

La meccanica relativistica

Una introduzione per le secondarie

Camillo Imbimbo

Feb 2015 / TFA

Outline

- 1 Il principio di relatività galileiano
 - Riassunto
- 2 Il principio di relatività di Lorentz
 - Riassunto
- 3 La dinamica relativistica
 - Riassunto

La dinamica classica

- Il principio di **inerzia** di Galileo afferma che un corpo **non** sottoposto a forze si muove di moto rettilineo uniforme, ovvero con velocità \vec{v} costante.
- Generalizzazione di Newton: un corpo sottoposto ad una forza \vec{F} subisce una accelerazione \vec{a} proporzionale all'inverso della sua massa m :

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

Sistemi di riferimento.

- Le equazioni che governano la dinamica coinvolgono pertanto grandezze fisiche diverse come

$$m, \vec{v}, \vec{a}, \vec{F}$$

- Un fatto intuitivo è che mentre il valore numerico di alcune grandezze fisiche non dipende dal **sistema di riferimento** il valore di altre dipende da questo.

Sistemi di riferimento

- Se per esempio diciamo che un certo corpo ha una massa $m = 1\text{ kg}$ non dobbiamo specificare “rispetto a quale sistema di riferimento”. La massa sarà di 1 kg se misurata in un laboratorio fermo, in un treno in movimento, in un sistema ruotato etc.
- Grandezze di questo tipo vengono chiamate **scalari**.

Sistemi di riferimento

- Il valore numerico di altre grandezze fisiche dipende invece dal sistema di riferimento.
- Consideriamo per esempio la **posizione** di un corpo puntiforme che si trova in un punto P dello spazio.
- Un modo di rappresentare la posizione P è scegliere un punto O nello spazio e un sistema di coordinate cartesiano (x, y, z) centrato in O . La posizione di P (come ogni altro vettore) sarà rappresentata, *in questo sistema di riferimento*, da una terna di numeri reali

$$\vec{x}(P) \equiv (x, y, z)$$

Sistemi di riferimento

- Se scegliessimo però un'origine O' diversa da O ed un diverso sistema di coordinate (x', y', z') , la terna di numeri con cui descriviamo la posizione **dello stesso punto P** sarebbe diversa:

$$\vec{x}'(P) \equiv (x', y', z')$$

- È quindi importante capire quale sia in generale la relazione tra (x', y', z') e (x, y, z) .

Traslazioni

- Per esempio supponiamo che la posizione dell'origine O' sia specificata, nel sistema di coordinate O , dalle coordinate

$$\vec{x}(O') \equiv (X, Y, Z)$$

e che gli assi del sistema di coordinate (x', y', z') siano **paralleli** a quelli del primo sistema.

- Allora esiste una relazione semplice tra le coordinate di uno stesso punto P nei due sistemi

$$(x', y', z') = (x - X, y - Y, z - Z)$$

Sistemi di riferimento in moto

- Supponiamo ora che la posizione dell'origine O' del secondo sistema di riferimento, **dipenda dal tempo**.

$$\vec{x}(O') \equiv (X(t), Y(t), Z(t))$$

ma che gli assi del sistema di coordinate (x', y', z') si mantengano sempre **paralleli** a quelli del primo sistema.

- In altre parole supponiamo che **il secondo sistema di riferimento si muova rispetto al primo**.

Sistemi di riferimento in moto

Allora la relazione tra le coordinate nei due sistemi diventa dipendente dal tempo t :

$$(x', y', z') = (x - X(t), y - Y(t), z - Z(t))$$

che possiamo scrivere in maniera più compatta facendo uso della notazione vettoriale

Trasformazione delle coordinate

$$\vec{x}'(P) = \vec{x}(P) - \vec{X}(t)$$

Sistemi di riferimento in moto

- Supponiamo ora che anche il punto P si muova. In altre parole che $\vec{x}(P)$ dipenda dal tempo t

$$\vec{x}(P)(t) \equiv (x(t), y(t), z(t))$$

- Questo vuol dire che la sua velocità è non nulla, **nel sistema di riferimento O**

$$\vec{v}(P)(t) = \frac{\Delta \vec{x}(P)}{\Delta t} \equiv \left(\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}, \frac{\Delta y(t)}{\Delta t}, \frac{\Delta z(t)}{\Delta t} \right)$$

Sistemi di riferimento in moto

- Dalle trasformazioni delle coordinate deduciamo quindi che

$$\vec{v}'(P) = \frac{\Delta \vec{x}'(P)}{\Delta t} = \vec{v}(P) - \frac{\Delta \vec{X}(t)}{\Delta t} = \vec{v}(P) - \vec{V}(t)$$

dove

$$\vec{V}(t) = \frac{\Delta \vec{X}(t)}{\Delta t}$$

è la velocità del sistema di riferimento O' rispetto a quello centrato in O .

Sistemi di riferimento in moto

Trasformazioni delle velocità

La velocità \vec{v} è una grandezza che dipende dal sistema di riferimento nella quale è misurata. La relazione tra le velocità dello stesso punto materiale P misurate in due sistemi di riferimento che si muovono uno relativamente all'altro con velocità $\vec{V}(t)$ è

$$\vec{v}'(P) = \vec{v}(P) - \vec{V}(t)$$

Sistemi di riferimento in moto

- Poiché l'accelerazione del punto P è

$$\vec{a}(P) = \frac{\Delta \vec{v}(P)}{\Delta t}$$

concludiamo anche che

Trasformazioni delle accelerazioni

$$\vec{a}'(P) = \vec{a}(P) - \frac{\Delta \vec{V}(t)}{\Delta t}$$

Invarianza galileiana

- Torniamo al principio inerziale di Galileo, che afferma che un corpo non sottoposto a forze si muove con accelerazione \vec{a} nulla. Abbiamo appena visto che se l'accelerazione è nulla in un dato sistema di riferimento, **essa non sarà nulla in un generico sistema di riferimento che si muove rispetto al primo.**

Domanda

In quali sistemi di riferimento vale dunque il principio di Galileo? E la legge della dinamica di Newton?

