

# La meccanica relativistica

## Una introduzione per le secondarie

Camillo Imbimbo

Feb 2015 / TFA

# Outline

- 1 Il principio di relatività galileiano
  - Riassunto
- 2 Il principio di relatività di Lorentz
  - Riassunto
- 3 La dinamica relativistica
  - Riassunto

# La dinamica classica

- Il principio di **inerzia** di Galileo afferma che un corpo **non** sottoposto a forze si muove di moto rettilineo uniforme, ovvero con velocità  $\vec{v}$  costante.
- Generalizzazione di Newton: un corpo sottoposto ad una forza  $\vec{F}$  subisce una accelerazione  $\vec{a}$  proporzionale all'inverso della sua massa  $m$ :

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

## Sistemi di riferimento.

- Le equazioni che governano la dinamica coinvolgono pertanto grandezze fisiche diverse come

$$m, \vec{v}, \vec{a}, \vec{F}$$

- Un fatto intuitivo è che mentre il valore numerico di alcune grandezze fisiche non dipende dal **sistema di riferimento** il valore di altre dipende da questo.

# Sistemi di riferimento

- Se per esempio diciamo che un certo corpo ha una massa  $m = 1\text{ kg}$  non dobbiamo specificare “rispetto a quale sistema di riferimento”. La massa sarà di  $1\text{ kg}$  se misurata in un laboratorio fermo, in un treno in movimento, in un sistema ruotato etc.
- Grandezze di questo tipo vengono chiamate **scalari**.

## Sistemi di riferimento

- Il valore numerico di altre grandezze fisiche dipende invece dal sistema di riferimento.
- Consideriamo per esempio la **posizione** di un corpo puntiforme che si trova in un punto  $P$  dello spazio.
- Un modo di rappresentare la posizione  $P$  è scegliere un punto  $O$  nello spazio e un sistema di coordinate cartesiano  $(x, y, z)$  centrato in  $O$ . La posizione di  $P$  (come ogni altro vettore) sarà rappresentata, *in questo sistema di riferimento*, da una terna di numeri reali

$$\vec{x}(P) \equiv (x, y, z)$$

## Sistemi di riferimento

- Se scegliessimo però un'origine  $O'$  diversa da  $O$  ed un diverso sistema di coordinate  $(x', y', z')$ , la terna di numeri con cui descriviamo la posizione **dello stesso punto  $P$**  sarebbe diversa:

$$\vec{x}'(P) \equiv (x', y', z')$$

- È quindi importante capire quale sia in generale la relazione tra  $(x', y', z')$  e  $(x, y, z)$ .

# Traslazioni

- Per esempio supponiamo che la posizione dell'origine  $O'$  sia specificata, nel sistema di coordinate  $O$ , dalle coordinate

$$\vec{x}(O') \equiv (X, Y, Z)$$

e che gli assi del sistema di coordinate  $(x', y', z')$  siano **paralleli** a quelli del primo sistema.

- Allora esiste una relazione semplice tra le coordinate di uno stesso punto  $P$  nei due sistemi

$$(x', y', z') = (x - X, y - Y, z - Z)$$

## Sistemi di riferimento in moto

- Supponiamo ora che la posizione dell'origine  $O'$  del secondo sistema di riferimento, **dipenda dal tempo**.

$$\vec{x}(O') \equiv (X(t), Y(t), Z(t))$$

ma che gli assi del sistema di coordinate  $(x', y', z')$  si mantengano sempre **paralleli** a quelli del primo sistema.

- In altre parole supponiamo che **il secondo sistema di riferimento si muova rispetto al primo**.

## Sistemi di riferimento in moto

Allora la relazione tra le coordinate nei due sistemi diventa dipendente dal tempo  $t$ :

$$(x', y', z') = (x - X(t), y - Y(t), z - Z(t))$$

che possiamo scrivere in maniera più compatta facendo uso della notazione vettoriale

### Trasformazione delle coordinate

$$\vec{x}'(P) = \vec{x}(P) - \vec{X}(t)$$

## Sistemi di riferimento in moto

- Supponiamo ora che anche il punto  $P$  si muova. In altre parole che  $\vec{x}(P)$  dipenda dal tempo  $t$

$$\vec{x}(P)(t) \equiv (x(t), y(t), z(t))$$

- Questo vuol dire che la sua velocità è non nulla, **nel sistema di riferimento  $O$**

$$\vec{v}(P)(t) = \frac{\Delta \vec{x}(P)}{\Delta t} \equiv \left( \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}, \frac{\Delta y(t)}{\Delta t}, \frac{\Delta z(t)}{\Delta t} \right)$$

## Sistemi di riferimento in moto

- Dalle trasformazioni delle coordinate deduciamo quindi che

$$\vec{v}'(P) = \frac{\Delta \vec{x}'(P)}{\Delta t} = \vec{v}(P) - \frac{\Delta \vec{X}(t)}{\Delta t} = \vec{v}(P) - \vec{V}(t)$$

dove

$$\vec{V}(t) = \frac{\Delta \vec{X}(t)}{\Delta t}$$

è la velocità del sistema di riferimento  $O'$  rispetto a quello centrato in  $O$ .

# Sistemi di riferimento in moto

## Trasformazioni delle velocità

La velocità  $\vec{v}$  è una grandezza che dipende dal sistema di riferimento nella quale è misurata. La relazione tra le velocità dello stesso punto materiale  $P$  misurate in due sistemi di riferimento che si muovono uno relativamente all'altro con velocità  $\vec{V}(t)$  è

$$\vec{v}'(P) = \vec{v}(P) - \vec{V}(t)$$

## Sistemi di riferimento in moto

- Poiché l'accelerazione del punto  $P$  è

$$\vec{a}(P) = \frac{\Delta \vec{v}(P)}{\Delta t}$$

concludiamo anche che

### Trasformazioni delle accelerazioni

$$\vec{a}'(P) = \vec{a}(P) - \frac{\Delta \vec{V}(t)}{\Delta t}$$

# Invarianza galileiana

- Torniamo al principio inerziale di Galileo, che afferma che un corpo non sottoposto a forze si muove con accelerazione  $\vec{a}$  nulla. Abbiamo appena visto che se l'accelerazione è nulla in un dato sistema di riferimento, **essa non sarà nulla in un generico sistema di riferimento che si muove rispetto al primo.**

## Domanda

In quali sistemi di riferimento vale dunque il principio di Galileo? E la legge della dinamica di Newton?

