(\xi)$ è una funzione che varia in modo monotono da n_2 a n_1 in un intervallo intorno al punto $\xi = 0$. La funzione $n_\epsilon(z, \rho)$ descrive pertanto un mezzo in cui l'indice di rifrazione è approssimativamente uguale ad n_2 all'interno della sfera di raggio R ed uguale a n_1 ben al di fuori di questa sfera, variando con continuità tra i due valori attraversando una corona circolare di spessore ϵ centrata intorno alla sfera. Nel limite in cui $\epsilon \rightarrow 0^+$ il comportamento della $n_\epsilon(z, \rho)$ diventa quello discontinuo di una lente sferica. Prendiamo il piano di entrata a $z = 0$ ed il piano di uscita a $z > 0$: faremo tendere a zero z alla fine del calcolo, $z \rightarrow 0^+$.

La derivata rispetto a ρ della funzione $n_\epsilon(z, \rho)$ è

$$\partial_\rho n_\epsilon(z, \rho) = f'\left(\frac{(z - z_R)^2 + \rho^2 - R^2}{\epsilon^2}\right) \frac{2\rho}{\epsilon^2} \quad (10.96)$$

La funzione $f'(\frac{\xi}{\epsilon})$ è una funzione significativamente diversa da zero solo in un intervallo centrato in $\xi = 0$ di lunghezza proporzionale a ϵ . Dunque

$$\partial_\rho^2 n_\epsilon(z, 0) = f'\left(\frac{(z - z_R)^2 - R^2}{\epsilon^2}\right) \frac{2}{\epsilon^2} \quad (10.97)$$

è una funzione piccata intorno a $z = -\frac{y_0^2}{2R} \simeq 0$. Abbiamo inoltre

$$n_\epsilon(z, 0) = f\left(\frac{(z - z_R)^2 - R^2}{\epsilon^2}\right) \quad (10.98)$$

Sostituendo queste funzioni nell'equazione per i raggi (10.79)

$$\frac{d}{dz} [n(z, y(z)) y'(z)] = f'\left(\frac{(z - z_R)^2 - R^2}{\epsilon^2}\right) \frac{2}{\epsilon^2} y(z) \quad (10.99)$$

ed integrando tra $z = 0$ e z otteniamo

$$\begin{aligned} n(z, y(z)) y'(z) - n(0, y(0)) y'(0) &= y(0) \int_0^z dz' f'\left(\frac{(z' - z_R)^2 - R^2}{\epsilon^2}\right) \frac{2}{\epsilon^2} = \\ &= y(0) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{f'(\xi)}{2R} \epsilon^2 \frac{2}{\epsilon^2} = y(0) \frac{n_1 - n_2}{R} \end{aligned} \quad (10.100)$$

Poiché per $z > 0$, $n(z, 0) = n_2$ e $n(0, y(0)) = n_1$ otteniamo la relazione

$$\theta(z) = \frac{n_1}{n_2} \theta(0) + y(0) \frac{n_1 - n_2}{n_2 R} \quad (10.101)$$

in accordo col risultato (10.60) ottenuto nella sottosezione precedente.

11 Diffrazione

Ricordiamo il teorema di Green. Siano $\phi(\vec{x})$ e $\psi(\vec{x})$ due funzioni scalari. Dall'identità

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi) = \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi + \phi \vec{\nabla}^2 \psi \quad (11.102)$$

deriviamo

$$\int_V d^3 \vec{x} (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi + \phi \vec{\nabla}^2 \psi) = \int_{\partial V} \phi \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \psi \quad (11.103)$$

Analogamente

$$\int_V d^3 \vec{x} (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi + \psi \vec{\nabla}^2 \phi) = \int_{\partial V} \psi \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \phi \quad (11.104)$$

Sottraendo le due equazioni appena derivate, otteniamo

$$\int_V d^3 \vec{x} (\phi \vec{\nabla}^2 \psi - \psi \vec{\nabla}^2 \phi) = \int_{\partial V} (\phi \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \psi - \psi \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \phi) \quad (11.105)$$

L'onda monocromatica

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} \psi(\vec{x}) \quad (11.106)$$

soddisfa l'equazione di Helmholtz

$$(\vec{\nabla}^2 + k^2) \psi(\vec{x}) = 0 \quad (11.107)$$

con $k^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2}$. L'equazione (11.107) ammette anche una soluzione a simmetria sferica

$$\phi_s(\vec{x}) = \frac{e^{ik|\vec{x}|}}{4\pi|\vec{x}|} \quad (11.108)$$

che soddisfa l'equazione d'onda in tutti i punti dello spazio *eccetto* che nel punto $\vec{x} = 0$, dove diverge. Più in generale, la soluzione

$$\phi_s(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (11.109)$$

è un'onda sferica che diverge nel punto $\vec{x} = \vec{x}'$.