Sistemi di riferimento inerziali

- Dalla legge di trasformazione delle accelerazioni deduciamo che

$$\vec{a}'(P) = \vec{a}(P) \Leftrightarrow \frac{\Delta \vec{V}(t)}{\Delta t} = 0$$

- Chiamiamo dunque **sistemi di riferimento inerziali** quelli che si muovono con velocità costante rispetto ad un sistema dato. Vedi Figura. 1.
- Per quanto detto, se il principio di Galileo vale in un sistema di riferimento dato, allora è pure valido in tutti i sistemi inerziali **rispetto ad esso**.

Sistemi di riferimento inerziali

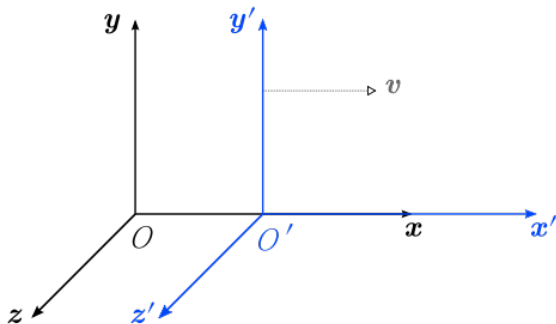


Figura 1: Sistemi di riferimento inerziali O e O' .¹

¹ By Krea (Own work) CC BY-SA 3.0, <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>, via Wikimedia Commons.

Sistemi di riferimento inerziali e legge di Newton

- Assumiamo che la massa m di un corpo non dipenda dal sistema di riferimento inerziale.
- **Se** anche la forza esercitata sul corpo puntiforme **non** dipende dal sistema di riferimento

$$\vec{F}' = \vec{F}$$

allora:

Invarianza galileiana della dinamica

La validità delle equazioni della dinamica di Newton in un dato sistema di coordinate implica la sua validità in tutti i sistemi di riferimento inerziali rispetto a questo

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \vec{F} = \vec{F}' \quad \vec{a} = \vec{a}' \Rightarrow \vec{F}' = m\vec{a}'$$

Sistemi di riferimento inerziali e legge di Newton

- Le equazioni della dinamica di Newton per due osservatori reciprocamente inerziali sono pertanto **identiche**.
- Si dice che le equazioni della dinamica di Newton sono **invarianti** per trasformazioni galileiane

$$\vec{x}'(P) = \vec{x}(P) - \vec{V} t$$

- Tutti gli esperimenti meccanici effettuati da due osservatori reciprocamente inerziali saranno pertanto **equivalenti**. Poiché tutti i sistemi inerziali sono fisicamente equivalenti, non è possibile, attraverso misure fisiche effettuate da uno dei due osservatori, determinare il proprio moto rispetto ad un sistema privilegiato.

Relatività galileiana

Arbitrarietà del sistema di riferimento

In meccanica classica pertanto, così come non esiste un **punto** speciale dello spazio (arbitrarietà dell'origine del sistema delle coordinate), o una **direzione** speciale (arbitrarietà nella scelta dell'orientazione del sistema di coordinate) non esiste neanche una **velocità** speciale (arbitrarietà nella scelta del sistema inerziale).

Sistemi di riferimento non inerziali

- Le leggi della meccanica **non** sono invarianti per trasformazioni tra sistemi non inerziali.
- Per esempio, su un sistema **accelerato** rispetto ad uno inerziale, il principio di Galileo **non** è valido:

$$\vec{F} = 0 = \vec{a}(P) \Rightarrow \vec{a}' = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} \neq \vec{F}' = \vec{F} = 0$$

Esercizio 1

Si scrivano le leggi della dinamica per un sistema di riferimento che ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$ rispetto ad un sistema di riferimento inerziale.

Riassunto

- La descrizione analitica delle variabili geometriche (posizione, velocità, accelerazione etc) coinvolte nella formulazione delle leggi fisiche dipende da alcune scelte arbitrarie: in particolare dalla scelta del **sistema di riferimento**.
- Il principio di **relatività** è la richiesta che la forma delle equazioni della dinamica sia la stessa in tutti i sistemi di riferimento **inerziali**.

Riassunto

- Le **trasformazioni di Galileo** descrivono il cambiamento delle coordinate spaziali nel passaggio da un sistema inerziale ad un altro, in meccanica classica.
- Le trasformazioni di Galileo lasciano l'accelerazione invariante.
- Affinché le equazioni della dinamica di Newton siano invarianti per trasformazioni di Galileo è necessario che le forze misurate in sistemi di riferimento reciprocamente inerziali siano le stesse.

Elettromagnetismo

- I fenomeni elettromagnetici sono descritti dalle equazioni di Maxwell.
- Le equazioni di Maxwell non sono invarianti per trasformazioni di Galileo.
- Vediamo perché.

Distribuzione di carica lineare in movimento.

- Supponiamo che in un sistema di coordinate O , con coordinate (x, y, z) , valgano le equazioni di Maxwell.
- Si consideri una distribuzione di carica lineare λ lungo asse x , in movimento lungo x con velocità v . Si veda la Figura 2.
- In un punto $P = (0, y, 0)$ i campi elettrici e magnetici determinati dalle equazioni di Maxwell sono:

$$\vec{E}(P) = \left(0, \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}, 0\right) \quad \vec{B}(P) = \left(0, 0, \frac{\lambda v}{2\pi\epsilon_0 y c^2}\right)$$

Esercizio 2

Derivare i valori dei campi elettrici e magnetici qui sopra.