## Sistemi di riferimento inerziali

- Dalla legge di trasformazione delle accelerazioni deduciamo che

$$\vec{a}'(P) = \vec{a}(P) \Leftrightarrow \frac{\Delta \vec{V}(t)}{\Delta t} = 0$$

- Chiamiamo dunque **sistemi di riferimento inerziali** quelli che si muovono con velocità costante rispetto ad un sistema dato. Vedi Figura. 1.
- Per quanto detto, se il principio di Galileo vale in un sistema di riferimento dato, allora è pure valido in tutti i sistemi inerziali **rispetto ad esso**.

# Sistemi di riferimento inerziali

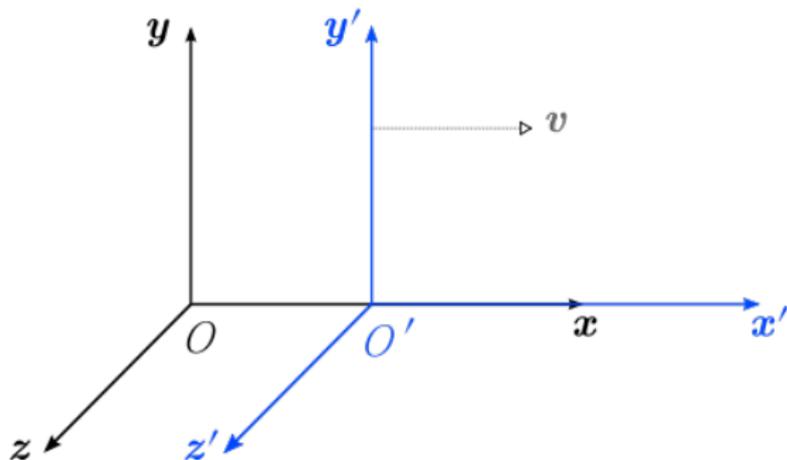


Figura 1: Sistemi di riferimento inerziali  $O$  e  $O'$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup> By Krea (Own work) CC BY-SA 3.0, <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>, via Wikimedia Commons.

## Sistemi di riferimento inerziali e legge di Newton

- Assumiamo che la massa  $m$  di un corpo non dipenda dal sistema di riferimento inerziale.
- **Se** anche la forza esercitata sul corpo puntiforme **non** dipende dal sistema di riferimento

$$\vec{F}' = \vec{F}$$

allora:

### Invarianza galileiana della dinamica

La validità delle equazioni della dinamica di Newton in un dato sistema di coordinate implica la sua validità in tutti i sistemi di riferimento inerziali rispetto a questo

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \vec{F} = \vec{F}' \quad \vec{a} = \vec{a}' \Rightarrow \vec{F}' = m\vec{a}'$$

## Sistemi di riferimento inerziali e legge di Newton

- Le equazioni della dinamica di Newton per due osservatori reciprocamente inerziali sono pertanto **identiche**.
- Si dice che le equazioni della dinamica di Newton sono **invarianti** per trasformazioni galileiane

$$\vec{x}'(P) = \vec{x}(P) - \vec{V} t$$

- Tutti gli esperimenti meccanici effettuati da due osservatori reciprocamente inerziali saranno pertanto **equivalenti**. Poiché tutti i sistemi inerziali sono fisicamente equivalenti, non è possibile, attraverso misure fisiche effettuate da uno dei due osservatori, determinare il proprio moto rispetto ad un sistema privilegiato.

# Relatività galileiana

## Arbitrarietà del sistema di riferimento

In meccanica classica pertanto, così come non esiste un **punto** speciale dello spazio (arbitrarietà dell'origine del sistema delle coordinate), o una **direzione** speciale (arbitrarietà nella scelta dell'orientazione del sistema di coordinate) non esiste neanche una **velocità** speciale (arbitrarietà nella scelta del sistema inerziale).

## Sistemi di riferimento non inerziali

- Le leggi della meccanica **non** sono invarianti per trasformazioni tra sistemi non inerziali.
- Per esempio, su un sistema **accelerato** rispetto ad uno inerziale, il principio di Galileo **non** è valido:

$$\vec{F} = 0 = \vec{a}(P) \Rightarrow \vec{a}' = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} \neq \vec{F}' = \vec{F} = 0$$

### Esercizio 1

Si scrivano le leggi della dinamica per un sistema di riferimento che ruota con velocità angolare  $\vec{\omega}$  rispetto ad un sistema di riferimento inerziale.

# Riassunto

- La descrizione analitica delle variabili geometriche (posizione, velocità, accelerazione etc) coinvolte nella formulazione delle leggi fisiche dipende da alcune scelte arbitrarie: in particolare dalla scelta del **sistema di riferimento**.
- Il principio di **relatività** è la richiesta che la forma delle equazioni della dinamica sia la stessa in tutti i sistemi di riferimento **inerziali**.

# Riassunto

- Le **trasformazioni di Galileo** descrivono il cambiamento delle coordinate spaziali nel passaggio da un sistema inerziale ad un altro, in meccanica classica.
- Le trasformazioni di Galileo lasciano l'accelerazione invariante.
- Affinché le equazioni della dinamica di Newton siano invarianti per trasformazioni di Galileo è necessario che le forze misurate in sistemi di riferimento reciprocamente inerziali siano le stesse.

# Elettromagnetismo

- I fenomeni elettromagnetici sono descritti dalle equazioni di Maxwell.
- Le equazioni di Maxwell non sono invarianti per trasformazioni di Galileo.
- Vediamo perché.

## Distribuzione di carica lineare in movimento.

- Supponiamo che in un sistema di coordinate  $O$ , con coordinate  $(x, y, z)$ , valgano le equazioni di Maxwell.
- Si consideri una distribuzione di carica lineare  $\lambda$  lungo asse  $x$ , in movimento lungo  $x$  con velocità  $v$ . Si veda la Figura 2.
- In un punto  $P = (0, y, 0)$  i campi elettrici e magnetici determinati dalle equazioni di Maxwell sono:

$$\vec{E}(P) = \left(0, \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}, 0\right) \quad \vec{B}(P) = \left(0, 0, \frac{\lambda v}{2\pi\epsilon_0 y c^2}\right)$$

### Esercizio 2

Derivare i valori dei campi elettrici e magnetici qui sopra.