Applichiamo il teorema di Green (11.105) a $\psi(\vec{x})$ e $\phi_s(\vec{x} - \vec{x}')$. Come V dobbiamo prendere un volume spaziale che esclude il punto $\vec{x} = \vec{x}'$, in quanto in questo punto $\phi_s(\vec{x} - \vec{x}')$ non è una soluzione dell'equazione. Introduciamo

pertanto una palla sferica $B(\vec{x}', \epsilon)$ di centro in \vec{x}' e raggio $\epsilon > 0$. Consideriamo il teorema di Green nel volume $V/B(\vec{x}', \epsilon)$, con V che include il punto \vec{x}' :

$$0 = \int_{\partial V} d^2 a [\psi(\vec{x}) \hat{n} \cdot \vec{\nabla}_x \phi_s(\vec{x} - \vec{x}') - \phi_s(\vec{x} - \vec{x}') \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{x})] + \\ - \int_{\partial B(\vec{x}', \epsilon)} d^2 a [\psi(\vec{x}) \hat{n} \cdot \vec{\nabla}_x \phi_s(\vec{x} - \vec{x}') - \phi_s(\vec{x} - \vec{x}') \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{x})] \quad (11.110)$$

Consideriamo il limite di quest'equazione per $\epsilon \rightarrow 0$. Nell'integrale sulla superficie della palla sferica il termine proporzionale a $\phi_s(\vec{x} - \vec{x}')$ si annulla, in quanto $\phi_s(\vec{x} - \vec{x}')$ diverge come $\frac{1}{\epsilon}$ per $\epsilon \rightarrow 0$. Per la stessa ragione nel termine proporzionale a $\vec{\nabla}_x \phi_s(\vec{x} - \vec{x}')$ possiamo limitarci ad includere il solo termine che diverge come $\frac{1}{\epsilon^2}$:

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla}_x \phi_s(\vec{x} - \vec{x}') = -\frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|^2} + \dots \quad (11.111)$$

In definitiva, il limite $\epsilon \rightarrow 0$ della (11.110) dà

$$\psi(\vec{x}') = \int_{\partial V} d^2 a [\psi(\vec{x}) \hat{n} \cdot \vec{\nabla}_x \phi_s(\vec{x} - \vec{x}') + \\ - \phi_s(\vec{x} - \vec{x}') \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{x})] \quad (11.112)$$

Il contesto al quale vogliamo applicare (11.112) è il seguente. Supponiamo di avere un'onda monocromatica incidente su uno schermo opaco con un'apertura S . Siamo interessati a calcolare il campo diffratto attraverso S al di là dello schermo. Come volume V prendiamo allora la regione spazio dove si propaga la radiazione diffratta. Il bordo di V è rappresentato dallo schermo e la sua apertura S da una parte, e da una superficie all'infinito dall'altra. Se i campi in V decadono come $1/r$ il contributo della superficie all'infinito nell'identità di Green è nullo.

L'approssimazione essenziale sarà quella di supporre che $\psi(\vec{x})$ si annulli sullo schermo opaco, e sia non nulla, ma nota, in S . Dalla (11.112) deriva però che affinché questa approssimazione sia consistente è necessario che l'onda sferica $\phi_s(\vec{x} - \vec{x}')$ si annulli per \vec{x} sullo schermo e sull'apertura S . Benché questo non sia vero in generale, l'argomento che ha portato all'equazione (11.112) rimane valido se sostituiamo $\phi_s(\vec{x} - \vec{x}')$ con $\tilde{\phi}_s(\vec{x}; \vec{x}')$, tale che

$$\phi_s(\vec{x} - \vec{x}') \rightarrow \tilde{\phi}_s(\vec{x}; \vec{x}') = \phi_s(\vec{x} - \vec{x}') + \phi_0(\vec{x}; \vec{x}') \quad (11.113)$$

con $\phi_0(\vec{x}; \vec{x}')$ soluzione di (11.107) regolare in \vec{x}' . Useremo pertanto l'equazione (11.112) con una $\tilde{\phi}_s(\vec{x}; \vec{x}')$ che soddisfa le condizioni di Dirichlet

$$\tilde{\phi}_s(\vec{x}; \vec{x}') = 0 \quad (11.114)$$

per \vec{x} sullo schermo e su S . Il campo diffratto si scrive allora

$$\psi(\vec{x}') = \int_S d^2 a \psi(\vec{x}) \hat{n} \cdot \vec{\nabla}_x \tilde{\phi}_s(\vec{x}; \vec{x}') \quad (11.115)$$