Distribuzione di carica lineare in movimento.

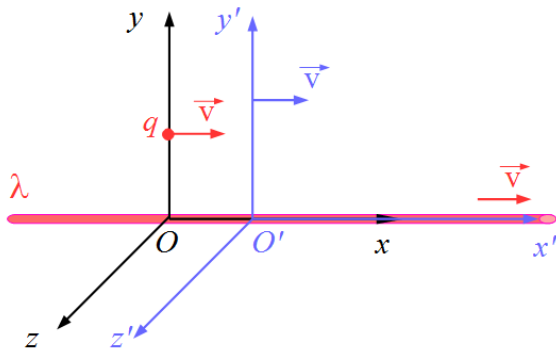


Figura 2: Filo carico con densità di carica λ e carica q in movimento con velocità $\vec{v} = v \vec{e}_x$.

Distribuzione di carica lineare in movimento.

- Poniamo in P una carica q che si muove lungo x con velocità $\vec{v} = (v, 0, 0)$.
- La forza sulla carica q è data dalla forza di Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

- Quindi:
$$\vec{F} = \left(0, \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 z} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), 0\right)$$

La stessa situazione in un sistema in movimento.

- Consideriamo lo stesso fenomeno in un sistema di riferimento O' che si sposta lungo x con velocità $\vec{v} = (v, 0, 0)$.
- Nel sistema O' la distribuzione di carica λ e la carica q sono immobili. L' unica forza è quella elettrica.
- Quindi:

$$\vec{F}' = \left(0, \frac{\lambda' q}{2 \pi \epsilon_0 y'}, 0 \right)$$

Confronto galileiano

- Assumiamo che l'invarianza Galileiana si estenda alla carica elettrica

$$q' = q$$

- Inoltre: $\Delta x = \Delta x' \Rightarrow \lambda = \frac{\Delta q}{\Delta x} = \frac{\Delta q'}{\Delta x'} = \lambda'$
- Vediamo quindi che

$$\vec{F}' = \left(0, \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 y}, 0\right) \neq \vec{F} = \left(0, \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 y} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), 0\right)$$

Conclusione:

Se valgono le leggi di trasformazioni galileiane, le equazioni di Maxwell non possono valere in tutti i sistemi inerziali.

Un sistema di riferimento privilegiato?

- Se si insiste sulla validità delle **trasformazioni galileiane** di spazio e tempo, la sola soluzione dall'impasse descritto è quella di supporre che esista un sistema di riferimento privilegiato in cui valgono le equazioni di Maxwell.
- L'ipotesi di un tale sistema di riferimento sembra anche naturale se si discute il fenomeno più importante previsto dalle equazioni di Maxwell: quello delle **onde elettromagnetiche**.

Le onde elettromagnetiche

- Le equazioni di Maxwell prevedono l'esistenza di onde che si propagano con una velocità costante c : la luce, le onde radio, i raggi X sono esempi, sperimentalmente misurabili, di tale fenomeno.
- La costante c emerge dalle due costanti ϵ_0 e μ_0 che appaiono nelle equazioni di Maxwell e che descrivono le leggi di Coulomb e Ampère

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \qquad B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

Le onde elettromagnetiche

Esercizio 3

Verificare che la combinazione $\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ ha le dimensioni di una velocità al quadrato

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

- Il grande risultato di Maxwell fu proprio dimostrare che le equazioni del campo elettromagnetico ammettono soluzioni di tipo onda che si propagano con velocità c .

Le onde elettromagnetiche

- Se un'onda si propaga con velocità c in direzione x in un dato sistema di riferimento, allora, se vale la trasformazione galileiana delle velocità, quest'onda viaggia alla velocità $c - v$ in un sistema di riferimento che si sposta con velocità costante v rispetto al primo.
- Questo è un altro modo di dedurre che le equazioni di Maxwell non sono invarianti per trasformazioni galileiane.
- Misurando la velocità della luce in un sistema di riferimento che si muove con velocità v rispetto al sistema di riferimento privilegiato in cui la velocità della luce è c , dovrebbe dunque essere possibile determinare v .

Esperimenti di Michelson-Morley

- I tentativi di misurare v attraverso fenomeni elettromagnetici, ovvero di verificare la non-invarianza galileiana dei fenomeni elettromagnetici dettero tutti risultati negativi.
- Una possibilità logica a questo punto era quella di modificare le equazioni di Maxwell, in modo che si accordassero al principio di relatività di Galileo.
- L'altra possibilità, perseguita da Einstein, era quella di modificare il principio di relatività di Galileo e, conseguentemente, le equazioni della dinamica di Newton.

Le trasformazioni di Lorentz

- Insistiamo dunque sul principio che la fisica sia indipendente dal particolare sistema di riferimento inerziale in cui ci si trova.
- Le equazioni di Maxwell prevedono l'esistenza di onde che si propagano con una velocità determinata c , indipendente dal sistema di riferimento.
- Le trasformazioni di coordinate, velocità, etc tra un sistema di riferimento inerziale ed un altro devono essere tali che un'onda che viaggia a velocità c in un sistema, faccia lo stesso in un sistema inerziale rispetto a questo.

