

Appunti di Fisica Teorica

Anni accademici 2001-20

Camillo Imbimbo

*Dipartimento di Fisica dell'Università di Genova
Via Dodecaneso, I-16136, Genova, Italia*

Indice

I	Teoria non-relativistica	5
1	Seconda Quantizzazione per Fermioni	5
2	Diagonalizzazione di Hamiltoniane quadratiche	8
3	Funzioni di partizione di oscillatori e caratteri	11
4	Caratteri e rappresentazioni di $SU(N)$	15
5	Buche e Particelle	18
6	Gas di elettroni: I ordine in teoria delle perturbazioni	21
7	Fononi	24
8	Radiazione di Dipolo: Emissione	29
9	Modello di Anderson-Fano	34
10	Modello di Bogoliubov per superfluidi	37
11	Gas di Fermi debolmente interagente	42
12	Simmetrie in Seconda Quantizzazione	49
II	Teoria Relativistica	52
13	Relazione tra gruppi ed algebre di Lie	52
13.1	I sottogruppi abeliani ad un parametro	54
14	$SO(3)$ e $SU(2)$	55
15	Rappresentazioni di un gruppo e rappresentazioni dell'algebra	58
15.1	L'estensione centrale dell'algebra di Galileo	61

16 Le rappresentazioni unitarie del gruppo di Poincaré	63
16.1 Caso massivo	66
16.1.1 La base del sistema di riposo	67
16.1.2 La base dell'elicità	68
16.2 Vettori di polarizzazione nella base di elicità per spin 1 massivo	70
17 Relazione tra Spin e Statistica in Seconda Quantizzazione	72
18 Spinori	75
18.1 Proprietà di coniugazione delle rappresentazioni spinoriali . . .	75
19 Le matrici di Dirac come “interwiners” di rappresentazioni di Lorentz	82
20 P per gli spinori di Dirac	86
21 C per gli spinori di Dirac	87
22 Relazione tra P e C per gli spinori di Dirac	91
23 T per gli spinori di Dirac	93
24 L'azione di P,C,T sullo spazio di Fock	95
24.1 P	95
24.2 C	96
24.3 T	98
24.4 Decadimento di un vettore V in una coppia di vettori (W, \bar{W})	99
24.4.1 Invarianza di Lorentz	100
24.4.2 Invarianza per P e C	102
24.4.3 Ampiezza invarianti pari per P	105
24.4.4 Ampiezze invarianti dispari sotto P	107
24.5 Decadimento di un vettore V in una coppia di fermioni $(\psi, \bar{\psi})$	108
24.5.1 Invarianza di Lorentz	108
24.5.2 Invarianza per P e C	109
24.5.3 Ampiezza invarianti	112
25 Vettori di Polarizzazione	113
25.1 Vettori di polarizzazione del campo di Dirac	114

25.1.1	Vettori di polarizzazione con spin definito nel sistema di riposo	114
25.1.2	Vettori di polarizzazione con elicità definita	117
25.2	Derivazione alternativa di $S(P)$	119
26	Matrici densità	120
26.1	Matrici densità per vettori massivi	122
26.2	Matrici densità per il campo di Dirac	123
27	Causalità	124
28	Propagatori	126
28.1	Propagatore per vettori massivi	128
28.2	Propagatore per il campo di Dirac	129
29	Tempi di decadimento e sezioni d'urto	130
29.1	Decadimenti	131
29.1.1	Decadimento di uno in due	131
29.2	Diffusione di 2 particelle	132
29.2.1	Sezione d'urto di due in due	132
29.2.2	Diffusione da potenziale	133
30	Il fotone	134
30.1	Propagatore del campo fotonico nella gauge di Landau	138
30.2	Lo spazio degli stati di Gupta-Bleuler	141
30.3	Propagatore del campo fotonico in un gauge covariante generico	145
31	Introduzione alla simmetria di BRS	147
32	I fattori di forma dell'elettrone	151
33	I determinanti funzionali	153
33.1	Il determinante per l'oscillatore armonico in 1d	153
33.2	Determinanti funzionali e tracce	157
33.3	Campo scalare in campo magnetico costante	159
33.4	Campo scalare in campo elettrico costante	164

Parte I

Teoria non-relativistica

1 Seconda Quantizzazione per Fermioni

Sia $\{\psi_\alpha(\eta_i)\}$ una base di $\mathcal{H}^{(1)}$, lo spazio degli stati di singola particella. Una base per $\mathcal{H}_A^{(N)}$, lo spazio degli stati a N -particelle antisimmetrizzato è

$$\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_N}(\eta_1, \dots, \eta_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^\sigma \psi_{\alpha_{\sigma(1)}}(\eta_1) \cdots \psi_{\alpha_{\sigma(N)}}(\eta_N) \quad (1.1)$$

Vogliamo descrivere questa base in termini di numeri di occupazione. A questo scopo è necessario stabilire un ordine per l'insieme $\{\alpha\}$ degli indici che denotano la base di $\mathcal{H}^{(1)}$, stabilendo che $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k \cdots$. Sia dunque $|n_1, \dots, n_k, \dots\rangle$ lo stato che corrisponde a $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_N}(\eta_1, \dots, \eta_N)$ con $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_N$ e $\sum_i n_i = N$.

Gli operatori di distruzione e creazione a_α e a_β^\dagger agiscono sulla base dei numeri di occupazione secondo:

$$\begin{aligned} a_{\alpha_k} |n_1, \dots, n_k, \dots\rangle &= \epsilon_{\alpha_k}(\{n_i\}) n_k |n_1, \dots, n_k - 1, \dots\rangle \\ a_{\alpha_k}^\dagger |n_1, \dots, n_k, \dots\rangle &= \tilde{\epsilon}_{\alpha_k}(\{n_i\}) (1 - n_k) |n_1, \dots, n_k + 1, \dots\rangle \end{aligned} \quad (1.2)$$

dove $\epsilon_{\alpha_k}(\{n_i\})$ e $\tilde{\epsilon}_{\alpha_k}(\{n_i\})$

sono dei segni che vogliamo determinare dalla richiesta che gli osservabili di singola particella $F^{(1)} = \sum_i f^{(1)}(\xi_i)$ siano rappresentati da $\sum_{\alpha, \beta} f_{\alpha\beta}^{(1)} a_\alpha^\dagger a_\beta$. Partiamo dalla definizione degli stati ad una particella:

$$a_{\alpha_k} |0, \dots, 0, \dots\rangle \leftrightarrow \psi_{\alpha_k}(\eta) \quad (1.3)$$

Si vede facilmente che su questi stati $F^{(1)} = \sum_i f^{(1)}(\xi_i)$ è in effetti rappresentato da $\sum_{\alpha, \beta} f_{\alpha\beta}^{(1)} a_\alpha^\dagger a_\beta$ con una scelta per i segni ϵ_{α_k} e $\tilde{\epsilon}_{\alpha_k}$ banale (cioè eguale ad 1). Consideriamo ora l'azione di $F^{(1)} = \sum_i f^{(1)}(\xi_i)$ sugli stati a due particelle. Siano α_1 e α_2 gli indici associati, con $\alpha_1 < \alpha_2$. Nella rappresentazione

di prima-quantizzazione:

$$\begin{aligned}
F^{(1)}\psi_{\alpha_1\alpha_2} &= \sum_{\alpha} [f_{\alpha\alpha_1}^{(1)}\psi_{\alpha\alpha_2} + f_{\alpha\alpha_2}^{(1)}\psi_{\alpha_1\alpha}] \\
&= \sum_{\alpha < \alpha_2} f_{\alpha\alpha_1}^{(1)} |0, \dots, n_{\alpha} = 1, \dots, n_{\alpha_2} = 1, \dots\rangle + \\
&\quad + (-1) \sum_{\alpha_2 < \alpha} f_{\alpha\alpha_1}^{(1)} |0, \dots, n_{\alpha_2} = 1, \dots, n_{\alpha} = 1, \dots\rangle \\
&\quad + (-1) \sum_{\alpha < \alpha_1} f_{\alpha\alpha_2}^{(1)} |0, \dots, n_{\alpha} = 1, \dots, n_{\alpha_1} = 1, \dots\rangle \\
&\quad + \sum_{\alpha_1 < \alpha} f_{\alpha\alpha_2}^{(1)} |0, \dots, n_{\alpha_1} = 1, \dots, n_{\alpha} = 1, \dots\rangle \quad (1.4)
\end{aligned}$$

D'altra parte in seconda quantizzazione la stessa espressione diventa:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}^{(1)} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta} |0, \dots, n_{\alpha_1} = 1, \dots, n_{\alpha_2} = 1, \dots\rangle = \\
&\quad \sum_{\alpha} f_{\alpha\alpha_1}^{(1)} \epsilon_{\alpha_1}(\{n_{\alpha_1} = 1, n_{\alpha_2} = 1\}) a_{\alpha}^{\dagger} |0, \dots, n_{\alpha_2} = 1, \dots\rangle + \\
&\quad \quad + \sum_{\alpha} f_{\alpha\alpha_2}^{(1)} \epsilon_{\alpha_2}(\{n_{\alpha_1} = 1, n_{\alpha_2} = 1\}) a_{\alpha}^{\dagger} |0, \dots, n_{\alpha_1} = 1, \dots\rangle = \\
&= \sum_{\alpha} f_{\alpha\alpha_1}^{(1)} \epsilon_{\alpha_1}(\{n_{\alpha_1} = 1, n_{\alpha_2} = 1\}) \tilde{\epsilon}_{\alpha}(\{n_{\alpha_2} = 1\}) |\{n_{\alpha} = 1, n_{\alpha_2} = 1\}\rangle + \\
&\quad + \sum_{\alpha} f_{\alpha\alpha_2}^{(1)} \epsilon_{\alpha_2}(\{n_{\alpha_1} = 1, n_{\alpha_2} = 1\}) \tilde{\epsilon}_{\alpha}(\{n_{\alpha_1} = 1\}) |\{n_{\alpha} = 1, n_{\alpha_1} = 1\}\rangle \quad (1.5)
\end{aligned}$$

Confrontando la (1.4) con la (1.5) otteniamo

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\alpha_1}(\{n_{\alpha_1} = 1, n_{\alpha_2} = 1\}) \tilde{\epsilon}_{\alpha}(\{n_{\alpha_2} = 1\}) &= \begin{cases} +1, & \text{se } \alpha < \alpha_2; \\ -1, & \text{se } \alpha > \alpha_2 \end{cases} \equiv \sigma(\alpha, \alpha_2) \\
\epsilon_{\alpha_2}(\{n_{\alpha_1} = 1, n_{\alpha_2} = 1\}) \tilde{\epsilon}_{\alpha}(\{n_{\alpha_1} = 1\}) &= \begin{cases} -1, & \text{se } \alpha < \alpha_1; \\ +1, & \text{se } \alpha > \alpha_1 \end{cases} = -\sigma(\alpha, \alpha_1) \quad (1.6)
\end{aligned}$$

Dalla prima delle (1.6) deduciamo che

$$\tilde{\epsilon}_{\alpha}(\{n_{\alpha_2} = 1\}) = \sigma(\alpha, \alpha_2) \epsilon_{\alpha_1}(\{n_{\alpha_1} = 1, n_{\alpha_2} = 1\}) \quad (1.7)$$

dove $\alpha_1 < \alpha_2$. La seconda dice che $\tilde{\epsilon}_{\alpha}(\{n_{\alpha_1} = 1\}) = -\sigma(\alpha, \alpha_1) \epsilon_{\alpha_2}(\{n_{\alpha_1} = 1, n_{\alpha_2} = 1\})$, od equivalentemente, dopo aver ridenominato gli indici, che

$$\tilde{\epsilon}_{\alpha}(\{n_{\alpha_2} = 1\}) = -\sigma(\alpha, \alpha_2) \epsilon_{\alpha_1}(\{n_{\alpha_1} = 1, n_{\alpha_2} = 1\}) \quad (1.8)$$

dove $\alpha_1 > \alpha_2$. Confrontando la (1.7) con (1.8) concludiamo dunque che

$$\epsilon_{\alpha_1}(\{n_{\alpha_1} = 1, n_{\alpha_2} = 1\}) = -\epsilon_{\alpha_2}(\{n_{\alpha_1} = 1, n_{\alpha_2} = 1\}) \quad (1.9)$$

In sintesi, se scegliamo convenzionalmente che $\epsilon_{\alpha_1}(\{n_{\alpha_1} = 1, n_{\alpha_2} = 1\}) = 1$ per $\alpha_1 < \alpha_2$, abbiamo:

$$\tilde{\epsilon}_{\alpha_1}(\{n_{\alpha_2} = 1\}) = \sigma(\alpha_1, \alpha_2) \quad \epsilon_{\alpha_1}(\{n_{\alpha_1} = 1, n_{\alpha_2} = 1\}) = \sigma(\alpha_1, \alpha_2) \quad (1.10)$$

qualunque siano α_1 e α_2 .

Dal ragionamento che abbiamo svolto appare chiara la generalizzazione del risultato (1.10) al caso di stati con $N > 2$ particelle. Il segno associato ad un creatore a_α^\dagger quando agisce su uno stato ad N particelle rappresentato dalla sequenza ordinata di indici $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ dipende dal numero di indici α_i (modulo 2) di questa sequenza che devono essere “attraversati” dall’indice α per formare una sequenza ordinata di $N + 1$ indici $\{\alpha_1, \dots, \alpha, \dots, \alpha_N\}$. Equivamente il segno in questione è il segno della permutazione necessaria per portare l’insieme $\{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ nell’insieme ordinato $\{\alpha_1, \dots, \alpha, \dots, \alpha_N\}$. In maniera analoga, il segno associato ad un distruttore a_α è dato dal numero (modulo 2) di indici della sequenza che il distruttore deve attraversare prima di incontrare l’indice α . Per riassumere

$$\tilde{\epsilon}_\alpha(\{n_{\alpha_k}\}) = \epsilon_\alpha(\{n_{\alpha_k}\}) = (-1)^{\sum_{\alpha_k < \alpha} n_{\alpha_k}} \quad (1.11)$$

Da queste formule consegue che i distruttori e i creatori per fermioni soddisfano a relazioni di *anti-commutazione* piuttosto che di commutazione. Prendiamo infatti due indici α e β e scegliamo per esempio $\alpha < \beta$. Consideriamo l’azione, per esempio, dei corrispondenti creatori su uno stato ad N particelle rappresentato dalla sequenza ordinata $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$. Supponiamo di agire prima con a_β^\dagger e poi con a_α^\dagger : il segno totale ottenuto sarà $(-1)^{\sum_{\alpha_k < \beta} n_{\alpha_k}} \times (-1)^{\sum_{\alpha_k < \alpha} n_{\alpha_k}} = (-1)^{\sum_{\alpha < \alpha_k < \beta} n_{\alpha_k}}$. Facendo invece agire prima a_α^\dagger creiamo uno stato rappresentato da una sequenza $\{\alpha_1, \dots, \alpha, \dots, \alpha_N\}$ ed un segno $(-1)^{\sum_{\alpha_k < \alpha} n_{\alpha_k}}$. Agendo poi con a_β^\dagger l’indice $\beta > \alpha$ deve attraversare l’indice α oltre agli altri indici $\alpha_k < \beta$. Il segno totale sarà dunque $(-1)^{\sum_{\alpha < \alpha_k < \beta} n_{\alpha_k}} \times (-1)$, per cui $\{a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger\} = 0$, dove $\{, \}$ rappresenta l’anticommutatore. Un ragionamento analogo vale per l’azione di due distruttori o di un distruttore e di un creatore associati a due indici diversi α e β .

Discutiamo ora l’azione di $a_\alpha^\dagger a_\alpha$ e di $a_\alpha a_\alpha^\dagger$. Supponiamo che lo stato sul quale questi operatori agiscono non contenga lo stato α . Allora il primo

operatore si annulla. Il secondo riproduce lo stesso stato con un segno $+1$ in quanto i due segni associati con il distruttore ed il creatore sono identici. Ragionamento analogo vale per il caso in cui i due operatori agiscono su uno stato che contiene lo stato α .

In definitiva

$$\{a_\alpha, a_\beta\} = \{a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger\} = 0 \quad \{a_\alpha, a_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta} \quad (1.12)$$

2 Diagonalizzazione di Hamiltoniane quadratiche

Consideriamo una Hamiltoniana quadratica negli operatori di creazioni e distruzione (consideriamo per concretezza il caso *bosonico*) a_i^\dagger, a_i , con $i = 1, \dots, N$:

$$\hat{H} = \sum_{i,j} h_{ij} a_i^\dagger a_j + \sum_{i,j} g_{ij} a_i a_j + \sum_{i,j} g_{ij}^* a_i^\dagger a_j^\dagger \quad (2.1)$$

Introduciamo le matrici \mathbf{h} e \mathbf{g} , i cui elementi sono, rispettivamente h_{ij} e g_{ij} . Possiamo supporre \mathbf{g} simmetrica:

$$\mathbf{g}^t = \mathbf{g} \quad (2.2)$$

La richiesta che \hat{H} sia hermitiana, $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$ implica che \mathbf{h} sia una matrice hermitiana:

$$\mathbf{h}^\dagger = \mathbf{h} \quad (2.3)$$

Sia \mathbf{z} un vettore le cui componenti z_μ sono gli operatori di creazione e distruzione:

$$z_\mu = (a_i, a_i^\dagger) \quad (2.4)$$

con $\mu = 1, \dots, 2N$. Poiché $z_\mu^\dagger = (a_i^\dagger, a_i)$, abbiamo

$$\mathbf{z}^\dagger = \mathbf{\Omega} \mathbf{z} \quad (2.5)$$

dove $\mathbf{\Omega}$ è la seguente matrice $2N \times 2N$:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{N \times N} \\ \mathbf{1}_{N \times N} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Riscriviamo \hat{H} nella forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} K_{\mu\nu} z_\mu z_\nu - \frac{1}{2} \text{Tr } \mathbf{h} \quad (2.7)$$

dove $(\mathbf{K})_{\mu\nu} = K_{\mu\nu}$ è la matrice $2N \times 2N$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{g} & \mathbf{h}^* \\ \mathbf{h} & \mathbf{g}^* \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Nella (2.7) abbiamo tenuto conto delle relazioni di commutazioni canoniche che, in termini dei z_μ , si scrivono

$$[z_\mu, z_\nu] = \epsilon_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

dove $(\epsilon)_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu}$ è la seguente matrice $2N \times 2N$

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{N \times N} \\ -\mathbf{1}_{N \times N} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Dalla definizione (2.8) di \mathbf{K} deduciamo le seguenti relazioni

$$\mathbf{K}^t = \mathbf{K} \quad \mathbf{K}^\dagger = \mathbf{\Omega} \mathbf{K} \mathbf{\Omega} \quad (2.11)$$

Una trasformazione *canonica* delle z_μ

$$\mathbf{z} = \mathbf{U} \mathbf{z}' \quad (2.12)$$

deve lasciare invariante le relazioni di commutazione (2.9): questo implica che \mathbf{U} deve essere *simplettica*:

$$\mathbf{U} \epsilon \mathbf{U}^t = \epsilon \quad (2.13)$$

Diagonalizzare l'Hamiltoniana \mathcal{H} significa determinare una matrice simplettica \mathbf{U} tale che

$$\mathbf{U}^t \mathbf{K} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

dove ω è una matrice $N \times N$, *diagonale* (e quindi simmetrica). Siano ω_i con $i = 1, \dots, N$ gli elementi diagonali di ω : l'Hamiltoniana \mathcal{H} diventa nelle variabili \mathbf{z}'

$$\mathcal{H} = \sum_i \omega_i (a'_i)^\dagger a'_i + \frac{1}{2} \sum_i (\omega_i - h_{ii}) \quad (2.15)$$

Moltiplicando la relazione (2.14) a sinistra per ϵ ed utilizzando la relazione (2.13), otteniamo

$$\mathbf{U}^{-1} \epsilon \mathbf{K} \mathbf{U} = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

od, equivalentemente,

$$\epsilon \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Le relazioni (2.16-2.17) implicano che la matrice simplettica \mathbf{U} diagonalizza la matrice $\tilde{\mathbf{K}}$ definita da

$$\tilde{\mathbf{K}} \equiv \epsilon \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{h} & \mathbf{g}^* \\ -\mathbf{g} & -\mathbf{h}^* \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Pertanto le colonne della matrice \mathbf{U} sono gli autovettori di $\tilde{\mathbf{K}}$:

$$\sum_{\nu} \tilde{K}_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} = \omega_{\lambda} U_{\mu\lambda} \quad (2.19)$$

dove $\omega_{\lambda} \equiv (\omega_i, -\omega_i)$. Le frequenze $\pm \omega_i$ sono pertanto le $2N$ soluzioni dell'equazione secolare associata a $\tilde{\mathbf{K}}$:

$$\begin{aligned} P(\omega) &\equiv \det \left(\tilde{\mathbf{K}} - \omega \mathbf{1}_{2N \times 2N} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{h} - \omega \mathbf{1}_{N \times N} & \mathbf{g}^* \\ -\mathbf{g} & -\mathbf{h}^* - \omega \mathbf{1}_{N \times N} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

OSSERVAZIONE: Notiamo che la prima delle relazioni (2.11) implica

$$\tilde{\mathbf{K}}^t = -\mathbf{K} \epsilon = \epsilon \tilde{\mathbf{K}} \epsilon \quad (2.21)$$

Pertanto se \mathbf{v}_{ω} è un autovettore di $\tilde{\mathbf{K}}$ con autovalore ω , allora

$$\epsilon \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{v}_{\omega} = \omega \epsilon \mathbf{v}_{\omega} \quad (2.22)$$

Utilizzando (2.21) otteniamo

$$\tilde{\mathbf{K}}^t (\epsilon \mathbf{v}_{\omega}) = -\omega (\epsilon \mathbf{v}_{\omega}) \quad (2.23)$$

Pertanto $-\omega$ è un autovalore di $\tilde{\mathbf{K}}^t$: ma lo spettro di $\tilde{\mathbf{K}}^t$ coincide con quello di $\tilde{\mathbf{K}}$ in quanto l'equazione secolare di $\tilde{\mathbf{K}}^t$ è identica a quella di $\tilde{\mathbf{K}}$ (Eq. (2.20)). In conclusione, se ω è un autovalore di $\tilde{\mathbf{K}}$ anche $-\omega$ è nello spettro di $\tilde{\mathbf{K}}$: in altre parole il polinomio caratteristico $P(\omega)$ di $\tilde{\mathbf{K}}$ è funzione solo di ω^2 . Naturalmente, questo è in accordo con l'equazione agli autovalori per $\tilde{\mathbf{K}}$, Eq. (2.17)