## Distribuzione di carica lineare in movimento.

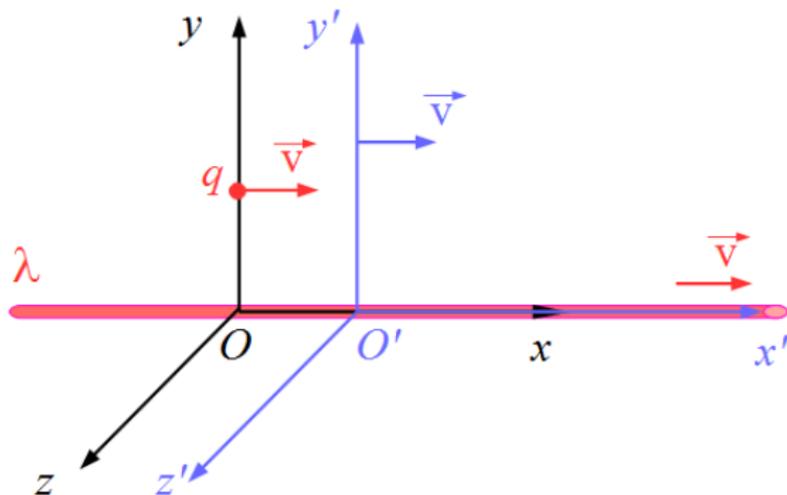


Figura 2: Filo carico con densità di carica  $\lambda$  e carica  $q$  in movimento con velocità  $\vec{v} = v \vec{e}_x$ .

## Distribuzione di carica lineare in movimento.

- Poniamo in  $P$  una carica  $q$  che si muove lungo  $x$  con velocità  $\vec{v} = (v, 0, 0)$ .
- La forza sulla carica  $q$  è data dalla forza di Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

- Quindi: 
$$\vec{F} = \left(0, \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 z} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), 0\right)$$

## La stessa situazione in un sistema in movimento.

- Consideriamo lo stesso fenomeno in un sistema di riferimento  $O'$  che si sposta lungo  $x$  con velocità  $\vec{v} = (v, 0, 0)$ .
- Nel sistema  $O'$  la distribuzione di carica  $\lambda$  e la carica  $q$  sono immobili. L' unica forza è quella elettrica.
- Quindi:

$$\vec{F}' = \left( 0, \frac{\lambda' q}{2 \pi \epsilon_0 y'}, 0 \right)$$

## Confronto galileiano

- Assumiamo che l'invarianza Galileiana si estenda alla carica elettrica

$$q' = q$$

- Inoltre:  $\Delta x = \Delta x' \Rightarrow \lambda = \frac{\Delta q}{\Delta x} = \frac{\Delta q'}{\Delta x'} = \lambda'$
- Vediamo quindi che

$$\vec{F}' = \left(0, \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 y}, 0\right) \neq \vec{F} = \left(0, \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 y} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), 0\right)$$

### Conclusione:

Se valgono le leggi di trasformazioni galileiane, le equazioni di Maxwell non possono valere in tutti i sistemi inerziali.

# Un sistema di riferimento privilegiato?

- Se si insiste sulla validità delle **trasformazioni galileiane** di spazio e tempo, la sola soluzione dall'impasse descritto è quella di supporre che esista un sistema di riferimento privilegiato in cui valgono le equazioni di Maxwell.
- L'ipotesi di un tale sistema di riferimento sembra anche naturale se si discute il fenomeno più importante previsto dalle equazioni di Maxwell: quello delle **onde elettromagnetiche**.

# Le onde elettromagnetiche

- Le equazioni di Maxwell prevedono l'esistenza di onde che si propagano con una velocità costante  $c$ : la luce, le onde radio, i raggi X sono esempi, sperimentalmente misurabili, di tale fenomeno.
- La costante  $c$  emerge dalle due costanti  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  che appaiono nelle equazioni di Maxwell e che descrivono le leggi di Coulomb e Ampère

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

# Le onde elettromagnetiche

## Esercizio 3

Verificare che la combinazione  $\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$  ha le dimensioni di una velocità al quadrato

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

- Il grande risultato di Maxwell fu proprio dimostrare che le equazioni del campo elettromagnetico ammettono soluzioni di tipo onda che si propagano con velocità  $c$ .

# Le onde elettromagnetiche

- Se un'onda si propaga con velocità  $c$  in direzione  $x$  in un dato sistema di riferimento, allora, se vale la trasformazione galileiana delle velocità, quest'onda viaggia alla velocità  $c - v$  in un sistema di riferimento che si sposta con velocità costante  $v$  rispetto al primo.
- Questo è un altro modo di dedurre che le equazioni di Maxwell non sono invarianti per trasformazioni galileiane.
- Misurando la velocità della luce in un sistema di riferimento che si muove con velocità  $v$  rispetto al sistema di riferimento privilegiato in cui la velocità della luce è  $c$ , dovrebbe dunque essere possibile determinare  $v$ .

# Esperimenti di Michelson-Morley

- I tentativi di misurare  $v$  attraverso fenomeni elettromagnetici, ovvero di verificare la non-invarianza galileiana dei fenomeni elettromagnetici dettero tutti risultati negativi.
- Una possibilità logica a questo punto era quella di modificare le equazioni di Maxwell, in modo che si accordassero al principio di relatività di Galileo.
- L'altra possibilità, perseguita da Einstein, era quella di modificare il principio di relatività di Galileo e, conseguentemente, le equazioni della dinamica di Newton.

# Le trasformazioni di Lorentz

- Insistiamo dunque sul principio che la fisica sia indipendente dal particolare sistema di riferimento inerziale in cui ci si trova.
- Le equazioni di Maxwell prevedono l'esistenza di onde che si propagano con una velocità determinata  $c$ , indipendente dal sistema di riferimento.
- Le trasformazioni di coordinate, velocità, etc tra un sistema di riferimento inerziale ed un altro devono essere tali che un'onda che viaggia a velocità  $c$  in un sistema, faccia lo stesso in un sistema inerziale rispetto a questo.