Le trasformazioni di Lorentz

- Consideriamo una onda e.m. che si propaga nel sistema (x, y, z, t) lungo la direzione x : l'equazione della traiettoria è

$$x = c t \Rightarrow x^2 - c^2 t^2 = 0$$

- Se vogliamo che l'onda si propaghi con la stessa velocità nel sistema (x', y', z', t') che si muove lungo l'asse delle x con velocità v è necessario che

$$(x')^2 - c^2 (t')^2 = 0$$

Le trasformazioni di Lorentz

- Assumiamo dunque che debba essere

$$x^2 - c^2 t^2 = (x')^2 - c^2 (t')^2$$

- Assumiamo inoltre una relazione lineare tra le coordinate dei due sistemi

$$x' = A(v)x + B(v)ct \quad ct' = C(v)x + D(v)ct$$

- Otteniamo

$$\begin{aligned} A(v)^2 - C(v)^2 &= 1 & -B(v)^2 + D(v)^2 &= 1 \\ A(v)B(v) &= C(v)D(v) \end{aligned}$$

La soluzione

- La (una) soluzione delle equazioni precedenti è

$$D(v) = A(v) \quad B(v) = C(v) \quad A^2(v) - B^2(v) = 1$$

- Che possiamo, se vogliamo, parametrizzare in termini di funzioni iperboliche

$$A(v) = D(v) = \cosh \theta(v) \quad B(v) = C(v) = \sinh \theta(v)$$

Le trasformazioni di Lorentz

- Otteniamo in definitiva

$$x' = A(v)x + B(v)ct$$

$$ct' = B(v)x + A(v)ct$$

$$A^2(v) - B^2(v) = 1$$

Le trasformazioni di Lorentz

- Si consideri l'origine del sistema di coordinate O' . Per definizione essa ha $x' = 0$

$$0 = A(v) x + B(v) c t$$

- D'altronde, nel sistema O l'origine di O' si sposta con velocità v lungo x , ovvero

$$x = v t$$

- Quindi

$$0 = A(v) v t + B(v) c t \quad \Rightarrow \quad \frac{B(v)}{A(v)} = -\frac{v}{c}$$

Le trasformazioni di Lorentz

- Tenendo conto che $A^2 - B^2 = 1$, otteniamo in definitiva

$$A(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma(v)$$

$$B(v) = -\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv -\beta(v) \gamma(v)$$

Le trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - vt)$$
$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

Composizione delle velocità

- Supponiamo che un punto materiale P si muova con velocità $\vec{v}'(P)$ nel sistema O' , che, a sua volta, si muove con velocità \vec{V} rispetto ad un sistema O .
- Quale è la velocità $\vec{v}(P)$ di P nel sistema O ?

Composizione delle velocità

- Dalle trasformazioni di Lorentz

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma \Delta x - \beta \gamma c \Delta t \\ c \Delta t' &= -\beta \gamma \Delta x + \gamma c \Delta t\end{aligned}$$

- Quindi

$$\begin{aligned}\frac{\Delta x'}{c \Delta t'} &= \frac{\gamma \Delta x - \beta \gamma c \Delta t}{-\beta \gamma \Delta x + \gamma c \Delta t} = \\ &= \frac{\frac{\Delta x}{c \Delta t} - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c} \frac{\Delta x}{c \Delta t}}\end{aligned}$$

Composizione delle velocità

- Ricordando che $\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = v'$, $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$:

Composizione delle velocità

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}}$$

- Per esempio: se $v = c$, qualunque sia V , $v' = c$!

Dilatazione temporale

- Si considerino due **eventi** che nel sistema O' hanno $\Delta x' = 0$: per esempio un orologio posto nell'origine di O' .
- Le trasformazioni di Lorentz **inverse** danno quindi

$$\begin{aligned}\Delta x &= \gamma \Delta x' + \beta \gamma c \Delta t' = c \Delta t' \\ c \Delta t &= \beta \gamma \Delta x' + \gamma c \Delta t' = \gamma c \Delta t'\end{aligned}$$

- L'orologio, fermo in O' , appare dunque **rallentato** nel sistema O in cui si muove con velocità v

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Contrazione spaziale

- Si considerino ora due eventi **simultanei** nel sistema O , $\Delta t = 0$. Per esempio le posizioni delle estremità di un regolo, immobile in O' , misurate simultaneamente in O .
- Le trasformazioni di Lorentz danno

$$\Delta x' = \gamma \Delta x + \beta \gamma c \Delta t = \gamma \Delta x$$

$$c \Delta t' = -\beta \gamma \Delta x + \gamma c \Delta t = -\beta \gamma \Delta x$$

- Vediamo quindi che la lunghezza Δx del regolo misurata da O è contratta rispetto alla lunghezza $\Delta x'$ dello stesso regolo nel sistema O' in cui esso non si muove

$$\Delta x = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta x'$$

Simultaneità e causalità

- Poiché il tempo non è invariante per trasformazioni di Lorentz, eventi simultanei in un sistema di riferimento possono non esserlo in un altro.
- È anche possibile che per due eventi, $\Delta t > 0$ in un certo sistema di riferimento e $\Delta t' < 0$ in un altro.

Un paradosso?

Questo sembra introdurre un potenziale **paradosso**: se un evento (x_1, t_1) è la **causa** fisica dell'evento (x_2, t_2) , sarebbe illogico (acausale) se in qualche sistema di riferimento l'evento (x_2, t_2) **antecedesse** (x_1, t_1) , ovvero che l'effetto precedesse la sua causa fisica!

Simultaneità e causalità

- Fortunatamente per la coerenza logica della meccanica relativistica questo non può succedere.
- Per convincersene si incominci con l'osservare che, per qualunque trasformazione di Lorentz, vale

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2$$

- La grandezza $\Delta s^2 \equiv c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2$ è pertanto un **invariante relativistico**.