Per il caso in cui lo schermo opaco coincida col piano $z = 0$, l'onda sferica che soddisfa la condizione di Dirichlet (11.114) è

$$\tilde{\phi}_s(\vec{x}; \vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}''|}}{|\vec{x}-\vec{x}''|} \right] \quad (11.116)$$

dove \vec{x}'' è l'immagine di \vec{x}' rispetto al piano $z = 0$. Il campo diffratto (11.115) diventa (dopo aver scambiato \vec{x} con \vec{x}')

$$\psi(\vec{x}) = \frac{k}{2\pi i} \int_S d^2 a' \frac{\hat{n} \cdot \vec{R}}{R} \left(1 + \frac{i}{kR} \right) \frac{e^{ikR}}{R} \psi(\vec{x}') \quad (11.117)$$

dove

$$\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}' \quad R = |\vec{R}| \quad (11.118)$$

Se la distanza R è grande rispetto alla lunghezza d'onda della radiazione

$$kR \gg 1 \quad (11.119)$$

(11.117) diventa

$$\psi(\vec{x}) = \frac{k}{2\pi i} \int_S d^2 a' \frac{\hat{n} \cdot \vec{R}}{R} \frac{e^{ikR}}{R} \psi(\vec{x}') \quad (11.120)$$

Nel seguito ci limiteremo a questa approssimazione.

11.1 Diffrazione di Fraunhofer

Consideriamo il caso di radiazione incidente su uno schermo piano, ortogonale alla direzione del fascio incidente. Vogliamo determinare l'intensità della luce diffratta attraverso un'apertura nello schermo, a distanze grandi confrontate sia con la lunghezza d'onda della radiazione, sia con le dimensioni

dell'apertura. Supponiamo inoltre che la radiazione incidente sia un'onda piana, cioè che la sorgente sia anch'essa a distanze grandi dallo schermo.

Per $|\vec{x}'|$ piccoli rispetto a $|\vec{x}|$ abbiamo

$$R = |\vec{x} - \vec{x}'| = |\vec{x}| - \vec{x}' \cdot \hat{x} + \dots \quad (11.121)$$

Le condizioni di Fraunhofer sono quelle per cui è lecito trascurare i termini di ordine superiore nella (11.121) nel calcolo dell'integrale in (11.120). Sostituendo l'approssimazione (11.121) nella (11.120) deduciamo

$$\psi(\vec{x}) = \frac{k e^{i k |\vec{x}|}}{2 \pi i |\vec{x}|} \int_S d^2 a' \hat{n} \cdot \hat{x} e^{-i k \vec{x}' \cdot \hat{x}} \psi(\vec{x}') \quad (11.122)$$

Supponiamo l'onda incidente sia piana

$$\psi(\vec{x}') = \psi_0 e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}'} \quad (11.123)$$

L'onda diffratta diventa

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}) &= \frac{k e^{i k |\vec{x}|} \hat{n} \cdot \hat{x}}{2 \pi i |\vec{x}|} \int_S d^2 a' e^{-i (\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{x}'} \psi_0 = \\ &= \frac{k e^{i k |\vec{x}|} \hat{n} \cdot \hat{x}}{2 \pi i |\vec{x}|} \int_S d^2 a' e^{-i \vec{q} \cdot \vec{x}'} \psi_0 \end{aligned} \quad (11.124)$$

dove

$$\vec{k}' = k \hat{x} \quad (11.125)$$

è il vettore d'onda dell'onda diffratta e

$$\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k} \quad q = |\vec{q}| = 2 k \sin \frac{\theta}{2} \quad (11.126)$$

la variazione del vettore d'onda, θ l'angolo di diffrazione. Se prendiamo $\vec{k} = k \hat{z}$ lungo l'asse delle z e lo schermo opaco nel piano (x, y) , l'elemento di angolo solido si scrive

$$d\Omega = \sin \theta d\phi d\theta = \frac{d\phi q dq}{k^2} \quad (11.127)$$

e l'onda diffratta

$$\psi(\vec{x}) = \frac{k}{2 \pi i} \frac{e^{i k |\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \cos \theta f_{\vec{q}} \quad (11.128)$$

dove

$$f_{\vec{q}} \equiv \int_S d^2 a' e^{-i \vec{q} \cdot \vec{x}'} \psi_0 = \int_S dx dy e^{-i (q_x x + q_y y)} \psi_0 \quad (11.129)$$