# Le trasformazioni di Lorentz

- Consideriamo una onda e.m. che si propaga nel sistema  $(x, y, z, t)$  lungo la direzione  $x$ : l'equazione della traiettoria è

$$x = c t \Rightarrow x^2 - c^2 t^2 = 0$$

- Se vogliamo che l'onda si propaghi con la stessa velocità nel sistema  $(x', y', z', t')$  che si muove lungo l'asse delle  $x$  con velocità  $v$  è necessario che

$$(x')^2 - c^2 (t')^2 = 0$$

# Le trasformazioni di Lorentz

- Assumiamo dunque che debba essere

$$x^2 - c^2 t^2 = (x')^2 - c^2 (t')^2$$

- Assumiamo inoltre una relazione lineare tra le coordinate dei due sistemi

$$x' = A(v)x + B(v)ct \quad ct' = C(v)x + D(v)ct$$

- Otteniamo

$$\begin{aligned} A(v)^2 - C(v)^2 &= 1 & -B(v)^2 + D(v)^2 &= 1 \\ A(v)B(v) &= C(v)D(v) \end{aligned}$$

# La soluzione

- La (una) soluzione delle equazioni precedenti è

$$D(v) = A(v) \quad B(v) = C(v) \quad A^2(v) - B^2(v) = 1$$

- Che possiamo, se vogliamo, parametrizzare in termini di funzioni iperboliche

$$A(v) = D(v) = \cosh \theta(v) \quad B(v) = C(v) = \sinh \theta(v)$$

# Le trasformazioni di Lorentz

- Otteniamo in definitiva

$$x' = A(v)x + B(v)ct$$

$$ct' = B(v)x + A(v)ct$$

$$A^2(v) - B^2(v) = 1$$

# Le trasformazioni di Lorentz

- Si consideri l'origine del sistema di coordinate  $O'$ . Per definizione essa ha  $x' = 0$

$$0 = A(v)x + B(v)ct$$

- D'altronde, nel sistema  $O$  l'origine di  $O'$  si sposta con velocità  $v$  lungo  $x$ , ovvero

$$x = vt$$

- Quindi

$$0 = A(v)vt + B(v)ct \quad \Rightarrow \quad \frac{B(v)}{A(v)} = -\frac{v}{c}$$

# Le trasformazioni di Lorentz

- Tenendo conto che  $A^2 - B^2 = 1$ , otteniamo in definitiva

$$A(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma(v)$$

$$B(v) = -\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv -\beta(v) \gamma(v)$$

# Le trasformazioni di Lorentz

## Le trasformazioni di Lorentz

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - vt)$$
$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left( t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

# Composizione delle velocità

- Supponiamo che un punto materiale  $P$  si muova con velocità  $\vec{v}'(P)$  nel sistema  $O'$ , che, a sua volta, si muove con velocità  $\vec{V}$  rispetto ad un sistema  $O$ .
- Quale è la velocità  $\vec{v}(P)$  di  $P$  nel sistema  $O$ ?

# Composizione delle velocità

- Dalle trasformazioni di Lorentz

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma \Delta x - \beta \gamma c \Delta t \\ c \Delta t' &= -\beta \gamma \Delta x + \gamma c \Delta t\end{aligned}$$

- Quindi

$$\begin{aligned}\frac{\Delta x'}{c \Delta t'} &= \frac{\gamma \Delta x - \beta \gamma c \Delta t}{-\beta \gamma \Delta x + \gamma c \Delta t} = \\ &= \frac{\frac{\Delta x}{c \Delta t} - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c} \frac{\Delta x}{c \Delta t}}\end{aligned}$$

# Composizione delle velocità

- Ricordando che  $\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = v'$ ,  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$ :

## Composizione delle velocità

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}}$$

- Per esempio: se  $v = c$ , qualunque sia  $V$ ,  $v' = c$  !

## Dilatazione temporale

- Si considerino due **eventi** che nel sistema  $O'$  hanno  $\Delta x' = 0$ : per esempio un orologio posto nell'origine di  $O'$ .
- Le trasformazioni di Lorentz **inverse** danno quindi

$$\begin{aligned}\Delta x &= \gamma \Delta x' + \beta \gamma c \Delta t' = c \Delta t' \\ c \Delta t &= \beta \gamma \Delta x' + \gamma c \Delta t' = \gamma c \Delta t'\end{aligned}$$

- L'orologio, fermo in  $O'$ , appare dunque **rallentato** nel sistema  $O$  in cui si muove con velocità  $v$

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

## Contrazione spaziale

- Si considerino ora due eventi **simultanei** nel sistema  $O$ ,  $\Delta t = 0$ . Per esempio le posizioni delle estremità di un regolo, immobile in  $O'$ , misurate simultaneamente in  $O$ .
- Le trasformazioni di Lorentz danno

$$\Delta x' = \gamma \Delta x + \beta \gamma c \Delta t = \gamma \Delta x$$

$$c \Delta t' = -\beta \gamma \Delta x + \gamma c \Delta t = -\beta \gamma \Delta x$$

- Vediamo quindi che la lunghezza  $\Delta x$  del regolo misurata da  $O$  è contratta rispetto alla lunghezza  $\Delta x'$  dello stesso regolo nel sistema  $O'$  in cui esso non si muove

$$\Delta x = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta x'$$

## Simultaneità e causalità

- Poiché il tempo non è invariante per trasformazioni di Lorentz, eventi simultanei in un sistema di riferimento possono non esserlo in un altro.
- È anche possibile che per due eventi,  $\Delta t > 0$  in un certo sistema di riferimento e  $\Delta t' < 0$  in un altro.

### Un paradosso?

Questo sembra introdurre un potenziale **paradosso**: se un evento  $(x_1, t_1)$  è la **causa** fisica dell'evento  $(x_2, t_2)$ , sarebbe illogico (acausale) se in qualche sistema di riferimento l'evento  $(x_2, t_2)$  **antecedesse**  $(x_1, t_1)$ , ovvero che l'effetto precedesse la sua causa fisica!