Simultaneità e causalità

- Supponiamo dunque che esistano due eventi per i quali $\Delta t > 0$ in un sistema O e $\Delta t' < 0$ in un altro sistema O' .
- Poiché $\Delta t'$ varia con continuità con la velocità del sistema di riferimento O' rispetto al sistema originale O , deduciamo che esiste un **terzo** sistema inerziale di coordinate (x'', t'') per il quale $\Delta t'' = 0$.
- Pertanto

$$\Delta s^2 = c^2(\Delta t'')^2 - (\Delta x'')^2 = -(\Delta x'')^2 < 0$$

Simultaneità e causalità

- Si noti che se per due eventi $\Delta s^2 < 0$, allora

$$|\Delta x| > c|\Delta t|$$

ovvero i due eventi non possono essere causalmente connessi perché ogni evento fisico si propaga con velocità al più uguale a quella della luce.

Simultaneità e causalità

Solo eventi non causalmente connessi (ovvero con $\Delta s^2 < 0$) possono avere ordinamenti temporali diversi in sistemi di riferimento diversi.

Riassunto

- Le equazioni di Maxwell non sono invarianti per trasformazioni di Galileo, ma lo sono per trasformazioni di Lorentz.
- Le trasformazioni di Lorentz si deducono dalla richiesta che la luce viaggi alla stessa velocità in tutti i sistemi di riferimento tra loro inerziali.
- Le leggi elettromagnetismo sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali se assumiamo che coordinate **e** tempo si trasformano secondo le leggi di Lorentz e non quelle di Galileo.

Riassunto

- La conseguenza più sorprendente delle trasformazioni di Lorentz è che il concetto di **simultaneità** è dipendente dal sistema di riferimento. In contrasto con la meccanica galileiana per la quale il tempo è indipendente dal sistema di riferimento, in meccanica relativistica due eventi possono essere simultanei in un sistema di riferimento senza esserlo in un altro.
- Nonostante questo, l'**ordinamento temporale** di eventi **causalmente connessi** è indipendente dal sistema di riferimento: questo garantisce che la **causalità** non sia violata in meccanica relativistica.

L'impulso

- Vogliamo capire quale sia la “corretta” definizione di impulso in meccanica relativistica.
- Una definizione “corretta” deve avere la proprietà che, se l'impulso è conservato in una data situazione fisica (per esempio in un sistema isolato) in un certo sistema di coordinate, allora dovrà essere conservato in qualunque altro sistema inerziale.
- Vediamo perché la definizione newtoniana $\vec{p} = m \vec{v}$ è “corretta” nel senso galileiano del termine.

La conservazione del momento in meccanica classica

- Supponiamo che in un processo fisico (per esempio un urto) il momento si conservi in un dato sistema di coordinate O

$$\sum_j m_j \vec{v}_j = \sum_j \tilde{m}_j \vec{\tilde{v}}_j$$

dove le quantità tildate sono le grandezze delle particelle dopo l'urto.

- Sappiamo che, in meccanica classica, $\vec{v}'_j = \vec{v}_j - \vec{V}$ sono le velocità per un osservatore O' che si muove a velocità \vec{V} rispetto a O .

Invarianza galileiana della conservazione del momento

- Dunque nel sistema O'

$$\begin{aligned}\sum_j m_j \vec{v}'_j &= \sum_j m_j (\vec{v}_j - \vec{V}) = \sum_j \tilde{m}_j \vec{v}_j - \sum_j m_j \vec{V} = \\ &= \sum_j \tilde{m}_j \vec{v}'_j + \sum_j \tilde{m}_j \vec{V} - \sum_j m_j \vec{V} = \\ &= \sum_j \tilde{m}_j \vec{v}'_j + (\tilde{M} - M) \vec{V}\end{aligned}$$

dove M e \tilde{M} sono le masse totali rispettivamente prima e dopo l'urto.

Invarianza galileiana della conservazione del momento e della massa

- Concludiamo che:

Conservazione di massa e momento classici

La legge di conservazione del momento totale classico è invariante per trasformazioni galileiane se la massa totale di un sistema isolato si conserva.

- Osserviamo che l'invarianza galileiana della legge di conservazione del momento è intimamente dipendente dalla legge classica delle composizioni delle velocità.

La conservazione del momento in meccanica relativistica

- Se ripetiamo lo stesso calcolo usando la composizione relativistica delle velocità ci rendiamo conto che una legge di conservazione per la somma delle grandezze $m \vec{v}$ non sarebbe invariante per trasformazioni di Lorentz:

$$\sum_j m_j \vec{v}'_{j,x} = \sum_j m_j \frac{(\vec{v}_{j,x} - V)}{1 + \frac{\vec{v}_{j,x} V}{c^2}} \neq \sum_j \tilde{m}_j \vec{v}'_j$$

La difficoltà

- Il momento classico è definito attraverso la velocità $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Benchè sia Δx che Δt abbiano trasformazioni di Lorentz “semplici” (cioè lineari) il loro rapporto (la velocità) non si trasforma linearmente.
- La difficoltà che abbiamo evidenziato con l’invarianza relativistica della conservazione dell’impulso $m\vec{v}$ è direttamente connessa col fatto che le velocità non si trasformano in modo semplice per trasformazioni di Lorentz.
- Questo suggerisce di modificare la definizione di impulso, definendo un impulso che si trasformi altrettanto semplicemente che x per trasformazioni di Lorentz.

Il tempo proprio

- L'idea della nuova definizione di impulso è sostituire Δt nella definizione classica di impulso $m \frac{\Delta x}{\Delta t}$ con un tempo "speciale" associato al moto di un corpo puntiforme in movimento.
- Questo tempo speciale è il tempo misurato da un osservatore **solidale** con la particella in questione. Cioè un osservatore per il quale la particella è ferma. Chiamiamo questo tempo il **tempo proprio** della particella.