3 Funzioni di partizione di oscillatori e caratteri

Prendiamo come spazio di singola particella la rappresentazione di spin 1 del gruppo delle rotazioni: $\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}_{j=1}$. Consideriamo i distruttori e creatori a_m, a_m^\dagger con $m = -1, 0, 1$ che distruggono e creano stati con $J_z = m = -1, 0, 1$. Consideriamo la funzione di partizione seguente sullo spazio di Fock associato agli operatori a_m, a_m^\dagger :

$$Z(q, z) = \text{Tr} e^{-\beta \sum_m a_m^\dagger a_m + i\theta \sum_m m a_m^\dagger a_m} = \text{Tr} e^{-\beta \hat{N} + i\theta \hat{J}_z} \quad (3.1)$$

dove \mathcal{N} è l'operatore numero di particelle, \hat{J}_z l'operatore momento angolare lungo l'asse delle z sullo spazio di Fock e

$$q \equiv e^{-\beta} \quad z \equiv e^{i\theta} \quad (3.2)$$

Nel caso di bosonico otteniamo

$$Z_{bosoni}(q, z) = \frac{1}{1 - zq} \frac{1}{1 - q/z} \frac{1}{1 - q} \quad (3.3)$$

mentre nel caso fermionico abbiamo

$$Z_{fermioni}(q, z) = (1 + zq)(1 + q/z)(1 + q) \quad (3.4)$$

D'altra parte la (3.1) si scrive

$$Z(q, z) = \sum_{N=0}^{\infty} q^N \chi_N(z) \quad (3.5)$$

dove $\chi_N(z)$ è quello che viene chiamato il *carattere* della rappresentazione del gruppo delle rotazioni degli stati di livello N :

$$\chi_N(z) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_N} e^{i\theta \hat{J}_z} \quad (3.6)$$

$\text{Tr}_{\mathcal{H}_N}$ denota la traccia sul sottospazio \mathcal{H}_N degli stati di livello N . Notiamo che il carattere della rappresentazione *irriducibile* di spin j fissato è dato da

$$\chi^{(j)}(z) = \sum_{m=-j}^{m=j} z^m = \frac{z^{j+1/2} - z^{-(j+1/2)}}{z^{1/2} - z^{-1/2}} \quad (3.7)$$

Notiamo che

$$\chi^{(j)}(z) = \chi^{(j)}(1/z) = (\chi^{(j)}(z))^* \quad (3.8)$$

La rappresentazione del gruppo delle rotazioni sullo spazio \mathcal{H}_N degli stati di livello N sarà in generale *riducibile*: siamo interessati a conoscere le sue componenti irriducibili. Data una rappresentazione del gruppo delle rotazioni *riducibile* che è la somma diretta di rappresentazioni di spin j_α , con $\alpha = 1, \dots$ il suo carattere è la somma dei caratteri $\chi_{j_\alpha}(z)$. Dunque se a livello N sono presenti gli spin $\{j_1, j_2, \dots\}$, avremo che

$$\chi_N(z) = \sum_{\alpha} \chi_{j_\alpha}(z) \quad (3.9)$$

Notiamo la circostanza seguente. Possiamo definire un prodotto scalare sullo spazio dei caratteri nel modo seguente: se $\chi(z)$ e $\chi'(z)$ sono i caratteri di due rappresentazioni poniamo la definizione

$$(\chi, \chi') \equiv \frac{1}{2} \oint \frac{dz}{2\pi iz} |z^{1/2} - z^{-1/2}|^2 \chi(z) \chi'(z) \quad (3.10)$$

dove l'integrale è lungo un contorno che circonda il punto $z = 0$. Notiamo che rispetto a questo prodotto scalare i caratteri delle rappresentazioni irriducibili sono ortonormali:

$$(\chi^{(j)}, \chi^{(j')}) = \delta_{j,j'} \quad (3.11)$$

Infatti

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \oint \frac{dz}{2\pi iz} |z^{1/2} - z^{-1/2}|^2 \chi^{(j)}(z) \chi^{(j')}(z) = \\ & \frac{1}{2} \oint \frac{dz}{2\pi iz} (z^{-(j+1/2)} - z^{j+1/2}) (z^{(j'+1/2)} - z^{-(j'+1/2)}) = \\ & = \frac{1}{2} \oint \frac{dz}{2\pi iz} (z^{j'-j} + z^{j-j'} - z^{(j+j'+1)} - z^{-(j+j'+1)}) = \delta_{j,j'} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Pertanto il numero (intero e positivo) dato dall'espressione

$$n_{N;j} \equiv (\chi^{(j)}, \chi_N(z)) \quad (3.13)$$

è precisamente il numero di volte che lo spin j appare a livello N. Introduciamo la funzione generatrice $F_j(q)$ per i numeri $n_{N;j}$:

$$F_j(q) \equiv \sum_{N=0}^{\infty} n_{N;j} q^N = (\chi^{(j)}, Z(q, z)) \quad (3.14)$$

Vogliamo pertanto calcolare $F_j(q)$ a partire da (3.3) e (3.4). Consideriamo il caso bosonico.

$$\begin{aligned}
F_j(q) &= \frac{1}{2} \oint \frac{dz}{2\pi iz} (z^{1/2} - z^{-1/2}) (z^{-(j+1/2)} - z^{j+1/2}) Z(q, z) = \\
&= \frac{1}{2} \oint \frac{dz}{2\pi iz} \frac{(z-1)(1-z^{2j+1})}{z^{1+j}} Z(q, z) \\
&= \frac{1}{2(1-q)} \oint \frac{dz}{2\pi iz} \frac{(z-1)(1-z^{2j+1})}{z^{1+j}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} q^{n+m} z^{n-m} \\
&= \frac{1}{2(1-q)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \oint \frac{dz}{2\pi iz} \frac{z-1-z^{2j+2}+z^{2j+1}}{z^{1+j+m-n}} q^{n+m} \\
&= \frac{1}{2(1-q)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \oint \frac{dz}{2\pi iz} [z^{n-m-j} - z^{n-m-j-1} - \\
&\quad - z^{n-m+j+1} + z^{n-m+j}] q^{n+m} \\
&= \frac{1}{2(1-q)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [\delta_{n,m+j} - \delta_{n,m+j+1} - \delta_{n,m-j-1} + \delta_{n,m-j}] q^{n+m} \\
&= \frac{1}{2(1-q)} \left[\sum_{m=0}^{\infty} q^{j+2m} - \sum_{m=0}^{\infty} q^{j+1+2m} - \sum_{m=j+1}^{\infty} q^{-j-1+2m} + \sum_{m=j}^{\infty} q^{-j+2m} \right] \\
&= \frac{1}{2(1-q)} \left[\frac{q^j}{1-q^2} - \frac{q^{j+1}}{1-q^2} - \frac{q^{j+1}}{1-q^2} + \frac{q^j}{1-q^2} \right] \\
&= \frac{q^j}{(1-q)} \frac{1-q}{1-q^2} = \frac{q^j}{(1-q^2)} \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Da (3.15) deduciamo che

$$n_{N;j} = \delta_{N,j} + \delta_{N-2,j} + \delta_{N-4,j} + \dots \tag{3.16}$$

Deriviamo lo stesso risultato in una maniera diversa, che passa per il calcolo esplicito dei caratteri $\chi_N(z)$ delle rappresentazioni a livello N. La (3.3) dà

$$Z_{bosoni}(q, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (zq)^i (q/z)^j q^k = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q^{i+j+k} z^{i-j} \tag{3.17}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\chi_N^{(bos)}(z) &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} z^{i-j} = \sum_{i=0}^N z^i \frac{1 - z^{-N-1+i}}{1 - z^{-1}} = \\
&= \frac{z}{z-1} \left[\frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} - z^{-N-1} \frac{1 - z^{2(N+1)}}{1 - z^2} \right] = \\
&= \frac{z^{-N}}{(1-z)^2(1+z)} \left[(1+z)(z^{2N+2} - z^{N+1}) + 1 - z^{2N+2} \right] = \\
&= \frac{z^{-N}}{(1-z)^2(1+z)} \left[z^{2N+3} - z^{N+1} - z^{N+2} + 1 \right] = \\
&= \frac{z^{-N}(1 - z^{N+1})(1 - z^{N+2})}{(1-z)^2(1+z)} \tag{3.18}
\end{aligned}$$

I numeri $n_{N;j}$ sono ottenuti pertanto calcolando gli integrali

$$\begin{aligned}
n_{N;j} &= \frac{1}{2} \oint \frac{dz}{2\pi iz} (z^{1/2} - z^{-1/2}) (z^{-(j+1/2)} - z^{j+1/2}) \chi_N(z) = \\
&= \frac{1}{2} \oint \frac{dz}{2\pi iz} \frac{(z-1)(1 - z^{2j+1})}{z^{1+j}} \chi_N(z) \\
&= \frac{1}{2} \oint \frac{dz}{2\pi iz} \frac{1}{z^{1+j+N}} \frac{(z^{2j+1} - 1)(z^{N+1} - 1)(z^{N+2} - 1)}{(1 - z^2)} \\
&= \frac{1}{2} \oint \frac{dz}{2\pi iz} \frac{1}{z^{1+j+N}(1 - z^2)} \left[z^{2j+2N+4} - z^{2j+N+2} + z^{N+1} + \right. \\
&\quad \left. + z^{N+2} + z^{2j+1} - z^{2N+3} - z^{2j+N+3} - 1 \right] = \\
&= \frac{1}{2} \oint \frac{dz}{2\pi iz} \frac{1}{(1 - z^2)} \left[z^{j+N+3} - z^{j+1} + z^{-j} + \right. \\
&\quad \left. + z^{1-j} + z^{j-N} - z^{N+2-j} - z^{j+2} - z^{-N-j-1} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \oint \frac{dz}{2\pi iz} \sum_{k=0}^{\infty} \left[z^{2k+j+N+3} - z^{2k+j+1} + z^{2k-j} + \right. \\
&\quad \left. + z^{2k+1-j} + z^{2k+j-N} - z^{2k+N+2-j} - z^{2k+j+2} - z^{2k-N-j-1} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \oint \frac{dz}{2\pi iz} \sum_{k=0}^{\infty} \left[z^{2k-j} + z^{2k+1-j} + z^{2k+j-N} - z^{2k+N+2-j} - z^{2k-N-j-1} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[1 + \oint \frac{dz}{2\pi iz} \sum_{k=0}^{\infty} [z^{2k+j-N} - z^{2k+N+2-j} - z^{2k-N-j-1}] \right] \equiv \\
&\equiv \frac{1}{2} [1 + \epsilon_a - \epsilon_b - \epsilon_c] \tag{3.19}
\end{aligned}$$

dove $\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c$ sono numeri che valgono 0 o 1:

$$\begin{aligned}
\epsilon_a &= \oint \frac{dz}{2\pi iz} \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+j-N} \\
\epsilon_b &= \oint \frac{dz}{2\pi iz} \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+N+2-j} \\
\epsilon_c &= \oint \frac{dz}{2\pi iz} \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k-N-j-1} \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Notiamo che $\epsilon_a = 1$ se $j = N, N-2, \dots$ ed $\epsilon_a = 0$ altrimenti. Inoltre $\epsilon_b = 1$ se N è pari e j dispari o se N è dispari e j pari, mentre $\epsilon_b = 0$ altrimenti. Infine $\epsilon_c = 1$ se $j = N+2, N+4, \dots$ ed $\epsilon_c = 0$ altrimenti. Abbiamo dunque i due casi:

(i) N è *pari*. Se j è dispari, allora $\epsilon_a = \epsilon_c = 0$ mentre $\epsilon_b = 1$. Dunque $n_{N;j} = 0$. Se j è pari allora $\epsilon_b = 0$. Inoltre se $j = 0, 2, \dots, N$ allora $\epsilon_a = 1$ e $\epsilon_c = 0$, e dunque $n_{N;j} = 1$; se invece $j = N+2, \dots$ allora $\epsilon_a = 0$ e $\epsilon_c = 1$, e dunque $n_{N;j} = 0$. In conclusione se N è pari, gli spin che sono presenti a livello N sono $j = 0, 2, 4, \dots, N$.

(ii) N è *dispari*. Se j è pari, allora $\epsilon_a = \epsilon_c = 0$ mentre $\epsilon_b = 1$. Dunque $n_{N;j} = 0$. Se invece j è dispari allora $\epsilon_b = 0$. Inoltre se $j = 1, 3, \dots, N$ allora $\epsilon_a = 1$ e $\epsilon_c = 0$, e dunque $n_{N;j} = 1$; se invece $j = N+2, \dots$ allora $\epsilon_a = 0$ e $\epsilon_c = 1$, e dunque $n_{N;j} = 0$. In conclusione se N è dispari, gli spin che sono presenti a livello N sono $j = 1, 3, 5, \dots, N$.

4 Caratteri e rappresentazioni di $SU(N)$

Sia \hat{e}_i , con $i = 1, \dots, N$ la base ortonormale di \mathbb{R}^N con componenti $(\hat{e}_i)^j = \delta_i^j$. Le $\frac{N(N-1)}{2}$ radici positive di $SU(N)$ sono

$$\alpha_{ij} = \hat{e}_i - \hat{e}_j \quad i < j \quad \text{radici positive} \tag{4.1}$$

mentre

$$\alpha_{ij} = \hat{e}_i - \hat{e}_j \quad i > j \quad \text{radici negative} \quad (4.2)$$

sono le radici negative. Le $N - 1$ radici semplici sono

$$\alpha_i = \hat{e}_i - \hat{e}_{i+1} \quad i = 1, \dots, N - 1 \quad (4.3)$$

Le radici di $SU(N)$ giacciono dunque nell'iperpiano

$$\sum_{i=1}^N \hat{e}_i = 0 \quad (4.4)$$

La radice più alta è

$$\bar{\alpha} = \hat{e}_1 - \hat{e}_N = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \quad (4.5)$$

Il vettore di Weyl è

$$\delta = \frac{1}{2} \sum_{i < j} \alpha_{ij} = \quad (4.6)$$

Introduciamo le variabili complesse

$$w_i = e^{i\vec{\theta} \cdot \hat{e}_i} = e^{i\theta_i} \quad (4.7)$$

Dunque

$$e^{i\vec{\theta} \cdot \alpha_{ij}} = \frac{w_i}{w_j} \quad (4.8)$$

Per θ nell'iperpiano (4.4) le w_i sono soggette al vincolo

$$\prod_{i=1}^N w_i = 1 \quad (4.9)$$

Le formule che seguono si applicano a $U(N)$ se si prendono le w_i indipendenti ed a $SU(N)$ se si impone il vincolo (4.9). Il denominatore di Weyl si riduce ad un determinante di Vandermonde:

$$\begin{aligned} D(\vec{\theta}) &= \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^\sigma e^{i\vec{\theta} \cdot \sigma(\delta)} = \frac{1}{(w_1 \cdots w_N)^{\frac{N-1}{2}}} \times \\ &\quad \times \det \begin{pmatrix} 1 & w_1 & \cdots & w_1^{N-1} \\ 1 & w_2 & \cdots & w_2^{N-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & w_N & \cdots & w_N^{N-1} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\prod_{i < j} (w_i - w_j)}{(w_1 \cdots w_N)^{\frac{N-1}{2}}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Il numeratore di Weyl di una rappresentazione di peso massimo $\bar{\lambda}$

$$\bar{\lambda} = (n_1, \dots, n_N) \quad (4.11)$$

si scrive

$$N_{\bar{\lambda}}(\vec{\theta}) = \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^\sigma e^{i\vec{\theta} \cdot \sigma(\delta + \bar{\lambda})} = \frac{1}{(w_1 \cdots w_N)^{\frac{N-1}{2}}} \times \\ \times \det \begin{pmatrix} w_1^{n_1} & w_1^{1+n_2} & \cdots & w_1^{N-1+n_N} \\ w_2^{n_1} & w_2^{1+n_2} & \cdots & w_2^{N-1+n_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_N^{n_1} & w_N^{1+n_2} & \cdots & w_N^{N-1+n_N} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Il carattere della rappresentazione di peso massimo $\bar{\lambda}$ è

$$\chi_{\bar{\lambda}}(\vec{\theta}) = \frac{N_{\bar{\lambda}}(\vec{\theta})}{D(\vec{\theta})} \quad (4.13)$$

Il generatore dei caratteri delle rappresentazioni anti-simmetrizzate è la funzione di partizione fermionica

$$Z_f^{\bar{\lambda}}(q, \vec{\theta}) = \prod_{\lambda} (1 + q e^{i\vec{\theta} \cdot \bar{\lambda}}) \quad (4.14)$$

e quello delle rappresentazioni simmetrizzate è la funzione di partizione bosonica

$$Z_b^{\bar{\lambda}}(q, \vec{\theta}) = \prod_{\lambda} \frac{1}{1 - q e^{i\vec{\theta} \cdot \bar{\lambda}}} \quad (4.15)$$

Consideriamo il caso dell'aggiunta. In questo caso

$$Z_f^{adj}(q, w_i) = \prod_{i < j} (1 + q \frac{w_i}{w_j}) (1 + q \frac{w_j}{w_i}) (1 + q)^{N-1} \\ Z_b^{adj}(q, w_i) = \prod_{i < j} \frac{1}{(1 - q \frac{w_i}{w_j}) (1 - q \frac{w_j}{w_i}) (1 - q)^{N-1}} \quad (4.16)$$

La funzione generatrice del numero di singoletti n_k^{adj} nel prodotto di k rappresentazioni aggiunte completamente anti-simmetrizzato è

$$F_k^{adj}(q) \equiv \sum_{k=0}^{N^2-1} n_k^{adj} q^k = \left[\frac{(-1)^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}}{(w_1 \cdots w_N)^{N-1}} \times \right. \quad (4.17)$$

$$\left. \prod_{i < j} (1 + q \frac{w_i}{w_j}) (1 + q \frac{w_j}{w_i}) (w_i - w_j)^2 (1 + q)^{N-1} \right]_{\text{Termine noto}} \quad (4.18)$$

Il risultato è

$$F_k^{adj}(q) = (1 + q^3)(1 + q^5) \cdots (1 + q^{2N-1}) \quad (4.19)$$

5 Buche e Particelle

Le trasformazioni lineari

$$\begin{aligned} a_\alpha &\rightarrow \tilde{a}_\alpha = U_{\beta\alpha}^* a_\beta + V_{\beta\alpha} a_\beta^\dagger \\ a_\alpha^\dagger &\rightarrow \tilde{a}_\alpha^\dagger = V_{\beta\alpha}^* a_\beta + U_{\beta\alpha} a_\beta^\dagger \end{aligned} \quad (5.1)$$

sono automorfismi delle relazioni di anticommutazione (1.12), e sono dette *canoniche*, se le matrici U e V soddisfano le relazioni

$$U^\dagger U + (V^\dagger V)^t = 1 \quad U^\dagger V = -(U^\dagger V)^t \quad (5.2)$$

Le trasformazioni canoniche con $V = 0$ corrispondono a cambi di base dello spazio degli stati di singola particella $\mathcal{H}^{(1)}$. Queste trasformazioni canoniche sono implementate sullo spazio di Fock \mathcal{H}_F da operatori unitari che conservano il numero di particelle (cioè mandano $\mathcal{H}_A^{(N)}$ in se stesso). Le trasformazioni con $V \neq 0$ sono implementate da operatori (formalmente) unitari che non conservano il numero di particelle e quindi non corrispondono a trasformazioni canoniche di $\mathcal{H}^{(1)}$. Gli operatori (formalmente) unitari che implementano queste trasformazioni non lasciano invariato il vuoto di Fock.

Consideriamo il caso in cui l'insieme degli indici α che labellano la base di $\mathcal{H}^{(1)}$ ammette un'involuzione ι che indicheremo come $\iota(\alpha) = -\alpha$, con $\iota^2 = 1$. Per esempio, per fermioni non-relativistici in 3 dimensioni, possiamo prendere $\alpha \equiv (\vec{k}, \sigma)$. Le trasformazioni $(\vec{k}, \sigma) \rightarrow (-\vec{k}, -\sigma)$, $(\vec{k}, \sigma) \rightarrow (-\vec{k}, \sigma)$, o $(\vec{k}, \sigma) \rightarrow (\vec{k}, -\sigma)$ sono involuzioni di questo tipo. In questo contesto, una classe interessante di trasformazioni canoniche con $V \neq 0$ è data da

$$a_\alpha \rightarrow \tilde{a}_\alpha = \cos \chi_\alpha a_\alpha + \sin \chi_\alpha a_{-\alpha}^\dagger \quad (5.3)$$

con i numeri reali χ_α che soddisfano la relazione

$$\chi_\alpha = -\chi_{-\alpha} \quad (5.4)$$

Queste particolari trasformazioni canoniche sono caratterizzate dalla proprietà di lasciare invariati gli osservabili della forma

$$F = \sum_\alpha f(\alpha) a_\alpha^\dagger a_\alpha \quad (5.5)$$

se $f(-\alpha) = -f(\alpha)$. (Per esempio, nel caso di fermioni tri-dimensionali, osservabili invarianti sarebbero l'impulso $\vec{P} = \sum_{\vec{k},\sigma} \vec{k} a_{\vec{k},\sigma}^\dagger a_{\vec{k},\sigma}$ o lo spin $J_3 = \sum_{\vec{k},\sigma} \sigma a_{\vec{k},\sigma}^\dagger a_{\vec{k},\sigma}$, per $\alpha \rightarrow -\alpha$ dato da $(\vec{k}, \sigma) \rightarrow -(\vec{k}, \sigma)$.)

Consideriamo il caso di N elettroni liberi non-relativistici quantizzati in una scatola, con Hamiltoniana

$$H = \sum_{\vec{k},\sigma} E(\vec{k}) a_{\vec{k},\sigma}^\dagger a_{\vec{k},\sigma} \quad (5.6)$$

Lo stato fondamentale $|F\rangle$ del sistema è caratterizzato dalle equazioni

$$\begin{aligned} a_{\vec{k},\sigma}^\dagger |F\rangle &= 0 & \text{per } k \leq k_F \\ a_{\vec{k},\sigma} |F\rangle &= 0 & \text{per } k > k_F \end{aligned} \quad (5.7)$$

dove k_F è il cosiddetto impulso di Fermi, definito da

$$\sum_{k \leq k_F} 2 = N \quad (5.8)$$

E' naturale considerare pertanto la seguente trasformazione canonica

$$\tilde{a}_{\vec{k},\sigma} = \begin{cases} a_{\vec{k},\sigma} & \text{per } k > k_F \\ \frac{\sigma}{|\sigma|} a_{-\vec{k},-\sigma}^\dagger & \text{per } k \leq k_F \end{cases} \quad (5.9)$$

Alcuni commenti sulla (5.9):

1) abbiamo scelto $\tilde{a}_{\vec{k},\sigma} \propto a_{-\vec{k},-\sigma}^\dagger$ in modo da lasciare invariato l'impulso: $\sum_{\vec{k},\sigma} \vec{k} a_{\vec{k},\sigma}^\dagger a_{\vec{k},\sigma} \rightarrow \sum_{\vec{k},\sigma} \vec{k} \tilde{a}_{-\vec{k},-\sigma}^\dagger \tilde{a}_{-\vec{k},-\sigma} = \sum_{\vec{k},\sigma} \vec{k} \tilde{a}_{\vec{k},\sigma}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k},\sigma}$ ed analogamente per lo spin. In altre parole abbiamo preso $\chi_{\vec{k},\sigma} = \pm\pi/2$ per $k \leq k_F$ e $\chi_{\vec{k},\sigma} = 0$ per $k > k_F$.