# Simultaneità e causalità

- Fortunatamente per la coerenza logica della meccanica relativistica questo non può succedere.
- Per convincersene si incominci con l'osservare che, per qualunque trasformazione di Lorentz, vale

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2$$

- La grandezza  $\Delta s^2 \equiv c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2$  è pertanto un **invariante relativistico**.

## Simultaneità e causalità

- Supponiamo dunque che esistano due eventi per i quali  $\Delta t > 0$  in un sistema  $O$  e  $\Delta t' < 0$  in un altro sistema  $O'$ .
- Poiché  $\Delta t'$  varia con continuità con la velocità del sistema di riferimento  $O'$  rispetto al sistema originale  $O$ , deduciamo che esiste un **terzo** sistema inerziale di coordinate  $(x'', t'')$  per il quale  $\Delta t'' = 0$ .
- Pertanto

$$\Delta s^2 = c^2(\Delta t'')^2 - (\Delta x'')^2 = -(\Delta x'')^2 < 0$$

## Simultaneità e causalità

- Si noti che se per due eventi  $\Delta s^2 < 0$ , allora

$$|\Delta x| > c|\Delta t|$$

ovvero i due eventi non possono essere causalmente connessi perché ogni evento fisico si propaga con velocità al più uguale a quella della luce.

### Simultaneità e causalità

Solo eventi non causalmente connessi (ovvero con  $\Delta s^2 < 0$ ) possono avere ordinamenti temporali diversi in sistemi di riferimento diversi.

# Riassunto

- Le equazioni di Maxwell non sono invarianti per trasformazioni di Galileo, ma lo sono per trasformazioni di Lorentz.
- Le trasformazioni di Lorentz si deducono dalla richiesta che la luce viaggi alla stessa velocità in tutti i sistemi di riferimento tra loro inerziali.
- Le leggi elettromagnetismo sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali se assumiamo che coordinate **e** tempo si trasformano secondo le leggi di Lorentz e non quelle di Galileo.

# Riassunto

- La conseguenza più sorprendente delle trasformazioni di Lorentz è che il concetto di **simultaneità** è dipendente dal sistema di riferimento. In contrasto con la meccanica galileiana per la quale il tempo è indipendente dal sistema di riferimento, in meccanica relativistica due eventi possono essere simultanei in un sistema di riferimento senza esserlo in un altro.
- Nonostante questo, l'**ordinamento temporale** di eventi **causalmente connessi** è indipendente dal sistema di riferimento: questo garantisce che la **causalità** non sia violata in meccanica relativistica.

# L'impulso

- Vogliamo capire quale sia la “corretta” definizione di impulso in meccanica relativistica.
- Una definizione “corretta” deve avere la proprietà che, se l'impulso è conservato in una data situazione fisica (per esempio in un sistema isolato) in un certo sistema di coordinate, allora dovrà essere conservato in qualunque altro sistema inerziale.
- Vediamo perché la definizione newtoniana  $\vec{p} = m \vec{v}$  è “corretta” nel senso galileiano del termine.

# La conservazione del momento in meccanica classica

- Supponiamo che in un processo fisico (per esempio un urto) il momento si conservi in un dato sistema di coordinate  $O$

$$\sum_j m_j \vec{v}_j = \sum_j \tilde{m}_j \vec{\tilde{v}}_j$$

dove le quantità tildate sono le grandezze delle particelle dopo l'urto.

- Sappiamo che, in meccanica classica,  $\vec{v}'_j = \vec{v}_j - \vec{V}$  sono le velocità per un osservatore  $O'$  che si muove a velocità  $\vec{V}$  rispetto a  $O$ .

# Invarianza galileiana della conservazione del momento

- Dunque nel sistema  $O'$

$$\begin{aligned}\sum_j m_j \vec{v}'_j &= \sum_j m_j (\vec{v}_j - \vec{V}) = \sum_j \tilde{m}_j \vec{v}_j - \sum_j m_j \vec{V} = \\ &= \sum_j \tilde{m}_j \vec{v}'_j + \sum_j \tilde{m}_j \vec{V} - \sum_j m_j \vec{V} = \\ &= \sum_j \tilde{m}_j \vec{v}'_j + (\tilde{M} - M) \vec{V}\end{aligned}$$

dove  $M$  e  $\tilde{M}$  sono le masse totali rispettivamente prima e dopo l'urto.

# Invarianza galileiana della conservazione del momento e della massa

- Concludiamo che:

## Conservazione di massa e momento classici

La legge di conservazione del momento totale classico è invariante per trasformazioni galileiane se la massa totale di un sistema isolato si conserva.

- Osserviamo che l'invarianza galileiana della legge di conservazione del momento è intimamente dipendente dalla legge classica delle composizioni delle velocità.

# La conservazione del momento in meccanica relativistica

- Se ripetiamo lo stesso calcolo usando la composizione relativistica delle velocità ci rendiamo conto che una legge di conservazione per la somma delle grandezze  $m \vec{v}$  non sarebbe invariante per trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{aligned} \sum_j m_j \vec{v}'_{j,x} &= \sum_j m_j \frac{(\vec{v}_{j,x} - V)}{1 + \frac{\vec{v}_{j,x} V}{c^2}} \neq \\ &\neq \sum_j \tilde{m}_j \vec{v}'_j \end{aligned}$$

## La difficoltà

- Il momento classico è definito attraverso la velocità  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ . Benchè sia  $\Delta x$  che  $\Delta t$  abbiano trasformazioni di Lorentz “semplici” (cioè lineari) il loro rapporto (la velocità) non si trasforma linearmente.
- La difficoltà che abbiamo evidenziato con l’invarianza relativistica della conservazione dell’impulso  $m\vec{v}$  è direttamente connessa col fatto che le velocità non si trasformano in modo semplice per trasformazioni di Lorentz.
- Questo suggerisce di modificare la definizione di impulso, definendo un impulso che si trasformi altrettanto semplicemente che  $x$  per trasformazioni di Lorentz.

## Il tempo proprio

- L'idea della nuova definizione di impulso è sostituire  $\Delta t$  nella definizione classica di impulso  $m \frac{\Delta x}{\Delta t}$  con un tempo "speciale" associato al moto di un corpo puntiforme in movimento.
- Questo tempo speciale è il tempo misurato da un osservatore **solidale** con la particella in questione. Cioè un osservatore per il quale la particella è ferma. Chiamiamo questo tempo il **tempo proprio** della particella.