Notiamo che

$$q_x = k \sin \theta \cos \phi \quad q_y = k \sin \theta \sin \phi \quad (11.130)$$

Pertanto

$$\frac{dq_x dq_y}{k^2} = \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = \cos \theta d\Omega \quad (11.131)$$

L'intensità della radiazione diffratta nella direzione definita da \vec{q} è pertanto

$$dI_{\vec{q}} = C |\psi(\vec{x})|^2 d\Omega |\vec{x}|^2 = C \cos^2 \theta |f_{\vec{q}}|^2 \frac{dq_x dq_y}{(2\pi)^2} \quad (11.132)$$

dove C è una costante di proporzionalità. Se Φ_0 è il flusso della radiazione incidente, l'intensità totale della luce incidente sull'apertura S di area A_S è

$$\Phi_0 A_S = C \int_S dx dy |\psi_0|^2 = C A_S |\psi_0|^2 \quad (11.133)$$

Dunque

$$\frac{dI_{\vec{q}}}{d\Omega} = \Phi_0 \frac{k^2}{(2\pi)^2} \cos^2 \theta \left| \frac{f_{\vec{q}}}{\psi_0} \right|^2 \quad (11.134)$$

oppure

$$\frac{dI_{\vec{q}}}{dq_x dq_y} = \frac{\Phi_0}{(2\pi)^2} \cos \theta \left| \frac{f_{\vec{q}}}{\psi_0} \right|^2 \quad (11.135)$$

Per angoli di diffrazione piccoli possiamo sostituire in queste equazioni

$$\hat{n} \cdot \hat{x} = \cos \theta \approx 1 \quad (11.136)$$

ottenendo

$$\begin{aligned} \frac{dI_{\vec{q}}}{d\Omega} &= \Phi_0 \frac{k^2}{(2\pi)^2} \left| \frac{f_{\vec{q}}}{\psi_0} \right|^2 \\ \frac{dI_{\vec{q}}}{dq_x dq_y} &= \frac{\Phi_0}{(2\pi)^2} \left| \frac{f_{\vec{q}}}{\psi_0} \right|^2 \end{aligned} \quad (11.137)$$

Discutiamo la validità dell'approssimazione di Fraunhofer. Sia $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ la lunghezza d'onda della radiazione incidente. Sia a la lunghezza caratteristica

dell'apertura nello schermo, L la distanza dall'apertura alla quale si misura la radiazione diffratta.

Il primo termine trascurato nella espansione (11.121) per $\vec{R} = |\vec{x} - \vec{x}'|$ è

$$\frac{\vec{x}'^2}{2\vec{x}} \quad (11.138)$$

Pertanto nella fase dell'esponenziale $e^{ik|\vec{R}|}$ stiamo trascurando un termine dell'ordine di

$$\frac{k\vec{x}'^2}{2\vec{x}} \sim \frac{a^2}{\lambda L} \quad (11.139)$$

L'approssimazione di Fraunhofer richiede pertanto che

$$f \equiv \frac{a^2}{\lambda L} \ll 1 \quad (11.140)$$

f è noto come numero di Fresnel. Ricordiamo che l'approssimazione (11.120) (di Huygens) richiede in ogni caso che

$$\lambda \ll L \quad (11.141)$$

11.1.1 Fenditura verticale

Sia $2a$ la larghezza della fenditura nella direzione x e $2b$ quella nella direzione y :

$$\frac{f_{\vec{q}}}{\psi_0} = \frac{2 \sin q_x a}{q_x} \frac{2 \sin q_y b}{q_y} \quad (11.142)$$

L'intensità della radiazione diffratta nella direzione definita da q_x e q_y è pertanto, per piccoli θ :

$$\frac{dI_{\vec{q}}}{dq_x dq_y} = 4\Phi_0 ab \frac{\sin^2 q_x a}{\pi a q_x^2} \frac{\sin^2 q_y b}{\pi b q_y^2} = I_0 \frac{\sin^2 q_x a}{\pi a q_x^2} \frac{\sin^2 q_y b}{\pi b q_y^2} \quad (11.143)$$

dove

$$I_0 = 4\Phi_0 ab \quad (11.144)$$

è l'intensità totale della radiazione incidente sulla fenditura. Supponiamo in particolare che la fenditura sia infinitamente lunga nella direzione y , cioè