2) Il fattore $\frac{\sigma}{|\sigma|}$ serve ad avere $\chi_{\vec{k},\sigma} = -\chi_{-\vec{k},-\sigma}$. In verità in questo caso particolare la trasformazione sarebbe canonica anche senza questo fattore: infatti la condizione $\chi_\alpha = -\chi_{-\alpha}$ deriva dalla richiesta

$$\{\tilde{a}_\alpha, \tilde{a}_{-\alpha}\} = \cos \chi_\alpha \sin \chi_{-\alpha} + \cos \chi_{-\alpha} \sin \chi_\alpha = 0$$

Se $\cos \chi_\alpha \neq 0$ e $\cos \chi_{-\alpha} \neq 0$ ne consegue che $\tan \chi_\alpha = -\tan \chi_{-\alpha}$ e dunque $\chi_{-\alpha} = -\chi_\alpha$. Ma per $\cos \chi_\alpha = \cos \chi_{-\alpha} = 0$ (come nel nostro caso) la trasformazione sarebbe canonica anche se avessimo preso $\chi_\alpha = \chi_{-\alpha} = \pi/2$.

Scriviamo ora vari osservabili in termini delle nuove variabili canoniche:

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{\vec{k}\sigma} E(k) a_{\vec{k}\sigma}^\dagger a_{\vec{k}\sigma} = \sum_{k>k_F} E(k) a_{\vec{k}\sigma}^\dagger a_{\vec{k}\sigma} + \sum_{k\leq k_F} E(k) a_{\vec{k}\sigma}^\dagger a_{\vec{k}\sigma} = \\
&= \sum_{k>k_F} E(k) a_{\vec{k}\sigma}^\dagger a_{\vec{k}\sigma} + \sum_{k\leq k_F} E(k) \tilde{a}_{-\vec{k},-\sigma}^\dagger \tilde{a}_{-\vec{k},-\sigma} \\
&= \sum_{k>k_F} E(k) a_{\vec{k}\sigma}^\dagger a_{\vec{k}\sigma} - \sum_{k\leq k_F} E(k) \tilde{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}\sigma} + \sum_{k\leq k_F, \sigma} E(k) = \\
&= \sum_{k>k_F} E(k) a_{\vec{k}\sigma}^\dagger a_{\vec{k}\sigma} - \sum_{k\leq k_F} E(k) \tilde{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}\sigma} + E_F \tag{5.10}
\end{aligned}$$

dove abbiamo definito l'energia di Fermi

$$E_F = \sum_{k\leq k_F, \sigma} E(k) \tag{5.11}$$

che è l'energia dello stato fondamentale. Dunque

$$\begin{aligned}
H - E_F &= \sum_{k>k_F} (E(k) - E(k_F)) a_{\vec{k}\sigma}^\dagger a_{\vec{k}\sigma} + \sum_{k\leq k_F} (E(k_F) - E(k)) \tilde{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}\sigma} \\
&\quad + E(k_F) \left[\sum_{k>k_F} a_{\vec{k}\sigma}^\dagger a_{\vec{k}\sigma} - \sum_{k\leq k_F} \tilde{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}\sigma} \right] \tag{5.12}
\end{aligned}$$

L'operatore corrispondente al numero di particelle è

$$\begin{aligned}
\hat{N} &= \sum_{k>k_F} a_{\vec{k}\sigma}^\dagger a_{\vec{k}\sigma} + \sum_{k\leq k_F} \tilde{a}_{\vec{k}\sigma} \tilde{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \\
&= \left[\sum_{k>k_F} a_{\vec{k}\sigma}^\dagger a_{\vec{k}\sigma} - \sum_{k\leq k_F} \tilde{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}\sigma} \right] + \sum_{k\leq k_F, \sigma} 1 \\
&= \left[\sum_{k>k_F} a_{\vec{k}\sigma}^\dagger a_{\vec{k}\sigma} - \sum_{k\leq k_F} \tilde{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}\sigma} \right] + N \tag{5.13}
\end{aligned}$$

Pertanto l'energia diventa

$$\begin{aligned}
H - E_F &= \sum_{k>k_F} (E(k) - E(k_F)) a_{\vec{k}\sigma}^\dagger a_{\vec{k}\sigma} + \sum_{k\leq k_F} (E(k_F) - E(k)) \tilde{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}\sigma} \\
&\quad + E(k_F) [\hat{N} - N] \tag{5.14}
\end{aligned}$$

ed il termine tra parentesi quadre è nullo nel settore dello spazio di Fock con numero fissato di particelle. La carica del sistema si scrive invece:

$$\begin{aligned}\hat{Q} &= \sum_{k>k_F} e a_{\vec{k}\sigma}^\dagger a_{\vec{k}\sigma} - \sum_{k\leq k_F} e \tilde{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}\sigma} + \sum_{k\leq k_F,\sigma} e \\ &= \sum_{k>k_F} e a_{\vec{k}\sigma}^\dagger a_{\vec{k}\sigma} - \sum_{k\leq k_F} e \tilde{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}\sigma} + e N\end{aligned}\quad (5.15)$$

In conclusione il sistema puo' essere pensato come composto da due tipi di eccitazioni: le particelle corrispondenti alle variabili $a_{\vec{k}\sigma}^\dagger$ con $k > k_F$, di impulso \vec{k} , spin σ , energia $|E(k) - E(k_F)|$ e carica e e le "buche", associate alle variabili $\tilde{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger$ con $k \leq k_F$, che hanno lo stesso impulso, spin ed energia ma carica opposta. Nel settore con numero di particelle (nel senso originario) costante ed eguale ad N , il numero di particelle (nel nuovo senso) e di buche è uguale.

6 Gas di elettroni: I ordine in teoria delle perturbazioni

Consideriamo come Hamiltoniana libera l'Hamiltoniana di N elettroni quantizzati in una scatola:

$$H_0 = \sum_{\vec{k}\sigma} \epsilon(\vec{k}) a_{\vec{k}\sigma}^\dagger a_{\vec{k}\sigma} \quad (6.1)$$

con $\epsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Come interazione consideriamo

$$H_I = \frac{4\pi e^2}{2V} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q} \neq 0} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \frac{1}{q^2} a_{\vec{k}_1 + \vec{q}, \sigma_1}^\dagger a_{\vec{k}_2 - \vec{q}, \sigma_2}^\dagger a_{\vec{k}_2, \sigma_2} a_{\vec{k}_1, \sigma_1} \quad (6.2)$$

Lo stato fondamentale $|F\rangle$ di H_0 è lo stato con numeri di occupazione 1 per tutti i \vec{k} dentro la cosiddetta sfera di Fermi: la sfera nello spazio dei vettori d'onda definita da $|\vec{k}| \leq k_F$ dove k_F è l'impulso di Fermi

$$\sum_{\vec{k} \leq k_F} 2 = N \quad (6.3)$$

da cui, approssimando le somme discrete con integrali,

$$V \int_{S_F} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} 2 = \frac{2V}{8\pi^3} \frac{4\pi}{3} k_F^3 = N \quad (6.4)$$

dove abbiamo indicato con S_F la sfera di Fermi. In definitiva

$$k_F^3 = (3\pi^2) n \quad (6.5)$$

dove $n = \frac{N}{V}$ è la densità elettronica.

L'energia imperturbata dello stato fondamentale è

$$E_0 = 2V \int_{S_F} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} = \frac{2V}{8\pi^3} \frac{4\pi k_F^5}{5} = \frac{V k_F^3}{5\pi^2} \frac{\hbar^2 k_F^2}{\pi^2 2m} = \frac{3N}{5} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \quad (6.6)$$

da cui otteniamo l'energia per elettrone

$$\frac{E_0}{N} = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \quad (6.7)$$

Stimiamo quest'energia in termini delle grandezze atomiche naturali: poniamo $n = 1/(la_B)^3$, dove l è un numero puro: questa densità corrisponde ad 1 elettrone in un cubo di lato eguale ad l volte il raggio di Bohr $a_B = \frac{\hbar^2}{me^2}$. (Per esempio per il rame, il reticolo cristallino ha passo $4a_B$, e c'è in media un elettrone in ogni cubo del reticolo, quindi in questo caso $l = 4$). (Un'altra parametrizzazione è $\frac{1}{n} = \frac{4\pi}{3}(r_s a_B)^3$. Cioè ogni elettrone è contenuto in media in una sfera di raggio $r_s a_B$. Dunque $l = (\frac{4\pi}{3})^{\frac{1}{3}} r_s$). Dunque $k_F = \frac{(3\pi^2)^{\frac{1}{3}}}{la_B}$ e

$$\frac{E_0}{N} = \frac{3}{5} \frac{(3\pi^2)^{\frac{2}{3}}}{2m l^2 a_B^2} \frac{\hbar^2}{2m} = \frac{3}{5} \frac{(3\pi^2)^{\frac{2}{3}}}{l^2} E_H \quad (6.8)$$

dove $E_H \approx 13.6$ ev è l'energia di legame dell'elettrone nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno. (Dunque per il rame, $\frac{E_0}{N} \approx \frac{5.74}{l^2} E_H \approx 0.359 E_H \approx 4.88$ ev)

Valutiamo ora la correzione al primo ordine a $\frac{E_0}{N}$:

$$\frac{E_1}{N} = \frac{\langle F | H_I F \rangle}{N} = \frac{4\pi e^2}{2VN} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \frac{1}{\vec{q}^2} \langle F | a_{\vec{k}_1 + \vec{q}, \sigma_1}^\dagger a_{\vec{k}_2 - \vec{q}, \sigma_2}^\dagger a_{\vec{k}_2, \sigma_2} a_{\vec{k}_1, \sigma_1} | F \rangle \quad (6.9)$$

Evidentemente nella somma contribuiscono solo i \vec{k}_1 e \vec{k}_2 che appartengono a S_F . Gli impulsi $\vec{k}_1 + \vec{q}$ e $\vec{k}_2 - \vec{q}$ devono dunque coincidere con \vec{k}_1, \vec{k}_2 : esistono due possibilità: la prima possibilità è $\vec{k}_1 + \vec{q} = \vec{k}_1$ e $\vec{k}_2 - \vec{q} = \vec{k}_2$, cioè $\vec{q} = 0$, ma questo termine è escluso dalla somma. Dunque gli unici termini che

contribuiscono sono quelli con $\vec{k}_1 + \vec{q} = \vec{k}_2$ e $\vec{k}_2 - \vec{q} = \vec{k}_1$, cioè $\vec{q} = \vec{k}_2 - \vec{k}_1$. Inoltre in questo caso deve essere anche $\sigma_1 = \sigma_2$. In conclusione

$$\frac{E_1}{N} = \frac{4\pi e^2}{2VN} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \in S_F} \sum_{\sigma} \frac{1}{q^2} \langle F | a_{\vec{k}_2, \sigma}^\dagger a_{\vec{k}_1, \sigma}^\dagger a_{\vec{k}_2, \sigma} a_{\vec{k}_1, \sigma} | F \rangle = -\frac{4\pi e^2}{VN} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \in S_F} \frac{1}{q^2} \quad (6.10)$$

Passiamo agli integrali ed utilizziamo come variabili d'integrazione \vec{k}_1 e \vec{q} . Poiché $\vec{q} = \vec{k}_2 - \vec{k}_1$ con $\vec{k}_1, \vec{k}_2 \in S_F$, ne consegue che $q < 2k_F$. Fissiamo dunque un vettore \vec{q} e consideriamo le due sfere di raggio k_F con centro nell'origine e nel vertice di \vec{q} : i \vec{k}_1 permessi sono contenuti nella sfera con centro nell'origine di \vec{q} in quanto deve essere $k_1 \leq k_F$. Ma devono essere anche contenuti nella seconda sfera con centro nel vertice di \vec{q} : questo perché $|\vec{q} + \vec{k}_1| \leq k_F$. Sia \mathcal{V} il volume di questa regione. Dunque

$$\frac{E_1}{N} = -\frac{4\pi e^2}{VN} \int_{q \leq 2k_F} \frac{V d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2} \frac{V}{(2\pi)^3} \mathcal{V} = -\frac{4\pi e^2 V}{N} \int_{q \leq 2k_F} \frac{4\pi dq}{(2\pi)^3} \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \quad (6.11)$$

Il volume \mathcal{V} è dato da

$$\mathcal{V} = 2 \int_{\frac{q}{2}}^{k_F} dk \pi (k_F^2 - k^2) = 2\pi k_F^3 \int_{\frac{q}{2k_F}}^1 dx (1 - x^2) \quad (6.12)$$

$$= 2\pi k_F^3 \left(\frac{2}{3} - \frac{q}{2k_F} + \frac{1}{3} \left(\frac{q}{2k_F} \right)^3 \right) \quad (6.13)$$

Pertanto

$$\frac{E_1}{N} = -\frac{e^2 V}{2N\pi^3} (2k_F) k_F^3 \int_0^1 dy \left(\frac{2}{3} - y + \frac{y^3}{3} \right) \quad (6.14)$$

$$= -\frac{e^2 V}{N\pi^3} k_F^4 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \right) \quad (6.15)$$

$$= -\frac{e^2 V}{N\pi^3} k_F^4 \frac{1}{4} = -\frac{e^2 k_F^4}{4\pi^3 n} = -\frac{e^2 3\pi^2 k_F}{4\pi^3} = -\frac{3(3\pi^2)^{\frac{1}{3}} e^2}{4\pi l a_B} \quad (6.16)$$

$$= -\frac{3^{\frac{4}{3}}}{2l \pi^{\frac{1}{3}}} \frac{e^2}{2a_B} = -\frac{3^{\frac{4}{3}}}{2l \pi^{\frac{1}{3}}} E_H = \quad (6.17)$$

L'energia per elettrone totale è dunque:

$$\frac{E}{N} = \frac{3^{\frac{5}{3}} (\pi)^{\frac{4}{3}}}{5} E_H \left(\frac{1}{l^2} - \frac{5}{2 \cdot 3^{\frac{1}{3}} (\pi)^{\frac{5}{3}} l} \right) \quad (6.18)$$

cioè $\frac{E}{N} \approx 5.74 E_H (\frac{1}{l^2} - \frac{0.257}{l})$. Il minimo di $\frac{E}{N}$ come funzione di l è per $l_* = \frac{4 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \pi^{\frac{5}{3}}}{5} \approx 7.78$ e $E(l_*) = -\frac{3 \cdot 5}{16 \pi^2} E_H \approx -0.0950 E_H \approx -1.29 \text{ ev}$.

Si noti che il rapporto tra la correzione E_1 all'energia dello stato fondamentale e l'energia all'ordine zero E_0 è:

$$\frac{|E_1|}{|E_0|} = \frac{5}{2 \cdot 3^{\frac{1}{3}} (\pi)^{\frac{5}{3}}} l \approx 0.257 l \quad (6.19)$$

è affidabile per $l \rightarrow 0$ (Dunque per $l = l_*$, $\frac{|E_1|}{|E_0|} \approx 2 l_*$. Cioè l_* cade in una regione dove l'approssimazione del primo ordine dovrebbe essere, in linea di principio, cattiva. Di fatto, la formula del primo ordine è ragionevolmente ben verificata sperimentalmente per molti metalli).

7 Fononi

Schematizziamo il reticolo degli ioni come un sistema di oscillatori armonici accoppiati tra loro. Cominciamo per semplicità col sistema uni-dimensionale

$$H = \sum_{i=0}^{N-1} \left[\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} k (x_i - x_{i+1})^2 \right] = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} k \sum_{i,j} V_{ij} x_i x_j \quad (7.1)$$

dove abbiamo posto $x_{i+N} \equiv x_i$. Vogliamo per prima cosa passare a coordinate normali, cioè coordinate ξ_j definite da

$$x_i = R_{ij} \xi_j \quad (7.2)$$

dove R è la matrice *ortogonale* che diagonalizza V_{ij}

$$R_{ki} V_{kl} R_{lj} = \delta_{ij} \lambda_i \quad (7.3)$$

Equivalentemente

$$\sum_k V_{ik} R_{kj} = R_{ij} \lambda_j \quad (7.4)$$

Pertanto $R_{ij} = (w^{(j)})_i$ è la componente i -esima dell'autovettore di V con autovalore λ_j .

Definiamo l'operatore T che manda x_i in x_{i+1} (e p_i in p_{i+1}). T è rappresentato dalla matrice $T_{ij} = \delta_{i,j-1}$ (adottando la notazione che identifica l'indice i con l'indice $i+N$). T commuta con V : fisicamente questo esprime il

fatto che il potenziale dato è invariante per traslazioni $i \rightarrow i+1$ (è per questo motivo che abbiamo identificato x_N con x_0). In effetti è facile verificare che

$$V = 2 - T - T^{-1} \quad (7.5)$$

V e T possono dunque essere diagonalizzate simultaneamente da una matrice U che, in generale, sarà *unitaria*.

Determiniano U . Gli autovettori di T sono

$$v^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q \zeta^{-qj} e^{(q)} \quad (7.6)$$

dove $\zeta \equiv e^{\frac{2\pi i}{N}}$ è la N -esima radice dell'unità e $e^{(q)}$ sono i vettori unità (cioè $e_i^{(q)} = \delta_{qi}$). Infatti

$$T v^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q \zeta^{-qj} e^{(q+1)} = \zeta^j v^{(j)} \quad (7.7)$$

Dunque gli autovalori di T sono ζ^j , con $j = 0, 1, \dots, N-1$. (Si noti che $T^N = 1$, per cui gli autovalori di T devono in effetti essere radici dell'unità). Da Eq. (7.5) deduciamo che gli autovalori di V sono

$$\lambda_q = 2 - \zeta - \zeta^{-1} = 2\left(1 - \cos \frac{2\pi q}{N}\right) = 4 \sin^2 \frac{\pi q}{N} \quad (7.8)$$

La matrice unitaria $U_{ij} = v_i^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \zeta^{-ij}$ diagonalizza pertanto T e V . Poichè questa matrice è complessa, essa non soddisfa Eq.(7.3) ma piuttosto

$$U_{ki}^* V_{kl} U_{lj} = \delta_{ij} \lambda_i \quad (7.9)$$

In effetti la matrice V ha autovalori doppiamente degeneri poiché $\lambda_q = \lambda_{-q}$, con l'eccezione dell'autovalore $q = 0$ (e dell'autovalore con $q = N/2$, quando N è pari. Per evitare questa complicazione aggiuntiva, di nessun reale significato, possiamo limitarci al caso N dispari). Cerchiamo pertanto una combinazione di $v^{(q)}$ e $v^{(-q)}$ reale (che abbia cioè componenti reali nella base $e^{(i)}$.) Basterà prendere

$$w_+^{(q)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (v^{(q)} + v^{(-q)}) \quad (7.10)$$

$$w_-^{(q)} = \frac{1}{i\sqrt{2}} (v^{(q)} - v^{(-q)}) \quad (7.11)$$

$$(7.12)$$

dove adesso $q \in \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor\} \equiv I$. Poniamo anche $w^{(0)} = v^{(0)}$. I $w_{\pm}^{(q)}$ sono gli autovettori reali di V , e definiscono pertanto la matrice ortogonale R e le coordinate normali

$$x_j = w_j^{(0)} \xi_0 + \sum_{q \in I} \left(w_{+,j}^{(q)} \xi_q^+ + w_{-,j}^{(q)} \xi_q^- \right) \quad (7.13)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \xi_0 + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{q \in I} \left(\cos \frac{2\pi j q}{N} \xi_q^+ + \sin \frac{2\pi j q}{N} \xi_q^- \right) \quad (7.14)$$

$$(7.15)$$

Le relazioni inverse sono

$$\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j x_j \quad (7.16)$$

$$\xi_q^+ = \sum_i w_{+,i}^{(q)} x_i = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_j \cos \frac{2\pi j q}{N} x_j \quad (7.17)$$

$$\xi_q^- = \sum_i w_{-,i}^{(q)} x_i = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_j \sin \frac{2\pi j q}{N} x_j \quad (7.18)$$

$$(7.19)$$

Denotiamo con π_i momenti coniugati alle coordinate normali ξ_i : i π_i sono legati ai momenti p_i dalle *stessa* matrice R che lega le ξ_i con le x_i . In termini dei momenti e delle coordinate normali l'Hamiltoniana diventa

$$H = \frac{\pi_0^2}{2m} + \sum_{q \in I, \alpha = \pm} \frac{\pi_{q,\alpha}^2}{2m} + \frac{1}{2} k \lambda_q \xi_{q,\alpha}^2 \quad (7.20)$$

Passiamo agli operatori di creazione e distruzione

$$a_{q,\pm} = \frac{1}{\sqrt{\hbar \omega_q m}} (\pi_q^{\pm} + i m \omega_q \xi_q^{\pm}) \quad (7.21)$$

dove abbiamo posto

$$\omega_q = 2\omega \sin \frac{\pi q}{N} \quad (7.22)$$

($\omega^2 = \frac{k}{m}$). L'Hamiltoniana diventa quella di un insieme di oscillatori di frequenze ω_q

$$H = \frac{\pi_0^2}{2m} + \sum_{q \in I, \alpha = \pm} \hbar \omega_q (a_{q,\alpha}^{\dagger} a_{q,\alpha} + \frac{1}{2}) \quad (7.23)$$

Gli stati creati da $a_{q,\pm}^\dagger$ non sono autostati di T (il momento discreto). Le combinazioni

$$A_q = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{q,+} + i a_{q,-}) = \frac{\pi_q^+ + i \pi_q^-}{\sqrt{2\hbar\omega_q m}} + im\omega_q \frac{\xi_q^+ + i \xi_q^-}{\sqrt{2\hbar\omega_q m}} \quad (7.24)$$

$$A_{-q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{q,+} - i a_{q,-}) = \frac{\pi_q^+ - i \pi_q^-}{\sqrt{2\hbar\omega_q m}} + im\omega_q \frac{\xi_q^+ - i \xi_q^-}{\sqrt{2\hbar\omega_q m}} \quad (7.25)$$

per $q \in I$, definiscono degli operatori A_q per $q = 1, \dots, N-1$ associati a stati che sono autostati di T .