## Il tempo proprio

- La relazione tra tempo proprio e il tempo  $t$  di un osservatore che vede la particella muoversi con velocità  $v$  (lungo  $x$ ) è facilmente deducibile dalle trasformazioni di Lorentz.
- Si ponga  $x' = 0$  e  $t' = \tau$  nelle trasformazioni di Lorentz:

$$t = \gamma(v) \tau = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Quindi

$$\Delta \tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

## Momento relativistico

- Definiamo dunque il momento relativistico (lungo x) come

$$p_x = m \frac{\Delta x}{\Delta \tau}$$

- Passando ad un sistema di riferimento che si muove con velocità  $V$  rispetto ad  $O$ :

$$\begin{aligned} p'_x &= m \frac{\Delta x'}{\Delta \tau} = \gamma(V) m \frac{\Delta x}{\Delta \tau} - \beta(V) \gamma(V) m c \frac{\Delta t}{\Delta \tau} \\ &= \gamma(V) p_x - \beta(V) \gamma(V) (m c \gamma(v)) \\ m c \frac{\Delta t'}{\Delta \tau} &= m c \gamma(v') = \\ &= -\beta(V) \gamma(V) p_x + \gamma(V) (m c \gamma(v)) \end{aligned}$$

## Momento relativistico ed energia

- Notiamo dunque che  $(p_x, m c \gamma(v))$  si trasformano, andando da  $O$  a  $O'$  esattamente come  $(x, c t)$ .
- Definiamo dunque una grandezza  $E$  che ha le dimensioni di una **energia**

$$\frac{E}{c} \equiv m c \gamma(v) = \frac{m c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

## Conservazione momento relativistico ed energia

- Dimostriamo ora che se le grandezze  $(p_x, E)$  sono conservate in un processo fisico in un dato sistema di coordinate, lo saranno in qualunque altro sistema di coordinate inerziale rispetto al primo.
- Supponiamo cioè che in un sistema  $O$  valga

$$\sum_j p_x^{(j)} = \sum_j (\tilde{p})_x^{(j)} \quad \sum_j E^{(j)} = \sum_j \tilde{E}^{(j)}$$

dove le quantità tildate sono quelle dopo l'urto.

## Conservazione momento relativistico

- Allora il momento totale è conservato in un qualunque sistema  $O'$  che si muove a velocità  $V$  rispetto a  $O$ :

$$\begin{aligned}\sum_j (p')_x^{(j)} &= \sum_j \gamma(V) p_x^{(j)} - \beta(V) \gamma(V) \frac{E^{(j)}}{c} = \\ &= \sum_j \gamma(V) (\tilde{p})_x^{(j)} - \beta(V) \gamma(V) \frac{\tilde{E}^{(j)}}{c} = \\ &= \sum_j \tilde{p}'_x^{(j)}\end{aligned}$$

## Conservazione energia

- Anche  $\sum_j (E')^{(j)}$  è conservata nel sistema  $O'$

$$\begin{aligned}\sum_j \frac{(E')^{(j)}}{c} &= -\sum_j \beta(V) \gamma(V) p_x^{(j)} + \gamma(V) \frac{E^{(j)}}{c} = \\ &= -\sum_j \beta(V) \gamma(V) \tilde{p}_x^{(j)} + \gamma(V) \frac{\tilde{E}^{(j)}}{c} = \\ &= \sum_j \frac{(\tilde{E}')^{(j)}}{c}\end{aligned}$$

# Momento ed energia relativistici

## Momento ed energia relativistici

$$\begin{aligned}\vec{p} &= m \left( \frac{\Delta x}{\Delta \tau}, \frac{\Delta y}{\Delta \tau}, \frac{\Delta z}{\Delta \tau} \right) = \\ &= m \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left( \frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t} \right) = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ E &= \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned}$$

## Il limite non-relativistico

- Per  $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$

$$\vec{p} \approx m \vec{v}$$

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

- Si noti che nella meccanica relativistica la massa non si conserva separatamente dall'energia: è possibile che in un dato processo la massa si converta in energia. Questo è il principio fisico sottostante le reazioni nucleari.

# Le equazioni della dinamica relativistica

- Le equazioni di Maxwell sono invarianti per trasformazioni di Lorentz per costruzione.
- $\vec{F} = m \vec{a}$  sono invarianti per trasformazioni di Galileo. Dobbiamo modificarle in modo che risultino invarianti per trasformazioni di Lorentz.
- È più illuminante riscrivere le equazioni di Newton in termini del momento

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}_{non-rel}}{\Delta t}$$

dove  $\vec{p}_{non-rel} = m \vec{v}$  è il momento non-relativistico.

# Le equazioni della dinamica relativistica

- La discussione precedente suggerisce di rimpiazzare le equazioni della dinamica relativistica con

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta \tau} = \vec{f} \quad \frac{1}{c} \frac{\Delta E}{\Delta \tau} = f^0$$

dove  $(\vec{f}, f^0)$  sono delle generalizzazioni relativistiche della forza che si trasformano come  $(\vec{p}, \frac{E}{c})$ .

# Le equazioni della dinamica relativistica

- Si noti che

$$\begin{aligned}\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 &= c^2 m^2 \\ \Rightarrow \frac{E}{c^2} \frac{dE}{d\tau} - \vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{d\tau} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{E}{c} f^0 - \vec{p} \cdot \vec{f} &= 0 \\ \Rightarrow f^0 &= \frac{c\vec{p}}{E} \cdot \vec{f} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{f}}{c}\end{aligned}$$

# Le equazioni della dinamica relativistica

- Quindi le equazioni della dinamica si riscrivono

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta \tau} = \vec{f} \quad \frac{\Delta E}{\Delta \tau} = \vec{v} \cdot \vec{f}$$

- Ricordando che  $\Delta \tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t$

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \vec{f} \quad \frac{\Delta E}{\Delta t} = \vec{v} \cdot \vec{f} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

# Le equazioni della dinamica relativistica

- È quindi naturale identificare

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \vec{f} = \vec{F}$$

con la forza  $\vec{F}$  non-relativistica, in maniera analoga alla relazione

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \vec{p} = m \vec{v} \equiv \vec{p}_{non-rel}$$

# Le equazioni della dinamica relativistica

- In questo modo le equazioni della dinamica relativistica assumono la stessa forma di quelle non relativistiche

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F}$$

# Il problema della carica in presenza di un filo infinito carico

## Esercizio 4

Si riconsideri il problema della carica  $q$  in presenza di un filo carico infinito  $\lambda$ . Si discuta come la descrizione della situazione nel sistema in cui carica e filo sono fermi sia in accordo con quella in cui carica e filo si muovono con velocità  $v$  in direzione del filo.