$b \gg a$: in queste condizioni non c'è praticamente diffrazione nella direzione y . Integrando su q_y e tenendo conto che

$$\int dq_y \frac{\sin^2 q_y b}{\pi q_y^2} = \frac{b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} = b \quad (11.145)$$

otteniamo

$$\frac{dI_{\vec{q}}}{dq_x} = I_0 \frac{\sin^2 q_x a}{a \pi q_x^2} \quad (11.146)$$

Per piccoli angoli θ di diffrazione

$$q_x \approx k \theta \quad (11.147)$$

e quindi

$$\frac{dI(\theta)}{d\theta} = I_0 \frac{\sin^2 k a \theta}{\pi k a \theta^2} \quad (11.148)$$

Notiamo che il massimo della intensità diffratta è per $\theta = 0$

$$\frac{dI(0)}{d\theta} = I_0 \frac{k a}{\pi} \equiv I_{max} \quad (11.149)$$

In termini di I_{max}

$$\frac{dI(\theta)}{d\theta} = I_{max} \frac{\sin^2 k a \theta}{k^2 a^2 \theta^2} \quad (11.150)$$

La radiazione diffratta si annulla pertanto in corrispondenza degli angoli

$$k a \sin \theta_{min} = m \pi \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \quad (11.151)$$

Il fascio di radiazione diffratta forma un angolo che è dell'ordine di

$$\theta_{onda} \sim \frac{\lambda}{a} \quad (11.152)$$

Notiamo che l'angolo di diffrazione "geometrico", cioè predetto da una teoria corpuscolare della radiazione sarebbe piuttosto dell'ordine di

$$\theta_{corpuscolo} \sim \frac{a}{L} \quad (11.153)$$

Nelle condizioni di Fraunhofer (11.140) abbiamo dunque

$$\theta_{corpuscolo} \ll \theta_{onda} \quad (11.154)$$

Siamo pertanto in un regime nel quale gli effetti ondulatori della radiazione elettromagnetica sono dominanti.

11.1.2 Diffrazione da una grata

Consideriamo uno schermo attraversato da N fenditure verticali di lunghezza $2a$ nella direzione x e $b \gg a$ nella direzione y , poste a distanza d una dall'altra. Abbiamo

$$\begin{aligned}
 f_{\vec{q}} &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-a+nd}^{a+nd} dx e^{-iq_x x} \psi_0 = \\
 &= \psi_0 \frac{2 \sin q_x a}{q_x} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-iq_x d n} = \\
 &= \psi_0 \frac{2 \sin q_x a}{q_x} \frac{1 - e^{-iq_x d N}}{1 - e^{-iq_x d}} \quad (11.155)
 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 \frac{d I_{\vec{q}}}{dq_x} &= \frac{I_0}{N} \frac{\sin^2 q_x a}{a \pi q_x^2} \left| \frac{1 - e^{-iq_x d N}}{1 - e^{-iq_x d}} \right|^2 = \\
 &= \frac{I_0 a}{N \pi} \frac{\sin^2 q_x a}{q_x^2 a^2} \frac{\sin^2 \frac{q_x d N}{2}}{\sin^2 \frac{q_x d}{2}} \quad (11.156)
 \end{aligned}$$

11.2 Diffrazione di Fresnel

Consideriamo uno schermo opaco che occupa il semi-piano (x, y) con $x < 0$, della radiazione incidente nella direzione z , da $z < 0$. Siamo interessati a calcolare l'intensità della luce diffusa, per $z > 0$. Nell'integrale

$$\psi(\vec{x}) = \frac{k}{2\pi i} \int_S d^2 a' \frac{\hat{n} \cdot \vec{R}}{R} \frac{e^{ikR}}{R} \psi(\vec{x}') \quad (11.157)$$

l'integrazione è sui punti \vec{x}' con

$$\vec{x}' = (x', y', 0) \quad x' > 0 \quad (11.158)$$

Sia

$$\vec{x} = (x, y, z) \quad \vec{R} = (x - x', y - y', z) \quad \hat{n} = \hat{z} \quad (11.159)$$

L'approssimazione di Fresnel consiste nel sostituire $|\vec{R}|$ nell'integrale (11.157) con l'espressione approssimata:

$$\begin{aligned}
 |\vec{R}| &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2} \approx \\
 &\approx z + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z} \quad (11.160)
 \end{aligned}$$

Nelle condizioni di Fresnel l'onda diffratta si scrive

$$\begin{aligned}\psi(\vec{x}) &= \frac{k e^{i k z}}{2 \pi i z} \int_0^\infty dx' \int_{-\infty}^\infty dy' e^{i k \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z}} \psi(x', y', 0) = \\ &= \frac{k e^{i k z}}{2 \pi i z} \int_{-x}^\infty d\eta \int_{-\infty}^\infty d\xi e^{i k \frac{\eta^2 + \xi^2}{2z}} \psi(\eta + x, \xi + y, 0)\end{aligned}\quad (11.161)$$