Avremmo potuto evitare il passaggio alle coordinate normali reali ξ_i se avessimo lavorato direttamente con coordinate complesse e i relativi momenti coniugati. Definiamo per ogni $q \in I$

$$\xi_q = \frac{\xi_q^+ - i \xi_q^-}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j \zeta^{-qj} x_j \quad (7.26)$$

Estendiamo la definizione delle ξ_q a tutti i q attraverso la condizione di hermiticit  $\xi_q^* = \xi_{-q}$: poniamo cio 

$$\xi_q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j \zeta^{-qj} x_j \quad (7.27)$$

per *ogni* q . Le coordinate reali originali x_i sono dunque legate alle coordinate ξ_q dalla relazione (“trasformata di Fourier finita”)

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q \zeta^{qi} \xi_q \quad (7.28)$$

In altre parole, la relazione tra x_i e ξ_q   data proprio dalla matrice unitaria U che diagonalizza simultaneamente T e V . Il vantaggio delle ξ_q   che esse si trasformano omogeneamente per traslazioni: se

$$T x_i T^\dagger = x_{i+1} \quad \text{e} \quad T p_i T^\dagger = p_{i+1} \quad (7.29)$$

allora

$$T \xi_q T^\dagger = \zeta^q \xi_q \quad (7.30)$$

Va per  tenuto presente che il momento π_q coniugato alla coordinata ξ_q  

$$\pi_q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j \zeta^{qj} p_j \quad (7.31)$$

(in altre parole, per $q \in I$, il momento coniugato alla coordinata $\xi_q = \frac{\xi_q^+ + i\xi_q^-}{\sqrt{2}}$ è $\pi_q = \frac{\pi_q^+ - i\pi_q^-}{\sqrt{2}}$). L'Hamiltoniana come funzione delle coordinate e dei momenti complessi ξ_q e π_q non è veramente diagonale (perchè U soddisfa Eq. (7.9) e non Eq.(7.3)):

$$H = \frac{\pi_0^2}{2m} + \sum_q \left(\frac{\pi_{-q} \pi_q}{2m} + \frac{1}{2} k \lambda_q \xi_{-q} \xi_q \right) \quad (7.32)$$

È pertanto necessario, per diagonalizzare H , definire i seguenti gli operatori di distruzione e creazione

$$A_q = \frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega_q m}} (\pi_{-q} - im\omega_q \xi_q) \quad (7.33)$$

$$A_q^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2\hbar\omega_q m}} (\pi_q + im\omega_q \xi_{-q}) \quad (7.34)$$

in termini dei quali l'Hamiltoniana si scrive

$$H = \frac{\pi_0^2}{2m} + \sum_{q \neq 0} \hbar\omega_q (A_q^\dagger A_q + \frac{1}{2}) \quad (7.35)$$

Si noti che $T A_q T^\dagger = \zeta^q A_q$ in quanto ξ_q e π_{-q} hanno la stessa dipendenza da x_i e p_i . Da questo segue che

$$T A_q^\dagger |0\rangle = \zeta^{-q} A_q^\dagger |0\rangle \quad (7.36)$$

cioè gli stati creati da A_q^\dagger sono autostati dell'operatore traslazione discreto T .

Notiamo che ξ_q si scrive in termini degli operatori di creazione e distruzione:

$$\xi_q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_q m}} (A_q + A_{-q}^\dagger) \quad (7.37)$$

Pertanto le coordinate originali x_i si esprimono come

$$x_i = \frac{\hbar^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{N}} \sum_q \frac{1}{\sqrt{2\omega_q m}} (\zeta^{-qi} A_q + \zeta^{qi} A_q^\dagger) \quad (7.38)$$

Passiamo agli operatori x_i nella pittura di Heisenberg: poichè

$$A_q(t) = e^{-i\omega_q t} A_q(0) \quad (7.39)$$

abbiamo

$$x_i(t) = \frac{\hbar^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{N}} \sum_q \frac{1}{\sqrt{2\omega_q m}} (\zeta^{-qi} e^{-i\omega_q t} A_q + \zeta^{qi} e^{i\omega_q t} A_q^\dagger) \quad (7.40)$$

Passiamo ora al limite continuo, definito da $N \rightarrow \infty$, $\Delta \rightarrow 0$, avendo posto $L = N\Delta$, $L\rho = Nm$, $kL = \tau N$ con τ , ρ e L che restano finiti nel limite. $x_i(t)$ diventa un campo $x(\sigma, t)$, con $\sigma/L \approx \frac{i}{N}$, dove σ ($0 \leq \sigma \leq L$) è la coordinata sulla corda composta dagli ioni infinitamente densi. Nel limite

$$\omega_q \rightarrow \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \frac{2\pi q}{L} \equiv \omega q \quad (7.41)$$

e

$$x(\sigma, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{\rho L}} \sum_q \frac{1}{\sqrt{2\omega_q}} (e^{\frac{2\pi i \sigma}{L}} e^{-i\omega_q t} A_q + e^{-\frac{2\pi i \sigma}{L}} e^{i\omega_q t} A_q^\dagger) \quad (7.42)$$

(mettere al posto la consistenza della definizione di ξ_q e mandare $q \rightarrow -q$.) Poiché $p_i = m \frac{dx_i}{dt} \rightarrow \rho \Delta \frac{\partial x(\sigma, t)}{\partial t}$, dobbiamo, nel limite continuo, definire una densità di impulso $\pi(\sigma)$

$$\frac{p_i}{\Delta} \rightarrow \pi(\sigma) \quad (7.43)$$

L'Hamiltoniana del sistema continuo diventa in definitiva:

$$H = \int_0^L d\sigma \frac{1}{\Delta} \left[\frac{p(\sigma)^2 N}{2L\rho} + \frac{1}{2} \frac{\tau N}{L} (x'(\sigma))^2 \Delta^2 \right] = \frac{1}{2} \int_0^L d\sigma \left[\frac{\pi(\sigma)^2}{\rho} + \tau (x'(\sigma))^2 \right] \quad (7.44)$$

e la Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \int_0^L d\sigma \left[\rho \left(\frac{\partial x(\sigma, t)}{\partial t} \right)^2 - \tau (x'(\sigma))^2 \right] \quad (7.45)$$

8 Radiazione di Dipolo: Emissione

Indichiamo con $|A^*\rangle$ lo stato eccitato di un atomo, e con $|A; \vec{k}, \alpha\rangle$ lo stato in cui l'atomo è passato ad un livello più basso emettendo un fotone di

momento \vec{k} e polarizzazione $\vec{\epsilon}_\alpha$, con $\alpha = 1, 2$ e $\vec{\epsilon}_\alpha \cdot \vec{k} = 0$. Vogliamo calcolare la probabilità del processo $A^* \rightarrow A + \gamma$ come funzione dell'impulso \vec{k} del fotone γ .

L'Hamiltoniana d'interazione tra campo elettromagnetico e materia al primo ordine nella costante di accoppiamento e è

$$H_I = \frac{1}{c} \vec{A} \cdot \vec{j} \quad (8.1)$$

dove \vec{A} è il potenziale vettore (nel gauge di Coulomb $\nabla \cdot \vec{A} = 0$) e \vec{j} è la corrente associata alla materia.

Per \vec{A} partiamo dall'espressione seconda quantizzata:

$$\vec{A}(\vec{x}, t = 0) = c\hbar^{1/2} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\omega_k)^{1/2}} \frac{\vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha}}{(2\pi)^{3/2}} \left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} A_{\vec{k}\alpha} + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} A_{\vec{k}\alpha}^\dagger \right] \quad (8.2)$$

Si tenga presente che la scelta delle funzioni d'onda fotoniche

$$\psi_{\vec{k}\alpha}(\vec{x}) = \frac{\vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (8.3)$$

di singola particella nell' Eq. (8.2) corrisponde alla normalizzazione

$$(\psi_{\vec{k}\alpha}, \psi_{\vec{k}'\beta}) = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{\alpha,\beta} \quad (8.4)$$

La probabilità di transizione per unità di tempo dallo stato i allo stato f per effetto dell'interazione (perturbazione) H_I è data al primo ordine in teoria delle perturbazioni dalla formula

$$dP_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H_I | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i) d\nu \quad (8.5)$$

dove $d\nu$ è la densità di stati finali. Nel nostro caso $E_f = E_A + \hbar\omega_k$ e $E_i = E_{A^*}$, e

$$d\nu = d^3\vec{k} = k^2 dk d\Omega \quad (8.6)$$

dove $d\Omega = d\phi d\theta \sin\theta$ è l'elemento di angolo solido.

NOTA (1) SULLA NORMALIZZAZIONE DEL CAMPO FOTONICO:

Un'altra scelta consueta (cfr. Landau) per la normalizzazione delle funzioni d'onda di singola particella è quella per cui $(\psi_{\vec{k}\alpha}, \psi_{\vec{k}'\beta}) = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{\alpha,\beta}$,

cioè una scelta dell'espressione del campo \vec{A} nella quale non compaiono i fattori $(2\pi)^{-3/2}$. In questo caso però la densità degli stati $d\nu$ diventerebbe $d\nu = \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}$. Possiamo ottenere lo stesso risultato ed evitare di lavorare con stati di singola particella impropri (non-normalizzabili) partendo dall'espressione per il campo \vec{A} quantizzato in una scatola di lato L

$$\vec{A}(\vec{x}, t=0) = c\hbar^{1/2} \sum_{\vec{k}\alpha} \frac{1}{(2\omega_k)^{1/2} L^{3/2}} \left[\vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} A_{\vec{k}\alpha} + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} A_{\vec{k}\alpha}^\dagger \right] \quad (8.7)$$

In questo caso però sommando sugli stati finali f nell' Eq. (8.5) dovremmo operare la sostituzione

$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} :$$

il fattore L^3 si cancellerebbe con i due $L^{-3/2}$ nell'espressione del campo \vec{A} e il fattore $(2\pi)^{-3/2}$ risulterebbe dalla densità degli stati (discreti).

NOTA (2) SULLA NORMALIZZAZIONE DEL CAMPO FOTONICO:

Il Landau moltiplica l'espressione per il campo fotonico per il fattore $\sqrt{4\pi}$. La ragione per questa scelta è che il Landau parte dall'espressione classica per l'Hamiltoniana del campo elettromagnetico $\frac{1}{8\pi} \int d^3\vec{x} [\vec{E}^2 + \vec{B}^2]$, e il fattore $\sqrt{4\pi}$ serve per ottenere l'espressione consueta dell'energia in termini dei creatori e distruttori $\sum_{\vec{k}\alpha} \hbar\omega_k A_{\vec{k}\alpha}^\dagger A_{\vec{k}\alpha}$. La normalizzazione in Eq. (8.2) parte da un'espressione per l'Hamiltoniana fotonica che non ha il fattore $\frac{1}{4\pi}$. Bisogna fare attenzione però che con la nostra scelta (8.2), continuando a scrivere l'interazione fotone-materia come $\vec{A} \cdot \frac{e\vec{p}}{m}$ (in prima quantizzazione), la carica e è diversa da quella utilizzata (per esempio) dal Landau: con la nostra scelta (sistema di Gauss razionalizzato) la costante di struttura fine $\frac{e_{\text{raz}}^2}{\hbar c} \approx \frac{4\pi}{137}$ mentre con la scelta di Landau (sistema di Gauss non-razionalizzato) $\frac{e_{\text{Landau}}^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$

Vogliamo allora calcolare l'elemento di matrice $\langle f|H_I|i\rangle$ che appare in Eq.(8.5). La parte fotonica di questo elemento di matrice è:

$$\langle \vec{k}\alpha | \vec{A}(\vec{x}, 0) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\omega_k)^{1/2} (2\pi)^{3/2}} \vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (8.8)$$

Per valutare l'elemento di matrice completo

$$\langle f|H_I|i\rangle = \int d^3\vec{x} \langle \vec{k}\alpha | \vec{A}(\vec{x}, 0) | 0 \rangle \langle A|\vec{j}(\vec{x})|A^* \rangle \quad (8.9)$$

in un formalismo integralmente di seconda quantizzazione dovremmo pertanto a questo punto calcolare l'elemento di matrice

$$\langle A | \vec{j}(\vec{k}) | A^* \rangle$$

della trasformata di Fourier $\vec{j}(\vec{k}) = \int d^3\vec{x} \vec{j}(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ dell'operatore corrente.

Nel seguito faremo l'ipotesi che l'interazione tra il fotone e l'atomo avvenga attraverso l'interazione con un singolo elettrone (consideriamo cioè il caso in cui la transizione $A^* \rightarrow A$ corrisponda ad un elettrone che passi da un livello eccitato ad un livello più basso). Supponiamo inoltre che il resto dell'atomo sia molto pesante, cioè che l'energia del nucleo sia molto maggiore rispetto a quella del fotone emesso e che il l'elettrone rimanga non-relativistico e possa quindi essere correttamente descritto in un formalismo di prima quantizzazione. In conclusione l'elemento di matrice della corrente che dobbiamo calcolare è:

$$\langle A | \vec{j} | A^* \rangle = \int d^3\vec{x} \bar{\Psi}_A(\vec{x}) \vec{j}(\vec{x}) \Psi_{A^*}(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \frac{e}{m} \int d^3\vec{x} \bar{\Psi}_A(\vec{x}) \vec{p} \Psi_{A^*}(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (8.10)$$

dove abbiamo preso $\vec{j} = e\vec{v} = \frac{e}{m}\vec{p}$ come operatore di corrente (in prima quantizzazione) dell'elettrone.

Discutiamo i limiti di validità di questa approssimazione e la possibilità di semplificare ulteriormente il calcolo dell'elemento di matrice in (8.10). Un elettrone atomico che si trovi in livelli non troppo alti ha energie dell'ordine di

$$E \sim \frac{e^2}{a_{Bohr}} \sim \frac{e^4 m}{\hbar^2} \sim \alpha^2 m c^2$$

dove $\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c}$ è la costante di struttura fine e $a_{Bohr} = \frac{\hbar^2}{m e^2} \sim \frac{\hbar}{m c} \frac{1}{\alpha}$ è il raggio di Bohr. Questo giustifica il trattamento non-relativistico dell'elettrone. Inoltre la lunghezza d'onda del fotone emesso è dell'ordine di $\lambda = \frac{\hbar c}{E} \sim \frac{\hbar}{m c} \frac{1}{\alpha^2} \sim a_{Bohr} \frac{1}{\alpha}$. In conclusione

$$\frac{\lambda}{a_{Bohr}} \sim \frac{1}{\alpha} \gg 1$$

Pertanto, l'argomento $\vec{k} \cdot \vec{x}$ dell'esponenziale nell' Eq. (8.10) è molto minore di 1 per i valori di \vec{x} per i quali le funzioni d'onda sono significativamente diverse da zero. In questa situazione è giustificata l'approssimazione di *dipolo* che consiste nel prendere $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \sim 1$ nella formula (8.10):

$$\langle A | \vec{j} | A^* \rangle_{dipolo} = \frac{e}{m} \int d^3\vec{x} \bar{\Psi}_A(\vec{x}) \vec{p} \Psi_{A^*}(\vec{x}) = \frac{ie}{\hbar} \int d^3\vec{x} \bar{\Psi}_A(\vec{x}) [H_0, \vec{x}] \Psi_{A^*}(\vec{x})$$

$$= -ie\omega_k \int d^3\vec{x} \bar{\Psi}_A(\vec{x}) \vec{x} \Psi_{A^*}(\vec{x}) \equiv -i\omega_k \langle A | \vec{d} | A^* \rangle \quad (8.11)$$

dove $H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$ è l'Hamiltoniana non-relativistica dell'elettrone atomico; $\hbar\omega_k = E_{A^*} - E_A$ è l'energia del fotone emesso; $\vec{d} \equiv e\vec{x}$ è l'operatore di dipolo, ed è stato fatto uso della relazione operatoriale $\frac{i\vec{p}}{\hbar m} = [H_0, \vec{x}]$

In conclusione l'elemento di matrice (8.9) diventa nell'approssimazione di dipolo

$$\langle f | H_I | i \rangle = \left(\frac{\hbar^{1/2}}{(2\omega_k)^{1/2}} \frac{\vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha}}{(2\pi)^{3/2}} \right) \left(-i\omega_k \langle A | \vec{d} | A^* \rangle \right) = -i \frac{\hbar^{1/2} \omega_k^{1/2}}{4\pi^{3/2}} \langle A | \vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha} \cdot \vec{d} | A^* \rangle \quad (8.12)$$

La formula (8.5) per la probabilità per unità di tempo di emissione di un fotone di polarizzazione $\vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha}$ diventa allora nell'approssimazione di dipolo ($\omega_k = ck$)

$$\begin{aligned} dP_{i \rightarrow f} &= \frac{2\pi}{\hbar} \frac{\hbar\omega_k}{16\pi^3} |\langle A | \vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha} \cdot \vec{d} | A^* \rangle|^2 \frac{\omega_k^2}{c^2} \delta(E_A - E_{A^*} - \hbar ck) dk d\Omega \\ &= \frac{\omega_k^3}{8\pi^2 \hbar c^3} |\langle A | \vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha} \cdot \vec{d} | A^* \rangle|^2 d\Omega \end{aligned} \quad (8.13)$$

Consideriamo ora la probabilità di emissione sommata sugli stati di polarizzazione del fotone emesso. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1,2} |\vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha} \cdot \vec{d}|^2 &= \left(\sum_{\alpha=1,2} |\vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha} \cdot \vec{d}|^2 + |\vec{n} \cdot \vec{d}|^2 \right) - |\vec{n} \cdot \vec{d}|^2 \\ &= |\vec{d}|^2 - |\vec{n} \cdot \vec{d}|^2 = |\vec{n} \times \vec{d}|^2 = (1 - \cos^2 \theta) |\vec{d}|^2 \end{aligned} \quad (8.14)$$

dove $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$, e θ è l'angolo tra \vec{d} e \vec{n} . Ponendo

$$\langle A | \vec{d} | A^* \rangle \equiv e\gamma \hat{z},$$

ed integrando su θ otteniamo infine la probabilità di emissione per unità di tempo in una direzione qualsiasi ($d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$) sommata sulle polarizzazioni del fotone emesso:

$$P_{i \rightarrow f} = \frac{\omega_k^3}{8\pi^2 \hbar c^2} e^2 \gamma^2 (2\pi) 2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \frac{e^2}{4\pi \hbar c} \frac{\omega_k^3}{c^2} \gamma^2 \quad (8.15)$$

Si tenga presente che con la definizione di (per esempio) Landau per e^2 ($e_{Landau}^2 = \frac{e^2}{4\pi}$) la formula assume la forma piú familiare $P_{i \rightarrow f} = \frac{4}{3} \alpha \frac{\omega_k^3}{c^2} \gamma^2$.

9 Modello di Anderson-Fano

Vogliamo discutere il sistema:

$$H = \epsilon_0 b^\dagger b + \sum_k \left(\epsilon_k c_k^\dagger c_k + g_k (c_k^\dagger b + b^\dagger c_k) \right) \quad (9.1)$$

che descrive un sistema di particelle descritte dai creatori e distruttori c_k e c_k^\dagger con legge di dispersione $\epsilon(k)$ che interagisce con un' "impurità" descritta da una singola coppia di creatori distruttori b, b^\dagger . Il sistema potrebbe descrivere l'effetto di un'impurità che assorbe le eccitazioni passando in uno stato eccitato e si dis-eccita riemettendo l'eccitazione.

Il sistema è quadratico e pertanto risolubile. Siamo interessati a descrivere esplicitamente la soluzione quando il sistema di particelle ha uno spettro continuo. Cominciamo però, per capire la struttura del problema, col caso in cui lo spettro ϵ_k è discreto e l'indice k assume un numero finito N di valori. Cerchiamo una trasformazione unitaria che diagonalizzi H : introduciamo un indice $\alpha \equiv (0, k)$ che assume $N + 1$ valori, sia $c_\alpha \equiv (c_0, c_k)$, e $\epsilon_\alpha \equiv (\epsilon_0, \epsilon_k)$. Cerchiamo operatori di creazione e distruzione a_α e a_α^\dagger legati ai c_α da una trasformazione unitaria

$$c_\alpha = \sum_\beta R_{\alpha\beta} a_\beta \quad (9.2)$$

che diagonalizza H

$$H = \sum_\alpha E_\alpha a_\alpha^\dagger a_\alpha \quad (9.3)$$

Le equazioni agli autovalori sono

$$(\epsilon_0 - E_\beta) R_{0\beta} + \sum_k g_k R_{k\beta} = 0 \quad (9.4)$$

$$g_k R_{0\beta} + (\epsilon_k - E_\beta) R_{k\beta} = 0 \quad (9.5)$$

Dalla seconda equazione otteniamo

$$R_{k\beta} = -\frac{g_k R_{0\beta}}{\epsilon_k - E_\beta} \quad (9.6)$$

che sostituito nella prima equazione porta all'equazione per gli autovalori E_α :

$$(\epsilon_0 - E_\beta) = \sum_k \frac{g_k^2}{\epsilon_k - E_\beta} \quad (9.7)$$

mentre $R_{0\beta}$ è determinato dalla condizione di ortornormalità

$$|R_{0\beta}|^{-2} = 1 + \sum_k \frac{g_k^2}{(\epsilon_k - E_\beta)^2} \quad (9.8)$$

Notiamo che prendendo la derivata dell'equazione per gli autovalori rispetto a $\epsilon_{k'}$ otteniamo

$$\frac{\partial E_\beta}{\partial \epsilon_{k'}} \left[1 + \sum_k \frac{g_k^2}{(\epsilon_k - E_\beta)^2} \right] = \frac{g_{k'}^2}{(\epsilon_{k'} - E_\beta)^2} \quad (9.9)$$

per cui

$$R_{0\beta} = \frac{g_{k'}}{(\epsilon_{k'} - E_\beta)} \left(\frac{\partial E_\beta}{\partial \epsilon_{k'}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9.10)$$

Dunque, se indichiamo con ψ_k e ψ_0 gli stati di singola particella relativi a c_k^\dagger e b^\dagger , gli autostati esatti di singola particella ϕ_β (quelli associati a a_α^\dagger) sono

$$\phi_\beta = R_{0\beta} \psi_0 + \sum_k R_{k\beta} \psi_k = R_{0\beta} \left(\psi_0 - \sum_k \frac{g_k}{\epsilon_k - E_\beta} \psi_k \right) \quad (9.11)$$

Per discutere ulteriormente la soluzione del modello descritta è utile introdurre la funzione

$$\omega(z) \equiv \sum_k \frac{g_k^2}{z - \epsilon_k} \quad (9.12)$$

in termine della quale l'equazione agli autovalori (9.7) diventa

$$z - \epsilon_0 = \omega(z) \quad (9.13)$$

Le soluzioni *reali* di questa equazione sono gli autovalori. $\omega(z)$ è una funzione che ha N poli per $z = \epsilon_k$, e per $z \rightarrow \pm\infty$ tende a zero come

$$\omega(z) \rightarrow \frac{\sum_k g_k^2}{z} \quad (9.14)$$

Il comportamento delle $N+1$ soluzioni dell'equazione caratteristica è dunque chiaro. La soluzione E_0 corrispondente alla deformazione di ϵ_0 (la soluzione cioè che tende a ϵ_0 quando $g_k \rightarrow 0$) si trova nell'intervallo tra ϵ_{k_0} e ϵ_{k_0-1} , dove l'indice k_0 è definito dalla condizione $\epsilon_{k_0-1} \leq \epsilon_0 \leq \epsilon_{k_0}$. Le altre N soluzioni E_k , corrispondenti alle deformazioni degli ϵ_k , sono comprese tra ϵ_k e $\epsilon_{k\pm 1}$: piú

precisamente, sono comprese tra ϵ_k e ϵ_{k+1} se $\epsilon_k > \epsilon_0$, mentre sono comprese tra ϵ_k e ϵ_{k-1} se $\epsilon_k < \epsilon_0$.