# Il problema della carica in presenza di un filo infinito carico: Discussione

- Sia  $O'$  il sistema in cui filo e carica sono immobili e  $O$  quello in cui si muovono lungo  $x$  con velocità  $v$ .
- La forza sulla carica  $q$  ha in ambedue i sistemi direzione ortogonale a  $x$ , diciamo  $y$ :

$$F'_y = \frac{\lambda' q}{2 \pi \epsilon_0 y} \quad F_y = \frac{\lambda q}{2 \pi \epsilon_0 y'} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

# Il problema della carica in presenza di un filo infinito carico: Discussione

- La relazione tra le densità lineari di carica misurate nei due sistemi è

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \lambda' = \gamma \lambda'$$

- Inoltre, poichè la velocità tra i due osservatori è lungo  $x$ ,

$$y = y' \quad p_y = p'_y$$

- 

$$F_y = \frac{\lambda' q}{2 \pi \epsilon_0 y'} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = F'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

# Il problema della carica in presenza di un filo infinito carico: Discussione

- Confrontiamo le equazioni del moto per la carica  $q$  valide per ciascuno osservatore

$$\frac{dp_y}{dt} = F_y = F'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \frac{dp'_y}{dt'} = F'_y$$

- Ma  $t = \tau$ , il tempo proprio della carica poiché  $q$  è in quiete nel sistema  $O'$ . Quindi

$$dt' = d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

# Il problema della carica in presenza di un filo infinito carico: Discussione

- Pertanto l'equazione nel sistema  $O$

$$\frac{dp_y}{dt} = \frac{dp'_y}{dt'} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = F'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

è la stessa di quella nel sistema  $O'$ .

# Un altro problema della carica in presenza di un filo infinito carico

## Esercizio 5

Si consideri il problema precedente in cui, nel sistema  $O$ , la carica  $q$  si muove con velocità  $v$  in direzione  $x$  mentre il filo carico è fermo. Si studi la stessa situazione fisica nel sistema  $O'$  solidale con la carica  $q$  e si dimostri l'equivalenza dei due punti di vista.

# Effetto Doppler

## Esercizio 6

Una sorgente di onde em di frequenza  $f'$  si sposta a velocità  $v$  rispetto ad un osservatore  $O$  lungo l'asse delle  $x$ . Determinare la frequenza  $f$  dell'onda e.m. osservata da  $O$ .

$$\Delta x' = 0$$

$$\Delta x = \beta \gamma c \Delta t' \quad \Delta t = \gamma \Delta t'$$

$$\delta t_O = \Delta t + \frac{\Delta x}{c} = \Delta t + \beta \gamma \Delta t' = \gamma(1 + \beta) \Delta t'$$

$$f = \frac{1}{\gamma(1 + \beta)} f' = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} f'$$

# Esperimento di Fizeau

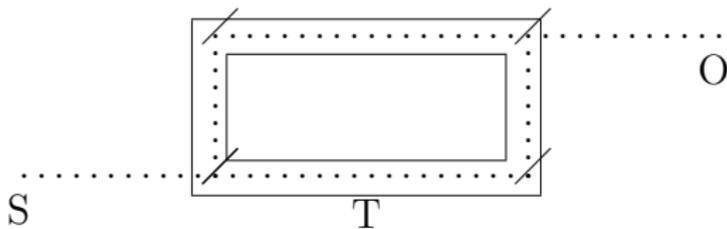
## Esercizio 7

Un raggio luminoso di frequenza  $\nu$  si divide in due: ciascuno dei due raggi percorre una distanza  $L$  prima di ricongiungersi con l'altro raggio. Il primo raggio percorre un mezzo (acqua) con indice di rifrazione  $n$  che si muove con velocità  $v$  lungo la direzione di propagazione del raggio. Il secondo raggio percorre lo stesso mezzo che si muove con velocità  $v$  ma in direzione opposta a quella di propagazione del raggio. Si misura lo sfasamento dei due raggi. Si spieghi il risultato.

- Fizeau nel 1851 ottiene il risultato sperimentale

$$\Delta\phi_{exp} = \frac{4\pi L\nu v}{c^2} (n^2 - 1)$$

## Schema esperimento di Fizeau



**Figura 3:** S è la sorgente luminosa, O il punto di osservazione delle frange di interferenza, il mezzo (acqua) con indice di rifrazione  $n$  circola nel tubo T.

## Esperimento di Fizeau: formula relativistica

- La spiegazione relativistica di questo risultato è, ricordando che  $\lambda\nu = v$  e  $v = \frac{c}{n}$

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{rel} &= 2\pi L \left( \frac{1}{\lambda_-} - \frac{1}{\lambda_+} \right) = 2\pi L\nu \left( \frac{1}{v_-} - \frac{1}{v_+} \right) = \\ &= 2\pi L\nu \left( \frac{1 - \frac{cv}{nc^2}}{\frac{c}{n} - v} - \frac{1 + \frac{cv}{nc^2}}{\frac{c}{n} + v} \right) = \\ &= 4\pi L\nu v \frac{n^2 - 1}{c^2 - n^2 v^2} \approx 4\pi L\nu v \frac{n^2 - 1}{c^2}\end{aligned}$$

## Esperimento di Fizeau: predizione classica

- La predizione classica sarebbe invece in disaccordo col risultato sperimentale

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{non\ rel} &= 2\pi L \left( \frac{1}{\lambda_-} - \frac{1}{\lambda_+} \right) = 2\pi L\nu \left( \frac{1}{v_-} - \frac{1}{v_+} \right) = \\ &= 2\pi L\nu \left( \frac{1}{\frac{c}{n} - v} - \frac{1}{\frac{c}{n} + v} \right) = \\ &= 4\pi L\nu v \frac{n^2}{c^2 - n^2 v^2} \approx 4\pi L\nu v \frac{n^2}{c^2}\end{aligned}$$