Se la radiazione incidente fosse un'onda piana, dovremmo porre nella (11.161)

$$\psi(\eta + x, \xi + y, 0) = \psi_0 \quad (11.162)$$

con ψ_0 costante. In realtà, in una situazione fisica reale, l'onda incidente sarà approssimativamente piana in una regione grande ma finita di spazio. Prendiamo pertanto

$$\psi(\eta + x, \xi + y, 0) = \psi_0 e^{-\alpha(\eta^2 + \xi^2)} \quad (11.163)$$

con $\alpha > 0$, reale, positivo, piccolo ma non nullo. Questo renderà gli integrali convergenti: alla fine del calcolo prenderemo il limite $\alpha \rightarrow 0$. Pertanto

$$\begin{aligned}\psi(\vec{x}) &= \frac{k e^{i k z} \psi_0}{2 \pi i z} \int_{-x}^\infty d\eta e^{-(\alpha - \frac{i k}{2z}) \eta^2} \int_{-\infty}^\infty d\xi e^{-(\alpha - \frac{i k}{2z}) \xi^2} = \\ &= \frac{k e^{i k z} \psi_0}{2 \pi i z} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha - \frac{i k}{2z}}} \int_{-x}^\infty d\eta e^{-(\alpha - \frac{i k}{2z}) \eta^2} = \\ &= \frac{k e^{i k z} \psi_0}{2 \pi i z} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha - \frac{i k}{2z}}} \sqrt{\frac{2z}{k}} \int_{-x \sqrt{\frac{k}{2z}}}^\infty ds e^{-\frac{2z\alpha}{k} s^2} e^{i s^2} = \\ &= \frac{e^{i k z} \psi_0}{\sqrt{2} i} \frac{1}{\sqrt{\frac{2z\alpha}{k} - i}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-x \sqrt{\frac{k}{2z}}}^\infty ds e^{-\frac{2z\alpha}{k} s^2} e^{i s^2}\end{aligned}\quad (11.164)$$

dove abbiamo usato il risultato

$$\int_{-\infty}^\infty dt e^{-\beta t^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \quad (11.165)$$

valido per $\beta = a + i b$ complesso, con parte reale $a > 0$.

Riscriviamo l'integrale che appare nella (11.164) nel modo seguente

$$\begin{aligned} \int_{-x\sqrt{\frac{k}{2z}}}^{\infty} ds e^{-\frac{2z\alpha}{k}s^2} e^{is^2} &= \int_0^{\infty} ds e^{-\frac{2z\alpha}{k}s^2} e^{is^2} + \int_{-x\sqrt{\frac{k}{2z}}}^0 ds e^{-\frac{2z\alpha}{k}s^2} e^{is^2} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2z\alpha}{k} - i}} - \int_0^{-x\sqrt{\frac{k}{2z}}} ds e^{-\frac{2z\alpha}{k}s^2} e^{is^2} \end{aligned} \quad (11.166)$$

Sostituendo nella (11.164)

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}) &= \frac{e^{ikz}\psi_0}{\sqrt{\pi}i} \frac{1}{\sqrt{\frac{2z\alpha}{k} - i}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2z\alpha}{k} - i}} - \int_0^{-x\sqrt{\frac{k}{2z}}} ds e^{-\frac{2z\alpha}{k}s^2} e^{is^2} \right] = \\ &= \frac{e^{ikz}\psi_0}{2i} \frac{1}{\frac{2z\alpha}{k} - i} \left[1 - \frac{2\sqrt{\frac{2z\alpha}{k} - i}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-x\sqrt{\frac{k}{2z}}} ds e^{-\frac{2z\alpha}{k}s^2} e^{is^2} \right] \end{aligned} \quad (11.167)$$

In quest'espressione possiamo finalmente prendere il limite $\alpha \rightarrow 0$ ed ottenere