Da questa discussione segue che nel limite in cui lo spettro discreto diventa una banda continua gli autovalori E_k tendono ad assumere valori molto vicini a ϵ_k . Riscriviamo pertanto l'equazione (9.7) come

$$\frac{g_q^2}{E_q - \epsilon_q} = (E_q - \epsilon_0) - \sum_{k \neq q} \frac{g_k^2}{E_q - \epsilon_k} \quad (9.15)$$

Possiamo sostituire nel membro di destra $E_q \approx \epsilon_q$ e ottenere

$$E_q - \epsilon_q \approx \frac{g_q^2}{(\epsilon_q - \epsilon_0) - \sum_{k \neq q} \frac{g_k^2}{\epsilon_q - \epsilon_k}} \quad (9.16)$$

mentre per il livello E_0 otteniamo

$$E_0 - \epsilon_0 \approx \sum_k \frac{g_k^2}{\epsilon_0 - \epsilon_k} \quad (9.17)$$

Nel limite continuo dobbiamo trasformare le somme con integrali con la precauzione di separare i termini nelle somme che hanno dei poli: se $k \neq \beta$ la relazione (9.6) diventa

$$R_{k\beta} = -\frac{g_k R_{0\beta}}{\epsilon_k - \epsilon_\beta} \quad (9.18)$$

ma per $k = \beta$ otteniamo

$$R_{\beta\beta} = -\frac{g_\beta R_{0\beta}}{\epsilon_\beta - E_\beta} \quad (9.19)$$

L'equazione per $R_{0\beta}$ diventa

$$|R_{0\beta}|^{-2} = 1 + \sum_{k \neq \beta} \frac{g_k^2}{(\epsilon_k - \epsilon_\beta)^2} + \frac{g_\beta^2}{(\epsilon_k - E_\beta)^2} \quad (9.20)$$

Introducendo

$$\frac{\partial E_k}{\partial \epsilon k} = \frac{\frac{\partial E_k}{\partial k}}{\frac{\partial \epsilon_k}{\partial k}} \quad (9.21)$$

abbiamo

$$R_{0\beta} = \frac{(E_\beta - \epsilon_\beta) \sqrt{\frac{\partial \epsilon_k}{\partial k}}}{g_\beta \sqrt{\frac{\partial E_k}{\partial k}}} = \frac{g_\beta}{(\epsilon_\beta - \epsilon_0) - \sum_{k \neq \beta} \frac{g_k^2}{\epsilon_\beta - \epsilon_k}} \frac{\sqrt{\frac{\partial \epsilon_k}{\partial k}}}{\sqrt{\frac{\partial E_k}{\partial k}}} \quad (9.22)$$

Pertanto, avendo posto

$$\Sigma(\epsilon_q) \equiv (\epsilon_q - \epsilon_0) - \sum_{k \neq q} \frac{g_k^2}{\epsilon_q - \epsilon_k} \quad (9.23)$$

gli stati di singola particella ϕ_k nel limite continuo diventano

$$\phi_q = \frac{g_q}{\Sigma(\epsilon_q)} \frac{\sqrt{\frac{\partial \epsilon_k}{\partial k}}}{\sqrt{\frac{\partial E_k}{\partial k}}} \left[\psi_0 - \text{P} \int dk \frac{g_k}{\epsilon_k - E_q} \psi_k + \frac{\Sigma(\epsilon_q)}{g_q} \psi_q \right] \quad (9.24)$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{\partial \epsilon_k}{\partial k}}}{\sqrt{\frac{\partial E_k}{\partial k}}} \left[\psi_q - \frac{g_q}{\Sigma(\epsilon_q)} \text{P} \int dk \frac{g_k}{\epsilon_k - E_q} \psi_k - \frac{g_q}{\Sigma(\epsilon_q)} \psi_0 \right] \quad (9.25)$$

dove P denota la parte principale dell'integrale.

10 Modello di Bogoliubov per superfluidi

Consideriamo un modello di N bosoni identici, non-relativistici e di spin zero, quantizzati in una scatola di volume V , con un'interazione repulsiva a due particelle caratterizzata da un potenziale $U(x_1 - x_2)$ la cui trasformata di Fourier sarà indicata con $g(\vec{k})$:

$$H = \sum_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2} \frac{g(\vec{k})}{2V} a_{\vec{k}_1 + \vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}_2 - \vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_1} \quad (10.1)$$

dove $\epsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}$ è la relazione di dispersione delle particelle libere.

In assenza di interazione lo stato fondamentale del sistema è, naturalmente, lo stato

$$|\Omega_0\rangle = \frac{(a_0^\dagger)^N}{\sqrt{N!}} |0\rangle \quad (10.2)$$

in cui tutte le N particelle si trovano nello stato con momento $\vec{k} = 0$. In presenza di un'interazione repulsiva è ragionevole pensare che nello stato fondamentale esatto $|\Omega\rangle$ una frazione delle particelle si trovi in stati di impulso diverso da zero: per un'interazione sufficientemente piccola possiamo però ritenere che il numero di particelle con numero d'onda $\vec{k} = 0$ nello stato

fondamentale — $N_0 \equiv \langle \Omega | \hat{N}_0 | \Omega \rangle = \langle \Omega | a_0^\dagger a_0 | \Omega \rangle$ — sia *macroscopico* rispetto ai numeri di occupazione $N_{\vec{k}} \equiv \langle \Omega | \hat{N}_{\vec{k}} | \Omega \rangle = \langle \Omega | a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} | \Omega \rangle$ con $\vec{k} \neq 0$ sullo stesso stato. In altre parole possiamo supporre che sullo stato fondamentale $N_{\vec{k}} \ll N_0$ per $\vec{k} \neq 0$. In queste condizioni possiamo approssimare le relazioni che definiscono a_0 e a_0^\dagger

$$a_0^\dagger |\{n_0, \dots\}\rangle = \sqrt{n_0 + 1} |\{n_0 + 1, \dots\}\rangle \quad a_0 |\{n_0, \dots\}\rangle = \sqrt{n_0} |\{n_0 - 1, \dots\}\rangle \quad (10.3)$$

con

$$a_0^\dagger |\{n_0, \dots\}\rangle \approx \sqrt{n_0} |\{n_0 + 1, \dots\}\rangle \quad a_0 |\{n_0, \dots\}\rangle = \sqrt{n_0} |\{n_0 - 1, \dots\}\rangle \quad (10.4)$$

equivalenti a

$$[a_0, a_0^\dagger] \approx 0 \quad (10.5)$$

In altre parole, se vogliamo studiare lo stato fondamentale (e gli stati vicini a questo) possiamo sostituire gli operatori a_0 e a_0^\dagger con dei c -numeri, operando la sostituzione

$$a_0 \rightarrow \sqrt{N_0} \quad a_0^\dagger \rightarrow \sqrt{N_0} \quad (10.6)$$

Operando questa sostituzione nell'Hamiltoniana (10.1) otteniamo

$$H = H^{(4)} + H^{(2)} + H^{(1)} + H^{(0)} \quad (10.7)$$

dove $H^{(n)}$ sono i termini in H che contengono n operatori a_0 od a^\dagger , e quindi, in accordo con (10.6), sono dell'ordine di $N_0^{\frac{n}{2}}$ (i termini con $n = 3$ sono assenti a causa della conservazione dell'impulso). Poiché N_0 è grande rispetto al valore medio di $N_{\vec{k}}$ per $\vec{k} \neq 0$ ci aspettiamo che i termini con n più alto siano quelli rilevanti per lo studio dello stato fondamentale: in conclusione l'approssimazione di Bogoliubov consiste nel trascurare in H il termine $H^{(1)} + H^{(0)}$ e di restringersi all'Hamiltoniana:

$$H_{Bog} = H^{(4)} + H^{(2)} \quad (10.8)$$

dove

$$\begin{aligned} H^{(4)} &= \frac{g(0)}{2V} N_0^2 \approx \frac{g(0)}{2V} N^2 - \frac{g(0)}{V} \sum_{\vec{k} \neq 0} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} \\ H^{(2)} &= \sum_{\vec{k} \neq 0} \left[\epsilon_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{g(k)N}{2V} (a_{\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger + a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{g(0)N}{2V} 2 a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{g(k)N}{2V} 2 a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} \right] \end{aligned} \quad (10.9)$$

dove abbiamo utilizzato la relazione

$$\hat{N}_0 = N - \sum_{\vec{k} \neq 0} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} \quad (10.10)$$

ed abbiamo trascurato i termini di ordine zero in N (quelli con 4 $a_{\vec{k}}$ o $a_{\vec{k}}^\dagger$) che sono dello stesso ordine di quelli in $H^{(0)}$. In definitiva

$$H_{Bog} = \frac{g(0)}{2V} N^2 + \sum_{\vec{k} \neq 0} \left[(\epsilon_{\vec{k}} + g(k)n) a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{g(k)n}{2} (a_{\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger + a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}}) \right] \quad (10.11)$$

dove $n \equiv \frac{N}{V}$ è la densità di particelle.

Si tratta ora di diagonalizzare (10.11). Definiamo la trasformazione canonica

$$A_{\vec{k}} = \cosh(\chi_{\vec{k}}) a_{\vec{k}} + \sinh(\chi_{\vec{k}}) a_{-\vec{k}}^\dagger \quad (10.12)$$

con $\chi_{\vec{k}} = -\chi_{-\vec{k}}$ reale. Determiniamo $\chi_{\vec{k}}$ dalla richiesta che la trasformazione (10.12) diagonalizzi H_{Bog} , cioè dall'equazione:

$$\begin{aligned} H_{Bog} &= h_0 + \sum_{\vec{k} \neq 0} E_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^\dagger A_{\vec{k}} = h_0 + \\ &+ \sum_{\vec{k} \neq 0} E_{\vec{k}} (\cosh(\chi_{\vec{k}}) a_{\vec{k}}^\dagger + \sinh(\chi_{\vec{k}}) a_{-\vec{k}}) (\cosh(\chi_{\vec{k}}) a_{\vec{k}} + \sinh(\chi_{\vec{k}}) a_{-\vec{k}}^\dagger) \\ &= h_0 + \sum_{\vec{k} \neq 0} E_{\vec{k}} \left[\cosh(\chi_{\vec{k}})^2 a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \sinh(\chi_{\vec{k}})^2 a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger \right. \\ &\quad \left. + \cosh(\chi_{\vec{k}}) \sinh(\chi_{\vec{k}}) (a_{\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger + a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}}) \right] \\ &= h_0 + \sum_{\vec{k} \neq 0} E_{\vec{k}} \sinh(\chi_{\vec{k}})^2 + \sum_{\vec{k} \neq 0} E_{\vec{k}} \left[(\cosh(\chi_{\vec{k}})^2 + \sinh(\chi_{\vec{k}})^2) a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} \right. \\ &\quad \left. + \cosh(\chi_{\vec{k}}) \sinh(\chi_{\vec{k}}) (a_{\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger + a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}}) \right] \quad (10.13) \end{aligned}$$

Confrontando (10.13) con (10.11) otteniamo le equazioni

$$\begin{aligned} E_{\vec{k}} (\cosh(\chi_{\vec{k}})^2 + \sinh(\chi_{\vec{k}})^2) &= \epsilon_{\vec{k}} + g(k)n \\ E_{\vec{k}} \cosh(\chi_{\vec{k}}) \sinh(\chi_{\vec{k}}) &= \frac{g(k)n}{2} \quad (10.14) \end{aligned}$$

e

$$h_0 = \frac{g(0)n}{2}N - \sum_{\vec{k} \neq 0} E_{\vec{k}} \sinh(\chi_{\vec{k}})^2 \quad (10.15)$$

Dividendo la prima equazione in (10.14) per la seconda otteniamo l'equazione cercata per $\chi_{\vec{k}}$

$$e^{4\chi_{\vec{k}}} = 1 + \frac{2g(k)n}{\epsilon_{\vec{k}}} \quad (10.16)$$

Sottraendo (1/2 volte) la prima equazione in (10.14) dalla seconda otteniamo invece la relazione di dispersione delle quasi-particelle associate ai nuovi distruttori e creatori $A_{\vec{k}}, A_{\vec{k}}^\dagger$:

$$E_{\vec{k}} = e^{2\chi_{\vec{k}}} \epsilon_{\vec{k}} = \epsilon_{\vec{k}} \sqrt{1 + \frac{2g(k)n}{\epsilon_{\vec{k}}}} \quad (10.17)$$

Assumiamo che $g(k) \rightarrow 0$ per $k \gg \frac{1}{a}$ dove a è il raggio (una lunghezza) caratteristico dell'interazione tra i bosoni. Sia inoltre $g(k) \rightarrow g_0$ per $k \rightarrow 0$, dove g_0 è una costante. Allora per grandi k la legge di dispersione diventa quella libera

$$E_{\vec{k}} \rightarrow \epsilon_{\vec{k}} \quad \text{per} \quad k \gg \frac{1}{a} \quad (10.18)$$

mentre per k piccoli la legge di dispersione diventa quella caratteristica dei fononi (lineare in k)

$$E_{\vec{k}} \rightarrow \sqrt{\frac{g_0 n}{m}} \hbar k \quad \text{per} \quad k \ll \frac{1}{a} \quad (10.19)$$

Calcoliamo ora il valore di $N_{\vec{k}}$ sullo stato fondamentale del sistema $|\Omega\rangle$ definito dalla condizione: $A_{\vec{k}}|\Omega\rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \langle \Omega | N_{\vec{k}} | \Omega \rangle &= \langle \Omega | a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} | \Omega \rangle \\ &= \langle \Omega | (\cosh(\chi_{\vec{k}}) A_{\vec{k}}^\dagger - \sinh(\chi_{\vec{k}}) A_{-\vec{k}}) \\ &\quad \times (\cosh(\chi_{\vec{k}}) A_{\vec{k}} - \sinh(\chi_{\vec{k}}) A_{-\vec{k}}^\dagger) | \Omega \rangle \\ &= \sinh(\chi_{\vec{k}})^2 \langle \Omega | A_{-\vec{k}} A_{-\vec{k}}^\dagger | \Omega \rangle = \sinh(\chi_{\vec{k}})^2 \end{aligned} \quad (10.20)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \langle \Omega | N_{\vec{k}} | \Omega \rangle &\rightarrow 0 \quad \text{per} \quad k \gg \frac{1}{a} \\ \langle \Omega | N_{\vec{k}} | \Omega \rangle &\rightarrow \frac{\sqrt{g_0 n m}}{2\hbar k} \quad \text{per} \quad k \ll \frac{1}{a} \end{aligned} \quad (10.21)$$

Problema: Calcolare $N_0 = N - \sum_{\vec{k} \neq 0} N_{\vec{k}}$ sullo stato fondamentale.

Soluzione. Consideriamo la quantità

$$\frac{N - N_0}{N} = \frac{1}{n} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \sinh(\chi_{\vec{k}})^2 = \frac{1}{2\pi^2 n} \int_0^\infty dk k^2 \sinh(\chi_{\vec{k}})^2 \quad (10.22)$$

Prendiamo come $g(k)$ la funzione a gradino:

$$g(k) = g_0 \quad \text{per } k < \frac{1}{l_0} \quad \text{e} \quad g(k) = 0 \quad \text{per } k > \frac{1}{l_0} \quad (10.23)$$

dove l_0 è una lunghezza. Denotiamo invece con l la lunghezza che caratterizza l'intensità dell'interazione,

$$l \equiv \frac{4g_0 m}{\hbar^2} \quad (10.24)$$

Con questa scelta di $g(k)$ l'espressione per $\chi_{\vec{k}}$ diventa

$$\begin{aligned} e^{2\chi_{\vec{k}}} &= \sqrt{1 + \frac{ln}{k^2}} \quad \text{per } k < l_0 \\ e^{2\chi_{\vec{k}}} &= 1 \quad \text{per } k > 0 \end{aligned} \quad (10.25)$$

Introducendo la variabile adimensionale $x \equiv \frac{k}{\sqrt{nl}}$ otteniamo da (10.22)

$$\begin{aligned} \frac{N - N_0}{N} &= \frac{(nl^3)^{\frac{1}{2}}}{2\pi^2} \int_0^{\frac{1}{l_0 \sqrt{nl}}} \frac{dx}{8(1+x^2) + 4(1+2x^2)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \\ &= \frac{(nl^3)^{\frac{1}{2}}}{2\pi^2} \frac{1}{12} \left[-2x^3 + (2x^2 - 1)\sqrt{1+x^2} \right]_0^{\frac{1}{l_0 \sqrt{nl}}} \end{aligned} \quad (10.26)$$

Consideriamo ora il regime:

$$l_0 \ll \frac{1}{\sqrt{nl}} \quad (10.27)$$

Poiché $r_0 \equiv \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ rappresenta la distanza media tra le particelle del gas, la condizione (10.27) significa

$$\frac{l_0^2}{r_0^2} \ll \frac{r_0}{l} \quad (10.28)$$

In questo regime, $\frac{1}{l_0 \sqrt{nl}} \rightarrow \infty$ e il termine in parentesi quadre nella (10.26) tende ad 1. In conclusione in questo limite la grandezza cercata non dipende

dalla particolare forma della $g(k)$ — cioè non dipende dalla particolare scelta di l_0 — e diventa

$$\frac{N - N_0}{N} = \frac{(nl^3)^{\frac{1}{2}}}{24\pi^2} \quad (10.29)$$

L'assunzione (10.6) che motiva l'approssimazione di Bogoliubov è dunque giustificata nel regime in cui $nl^3 = \frac{l^3}{r_0^3} \ll 1$, cioè in condizioni di gas sufficientemente diluito.

Si noti anche che la grandezza $\frac{N-N_0}{N}$ dipende dalla costante di accoppiamento g_0 come $\frac{N-N_0}{N} \sim g_0^{\frac{3}{2}}$ e dunque è una funzione *non-analitica* di g_0 . Il risultato (10.29) non è pertanto derivabile in teoria delle perturbazioni.

(Nota: in molti testi, tipo Landau, o Fetter-Walecka, il parametro che caratterizza l'interazione è una lunghezza a che, in termini del parametro l da noi scelto, è $a = \frac{l}{16\pi}$. In termini di a la formula (10.29) diventa $\frac{N-N_0}{N} = \frac{8}{3} \left(\frac{na^3}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$)

11 Gas di Fermi debolmente interagente

Consideriamo l'Hamiltoniana che descrive dei fermioni non-relativistici interagenti con un potenziale a due corpi indipendente dallo spin:

$$H = \sum_{\vec{p}, \sigma} \frac{\vec{p}^2}{2m} a_{\vec{p}, \sigma}^\dagger a_{\vec{p}, \sigma} - \sum_{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}'_1, \vec{p}'_2, \sigma_1, \sigma_2} \frac{u(k)}{2V} \delta_{\vec{p}_1 + \vec{p}_2, \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2} a_{\vec{p}'_1, \sigma_1}^\dagger a_{\vec{p}'_2, \sigma_2}^\dagger a_{\vec{p}_2, \sigma_2} a_{\vec{p}_1, \sigma_1} \quad (11.1)$$

dove $\vec{k} = \vec{p}_1 - \vec{p}'_1 = -(\vec{p}_2 - \vec{p}'_2)$. $u(k)$ è la trasformata di Fourier del potenziale a due corpi: il segno meno davanti all'interazione corrisponde per $u(k) > 0$ ad un potenziale *attrattivo*.

L'Hamiltoniana (11.1) è troppo complicata da studiare. La semplifichiamo trascurando tutti i termini dell'interazione che non soddisfano le relazioni: $\vec{p}'_1 = -\vec{p}'_2$, $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ e $\sigma_1 = -\sigma_2$.

Il senso di questa approssimazione è che pensiamo a sistemi nei quali l'interazione è attrattiva soprattutto tra coppie di elettroni con spin antiparalleli e momenti vicini alla superficie di Fermi e opposti (queste configurazioni vengono chiamate coppie di Cooper). Qualitativamente possiamo capire la condizione sullo spin ricordando che quando gli spin sono paralleli la funzione d'onda orbitale della coppia è antisimmetrica e quindi l'interazione è più debole.

Selezionando i termini suddetti nell'Hamiltoniana arriviamo a

$$H' = \sum_{\vec{p}, \sigma} \frac{\vec{p}^2}{2m} a_{\vec{p}, \sigma}^\dagger a_{\vec{p}, \sigma} - \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} u(p, p') a_{\vec{p}' 1/2}^\dagger a_{-\vec{p}' -1/2}^\dagger a_{-\vec{p} -1/2} a_{\vec{p} 1/2} \quad (11.2)$$

NOTA: se, in accordo con la motivazione esposta sopra, proiettassimo l'interazione nell'Hamiltoniana (11.1) sul settore di singoletto di spin otterremmo in effetti H' ma con un potenziale $u(p, p') = \frac{1}{2}[u(p - p') + u(p + p')]$, dove $u(k)$ è il potenziale che appare nella (11.1). Trascuriamo per semplicità la differenza tra $u(p, p')$ e $u(p)$: in ogni caso prenderemo alla fine u costante nell'intervallo degli impulsi d'interesse.

Siamo interessati a studiare lo stato fondamentale di H' nel settore nel quali l'operatore numero di particelle $\hat{N} = \sum_{\vec{p}, \sigma} a_{\vec{p}, \sigma}^\dagger a_{\vec{p}, \sigma}$ è eguale al numero N . Questo problema è equivalente a quello di determinare lo stato fondamentale della seguente Hamiltoniana

$$\mathcal{H}_\mu = H' - \mu \hat{N} \quad (11.3)$$

nello spazio di Fock totale senza restrizioni sul numero di particelle. Lo stato fondamentale $|F\rangle_\mu$ di \mathcal{H}_μ dipende naturalmente dal potenziale chimico μ : determinando μ attraverso l'equazione

$$\langle F | \hat{N} | F \rangle_\mu = N \quad (11.4)$$

otterremo lo stato fondamentale di H' nel settore di particelle N . Un modo di capire questo è pensare al problema di determinare lo stato fondamentale di H' come un problema di minimo vincolato: dobbiamo trovare lo stato $|F\rangle$ che minimizza $\langle F | H | F \rangle$ nel sottospazio $\hat{N} = N$. Possiamo allora pensare a μ come un moltiplicatore di Lagrange e trovare il minimo di

$$\langle F | H' - \mu[\hat{N} - N] | F \rangle \quad (11.5)$$

rispetto a $|F\rangle$ e μ . L'annullarsi della derivata di (11.5) rispetto a μ è equivalente all'equazione (11.4).

In conclusione vogliamo studiare lo stato fondamentale di

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{p}, \sigma} \epsilon(p) a_{\vec{p}, \sigma}^\dagger a_{\vec{p}, \sigma} - \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} u(p, p') a_{\vec{p}' 1/2}^\dagger a_{-\vec{p}' -1/2}^\dagger a_{-\vec{p} -1/2} a_{\vec{p} 1/2} \quad (11.6)$$

dove

$$\epsilon(p) \equiv \frac{\vec{p}^2}{2m} - \mu$$

L'idea è allora di utilizzare un principio variazionale: cercheremo il minimo del valor medio $\langle \mathcal{H} \rangle$ su una classe di stati corrispondenti ai vuoti degli operatori di creazione e di distruzione parametrizzati dalla trasformazione di Bogoliubov:

$$a_{\vec{p}\sigma} = u_p b_{\vec{p}\sigma} + v_{p,\sigma} b_{-\vec{p},-\sigma}^\dagger \quad (11.7)$$

dove $v_{p,\sigma} = \frac{\sigma}{|\sigma|} v_p$ e

$$u_p^2 + v_p^2 = 1 \quad (11.8)$$

Sappiamo che grazie alla condizione (11.8) la trasformazione (11.7) è canonica. Vogliamo dunque determinare la trasformazione canonica (u_p, v_p) minimizzando $\langle u_p, v_p | \mathcal{H} | u_p, v_p \rangle$, dove $|u_p, v_p\rangle$ è lo stato di vuoto relativo a $b_{\vec{p}\sigma}$.