Il tempo proprio

- La relazione tra tempo proprio e il tempo t di un osservatore che vede la particella muoversi con velocità v (lungo x) è facilmente deducibile dalle trasformazioni di Lorentz.
- Si ponga $x' = 0$ e $t' = \tau$ nelle trasformazioni di Lorentz:

$$t = \gamma(v) \tau = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Quindi

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Momento relativistico

- Definiamo dunque il momento relativistico (lungo x) come

$$p_x = m \frac{\Delta x}{\Delta \tau}$$

- Passando ad un sistema di riferimento che si muove con velocità V rispetto ad O :

$$\begin{aligned} p'_x &= m \frac{\Delta x'}{\Delta \tau} = \gamma(V) m \frac{\Delta x}{\Delta \tau} - \beta(V) \gamma(V) m c \frac{\Delta t}{\Delta \tau} \\ &= \gamma(V) p_x - \beta(V) \gamma(V) (m c \gamma(v)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m c \frac{\Delta t'}{\Delta \tau} &= m c \gamma(v') = \\ &= -\beta(V) \gamma(V) p_x + \gamma(V) (m c \gamma(v)) \end{aligned}$$

Momento relativistico ed energia

- Notiamo dunque che $(p_x, m c \gamma(v))$ si trasformano, andando da O a O' esattamente come $(x, c t)$.
- Definiamo dunque una grandezza E che ha le dimensioni di una **energia**

$$\frac{E}{c} \equiv m c \gamma(v) = \frac{m c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Conservazione momento relativistico ed energia

- Dimostriamo ora che se le grandezze (p_x, E) sono conservate in un processo fisico in un dato sistema di coordinate, lo saranno in qualunque altro sistema di coordinate inerziale rispetto al primo.
- Supponiamo cioè che in un sistema O valga

$$\sum_j p_x^{(j)} = \sum_j (\tilde{p})_x^{(j)} \quad \sum_j E^{(j)} = \sum_j \tilde{E}^{(j)}$$

dove le quantità tildate sono quelle dopo l'urto.

Conservazione momento relativistico

- Allora il momento totale è conservato in un qualunque sistema O' che si muove a velocità V rispetto a O :

$$\begin{aligned}\sum_j (p')_x^{(j)} &= \sum_j \gamma(V) p_x^{(j)} - \beta(V) \gamma(V) \frac{E^{(j)}}{c} = \\ &= \sum_j \gamma(V) (\tilde{p})_x^{(j)} - \beta(V) \gamma(V) \frac{\tilde{E}^{(j)}}{c} = \\ &= \sum_j \tilde{p}'_x^{(j)}\end{aligned}$$

Conservazione energia

- Anche $\sum_j (E')^{(j)}$ è conservata nel sistema O'

$$\begin{aligned}\sum_j \frac{(E')^{(j)}}{c} &= -\sum_j \beta(V) \gamma(V) p_x^{(j)} + \gamma(V) \frac{E^{(j)}}{c} = \\ &= -\sum_j \beta(V) \gamma(V) \tilde{p}_x^{(j)} + \gamma(V) \frac{\tilde{E}^{(j)}}{c} = \\ &= \sum_j \frac{(\tilde{E}')^{(j)}}{c}\end{aligned}$$

Momento ed energia relativistici

Momento ed energia relativistici

$$\begin{aligned}\vec{p} &= m \left(\frac{\Delta x}{\Delta \tau}, \frac{\Delta y}{\Delta \tau}, \frac{\Delta z}{\Delta \tau} \right) = \\ &= m \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t} \right) = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ E &= \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned}$$

Il limite non-relativistico

- Per $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$

$$\vec{p} \approx m \vec{v}$$

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

- Si noti che nella meccanica relativistica la massa non si conserva separatamente dall'energia: è possibile che in un dato processo la massa si converta in energia. Questo è il principio fisico sottostante le reazioni nucleari.

Le equazioni della dinamica relativistica

- Le equazioni di Maxwell sono invarianti per trasformazioni di Lorentz per costruzione.
- $\vec{F} = m \vec{a}$ sono invarianti per trasformazioni di Galileo. Dobbiamo modificarle in modo che risultino invarianti per trasformazioni di Lorentz.
- È più illuminante riscrivere le equazioni di Newton in termini del momento

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}_{non-rel}}{\Delta t}$$

dove $\vec{p}_{non-rel} = m \vec{v}$ è il momento non-relativistico.

Le equazioni della dinamica relativistica

- La discussione precedente suggerisce di rimpiazzare le equazioni della dinamica relativistica con

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta \tau} = \vec{f} \quad \frac{1}{c} \frac{\Delta E}{\Delta \tau} = f^0$$

dove (\vec{f}, f^0) sono delle generalizzazioni relativistiche della forza che si trasformano come $(\vec{p}, \frac{E}{c})$.

Le equazioni della dinamica relativistica

- Si noti che

$$\begin{aligned}\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 &= c^2 m^2 \\ \Rightarrow \frac{E}{c^2} \frac{dE}{d\tau} - \vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{d\tau} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{E}{c} f^0 - \vec{p} \cdot \vec{f} &= 0 \\ \Rightarrow f^0 &= \frac{c\vec{p}}{E} \cdot \vec{f} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{f}}{c}\end{aligned}$$

Le equazioni della dinamica relativistica

- Quindi le equazioni della dinamica si riscrivono

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta \tau} = \vec{f} \quad \frac{\Delta E}{\Delta \tau} = \vec{v} \cdot \vec{f}$$

- Ricordando che $\Delta \tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t$

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \vec{f} \quad \frac{\Delta E}{\Delta t} = \vec{v} \cdot \vec{f} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Le equazioni della dinamica relativistica

- È quindi naturale identificare

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \vec{f} = \vec{F}$$

con la forza \vec{F} non-relativistica, in maniera analoga alla relazione

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \vec{p} = m \vec{v} \equiv \vec{p}_{non-rel}$$

Le equazioni della dinamica relativistica

- In questo modo le equazioni della dinamica relativistica assumono la stessa forma di quelle non relativistiche

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F}$$

Il problema della carica in presenza di un filo infinito carico

Esercizio 4

Si riconsideri il problema della carica q in presenza di un filo carico infinito λ . Si discuta come la descrizione della situazione nel sistema in cui carica e filo sono fermi sia in accordo con quella in cui carica e filo si muovono con velocità v in direzione del filo.