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}) &= \frac{e^{ikz}\psi_0}{2} \left[1 - \frac{2\sqrt{-i}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-x\sqrt{\frac{k}{2z}}} ds e^{is^2} \right] = \\ &= \frac{e^{ikz}\psi_0\sqrt{-i}}{\sqrt{2}} \left[\frac{1+i}{2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{-x\sqrt{\frac{k}{2z}}} ds e^{is^2} \right] = \\ &= \frac{e^{ikz}\psi_0\sqrt{-i}}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{1}{2} - C\left(-x\sqrt{\frac{k}{2z}}\right) \right) + i \left(\frac{1}{2} - S\left(-x\sqrt{\frac{k}{2z}}\right) \right) \right] \end{aligned} \quad (11.168)$$

dove

$$\begin{aligned} C(w) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^w \cos s^2 ds = -C(-w) \\ S(w) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^w \sin s^2 ds = -S(-w) \end{aligned} \quad (11.169)$$

sono noti come gli *integrali di Fresnel*. L'intensità della radiazione diffratta è pertanto

$$I(\vec{x}) = \frac{I_0}{2} \left[\left(\frac{1}{2} + C\left(x\sqrt{\frac{k}{2z}}\right) \right)^2 + \left(\frac{1}{2} + S\left(x\sqrt{\frac{k}{2z}}\right) \right)^2 \right] \quad (11.170)$$

dove $I_0 = |\psi_0|^2$ è l'intensità della radiazione incidente.

Per discutere il comportamento qualitativo di $I(x)$, studiamo la funzione

$$F(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^w e^{is^2} ds = C(w) + iS(w) \quad (11.171)$$

Abbiamo già visto che

$$F(w) \rightarrow \frac{1+i}{2} \quad \text{per } w \rightarrow +\infty \quad (11.172)$$

Questo risultato si può ottenere attraverso la stessa procedura che abbiamo seguito nella derivazione di (11.168): si introduce un fattore esponenziale $e^{-\alpha s^2}$ con $\alpha > 0$ nell'integrale per renderlo assolutamente convergente, si prende prima il limite $w \rightarrow \infty$, e, successivamente, si passa al limite $\alpha \rightarrow 0$. Dunque

$$\lim_{w \rightarrow \pm\infty} C(w) = \lim_{w \rightarrow \pm\infty} S(w) = \pm \frac{1}{2} \quad (11.173)$$

Pertanto, come ci si aspetta,

$$\begin{aligned} I(x) &\rightarrow I_0 & \text{per } x \rightarrow +\infty \\ I(x) &\rightarrow 0 & \text{per } x \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (11.174)$$

Inoltre

$$I(0) = \frac{I_0}{4} \quad (11.175)$$

Deriviamo un'espressione asintotica per $F(w)$:

$$\begin{aligned} F(w) &= \frac{1+i}{2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_w^\infty \frac{d e^{is^2}}{ds} \frac{ds}{2is} = \\ &= \frac{1+i}{2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-\frac{e^{iw^2}}{2iw} + \int_w^\infty \frac{ds}{2is^2} e^{is^2} \right] = \\ &= \frac{1+i}{2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-\frac{e^{iw^2}}{2iw} - \frac{e^{iw^2}}{(2i)^2 w^3} + \int_w^\infty \frac{3ds}{(2i)^2 s^4} e^{is^2} \right] \end{aligned} \quad (11.176)$$

Iterando questa procedura arriviamo all'*espansione asintotica* per $F(w)$ valida per $w \rightarrow +\infty$

$$F(w) = \frac{1+i}{2} + \frac{e^{iw^2}}{\sqrt{2\pi} i w} \left[1 + \frac{1}{2iw^2} + O\left(\frac{1}{w^3}\right) \right] \quad w > 0 \quad (11.177)$$

e quindi

$$\begin{aligned} C(w) &= \frac{1}{2} + \frac{\sin w^2}{\sqrt{2\pi} w} + O\left(\frac{1}{w^2}\right) \\ S(w) &= \frac{1}{2} - \frac{\cos w^2}{\sqrt{2\pi} w} + O\left(\frac{1}{w^2}\right) \quad w > 0 \end{aligned} \quad (11.178)$$

Otteniamo in definitiva i seguenti comportamenti asintotici per l'intensità diffratta

$$\begin{aligned} I(\vec{x}) &= I_0 \left[1 + \frac{\sin \frac{x^2 k}{2z} - \cos \frac{x^2 k}{2z}}{\sqrt{2\pi} x} + O\left(\frac{z}{k x^2}\right) \right] \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \\ I(\vec{x}) &= \frac{I_0 z}{2\pi k x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \text{per } x \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (11.179)$$