Sostituendo (11.7) in (11.6) otteniamo

$$\mathcal{H} = E_0 + H_2 + H_4 \quad (11.9)$$

dove:

$$E_0 = \langle u_p, v_p | \mathcal{H} | u_p, v_p \rangle = 2 \sum_{\vec{p}} \epsilon(p) v_p^2 - \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} u(p, p') v_{p'} u_p v_p \quad (11.10)$$

Definendo

$$\Delta_p \equiv \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}'} u(p, p') v_{p'} u_{p'} \quad (11.11)$$

abbiamo per la parte dell'Hamiltoniana quadratica negli operatori $b_{\vec{p}\sigma}, b_{\vec{p}\sigma}^\dagger$:

$$\begin{aligned} H_2 = & \sum_{\vec{p}\sigma} [\epsilon(p)(u_p^2 - v_p^2) + 2\Delta_p u_p v_p] b_{\vec{p}\sigma}^\dagger b_{\vec{p}\sigma} + \\ & + \sum_{\vec{p}} \left[[2\epsilon(p)u_p v_p + \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}'} u(p, p') v_{p'} u_{p'} (v_p^2 - u_p^2)] b_{\vec{p}1/2}^\dagger b_{\vec{p},-1/2}^\dagger + \right. \\ & \left. + \text{h.c.} \right] \quad (11.12) \end{aligned}$$

Infine H_4 include i termini dell'Hamiltoniana quartici negli operatori $b_{\vec{p}\sigma}, b_{\vec{p}\sigma}^\dagger$.

Minimizziamo dunque E_0 rispetto a u_p, v_p tenendo conto del vincolo (11.8). Introducendo $E'_0 = E_0 - \lambda(v_p^2 + u_p^2 - 1)$ abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial E'_0}{\partial u_p} &= -\frac{2}{V} \sum_{\vec{p}'} u(p, p') v_{p'} u_{p'} v_p - 2\lambda u_p = 0 \\ \frac{\partial E'_0}{\partial v_p} &= 4v_p \epsilon(p) - \frac{2}{V} \sum_{\vec{p}'} u(p, p') v_{p'} u_{p'} u_p - 2\lambda v_p = 0 \\ \frac{\partial E'_0}{\partial \lambda} &= u_p^2 + v_p^2 - 1 = 0\end{aligned}\tag{11.13}$$

Dunque

$$\begin{aligned}\lambda &= -\frac{\Delta_p v_p}{u_p} \\ 2v_p u_p \epsilon(p) &= \Delta_p (u_p^2 - v_p^2)\end{aligned}\tag{11.14}$$

Posto $u_p = \cos \chi_p$ e $v_p = \sin \chi_p$ otteniamo

$$\tan 2\chi_p = \frac{\Delta_p}{\epsilon}\tag{11.15}$$

per cui

$$\begin{aligned}u_p^2 &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\chi_p) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta_p^2}{\epsilon(p)^2}}} \right] \\ v_p^2 &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\chi_p) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta_p^2}{\epsilon(p)^2}}} \right]\end{aligned}\tag{11.16}$$

Sostituendo queste espressioni in E_0 e H_2 otteniamo

$$\begin{aligned}E_0 &= \sum_{\vec{p}} \frac{\epsilon(p) \left(\sqrt{\Delta_p^2 + \epsilon(p)^2} - \epsilon(p) \right) - \frac{1}{2} \Delta_p^2}{\sqrt{\Delta_p^2 + \epsilon(p)^2}} \\ H_2 &= \sum_{\vec{p}\sigma} \left[\frac{\epsilon(p)}{\sqrt{1 + \frac{\Delta_p^2}{\epsilon(p)^2}}} + \frac{\Delta_p^2}{\sqrt{\epsilon(p)^2 + \Delta_p^2}} \right] b_{\vec{p}\sigma}^\dagger b_{\vec{p}\sigma} \\ &= \sum_{\vec{p}\sigma} \sqrt{\epsilon(p)^2 + \Delta_p^2} b_{\vec{p}\sigma}^\dagger b_{\vec{p}\sigma}\end{aligned}\tag{11.17}$$

Si noti che sul minimo per E_0 i termini non-diagonali di H_2 si annullano.

Poiché da (11.16) abbiamo $2u_p v_p = \frac{\Delta_p}{\sqrt{\Delta_p^2 + \epsilon(p)^2}}$, le equazioni che determinano Δ_p sono

$$\Delta_p = \frac{1}{2V} \sum_{\vec{p}} \frac{u(p, p') \Delta_{p'}}{\sqrt{\Delta_p^2 + \epsilon(p)^2}} \quad (11.18)$$

Le equazioni (11.18) hanno la soluzione $\Delta_p = 0$, che rappresenta la trasformazione canonica che manda alla descrizione buca-particella.

Abbiamo in generale un'altra soluzione di (11.18), anche se non è possibile dare un'espressione esplicita per questa soluzione nel caso di un potenziale $u(p, p')$ generico. Supponiamo allora che $u(p, p') = g$ costante per p, p' che si trovano in una certa regione intorno alla sfera di Fermi: $p_F - q < p, p' < p_F + q$. Supponiamo inoltre che $u(p, p')$ si annulli al di fuori di questo intervallo. Δ_p si annulla allora al di fuori dello stesso intervallo ed è indipendente da p per $p_F - q < p < p_F + q$. Facciamo anche l'approssimazione $\mu \approx \frac{p_F^2}{2m}$ (che è il valore del potenziale chimico nel caso della teoria libera). Pertanto $\epsilon(p) \approx \frac{p_F}{m}(p - p_F)$. Prendendo inoltre il limite continuo otteniamo infine

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{g}{4\pi^2 \hbar^3} \int_{p_F - q}^{p_F + q} \frac{p^2 dp}{\sqrt{\Delta^2 + \frac{p_F^2}{m^2}(p - p_F)^2}} \approx \frac{g p_F^2}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^q \frac{dx}{\sqrt{\Delta^2 + \frac{p_F^2}{m^2} x^2}} \\ &= \frac{g m p_F}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\frac{p_F q}{m \Delta}} \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = \frac{g m p_F}{2\pi^2 \hbar^3} \sinh^{-1} \frac{q p_F}{m \Delta} \end{aligned} \quad (11.19)$$

da cui

$$\Delta = \frac{q p_F}{m} \frac{1}{\sinh \frac{2\pi^2 \hbar^3}{m g p_F}} = \frac{2q p_F}{m} \frac{e^{-\frac{2\pi^2 \hbar^3}{m g p_F}}}{1 - e^{-\frac{4\pi^2 \hbar^3}{m g p_F}}} \approx \frac{2q p_F}{m} e^{-\frac{2\pi^2 \hbar^3}{m g p_F}} \quad (11.20)$$

per $\frac{m g p_F^2}{2\pi^2 \hbar^3} \ll 1$.

OSSERVAZIONE: $\Delta(g) \rightarrow 0$ quando $g \rightarrow 0$ ma in maniera non-perturbativa: $\Delta(g)$ non è una funzione analitica di g a $g = 0$.

Espandendo E_0 in potenze di Δ per Δ piccolo abbiamo

$$E_0 \approx \frac{-\frac{1}{8} \frac{\Delta^4}{\epsilon^2}}{\sqrt{\Delta^2 + \epsilon(p)^2}} \approx -\frac{1}{8} \frac{\Delta^4}{\epsilon^3} < 0 \quad (11.21)$$

che dimostra che la soluzione di (11.18) con $\Delta \neq 0$ ha energia inferiore della soluzione $\Delta = 0$. È vero in generale che $E_0 < 0$ se $\Delta \neq 0$ (in quanto $\epsilon(\sqrt{\Delta^2 + \epsilon^2} - \epsilon) \leq \frac{1}{2}\Delta^2$ dove vale il segno di eguaglianza solo per $\Delta = 0$.)

Prendendo $\mu \approx \frac{p_F^2}{2m}$ abbiamo per lo spettro delle eccitazioni intorno alla sfera di Fermi

$$\tilde{\epsilon}(p) = \frac{1}{2m} \sqrt{(p^2 - p_F^2)^2 + 4m^2\Delta^2}. \quad (11.22)$$

Rispetto alla teoria libera, per la quale $\epsilon(p) \approx \frac{p_F}{m}|p - p_F|$ intorno alla sfera di Fermi, la teoria interagente esibisce un “gap” pari a Δ . Questo effetto è quello che spiega la superconduttività nell’applicazione di questo modello ad un sistemi di fermioni interagenti con fononi.

Problema: Determinare il potenziale chimico μ in funzione della densità $\frac{N}{V} \equiv n$ nel limite di accoppiamento debole $g \rightarrow 0$

Il potenziale chimico μ è determinato dall’equazione

$$N = \langle u_p, v_p | \hat{N} | u_p, v_p \rangle = 2 \sum_{\vec{p}} v_p^2 = \sum_{\vec{p}} \left(1 - \frac{\epsilon(p)^2}{\sqrt{\epsilon(p)^2 + \Delta^2}} \right) \quad (11.23)$$

Nel limite continuo

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty dp p^2 \left[1 - \frac{p^2 - p_0^2}{\sqrt{(p^2 - p_0^2)^2 + (2m\Delta)^2}} \right] \quad (11.24)$$

dove abbiamo posto $\mu \equiv \frac{p_0^2}{2m}$. Si noti che per $\Delta = 0$ la funzione fra parentesi quadre nell’integrale diventa una funzione a gradino, che vale 2 per $p \leq p_0$ e si annulla per $p > p_0$. In questo caso otteniamo la relazione del gas libero di Fermi $\frac{p_0^3}{3\pi^2\hbar^3} = \frac{N}{V}$, cioè $p_0 = p_F$. Per $\Delta \neq 0$ la stessa funzione diventa un gradino piú arrotondato. Cerchiamo dunque la correzione alla relazione $p_0 = p_F$ per

$$a \equiv \left(\frac{2m\Delta}{p_0^2} \right)^2 \rightarrow 0 \quad (11.25)$$

Riscriviamo l’integrale in Eq. (11.24) in termini di variabili adimensionali

$$\begin{aligned} \left(\frac{p_F}{p_0} \right)^3 &= \frac{3}{2} \int_0^\infty dx x^2 \left[1 - \frac{x^2 - 1}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 + a}} \right] \\ &= \frac{3}{4} \int_{-1}^\infty dy \sqrt{y+1} \left[1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + a}} \right] \equiv I(a) \end{aligned} \quad (11.26)$$

Da quanto abbiamo detto, $I(0)=1$. Consideriamo la derivata di $I(a)$ rispetto ad a

$$I'(a) = \frac{3}{8} \int_{-1}^{\infty} dy \frac{\sqrt{y+1} y}{(y^2+a)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{16} \int_{-1}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y+1} \sqrt{y^2+a}} \quad (11.27)$$

dopo aver integrato per parti. Per $a > 0$ l'integrale converge, ma per $a \rightarrow 0$, l'integrale, a causa della singolarità dell'integrando per $y = 0$, diverge in modo logaritmico $\int \frac{dy}{y}$. Per a piccolo possiamo approssimare l'integrale in (11.27) con il contributo che proviene da un intervallo intorno del punto $y = 0$ in cui la funzione è sensibilmente diversa da zero. Denotiamo con 2α la lunghezza di questo intorno e consideriamo α fissato mentre $a \rightarrow 0$, cioè prendiamo $\sqrt{a} \ll \alpha$.

$$I'(a) \approx \frac{3}{16} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{dy}{\sqrt{y+1} \sqrt{y^2+a}} \quad (11.28)$$

Per $y \ll \sqrt{a}$ l'integrando tende ad una costante ($\frac{3}{16\sqrt{a}}$) indipendente da y . Pertanto il contributo all'integrale che viene dall'intervallo centrato intorno ad $y = 0$ e di lunghezza $\sim \sqrt{a}$ è maggiorato da una costante indipendente da \sqrt{a} : $\frac{3}{16\sqrt{a}} \times \sqrt{a} = \frac{3}{16}$: questo contributo tende dunque ad una costante che può essere trascurata visto che il valore dell'integrale diverge per $a \rightarrow 0$. In conclusione possiamo restringere l'intervallo di integrazione in (11.28) a $[-\alpha, -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}, \alpha]$. Infine, per a sufficientemente piccoli, è possibile scegliere $\alpha \ll 1$ mantenendo la condizione $\sqrt{a} \ll \alpha$: in questo regime valgono le approssimazioni $\sqrt{1+y} \approx 1$ e $\sqrt{y^2+a} \approx |y|$, per cui l'integrale (11.28) si riduce a

$$I'(a) \approx \frac{3}{16} \times 2 \times \int_{\sqrt{a}}^{\alpha} \frac{dy}{y} = \frac{3}{16} 2 \log \frac{\alpha}{\sqrt{a}} \approx -\frac{3}{16} \log a \quad (11.29)$$

trascurando, consistentemente, termini costanti rispetto a quelli che divergono come $\log a$. Integrando rispetto ad a e ricordando che $I(0) = 1$ otteniamo

$$I(a) = 1 - \frac{3}{16} a \log a + O(a) \quad (11.30)$$

Dunque

$$\left(\frac{p_F}{p_0}\right)^3 = 1 - \frac{3}{16} a \log a + O(a) \quad (11.31)$$

e, con la stessa approssimazione,

$$\frac{p_0}{p_F} \approx 1 + \frac{1}{16} a \log a \approx 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{2m\Delta}{p_F^2} \right)^2 \log \frac{2m\Delta}{p_F^2} \approx 1 - \frac{4q^2}{3nmg} e^{-\frac{4\pi^2\hbar^2}{mgp_F}} \quad (11.32)$$

12 Simmetrie in Seconda Quantizzazione

Sia $U^{(1)}(g)$, con

$$U^{(1)}(g): \mathcal{H}^{(1)} \rightarrow \mathcal{H}^{(1)} \quad (12.1)$$

l'operatore unitario che implementa la trasformazione $g \in G$ appartenente al gruppo di simmetria G . Nella base $\{\psi_\alpha\} \in \mathcal{H}^{(1)}$, $U^{(1)}(g)$ è rappresentato dalla matrice $U_{\alpha\beta}^{(1)}(g)$:

$$U^{(1)}(g) \psi_\alpha = \sum_{\beta} U_{\beta\alpha}^{(1)}(g) \psi_\beta \quad (12.2)$$

Nel caso non-relativistico, possiamo pensare come esempio concreto di G al gruppo delle rotazioni 3-dimensionali.

Siano $\psi^{(\sigma)}(x)$, con $\sigma = 1, \dots, 2s + 1$ le colonne di funzioni d'onda che corrispondono, nella rappresentazione di Schrödinger, ad un generico vettore $\psi \in \mathcal{H}^{(1)}$. Nel caso non-relativistico, per esempio, possiamo prendere come σ un indice associato alla componente dello spin lungo l'asse z di una particella di spin s . (NOTA: Nel caso relativistico σ è un'indice su cui agisce il gruppo di Lorentz che non si identifica direttamente con l'indice di spin.)

I vettori ψ_α della base di $\mathcal{H}^{(1)}$ corrispondono in rappresentazione di Schrödinger alla colonna di funzioni d'onda $(\psi_\alpha^{(\sigma)}(x))$

$$(\psi_\alpha^{(\sigma)}(x)) \leftrightarrow \psi_\alpha \quad (12.3)$$

L'azione (12.2) di G sullo spazio degli stati di singola particella ha, in rappresentazione di Schrödinger, la forma seguente

$$U^{(1)}(g): \psi^{(\sigma)}(x) \rightarrow R_{\sigma'}^{\sigma}(g) \psi^{(\sigma')}(g^{-1}x) \quad (12.4)$$

dove $\psi^{(\sigma)}(x)$ è la colonna di funzioni d'onda che rappresenta uno stato generico. In (12.4) gx denota l'azione del gruppo di simmetria sulle coordinate spaziali, $R_{\sigma'}^{\sigma}(g)$ è una matrice che rappresenta l'azione di G sullo spazio di dimensione $2s + 1$. L'azione di G sui vettori della base diventa in

rappresentazione di Schrödinger

$$U^{(1)}(g) : \psi_\alpha^{(\sigma)}(x) \rightarrow R_{\sigma'}^\sigma(g) \psi_\alpha^{(\sigma')}(g^{-1}x) = \sum_\beta U_{\beta\alpha}^{(1)}(g) \psi_\beta^{(\sigma)}(x) \quad (12.5)$$

OSSERVAZIONE: Nel caso non-relativistico, se G è il gruppo delle rotazioni, $R_{\sigma'}^\sigma(g)$ è la matrice unitaria associata alla rappresentazione di spin s del gruppo delle rotazioni. In generale però — in particolare nel caso relativistico — $R_{\sigma'}^\sigma(g)$ non è necessariamente una rappresentazione *unitaria* di G , ma soltanto una rappresentazione finito dimensionale. Tutto quello che segue non dipende dal fatto che $R_{\sigma'}^\sigma(g)$ sia unitaria o meno ma solo dal fatto che $U^{(1)}(g)$ lo sia.

Nel formalismo di seconda quantizzazione gli stati di singola particella ψ_α sono rappresentati nel modo seguente

$$\psi_\alpha \leftrightarrow a_\alpha^\dagger |0\rangle \quad (12.6)$$

Pertanto, se denotiamo con $U_F(g)$ l'operatore *unitario* che implementa G sullo spazio di Fock, deve essere

$$U_F(g) a_\alpha^\dagger |0\rangle = U_{\beta\alpha}^{(1)}(g) a_\beta^\dagger |0\rangle \quad (12.7)$$

La trasformazione canonica sull'algebra degli operatori di creazione e distruzione che corrisponde a (12.2) è pertanto

$$a_\alpha^\dagger \rightarrow U_F(g) a_\alpha^\dagger U_F^{-1}(g) = U_{\beta\alpha}^{(1)}(g) a_\beta^\dagger \quad (12.8)$$

Di conseguenza

$$a_\alpha \rightarrow U_F(g) a_\alpha U_F^{-1}(g) = \bar{U}_{\beta\alpha}^{(1)}(g) a_\beta \quad (12.9)$$

dove il barrato indica la coniugazione complessa. Poniamo

$$U_F(g) \equiv e^{iH_F(g)} \quad (12.10)$$

dove $H_F(g)$ è il generatore *hermitiano* della trasformazione g sullo spazio di Fock. Sia inoltre

$$U_{\beta\alpha}^{(1)}(g) \equiv (e^{ih^{(1)}(g)})_{\beta\alpha} \quad (12.11)$$

dove $h_{\beta\alpha}^{(1)}(g)$ è la matrice *hermitiana* che rappresenta il generatore della trasformazione g sullo spazio di singola particella $\mathcal{H}^{(1)}$. Da (12.8) e (12.9) deriviamo le relazioni

$$[H_F(g), a_\alpha^\dagger] = h_{\beta\alpha}^{(1)}(g) a_\beta^\dagger \quad [H_F(g), a_\alpha] = -h_{\alpha\beta}^{(1)}(g) a_\beta \quad (12.12)$$

Queste relazioni determinano $H_F(g)$ a meno di un c-numero ed $U_F(g)$ a meno di una fase:

$$H_F(g) = \sum_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}^{(1)}(g) a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta} \quad (12.13)$$

L'equazione (12.13) esprime la relazione familiare tra l'operatore sullo spazio di singola particella $h^{(1)}(g)$ ed il corrispondente operatore $H_F(g)$ sullo spazio di Fock.

OSSERVAZIONE: Le equazioni (12.8) e (12.9) determinano $U_F(g)$ a meno di una fase $e^{i\omega(g)}$: evidentemente se $U_F(g)$ soddisfa (12.8) e (12.9) ogni $U'_F(g)$ definito

$$U'_F(g) = e^{i\omega(g)} U_F(g) \quad (12.14)$$

soddisfa le stesse equazioni. Una restrizione su $e^{i\omega(g)}$ nasce dalla richiesta che sia $U_F(g)$ che $U'_F(g)$ siano rappresentazioni del gruppo G :

$$U'_F(g) U'_F(h) = U'_F(gh) \quad (12.15)$$

Questo implica che $\omega(g)$ deve soddisfare la relazione

$$e^{i\omega(g)} e^{i\omega(h)} = e^{i\omega(gh)} \quad (12.16)$$

Dunque le relazioni (12.8) e (12.9) determinano $U_F(g)$ a meno di una rappresentazione unitaria di dimensione 1 di G . $U_F(g)$ è determinato univocamente se richiediamo che il vuoto $|0\rangle$ sia invariante sotto $U_F(g)$ (od, equivalentemente, che $U_F(g)$ ristretta allo spazio con numero di particelle eguale ad 1 coincida con $U^{(1)}(g)$). In questo caso dobbiamo necessariamente prendere $e^{i\omega(g)} = 1$.

Per lo studio delle simmetrie nel formalismo di seconda quantizzazione è utile determinare l'azione di G sugli operatori di campo

$$\hat{\psi}^{(\sigma)}(x) = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^{(\sigma)}(x) a_{\alpha} \quad (\hat{\psi}^{(\sigma)})^{\dagger}(x) = \sum_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha}^{(\sigma)}(x) a_{\alpha}^{\dagger} \quad (12.17)$$

Le trasformazioni canoniche (12.8) e (12.9) implicano

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^{(\sigma)}(x) &\rightarrow U_F(g) \hat{\psi}^{(\sigma)}(x) U_F^{-1}(g) = \sum_{\alpha\beta} \psi_{\alpha}^{(\sigma)}(x) \bar{U}_{\beta\alpha}^{(1)}(g) a_{\beta} = \\ &= \sum_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta}^{(1)}(g^{-1}) \psi_{\alpha}^{(\sigma)}(x) a_{\beta} = \sum_{\alpha} R_{\sigma\sigma'}(g^{-1}) \psi_{\alpha}^{(\sigma')}(\alpha x) a_{\alpha} \\ &= R_{\sigma\sigma'}(g^{-1}) \hat{\psi}^{(\sigma')}(\alpha x) \end{aligned} \quad (12.18)$$

In altre parole la legge di trasformazione degli operatori di campo $\hat{\psi}^{(\sigma)}(x)$ sotto G è identica in forma a quella delle funzioni d'onda di singola particella (12.4).