Il problema della carica in presenza di un filo infinito carico: Discussione

- Sia O' il sistema in cui filo e carica sono immobili e O quello in cui si muovono lungo x con velocità v .
- La forza sulla carica q ha in ambedue i sistemi direzione ortogonale a x , diciamo y :

$$F'_y = \frac{\lambda' q}{2 \pi \epsilon_0 y} \quad F_y = \frac{\lambda q}{2 \pi \epsilon_0 y'} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Il problema della carica in presenza di un filo infinito carico: Discussione

- La relazione tra le densità lineari di carica misurate nei due sistemi è

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \lambda' = \gamma \lambda'$$

- Inoltre, poichè la velocità tra i due osservatori è lungo x ,

$$y = y' \quad p_y = p'_y$$

-

$$F_y = \frac{\lambda' q}{2 \pi \epsilon_0 y'} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = F'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Il problema della carica in presenza di un filo infinito carico: Discussione

- Confrontiamo le equazioni del moto per la carica q valide per ciascuno osservatore

$$\frac{dp_y}{dt} = F_y = F'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \frac{dp'_y}{dt'} = F'_y$$

- Ma $t = \tau$, il tempo proprio della carica poiché q è in quiete nel sistema O' . Quindi

$$dt' = d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

Il problema della carica in presenza di un filo infinito carico: Discussione

- Pertanto l'equazione nel sistema O

$$\frac{dp_y}{dt} = \frac{dp'_y}{dt'} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = F'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

è la stessa di quella nel sistema O' .

Un altro problema della carica in presenza di un filo infinito carico

Esercizio 5

Si consideri il problema precedente in cui, nel sistema O , la carica q si muove con velocità v in direzione x mentre il filo carico è fermo. Si studi la stessa situazione fisica nel sistema O' solidale con la carica q e si dimostri l'equivalenza dei due punti di vista.

Effetto Doppler

Esercizio 6

Una sorgente di onde em di frequenza f' si sposta a velocità v rispetto ad un osservatore O lungo l'asse delle x . Determinare la frequenza f dell'onda e.m. osservata da O .

$$\Delta x' = 0$$

$$\Delta x = \beta \gamma c \Delta t' \quad \Delta t = \gamma \Delta t'$$

$$\delta t_O = \Delta t + \frac{\Delta x}{c} = \Delta t + \beta \gamma \Delta t' = \gamma(1 + \beta) \Delta t'$$

$$f = \frac{1}{\gamma(1 + \beta)} f' = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} f'$$

Esperimento di Fizeau

Esercizio 7

Un raggio luminoso di frequenza ν si divide in due: ciascuno dei due raggi percorre una distanza L prima di ricongiungersi con l'altro raggio. Il primo raggio percorre un mezzo (acqua) con indice di rifrazione n che si muove con velocità v lungo la direzione di propagazione del raggio. Il secondo raggio percorre lo stesso mezzo che si muove con velocità v ma in direzione opposta a quella di propagazione del raggio. Si misura lo sfasamento dei due raggi. Si spieghi il risultato.

- Fizeau nel 1851 ottiene il risultato sperimentale

$$\Delta\phi_{exp} = \frac{4\pi L\nu v}{c^2} (n^2 - 1)$$

Schema esperimento di Fizeau

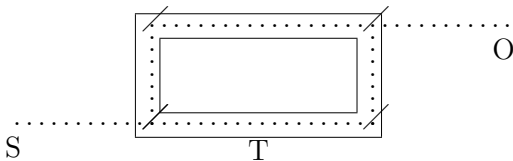


Figura 3: S è la sorgente luminosa, O il punto di osservazione delle frange di interferenza, il mezzo (acqua) con indice di rifrazione n circola nel tubo T.

Esperimento di Fizeau: formula relativistica

- La spiegazione relativistica di questo risultato è, ricordando che $\lambda\nu = v$ e $v = \frac{c}{n}$

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{rel} &= 2\pi L \left(\frac{1}{\lambda_-} - \frac{1}{\lambda_+} \right) = 2\pi L\nu \left(\frac{1}{v_-} - \frac{1}{v_+} \right) = \\ &= 2\pi L\nu \left(\frac{1 - \frac{cv}{nc^2}}{\frac{c}{n} - v} - \frac{1 + \frac{cv}{nc^2}}{\frac{c}{n} + v} \right) = \\ &= 4\pi L\nu v \frac{n^2 - 1}{c^2 - n^2 v^2} \approx 4\pi L\nu v \frac{n^2 - 1}{c^2}\end{aligned}$$

Esperimento di Fizeau: predizione classica

- La predizione classica sarebbe invece in disaccordo col risultato sperimentale

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{non\ rel} &= 2\pi L \left(\frac{1}{\lambda_-} - \frac{1}{\lambda_+} \right) = 2\pi L\nu \left(\frac{1}{v_-} - \frac{1}{v_+} \right) = \\ &= 2\pi L\nu \left(\frac{1}{\frac{c}{n} - v} - \frac{1}{\frac{c}{n} + v} \right) = \\ &= 4\pi L\nu v \frac{n^2}{c^2 - n^2 v^2} \approx 4\pi L\nu v \frac{n^2}{c^2}\end{aligned}$$

Carica accelerata in campo elettrico costante

Esercizio 8

Si determini il moto di una carica in un campo elettrico costante uniforme.