# Carica accelerata in campo elettrico costante

## Esercizio 8

Si determini il moto di una carica in un campo elettrico costante uniforme.

$$\frac{dp}{dt} = qE \quad \Rightarrow \quad p = m\gamma(v)v = qEt$$

$$m^2 v^2 = q^2 E^2 t^2 - q^2 E^2 t^2 \frac{v^2}{c^2}$$

$$v(t) = \frac{\frac{qEt}{m}}{\sqrt{1 + \frac{q^2 E^2 t^2}{m^2 c^2}}}$$

$$x(t) = \frac{mc^2}{qE} \left[ \sqrt{1 + \frac{q^2 E^2 t^2}{m^2 c^2}} - 1 \right]$$

## Le correzioni relativistiche alle orbite dei pianeti

- Per un pianeta che gravita intorno al sole su un'orbita circolare vale, classicamente, la seguente relazione tra velocità e raggio dell'orbita

$$v^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{GM}{c^2 r}$$

- Da questa formula vediamo che i pianeti per i quali ci aspettiamo di osservare **maggiori** deviazioni rispetto alle predizioni della fisica newtoniana sono quelli con raggio dell'orbita **minore**.

# Le correzioni relativistiche alle orbite dei pianeti

- Per Mercurio gli effetti relativistici sono massimi

$$\frac{GM_{\text{sole}}}{c^2} = 1.4 \times 10^3 m \quad r_{\text{mercurio}} = 5.8 \times 10^{10} m$$

$$\frac{v_{\text{mercurio}}^2}{c^2} = \frac{GM_{\text{sole}}}{c^2 r_{\text{mercurio}}} \approx 0.25 \times 10^{-7}$$

- Ci aspettiamo quindi anche in questo caso degli effetti piccoli.

# Le correzioni relativistiche alle orbite dei pianeti

- Lo spostamento angolare, misurato in radianti, del periello dell'orbita di Mercurio in un **anno mercuriano**, dovuto agli effetti relativistici, dovrebbe quindi essere **dell'ordine** di

$$\begin{aligned}\Delta\theta_{\text{periodo}}^{\text{relativistico}} &\approx \frac{2\pi v_{\text{mercurio}}^2}{c^2} = \frac{2\pi G M_{\text{sole}}}{c^2 r_{\text{mercurio}}} = \\ &= 1.6 \times 10^{-7} \text{ radianti}\end{aligned}$$

## Le correzioni relativistiche alle orbite dei pianeti

- Lo spostamento del perielio di Mercurio sperimentalmente osservato è di  $2.03622 \times 10^{-6}$  radianti per **secolo**.
- Un anno mercuriano è lungo 87.969 giorni.
- Lo spostamento del perielio di Mercurio in un anno mercuriano è pertanto di

$$\begin{aligned}\Delta\theta_{\text{periodo}}^{\text{osservato}} &= 2.03622 \times 10^{-6} \times \frac{87.969}{365 \times 100} \text{ radianti} = \\ &= 4.91 \times 10^{-7} \text{ radianti}\end{aligned}$$

dello stesso ordine di grandezza delle correzioni relativistiche previste!

## Le correzioni relativistiche alle orbite dei pianeti

- La **relatività generale** determina il fattore numerico corretto alla correzione dell'angolo di precessione per anno mercuriano

$$\begin{aligned}\Delta\theta_{\text{periodo}}^{\text{Einstein}} &= \frac{6\pi v_{\text{mercurio}}^2}{c^2} = \frac{6\pi G M_{\text{sole}}}{c^2 r_{\text{mercurio}}} = \\ &= 4.8 \times 10^{-7} \text{ radianti}\end{aligned}$$

in buon accordo con il valore osservato.

## Velocità di fuga limite e buchi neri

- In meccanica Newtoniana la velocità di fuga da un pianeta di massa  $M$  e raggio  $R$  è determinata dalla conservazione dell'energia

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{R} = 0 \Rightarrow v_{\text{fuga}}^2 = \frac{2 G M}{R}$$

- Se questa velocità supera quella della luce ci aspettiamo che **nulla**, neanche la luce, possa sfuggire all'attrazione gravitazionale del pianeta

$$\frac{2 G M}{R} > c^2 \Rightarrow R < \frac{2 G M}{c^2}$$

## Velocità di fuga limite e buchi neri

- La grandezza  $r_S \equiv \frac{2GM}{c^2}$  è una lunghezza associata pertanto ad ogni massa  $M$ . Viene chiamata il **raggio di Schwarzschild** della massa  $M$ .
- Per la terra  $r_S = 8.9 \times 10^{-3} m$ . Per il sole  $r_S = 2.9 \times 10^3 m$ .
- Quando il raggio  $R$  del pianeta è **minore** del suo  $r_S$ , l'oggetto in questione diventa pertanto un **buco nero**: dalla sua superficie nulla può sfuggire.

## Conclusioni

- Il principio di relatività — **le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento reciprocamente inerziali** — è valido sia per la meccanica newtoniana che per quella relativistica.
- Le leggi di trasformazione che descrivono la relazione tra variabili  $(x, t)$  in due sistemi inerziali in meccanica classica differiscono da quelle valide per la meccanica relativistica.

## Conclusioni

- Le trasformazioni di Lorentz sono caratterizzate dalla proprietà che la velocità di una onda e.m. è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
- In definitiva la teoria della relatività di Einstein ristabilisce la validità del principio di relatività, ben noto nel contesto della meccanica fin dai tempi di Galileo, nell'ambito dei fenomeni elettromagnetici.
- Questo ha richiesto la comprensione che il tempo dipende, allo stesso modo delle coordinate spaziali, dal sistema di riferimento inerziale in cui esso viene misurato.

## Lecture consigliate

- “The Feynman Lectures of Physics”,  
<http://www.feynmanlectures.info>
- J. Orear “Fisica Generale”, Zanichelli, 1970 Bologna
- ”Spacetime Physics”, by Edwin F. Taylor and John Archibald Wheeler, Publisher W. H. Freeman (1965,1992)