Parte II

Teoria Relativistica

13 Relazione tra gruppi ed algebre di Lie

Sia G un gruppo di Lie (un gruppo con una struttura di varietà), sia $e \in G$ l'identità. Data $g \in G$, definiamo il map su G , detto “moltiplicazione a sinistra”:

$$\begin{aligned} l_g: G &\rightarrow G \\ l_g(x) &= g \cdot x \quad \text{per } \forall x \in G \end{aligned} \quad (13.1)$$

I campi vettoriali \hat{X} su G *invarianti a sinistra* sono i campi vettoriali invarianti per l_g , qualunque sia g :

$$l_g^* \hat{X} = \hat{X} \quad (13.2)$$

ovvero,

$$\hat{X}_g(\phi) = \hat{X}_e(\phi \circ l_g) \quad (13.3)$$

dove $\phi(x)$ è una funzione locale (un germe) in un intorno U_g di g . Scriviamo la condizione di invarianza a sinistra in coordinate locali. Sia

$$\begin{aligned} \hat{X} &= \sum_i v^i(x) \partial_i \\ (l_g(x))^i &= \pi^i(x; x_g) \\ \pi^i(x, 0) &= x^i \quad \pi^i(0, x_g) = x_g^i \end{aligned} \quad (13.4)$$

dove x_g^i sono coordinate locali del punto g , x^i coordinate locali di e , $x = 0$ sono le coordinate di e e $i = 1, \dots, \dim G$. I campi invarianti a sinistra soddisfano dunque la condizione

$$v^i(x_g) = v^j(0) \left. \frac{\partial \pi^i(x, x_g)}{\partial x^j} \right|_{x=0} \quad (13.5)$$

Ne consegue che esiste un isomorfismo tra i campi invarianti a sinistra e gli elementi del tangente in $T_e G$ in e . Se $X \in T_e G$ indicheremo il campo invariante a sinistra che vale X in $x = e$ con \hat{X}_X . I campi vettoriali su G formano un'algebra di Lie (di dimensione infinita) sotto l'usuale prodotto di Lie delle derivate:

$$[\hat{X}, \hat{Y}](\phi) = \hat{X}(\hat{Y}(\phi)) - \hat{Y}(\hat{X}(\phi)) \quad (13.6)$$

Rispetto a questo prodotto il sottospazio dei campi invarianti a sinistra forma una sottoalgebra di dimensione finita: $T_e G$ eredita dunque una struttura di algebra di Lie, che denoteremo con LG .

Sia dunque

$$X^{(i)} = \partial_i \quad (13.7)$$

una base di vettori di $T_e G$ e

$$\hat{X}^{(i)}(y) = \left. \frac{\partial \pi^j(x; y)}{\partial x^i} \right|_{x=0} \frac{\partial}{\partial y^j} \quad (13.8)$$

i corrispondenti campi vettoriali invarianti a sinistra. Dalle relazioni (13.4) otteniamo

$$\pi^k(x; y) = x^k + y^k + \frac{1}{2} x^i y^j \frac{\partial^2 \pi^k(x; y)}{\partial x^i \partial y^j} + \dots \quad (13.9)$$

Pertanto le parentesi di Lie della base di vettori $X^{(i)}$ si scrivono

$$[X^{(i)}, X^{(j)}] = f_{ij}^k X^{(k)} \quad (13.10)$$

dove

$$f_{ij}^k = \left[\frac{\partial^2 \pi^k(x; y)}{\partial y^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 \pi^k(x; y)}{\partial y^j \partial x^i} \right]_{x=y=0} \quad (13.11)$$

Consideriamo l'esempio del gruppo delle matrici invertibili $GL(n)$. Sia $M \in GL(n)$ e prendiamo come coordinate locali su $GL(n)$ gli elementi M_{ij} di M , con $i, j = 1, \dots, n$. Un vettore tangente di $T_e G$ si scrive

$$X = X_{ij} \frac{\partial}{\partial M_{ij}} \quad (13.12)$$

Il map $l_M(M_0)$ si scrive in coordinate

$$l_M^{ij}(M_0) = (M M_0)_{ij} = M_{ik} (M_0)_{kj} \quad (13.13)$$

per cui

$$\frac{\partial l_M^{ij}(M_0)}{\partial (M_0)_{kl}} \Big|_{(M_0)_{kl}=\delta_{kl}} = M_{im} \delta_{mk} \delta_{jl} = M_{ik} \delta_{jl} \quad (13.14)$$

Il campo vettoriale a sinistra corrispondente a X è pertanto

$$\hat{X}_X(M) = X_{kl} M_{ik} \delta_{jl} \frac{\partial}{\partial M_{ij}} = (M X)_{ij} \frac{\partial}{\partial M_{ij}} \quad (13.15)$$

L'algebra di Lie è quindi

$$\begin{aligned} [\hat{X}_X, \hat{X}_Y] &= \left[(M X)_{ij} \frac{\partial}{\partial M_{ij}}, (M Y)_{kl} \frac{\partial}{\partial M_{kl}} \right] = \\ &= (M X)_{ij} \frac{\partial (M Y)_{kl}}{\partial M_{ij}} - \frac{\partial (M X)_{ij}}{\partial M_{kl}} = \\ &= (M [X, Y])_{ij} \frac{\partial}{\partial M_{ij}} = \hat{X}_{[X, Y]} \end{aligned} \quad (13.16)$$

ovvero il prodotto di Lie sul tangente $T_e G$ è l'ordinario commutatore di matrici

$$[X, Y]_{ij} = (X Y - Y X)_{ij} \quad (13.17)$$

13.1 I sottogruppi abeliani ad un parametro

Una curva $\alpha(t)$ su G passante per $t = 0$ per il punto p è tangente a $X_p \in T_p G$ se

$$X_p(\phi) = \frac{d}{dt}(\phi \circ \alpha)|_{t=0} \equiv \dot{\alpha}(0)(\phi) \quad (13.18)$$

Le curve integrali del campo $\hat{X}(x)$ soddisfano le equazioni

$$\dot{\alpha}(t) = \hat{X}_{\alpha(t)} \quad (13.19)$$

I teoremi di unicità ed esistenza delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine assicurano l'esistenza di una unica soluzione $\alpha_p(t)$ delle (13.19) che soddisfa la condizione iniziale

$$\alpha_p(0) = p \quad (13.20)$$

in un intorno di p e per $t \in]-\epsilon, \epsilon[$. Quindi per t_1 sufficientemente piccolo, se

$$\alpha_p(t_1) = p_1 \quad (13.21)$$

l'unicità della soluzione delle (13.19) implica che

$$\alpha_{p_1}(t) = \alpha_p(t_1 + t) \quad (13.22)$$

Supponiamo ora che \hat{X} sia invariante a sinistra e $p = e$, dove e è l'identità di G . La curva $p_1 \alpha_e(t)$ per $t = 0$ passa per p_1 ed è una curva integrale:

$$\begin{aligned} \hat{X}_{p_1 \alpha_e(t)}(\phi(y)) \Big|_{y=p_1 \alpha_e(t)} &= \hat{X}_{\alpha_e(t)}(\phi(p_1 x)) \Big|_{x=\alpha_e(t)} = \\ &= \frac{d}{dt}(\phi(p_1 \alpha_e(t))) \end{aligned} \quad (13.23)$$

Pertanto, per l'unicità delle soluzioni di (13.19), otteniamo:

$$\alpha_{p_1}(t) = p_1 \alpha_e(t) = \alpha_e(t_1) \alpha_e(t) \quad (13.24)$$

Insieme alla relazione (13.22) questo dà

$$\alpha_e(t_1 + t) = \alpha_e(t_1) \alpha_e(t) \quad (13.25)$$

In definitiva, la soluzione delle equazioni (13.19) nel caso dei campi invarianti su G è globale. Inoltre per ogni elemento X di LG esiste un sottogruppo abeliano ad un parametro $\alpha_X(t)$. Il map esponenziale dall'algebra di Lie LG e G è definito come

$$\begin{aligned} \exp : LG &\rightarrow G \\ \exp : X &\rightarrow \alpha_X(1) \end{aligned} \quad (13.26)$$

14 $SO(3)$ e $SU(2)$

Una generica matrice complessa U 2x2 si può scrivere nella forma

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} z & w \\ s & t \end{pmatrix} \\ U^{-1} &= \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} t & -w \\ -s & x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14.1)$$

U è unitaria e ha determinate uguale ad 1 se

$$U^{-1} = U^\dagger \Rightarrow \begin{pmatrix} t & -w \\ -s & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^* & s^* \\ w^* & t^* \end{pmatrix} \quad (14.2)$$

Una matrice generica di $SU(2)$ è quindi

$$U = \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix} \\ |z|^2 + |w|^2 = 1 \quad (14.3)$$

Introducendo coordinate cartesiane reali

$$z = x_0 + i x_3 \quad w = x_2 + i x_1 \quad (14.4)$$

possiamo anche scrivere U come

$$U = x_0 \mathbb{I} + i \sigma_i x^i \\ x_0^2 + \vec{x} \cdot \vec{x} = 1 \quad (14.5)$$

Questo mostra che $SU(2)$ è topologicamente una sfera 3-dimensionale S_3 ed è quindi un gruppo semplicemente connesso.

Possiamo introdurre coordinate polari per $SU(2)$

$$\vec{x} = |\vec{x}| \vec{n} = \sin \frac{\theta}{2} \vec{n} \quad x_0 = \cos \frac{\theta}{2} \\ \theta \in [0, 2\pi] \quad (14.6)$$

In effetti quando θ varia nell'intervallo specificato, le coordinate (x_0, \vec{x}) assumono valori $1 \geq |\vec{x}| \geq 0$ e $x_0 \in [-1, 1]$. Consideriamo ora il map da $SU(2)$ in $SO(3)$

$$f : SU(2) \rightarrow SO(3) \\ f : U(x_0, \vec{x}) \rightarrow R(\vec{n}, \theta) \quad (14.7)$$

che associa all'elemento di $SU(2)$ una rotazione 3-dimensionale $R(\vec{n}, \theta)$ intorno all'asse \vec{n} di un angolo θ .

Questo map è surgettivo ma non iniettivo: infatti le matrici di $SU(2)$ corrispondenti a punti (x_0, \vec{x}) e $-(x_0, \vec{x})$ antipodali di S_3 vengono mappati dall'applicazione f nella stessa matrice di $SO(3)$:

$$-(x_0, \vec{x}) = \left(-\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \vec{n}\right) = \left(\cos \frac{2\pi - \theta}{2}, \sin \frac{2\pi - \theta}{2} (-\vec{n})\right) \quad (14.8)$$

Quindi

$$f(U(-x_0, -\vec{x})) = R(-\vec{n}, 2\pi - \theta) = R(\vec{n}, \theta) \quad (14.9)$$

perché una rotazione intorno a \vec{n} di un angolo $\theta \in [0, 2\pi]$ coincide con una rotazione di $2\pi - \theta$ intorno all'asse $-\vec{n}$. In particolare

$$f(\pm\mathbb{I}_2) = \mathbb{I}_3 \quad (14.10)$$

Esercizio Si scriva la matrice $R(\vec{n}, \theta)$ corrispondente ad un punto (x^0, \vec{x}) di $SU(2)$.

Consideriamo la matrice 3x3

$$L_{\mathbf{n}} = i \vec{n} \cdot \vec{L} \quad \vec{n}^2 = 1 \quad (14.11)$$

dove

$$i(L_i)_{jk} = \epsilon_{ijk} \quad (L_{\mathbf{n}})_{jk} = n_i \epsilon_{ijk} \quad (14.12)$$

Quindi

$$\begin{aligned} (L_{\mathbf{n}}^2)_{ij} &= n_p n_q \epsilon_{pik} \epsilon_{qkj} = -n_p n_q \epsilon_{pik} \epsilon_{qjk} = -n_p n_q (\delta_{pq} \delta_{ij} - \delta_{pj} \delta_{qi}) = \\ &= -\delta_{ij} + n_i n_j \end{aligned} \quad (14.13)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} (L_{\mathbf{n}}^3)_{ik} &= (-\delta_{ij} + n_i n_j) n_q \epsilon_{qjk} = -n_q \epsilon_{qik} + n_i n_j n_q \epsilon_{qjk} = \\ &= -(L_{\mathbf{n}})_{ik} \\ L_{\mathbf{n}}^4 &= -L_{\mathbf{n}}^2 \\ (L_{\mathbf{n}}^5) &= -(L_{\mathbf{n}})^3 = L_{\mathbf{n}} \quad L_{\mathbf{n}}^6 = L_{\mathbf{n}}^2 \quad L_{\mathbf{n}}^7 = L_{\mathbf{n}}^3 = -L_{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (14.14)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} R(\vec{n}, \theta) &= e^{\theta L_{\mathbf{n}}} = \mathbb{I} + \theta L_{\mathbf{n}} + \frac{\theta^2}{2} L_{\mathbf{n}}^2 - \frac{\theta^3}{3!} L_{\mathbf{n}} + \\ &= \mathbb{I} + \sin \theta L_{\mathbf{n}} + (\cos \theta - 1) L_{\mathbf{n}}^2 = \\ &= (2 - \cos \theta) \mathbb{I} + \sin \theta L_{\mathbf{n}} - (1 - \cos \theta) \vec{n} \otimes \vec{n} \end{aligned} \quad (14.15)$$

dove abbiamo introdotto la matrice

$$(\vec{n} \otimes \vec{n})_{ij} \equiv n_i n_j \quad (14.16)$$

Esercizio: Si dimostri che il map f è un omomorfismo:

$$f(U_1) = R_1 \quad f(U_2) = R_2 \quad \Rightarrow \quad f(U_1 U_2) = R_1 R_2 \quad (14.17)$$

Il sottogruppo

$$\mathbb{Z}_2 = \{\mathbb{I}_2, -\mathbb{I}_2\} \quad (14.18)$$

di $SU(2)$ commuta con tutti gli elementi di $SU(2)$ ed è detto il *centro* di $SU(2)$. Possiamo quindi scrivere

$$SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2 \quad (14.19)$$

dove il quoziente è definito come l'insieme delle classi di equivalenza rispetto alla relazione di equivalenza

$$U \sim U' \Leftrightarrow U' = \pm U \quad (14.20)$$

I cammini *aperti* in $SU(2)$ che connettono U con $-U$ sono cammini chiusi in $SO(3)$ non contraibili. Sono associati quindi elementi non-triviali del $\pi_1(SO(3))$. Il prodotto di un cammino di questo tipo con se stesso è un cammino contraibile. Pertanto $SO(3)$ non è semplicemente connesso e

$$\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2 \quad (14.21)$$

Le rappresentazioni di $SU(2)$ per le quali il centro è rappresentato trivialmente discendono pertanto a rappresentazioni di $SO(3)$: queste sono le rappresentazioni di spin intero. Le rappresentazioni di spin semi-intero, che mandano $-\mathbb{I}_2$ in -1 , corrispondono invece a rappresentazioni proiettive di $SO(3)$.

15 Rappresentazioni di un gruppo e rappresentazioni dell'algebra

Consideriamo un gruppo di Lie G la cui algebra di Lie ha una base X_i

$$[X_i, X_j] = i f_{ij}^k X_k \quad (15.1)$$

Scriviamo un elemento del gruppo nell'intorno dell'identità in termini del map esponenziale

$$g(\theta) = e^{i\theta^i X_i} \quad (15.2)$$

Supponiamo di avere una rappresentazione lineare del gruppo $U(g)$

$$U(g_1) U(g_2) = U(g_1 g_2) \quad (15.3)$$

o, equivalentemente

$$U(g_1) U(g_2) U(g_1)^{-1} = U(g_1 g_2 g_1^{-1}) \quad (15.4)$$

Per parametri θ^i piccoli

$$g(\theta) = e^{i\theta^i X_i} = 1 + i\theta^i X_i + O(\theta^2) \quad (15.5)$$

e

$$U(g(\theta)) = 1 + i\theta^i \hat{X}_i + O(\theta^2) \quad (15.6)$$

dove \hat{X}_i corrisponde a X_i nella rappresentazione data.

Prendiamo

$$g_1 = g(\theta) \quad g_2 = g(\phi) \quad (15.7)$$

e cominciamo col prendere ϕ piccolo. La (15.4) diventa

$$\begin{aligned} U(g_1) U(g_2) U(g_1)^{-1} &= U(g_1) (1 + i\phi^i \hat{X}_i + O(\phi^2)) U(g_1)^{-1} = \\ &= 1 + i\phi^i U(g_1) \hat{X}_i U(g_1)^{-1} + O(\phi^2) = \\ &= U(1 + i\phi^i g_1 X_i g_1^{-1} + O(\phi^2)) \end{aligned} \quad (15.8)$$

Consideriamo

$$g_1 X_i g_1^{-1} = g(\theta) X_i g(\theta)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [i\theta^{i_1} X_{i_1}, [\dots, [i\theta^{i_n} X_{i_n}, X_i] \dots]] = \quad (15.9)$$

Abbiamo

$$[i\theta^{i_n} X_{i_n}, X_i] = i\theta^{i_n} i f_{i_n i}^k X_k \equiv -i(\theta^{i_n} f_{i_n})_{ik} X_k \quad (15.10)$$

dove abbiamo introdotto le matrici

$$(f_{i_n})_{ik} = i f_{i_n}^k \quad (15.11)$$

Pertanto

$$g_1 X_i g_1^{-1} = (e^{-i\theta^i f_i})_{ik} X_k \quad (15.12)$$

da cui

$$1 + i \phi^i g_1 X_i g_1^{-1} + O(\phi^2) = 1 + i \phi^i (e^{-i\theta^i f_i})_{ik} X_k + O(\phi^2) \quad (15.13)$$

ovvero

$$U(1 + i \phi^i g_1 X_i g_1^{-1} + O(\phi^2)) = 1 + i \phi^i (e^{-i\theta^i f_i})_{ik} \hat{X}_k + O(\phi^2) \quad (15.14)$$

Dalla (15.8) concludiamo dunque che

$$U(g_1) \hat{X}_i U(g_1)^{-1} = (e^{-i\theta^j f_j})_{ik} \hat{X}_k \quad (15.15)$$

Espandiamo ora ambo i membri di questa equazione in potenze di θ^i

$$i \theta^j [\hat{X}_j, \hat{X}_i] = -i \theta^j (f_j)_{ik} \hat{X}_k \quad (15.16)$$

ovvero

$$[\hat{X}_j, \hat{X}_i] = -(f_j)_{ik} \hat{X}_k = -i f_{ij}^k \hat{X}_k = i f_{ji}^k \hat{X}_k \quad (15.17)$$

In conclusione, gli operatori \hat{X}_i corrispondenti ai generatori X_i forniscono una rappresentazione dell'algebra di Lie.

Generalizziamo questo risultato al caso di rappresentazioni (unitarie) *proiettive*:

$$U(g_1) U(g_2) = e^{i\Phi(g_1, g_2)} U(g_1 g_2) \quad (15.18)$$

In questo caso la (15.8) è sostituita dalla

$$U(g_1) U(g_2) U(g_1)^{-1} = e^{i\Phi(g_1, g_2)} U(g_1 g_2) U(g_1)^{-1} \quad (15.19)$$

Poiché

$$U(g_1) U(g_1^{-1}) = e^{i\Phi(g_1, g_1^{-1})} \quad (15.20)$$

o, equivalentemente,

$$U(g_1)^{-1} = e^{-i\Phi(g_1, g_1^{-1})} U(g_1^{-1}) \quad (15.21)$$

la (15.19) si scrive

$$U(g_1) U(g_2) U(g_1)^{-1} = e^{i\Phi(g_1, g_2) + i\Phi(g_1 g_2, g_1^{-1}) - i\Phi(g_1, g_1^{-1})} U(g_1 g_2 g_1^{-1}) \quad (15.22)$$

Poiché

$$\Phi(g_1, 1) = \Phi(1, g_2) = 1 \quad (15.23)$$

l'espansione di $\Phi(g_1, g_2)$ per θ^i e ϕ^i piccoli ha la forma

$$\Phi(g_1, g_2) = f_{ij} \theta^i \phi^j + \dots \quad (15.24)$$

dove i punti denotano termini del terzo ordine e superiori. Dunque

$$\begin{aligned} \Phi(g_1, g_2) + \Phi(g_1 g_2, g_1^{-1}) - \Phi(g_1, g_1^{-1}) &= \\ &= f_{ij} \theta^i \phi^j + f_{ij} (\theta^i + \phi^i) (-\theta^j) + f_{ij} \theta^i \theta^j + \dots = \\ &= (f_{ji} - f_{ij}) \theta^j \phi^i + \dots \end{aligned} \quad (15.25)$$

Espandendo la (15.22) in θ^i e ϕ^i otteniamo quindi

$$[\hat{X}_j, \hat{X}_i] = -(f_j)_ik \hat{X}_k + i(f_{ij} - f_{ji}) \hat{1} \equiv i f_{ji}^k \hat{X}_k + i c_{ij} \hat{1} \quad (15.26)$$

dove le costanti $c_{ij} \equiv f_{ij} - f_{ji}$ sono antisimmetriche per lo scambio degli indici i e j . La presenza di c_{ij} non banali riflette a livello di algebra la natura proiettiva della rappresentazione del gruppo. Le c_{ij} vengono chiamati *cariche centrali*, e la (15.26) viene detta *un'estensione centrale* dell'algebra di Lie del gruppo.

15.1 L'estensione centrale dell'algebra di Galileo

L'algebra delle trasformazioni di simmetrie della meccanica classica non-relativistica è quella di Galileo

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= i \epsilon_{ijk} L_k & [L_i, G_j] &= i \epsilon_{ijk} G_k & [G_i, G_j] &= 0 \\ [L_i, P_j] &= i \epsilon_{ijk} P_k & [L_i, H] &= 0 & [P_i, P_j] &= [P_i, H] = 0 \\ [G_i, H] &= i P_i & [G_i, P_j] &= 0 & & \end{aligned} \quad (15.27)$$

L_i sono i generatori delle rotazioni, P_i quelli delle traslazioni, H l'Hamiltoniana e G_i i generatori dei boost di Galileo.

L'algebra delle simmetrie non-relativistiche (15.27) è connessa all'algebra di Poincarè

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= i \epsilon_{ijk} L_k & [L_i, K_j] &= i \epsilon_{ijk} K_k & [K_i, K_j] &= -i \epsilon_{ijk} L_k \\ [L_i, P_j] &= i \epsilon_{ijk} P_k & [L_i, P_0] &= 0 & [P_i, P_j] &= [P_i, P_0] = 0 \\ [K_i, P_0] &= i P_i & [K_i, P_j] &= i \delta_{ij} P_0 \end{aligned} \quad (15.28)$$

attraversi una procedura nota come la contrazione di Inonu-Wigner. Si ponga

$$K_i = c G_i \quad (15.29)$$

Questa relazione tra boost relativistici e galileiani è fisicamente motivata dalla relazione

$$\frac{v^i}{c} K_i = v^i G_i \quad (15.30)$$

L'algebra di Poincarè (15.28) si scrive in termini di G_i e $H = c P_0$

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= i \epsilon_{ijk} L_k & [L_i, G_j] &= i \epsilon_{ijk} G_k & [G_i, G_j] &= -\frac{i \epsilon_{ijk} L_k}{c^2} \\ [L_i, P_j] &= i \epsilon_{ijk} P_k & [L_i, H] &= 0 & [P_i, P_j] &= [P_i, H] = 0 \\ [G_i, H] &= i P_i & [G_i, P_j] &= i \delta_{ij} \frac{H}{c^2} \end{aligned} \quad (15.31)$$

Vediamo quindi che se teniamo L_i, G_i, P_i fissi e prendiamo il limite $c \rightarrow \infty$ otteniamo una estensione centrale dell'algebra galileiana

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= i \epsilon_{ijk} L_k & [L_i, G_j] &= i \epsilon_{ijk} G_k & [G_i, G_j] &= 0 \\ [L_i, P_j] &= i \epsilon_{ijk} P_k & [L_i, H] &= 0 & [P_i, P_j] &= [P_i, H] = 0 \\ [G_i, H] &= i P_i & [G_i, P_j] &= i \delta_{ij} M \hat{1} \end{aligned} \quad (15.32)$$

dove abbiamo posto

$$\frac{H}{c^2} \rightarrow M \hat{1} \quad (15.33)$$

nel limite $c \rightarrow \infty$, con M la massa del sistema.