11.3 Apertura circolare: confronto tra approssimazioni di Fraunhofer e Fresnel

Consideriamo la diffrazione di un'onda piana

$$\psi(\vec{x}) = \psi_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (11.180)$$

di vettore d'onda

$$\vec{k} = k \hat{z} \quad (11.181)$$

incidente su un'apertura circolare di raggio a in uno schermo opaco posto nel piano $z = 0$. Sia $O = (0, 0, 0)$ il centro dell'apertura circolare. Supponiamo che l'onda provenga dalla regione $z < 0$ e calcoliamo l'onda diffratta in un punto $P = (0, 0, z)$ con $z > 0$ posto sull'asse ortogonale allo schermo passante per il centro dell'apertura circolare. La formula di Kirkhoff-Huygens (11.120) dà:

$$\begin{aligned} \frac{\psi(P)}{\psi_0} &= \frac{k}{2\pi i} \int_0^a 2\pi \rho d\rho \frac{e^{ik\sqrt{z^2+\rho^2}}}{\sqrt{z^2+\rho^2}} = \\ &= \frac{k}{i} \int_0^{\sqrt{a^2+z^2}} dt e^{ikt} = \\ &= e^{ikz} [1 - e^{ik(\sqrt{z^2+a^2}-z)}] \end{aligned} \quad (11.182)$$

dove nell'integrale abbiamo effettuato il cambio di variabili

$$t = \sqrt{z^2 + \rho^2} \quad (11.183)$$

L'intensità della radiazione nel punto P è pertanto

$$\Phi(P) = 4 \Phi_0 \sin^2 \frac{k(\sqrt{z^2 + a^2} - z)}{2} \quad (11.184)$$

dove Φ_0 è l'intensità della radiazione incidente.

L'approssimazione di Fraunhofer per lo stesso problema dà

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{Frau}(P)}{\psi_0} &= \frac{k}{2\pi i} \frac{e^{ikz}}{z} \int_0^a 2\pi \rho d\rho = \\ &= e^{ikz} \frac{k a^2}{2i z} \end{aligned} \quad (11.185)$$

L'intensità corrispondente è

$$\Phi_{Frau}(P) = \Phi_0 \frac{k^2 a^4}{4 z^2} \quad (11.186)$$

L'approssimazione di Fresnel dà invece

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{Fresnel}(P)}{\psi_0} &= \frac{k}{2\pi i} \frac{e^{ikz}}{z} \int_0^a 2\pi \rho d\rho e^{i \frac{k\rho^2}{2z}} = \\ &= \frac{k}{2i} \frac{e^{ikz}}{z} \int_0^{a^2} d\eta e^{i \frac{k\eta}{2z}} = e^{ikz} (1 - e^{i \frac{k a^2}{2z}}) \end{aligned} \quad (11.187)$$

Pertanto l'intensità della radiazione nel punto P nell'approssimazione di Fresnel è

$$\Phi_{Fresnel}(P) = 4 \Phi_0 \sin^2 \frac{k a^2}{4 z} \quad (11.188)$$

Per facilitare il confronto tra le approssimazioni di Fraunhofer e Fresnel ed il risultato "esatto" (11.184) introduciamo il numero di Fresnel f associato al problema in questione

$$f \equiv \frac{a^2}{\lambda z} = \frac{k a^2}{2\pi z} \quad (11.189)$$

e la distanza del punto P dallo schermo misurata in termini di lunghezze d'onda:

$$l \equiv \frac{z}{\lambda} = \frac{k z}{2\pi} \quad (11.190)$$

Le intensità nel punto P si riscrivono in termini di l e f come segue

$$\begin{aligned}\Phi(P) &= 4 \Phi_0 \sin^2 \left[\pi l \left(\sqrt{1 + \frac{f}{l}} - 1 \right) \right] \\ \Phi_{Fresnel}(P) &= 4 \Phi_0 \sin^2 \frac{\pi f}{2} \\ \Phi_{Frau}(P) &= \Phi_0 \pi^2 f^2\end{aligned}\tag{11.191}$$

Ricordiamo che in realtà anche la formula “esatta” (11.184) è valida nell’ipotesi sottostante l’ottica geometrica, ovvero di piccole lunghezze d’onda

$$l \gg 1\tag{11.192}$$

Dalle (11.191) vediamo che l’approssimazione di Fraunhofer richiede, oltre a questa ipotesi, anche che il numero di Fresnel sia molto minore di 1

$$f \ll 1 \ll l\tag{11.193}$$

come avevamo già dedotto in una sotto sezione precedente. Invece l’approssimazione di Fresnel vale per

$$f \ll l\tag{11.194}$$

anche se f non è piccolo rispetto all’unità. In altre parole nella situazione

$$1 < f \ll l\tag{11.195}$$

l’approssimazione di Fresnel è accurata mentre quella di Fraunhofer non lo è.