$$\frac{dp}{dt} = qE \quad \Rightarrow \quad p = m\gamma(v)v = qEt$$

$$m^2 v^2 = q^2 E^2 t^2 - q^2 E^2 t^2 \frac{v^2}{c^2}$$

$$v(t) = \frac{\frac{qEt}{m}}{\sqrt{1 + \frac{q^2 E^2 t^2}{m^2 c^2}}}$$

$$x(t) = \frac{mc^2}{qE} \left[\sqrt{1 + \frac{q^2 E^2 t^2}{m^2 c^2}} - 1 \right]$$

Le correzioni relativistiche alle orbite dei pianeti

- Per un pianeta che gravita intorno al sole su un'orbita circolare vale, classicamente, la seguente relazione tra velocità e raggio dell'orbita

$$v^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{GM}{c^2 r}$$

- Da questa formula vediamo che i pianeti per i quali ci aspettiamo di osservare **maggiori** deviazioni rispetto alle predizioni della fisica newtoniana sono quelli con raggio dell'orbita **minore**.

Le correzioni relativistiche alle orbite dei pianeti

- Per Mercurio gli effetti relativistici sono massimi

$$\frac{GM_{\text{sole}}}{c^2} = 1.4 \times 10^3 m \quad r_{\text{mercurio}} = 5.8 \times 10^{10} m$$

$$\frac{v_{\text{mercurio}}^2}{c^2} = \frac{GM_{\text{sole}}}{c^2 r_{\text{mercurio}}} \approx 0.25 \times 10^{-7}$$

- Ci aspettiamo quindi anche in questo caso degli effetti piccoli.

Le correzioni relativistiche alle orbite dei pianeti

- Lo spostamento angolare, misurato in radianti, del perielio dell'orbita di Mercurio in un **anno mercuriano**, dovuto agli effetti relativistici, dovrebbe quindi essere **dell'ordine** di

$$\begin{aligned}\Delta\theta_{\text{periodo}}^{\text{relativistico}} &\approx \frac{2\pi v_{\text{mercurio}}^2}{c^2} = \frac{2\pi G M_{\text{sole}}}{c^2 r_{\text{mercurio}}} = \\ &= 1.6 \times 10^{-7} \text{ radianti}\end{aligned}$$

Le correzioni relativistiche alle orbite dei pianeti

- Lo spostamento del perielio di Mercurio sperimentalmente osservato è di 2.03622×10^{-6} radianti per **secolo**.
- Un anno mercuriano è lungo 87.969 giorni.
- Lo spostamento del perielio di Mercurio in un anno mercuriano è pertanto di

$$\begin{aligned}\Delta\theta_{\text{periodo}}^{\text{osservato}} &= 2.03622 \times 10^{-6} \times \frac{87.969}{365 \times 100} \text{ radianti} = \\ &= 4.91 \times 10^{-7} \text{ radianti}\end{aligned}$$

dello stesso ordine di grandezza delle correzioni relativistiche previste!

Le correzioni relativistiche alle orbite dei pianeti

- La **relatività generale** determina il fattore numerico corretto alla correzione dell'angolo di precessione per anno mercuriano

$$\begin{aligned}\Delta\theta_{\text{periodo}}^{\text{Einstein}} &= \frac{6\pi v_{\text{mercurio}}^2}{c^2} = \frac{6\pi G M_{\text{sole}}}{c^2 r_{\text{mercurio}}} = \\ &= 4.8 \times 10^{-7} \text{ radianti}\end{aligned}$$

in buon accordo con il valore osservato.

Velocità di fuga limite e buchi neri

- In meccanica Newtoniana la velocità di fuga da un pianeta di massa M e raggio R è determinata dalla conservazione dell'energia

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{R} = 0 \Rightarrow v_{\text{fuga}}^2 = \frac{2 G M}{R}$$

- Se questa velocità supera quella della luce ci aspettiamo che **nulla**, neanche la luce, possa sfuggire all'attrazione gravitazionale del pianeta

$$\frac{2 G M}{R} > c^2 \Rightarrow R < \frac{2 G M}{c^2}$$

Velocità di fuga limite e buchi neri

- La grandezza $r_S \equiv \frac{2GM}{c^2}$ è una lunghezza associata pertanto ad ogni massa M . Viene chiamata il **raggio di Schwarzschild** della massa M .
- Per la terra $r_S = 8.9 \times 10^{-3} m$. Per il sole $r_S = 2.9 \times 10^3 m$.
- Quando il raggio R del pianeta è **minore** del suo r_S , l'oggetto in questione diventa pertanto un **buco nero**: dalla sua superficie nulla può sfuggire.

Conclusioni

- Il principio di relatività — **le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento reciprocamente inerziali** — è valido sia per la meccanica newtoniana che per quella relativistica.
- Le leggi di trasformazione che descrivono la relazione tra variabili (x, t) in due sistemi inerziali in meccanica classica differiscono da quelle valide per la meccanica relativistica.

Conclusioni

- Le trasformazioni di Lorentz sono caratterizzate dalla proprietà che la velocità di una onda e.m. è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
- In definitiva la teoria della relatività di Einstein ristabilisce la validità del principio di relatività, ben noto nel contesto della meccanica fin dai tempi di Galileo, nell'ambito dei fenomeni elettromagnetici.
- Questo ha richiesto la comprensione che il tempo dipende, allo stesso modo delle coordinate spaziali, dal sistema di riferimento inerziale in cui esso viene misurato.

Lecture consigliate

- “The Feynman Lectures of Physics”,
<http://www.feynmanlectures.info>
- J. Orear “Fisica Generale”, Zanichelli, 1970 Bologna
- ”Spacetime Physics”, by Edwin F. Taylor and John Archibald Wheeler, Publisher W. H. Freeman (1965,1992)