Dimostriamo che nella meccanica quantistica non relativistica di una particella, la simmetria galileiana è effettivamente implementata proiettivamente, ovvero l'algebra dei generatori di simmetria contiene l'estensione centrale proporzionale alla massa M .

Se $\psi(\vec{x}, t)$ soddisfa l'equazione di Schrödinger non relativistica libera

$$i \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}, t) \quad (15.34)$$

in un dato sistema di riferimento inerziale, la funzione d'onda in un sistema di riferimento che si sposta con velocità uniforme \vec{v} rispetto a questo è

$$\tilde{\psi}(\vec{x}, t) = e^{-\frac{iM\vec{v}^2}{2}t + iM\vec{v}\cdot\vec{x}} \psi(\vec{x} - t\vec{v}, t) \quad (15.35)$$

ovvero

$$\tilde{\psi} = e^{iM\vec{v}\cdot\hat{x} - it\vec{v}\cdot\hat{p}} \psi \equiv U(\vec{v}) \psi \quad (15.36)$$

dove $U(\vec{v})$

$$U(\vec{v}) = e^{i\vec{v}\cdot\vec{G}} \quad \vec{G} = (G_1, G_2, G_3) \quad (15.37)$$

è unitario e \vec{G}_i sono gli operatori hermitiani che implementano i generatori dei boost di Galileo

$$G_i = M \hat{x}_i - t \hat{P}_i \quad (15.38)$$

Otteniamo dunque dalle regole di commutazione canoniche

$$[G_i, \hat{P}_j] = M [\hat{x}_i, \hat{P}_j] = iM \delta_{ij} \hat{1} \quad (15.39)$$

Dunque una carica centrale non banale, proporzionale alla massa del sistema, è effettivamente presente nell'algebra dei generatori quantistici della simmetria galieiana.

16 Le rappresentazioni unitarie del gruppo di Poincaré

Denotiamo con $\Lambda = (\Lambda)_{\nu}^{\mu}$ le trasformazioni di Lorentz omogenee:

$$\Lambda : x^{\mu} \rightarrow (x')^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (16.1)$$

Siano \hat{P}^μ i generatori delle traslazioni, che formano una sottoalgebra abeliana dell'algebra di Poincaré. Consideriamo una base in cui questi operatori sono diagonali. Denotiamo con $U(\Lambda)$ l'azione delle trasformazioni di Lorentz omogenee sullo spazio della rappresentazione. Dalla relazione

$$U(\Lambda)^\dagger \hat{P}^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu \quad (16.2)$$

otteniamo

$$U(\Lambda) |p^\mu, \sigma\rangle = N_{\sigma'\sigma}(p, \Lambda) |\Lambda p, \sigma'\rangle \quad (16.3)$$

Poiché $(\Lambda p)^2 = p^2$, lo spazio degli stati \mathcal{H} di una rappresentazione irriducibile sarà la somma diretta di autospazi \mathcal{H}_p di \hat{P}^μ con autovalore $p^2 = m^2$ fissato. Se ci restringiamo al sottogruppo delle trasformazioni di Lorentz omogenee ortocrone, le rappresentazioni irriducibili si restringono agli autospazi \mathcal{H}_p con $p^2 = m^2$ e segno di p^0 determinato. Indichiamo con $\mathcal{H}_{m^2}^{(\pm)}$ gli spazi vettoriali corrispondenti. Per ragioni fisiche considereremo nel seguito soltanto le rappresentazioni con

$$m^2 \geq 0 \quad (16.4)$$

Nella (16.3) gli autovalori p^μ sono pertanto della forma

$$p^\mu = (\pm\omega_{\vec{p}}, \vec{p}) \quad \omega_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad (16.5)$$

La richiesta che $U(\Lambda)$ sia una rappresentazione porta alla condizione

$$N(\Lambda_2, \Lambda_1 p) N(\Lambda_1, p) = N(\Lambda_2 \Lambda_1, p) \quad (16.6)$$

dove il prodotto è quello matriciale, rispetto agli indici σ, σ' . È immediato verificare che due soluzioni $N(\Lambda, p)$ e $\tilde{N}(\Lambda, p)$ dell'equazione (16.6) legate dalla relazione

$$\tilde{N}(\Lambda, p) = M(\Lambda p) N(\Lambda, p) M(p)^{-1} \quad (16.7)$$

definiscono rappresentazioni *equivalenti*.

Denotiamo con \bar{p} un punto della varietà degli autovalori, definita da $p^2 = m^2$ con segno di p^0 fissato. Un qualunque punto p su questa varietà è raggiungibile da \bar{p} attraverso una trasformazione di Lorentz omogenea:

$$p = L(p) \bar{p} \quad (16.8)$$

La matrice $L(p)$ non è univocamente determinata. Denotiamo con $W_{p'}(p)$ una trasformazione di Lorentz che lascia invariato p'

$$W_{p'}(p) p' = p' \quad (16.9)$$

Allora se $L(p)$ soddisfa (16.8), la trasformazione di Lorentz $\tilde{L}(p)$,

$$\tilde{L}(p) = W_p(p) L(p) W_{\bar{p}}(p) \quad (16.10)$$

soddisfa ugualmente (16.8). Fissata la varietà degli autovalori, i gruppi $\mathcal{W}_{p'}$ sono isomorfi al variare di p' sulla varietà. $\mathcal{W}_{\bar{p}}$ è detto il *piccolo gruppo* di \bar{p} .

Consideriamo l'equazione (16.6) per $\Lambda_2 = \Lambda$, $\Lambda_1 = L(p)$, e $p = \bar{p}$

$$\begin{aligned} N(\Lambda, L(p) \bar{p}) N(L(p), \bar{p}) &= N(\Lambda L(p), \bar{p}) = \\ &= N(L(\Lambda p) L(\Lambda p)^{-1} \Lambda L(p), \bar{p}) = N(L(\Lambda p) W(\Lambda, p), \bar{p}) \end{aligned} \quad (16.11)$$

dove abbiamo introdotto

$$W(\Lambda, p) = L(\Lambda p)^{-1} \Lambda L(p) \quad (16.12)$$

$W(\Lambda, p)$ è un elemento del piccolo gruppo $\mathcal{W}_{\bar{p}}$:

$$L(\Lambda p)^{-1} \Lambda L(p) \bar{p} = L(\Lambda p)^{-1} \Lambda p = \bar{p} \quad (16.13)$$

Applicando la relazione (16.6) questa volta a $N(L(\Lambda p) W(\Lambda, p), \bar{p})$ otteniamo

$$\begin{aligned} N(L(\Lambda p) W(\Lambda, p), \bar{p}) &= N(L(\Lambda p), W(\Lambda, p) \bar{p}) N(W(\Lambda, p), \bar{p}) = \\ &= N(L(\Lambda p), \bar{p}) N(W(\Lambda, p), \bar{p}) \end{aligned} \quad (16.14)$$

Combinando (16.11) e (16.14) concludiamo

$$N(\Lambda, L(p) \bar{p}) N(L(p), \bar{p}) = N(L(\Lambda p), \bar{p}) N(W(\Lambda, p), \bar{p}) \quad (16.15)$$

ovvero

$$N(\Lambda, p) = N(L(\Lambda p), \bar{p}) N(W(\Lambda, p), \bar{p}) N(L(p), \bar{p})^{-1} \quad (16.16)$$

Questa relazione dice che una soluzione arbitraria dell'equazione (16.6) è equivalente alla soluzione $N(W(\Lambda, p), \bar{p})$.

L'azione del gruppo di Lorentz sugli stati è pertanto completamente determinata dall'azione del piccolo gruppo sul sottospazio $\mathcal{H}_{\bar{p}}$. A sua volta questa azione è caratterizzata dalla scelta di una rappresentazione del piccolo gruppo. Infatti la relazione (16.6) diventa per trasformazioni $W_1, W_2 \in \mathcal{W}_{\bar{p}}$ del piccolo gruppo, nel caso in cui $p = \bar{p}$,

$$N(W_2, \bar{p}) N(W_1, \bar{p}) = N(W_2 W_1, \bar{p}) \quad (16.17)$$

In altre parole $N(W, \bar{p})$ è una rappresentazione del piccolo gruppo $\mathcal{W}_{\bar{p}}$.

È agevole dimostrare che un cambiamento (16.10) della scelta di $L(p)$ o della scelta di \bar{p} porta ad una rappresentazione equivalente. In definitiva le rappresentazioni unitarie irriducibili inequivalenti del gruppo di Poincaré sono in corrispondenza biunivoca con le rappresentazioni unitarie irriducibili del piccolo gruppo. Per derivare la forma esplicita dell'azione delle trasformazioni di Lorentz omogenee sugli stati, dobbiamo specificare, \bar{p} , $L(p)$ ed una base.

16.1 Caso massivo

Nel caso massivo prendiamo

$$\bar{p} = (m, 0, 0, 0) \quad (16.18)$$

Il piccolo gruppo $\mathcal{W}_{\bar{p}}$ è il gruppo delle matrici di Lorentz \mathcal{R} della forma

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \quad (16.19)$$

dove $R \in SO(3)$ è una matrice ortogonale di dimensione 3.

Una scelta conveniente per $L(p)$ è

$$L(p) = \hat{\mathcal{R}}(\hat{p}) B_z(|\vec{p}|) \hat{\mathcal{R}}(\hat{p})^{-1} \quad (16.20)$$

dove

$$\hat{\mathcal{R}}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{R}(\hat{p}) \end{pmatrix} \quad (16.21)$$

è una rotazione spaziale che porta \hat{z} in $\hat{p} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$:

$$\hat{R}(\hat{p}) \hat{z} = \hat{p} \quad (16.22)$$

e $B_z(|\vec{p}|)$ è una trasformazione di Lorentz speciale tale che

$$B_z(|\vec{p}|) \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{\vec{p}} \\ 0 \\ 0 \\ |\vec{p}| \end{pmatrix} \quad (16.23)$$

Questa scelta per $L(p)$ gode della seguente proprietà

$$W(\mathcal{R}, p) = L(\mathcal{R} p)^{-1} \mathcal{R} L(p) = \mathcal{R} \quad (16.24)$$

Infatti

$$\begin{aligned} L(\mathcal{R} p)^{-1} \mathcal{R} L(p) &= \\ &= \hat{\mathcal{R}}(\mathcal{R} p) B_z(|\vec{p}|)^{-1} \hat{\mathcal{R}}(\mathcal{R} \hat{p})^{-1} \mathcal{R} \hat{\mathcal{R}}(\hat{p}) B_z(|\vec{p}|) \hat{\mathcal{R}}(\hat{p})^{-1} \end{aligned} \quad (16.25)$$

Osserviamo che

$$\hat{R}(R \hat{p})^{-1} R \hat{R}(\hat{p}) \hat{z} = \hat{R}(R \hat{p})^{-1} (R \hat{p}) = \hat{z} \quad (16.26)$$

Pertanto

$$\hat{\mathcal{R}}(\mathcal{R} \hat{p})^{-1} \mathcal{R} \hat{\mathcal{R}}(\hat{p}) = \mathcal{R}_z(\theta(\mathcal{R}, \vec{p})) \quad (16.27)$$

dove $\mathcal{R}_z(\theta)$ è una rotazione spaziale lungo l'asse delle z . Quindi

$$L(\mathcal{R} p)^{-1} \mathcal{R} L(p) = \hat{\mathcal{R}}(\mathcal{R} p) B_z(|\vec{p}|)^{-1} \mathcal{R}_z(\theta(\mathcal{R}, \vec{p})) B_z(|\vec{p}|) \hat{\mathcal{R}}(\hat{p})^{-1} \quad (16.28)$$

Le trasformazioni di Lorentz speciali lungo z e le rotazioni spaziali lungo z commutano:

$$B_z(\omega) \mathcal{R}_z(\theta) = \mathcal{R}_z(\theta) B_z(\omega) \quad (16.29)$$

Dunque

$$L(\mathcal{R} p)^{-1} \mathcal{R} L(p) = \hat{\mathcal{R}}(\mathcal{R} p) \mathcal{R}_z(\theta(\mathcal{R}, \vec{p})) \hat{\mathcal{R}}(\hat{p})^{-1} = \mathcal{R} \quad (16.30)$$

16.1.1 La base del sistema di riposo

Indichiamo con $\mathcal{R}_z(\theta)$ il sottogruppo ad un parametro di $\mathcal{W}_{\vec{p}}$ corrispondente alle rotazioni lungo l'asse delle z . Scegliamo come base di $\mathcal{H}_{\vec{p}}$ la base degli autostati di $\mathcal{R}_z(\theta)$

$$U(\mathcal{R}_z(\theta))|\vec{p}, \sigma\rangle = e^{i\theta\sigma}|\vec{p}, \sigma\rangle \quad (16.31)$$

Definiamo infine una base di \mathcal{H}_p con p generico nel modo seguente

$$|p, \sigma\rangle = U(L(p))|\vec{p}, \sigma\rangle \quad (16.32)$$

Questa scelta è equivalente a porre

$$N_{\sigma\sigma'}(L(p), \vec{p}) = \delta_{\sigma\sigma'} \quad (16.33)$$

In questa base l'azione delle trasformazioni di Lorentz omogenee si scrive

$$U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = N_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p), \bar{p}) |\Lambda p, \sigma'\rangle \quad (16.34)$$

Una rappresentazione unitaria ed irriducibile sarà pertanto caratterizzata da m^2 , dal segno di p^0 e da uno spin j . Indicheremo lo spazio di questa rappresentazione con $\mathcal{H}_{m,j}^\pm$. L'azione delle trasformazioni di Lorentz omogenea diventa

$$U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(W(\Lambda, p)) |\Lambda p, \sigma'\rangle \quad (16.35)$$

dove $D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(\mathcal{R})$, con $\sigma, \sigma' = 1, \dots, 2j+1$, sono le matrici della rappresentazione di spin j del momento angolare, e

$$D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(\mathcal{R}_z(\theta)) = \delta_{\sigma'\sigma} e^{i\theta\sigma} \quad (16.36)$$

16.1.2 La base dell'elicità

Sia $\mathcal{R}_{\hat{p}}(\theta)$ il sottogruppo ad un parametro delle rotazioni lungo l'asse $\hat{p} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$. La base $\psi_{\vec{p},\lambda}$ corrispondente agli stati di *elicità* definita è

$$U(\mathcal{R}_{\hat{p}}(\theta)) \psi_{\vec{p},\lambda} = e^{i\lambda\theta} \psi_{\vec{p},\lambda} \quad (16.37)$$

Questa equazione è compatibile con la forma generale (16.3) dell'azione delle trasformazioni di Lorentz in quanto

$$\mathcal{R}_{\hat{p}}(\theta) p = p \quad (16.38)$$

Scriviamo

$$\psi_{\vec{p},\lambda} = \sum_{\sigma} a_{\sigma\lambda}(p) |p, \sigma\rangle \quad (16.39)$$

dove $|p, \sigma\rangle$ è la base introdotta nella sottosezione precedente degli stati di momento angolare definito nel sistema di riposo. Dunque

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} a_{\sigma\lambda}(p) U(\mathcal{R}_{\hat{p}}(\theta)) |p, \sigma\rangle &= \sum_{\sigma, \sigma'} a_{\sigma\lambda}(p) N_{\sigma'\sigma}(W(\mathcal{R}_{\hat{p}}(\theta), p), \bar{p}) |p, \sigma'\rangle = \\ &= e^{i\lambda\theta} \sum_{\sigma'} a_{\sigma'\lambda}(p) |p, \sigma'\rangle \end{aligned} \quad (16.40)$$

da cui

$$\sum_{\sigma} N_{\sigma'\sigma}(W(\mathcal{R}_{\hat{p}}(\theta), p), \bar{p}) a_{\sigma\lambda}(p) = e^{i\lambda\theta} a_{\sigma'\lambda}(p) \quad (16.41)$$

Con la scelta (16.20) per $L(p)$ quest'equazione diventa

$$\sum_{\sigma} D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(\mathcal{R}_{\hat{p}}(\theta)) a_{\sigma\lambda}(p) = e^{i\lambda\theta} a_{\sigma'\lambda}(p) \quad (16.42)$$

Possiamo scrivere

$$\mathcal{R}_{\hat{p}}(\theta) = \mathcal{R}(\hat{p}) \mathcal{R}_{\hat{z}}(\theta) \mathcal{R}(\hat{p})^{-1} \quad (16.43)$$

Pertanto, l'equazione che definisce la base dell'elicità diventa

$$D^{(j)}(\mathcal{R}_{\hat{z}}(\theta)) \left(D^{(j)}(\mathcal{R}(\hat{p}))^{-1} a_{\lambda}(p) \right) = e^{i\lambda\theta} \left(D^{(j)}(\mathcal{R}(\hat{p}))^{-1} a_{\lambda}(p) \right) \quad (16.44)$$

dove le somme sugli indici σ, σ' sono catturate dalla notazione matriciale. Dunque

$$D^{(j)}(\mathcal{R}(\hat{p}))^{-1} a_{\lambda}(p) = a_{\lambda}(\tilde{p}) \quad (16.45)$$

dove

$$\tilde{p} = (\omega_{\tilde{p}}, 0, 0, |\vec{p}|) \quad (16.46)$$

Scegliendo le matrici $D_{\sigma\sigma'}^{(j)}(\mathcal{R})$ tali che

$$D_{\sigma\sigma'}^{(j)}(\mathcal{R}_z(\theta)) = \delta_{\sigma\sigma'} e^{i\theta\sigma} \quad (16.47)$$

otteniamo

$$a_{\sigma\lambda}(\tilde{p}) = C_{\sigma}(|\vec{p}|) \delta_{\sigma\lambda} \quad (16.48)$$

e

$$\psi_{|\vec{p}| \hat{z}, \lambda} = C_{\lambda}(|\vec{p}|) |\tilde{p}, \lambda\rangle \quad (16.49)$$

Prendiamo le basi $|p, \sigma\rangle$ e $|\tilde{p}, \lambda\rangle$ normalizzate secondo la seguente

$$\begin{aligned} \langle p, \sigma | p', \sigma' \rangle &= \delta_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \\ (\psi_{\tilde{p}, \lambda}, \psi_{\tilde{p}', \lambda'}) &= \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \end{aligned} \quad (16.50)$$

Allora i fattori $C_{\lambda}(|\vec{p}|)$ sono delle fasi

$$|C_{\lambda}(|\vec{p}|)|^2 = 1 \quad (16.51)$$

Possiamo sempre riassorbire queste fasi nella definizione della base $|p, \sigma\rangle$ e prendere

$$C_{\lambda}(|\vec{p}|) = 1 \quad (16.52)$$

In definitiva

$$a_{\sigma\lambda}(p) = D_{\sigma\lambda}^{(j)}(\mathcal{R}(\hat{p})) \quad (16.53)$$

e la base degli stati dell'elicità è legata alla base degli stati di spin definito nel sistema di riposo dalla

$$\psi_{\vec{p},\lambda} = D_{\sigma\lambda}^{(j)}(\mathcal{R}(\hat{p})) |p, \sigma\rangle \quad (16.54)$$

Si noti che questa relazione è valida se $L(p)$ è tale che

$$W(\mathcal{R}, p) = L(\mathcal{R}p)^{-1} \mathcal{R} L(p) = \mathcal{R} \quad (16.55)$$

In definitiva

$$\psi_{\vec{p},\lambda} = U(\mathcal{R}(\hat{p})) |\tilde{p}, \lambda\rangle = D_{\sigma\lambda}^{(j)}(\mathcal{R}(\hat{p})) |p, \sigma\rangle \quad (16.56)$$

Dimostrazione alternativa più rapida di (16.56). Una volta ottenuto questo risultato possiamo dimostrare in modo più immediato che gli stati di elicità sono effettivamente autostati delle rotazioni lungo l'asse di propagazione:

$$\begin{aligned} U(\mathcal{R}_{\hat{p}}(\theta)) \psi_{\vec{p},\lambda} &= U(\mathcal{R}_{\hat{p}}(\theta)) U(\mathcal{R}(\hat{p})) |\tilde{p}, \lambda\rangle = U(\mathcal{R}_{\hat{p}}(\theta) \mathcal{R}(\hat{p})) |\tilde{p}, \lambda\rangle = \\ &= U(\mathcal{R}(\hat{p}) \mathcal{R}_{\hat{z}}(\theta)) |\tilde{p}, \lambda\rangle = U(\mathcal{R}(\hat{p})) U(\mathcal{R}_{\hat{z}}(\theta)) |\tilde{p}, \lambda\rangle = \\ &= U(\mathcal{R}(\hat{p})) D^{(j)}(R_{\hat{z}}(\theta))_{\sigma\lambda} |\tilde{p}, \sigma\rangle = \\ &= U(\mathcal{R}(\hat{p})) e^{i\lambda\theta} |\tilde{p}, \lambda\rangle = e^{i\lambda\theta} U(\mathcal{R}(\hat{p})) |\tilde{p}, \lambda\rangle \end{aligned} \quad (16.57)$$

16.2 Vettori di polarizzazione nella base di elicità per spin 1 massivo

Consideriamo una particella di massa m spin 1, che si muove con impulso

$$\tilde{p}^\mu = (\omega_{\vec{p}}, |\vec{p}| \hat{z}) \quad (16.58)$$

lungo l'asse delle zeta. I vettori di polarizzazione con elicità definite soddisfano

$$\epsilon(\tilde{p}, \lambda) \cdot \tilde{p} = 0 = \epsilon_0(\tilde{p}, \lambda) \omega_{\vec{p}} - \epsilon^3(\tilde{p}, \lambda) |\vec{p}| \quad (16.59)$$

da cui

$$\epsilon^0(\tilde{p}, \lambda) = \frac{\epsilon^3(\tilde{p}, \lambda) |\vec{p}|}{\omega_{\vec{p}}} \quad (16.60)$$

Pertanto¹

$$\begin{aligned}\epsilon(\tilde{p}, 0) &= \left(\frac{|\vec{p}|}{\omega_{\vec{p}}}, 0, 0, 1\right) \frac{\omega_{\vec{p}}}{m} = \left(\frac{|\vec{p}|}{m}, 0, 0, \frac{\omega_{\vec{p}}}{m}\right) \\ \epsilon(\tilde{p}, \pm 1) &= (0, \vec{\epsilon}_{\pm}) \quad \vec{\epsilon}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, \pm i, 0)\end{aligned}\quad (16.61)$$

I vettori di polarizzazioni corrispondenti all'impulso

$$p^\mu = (\omega_{\vec{p}}, |\vec{p}| \hat{p}) = \mathcal{R}(\hat{p}) \tilde{p} \quad (16.62)$$

si ottengono dagli $\epsilon(\tilde{p}, \lambda)$ con una rotazione

$$\epsilon^\mu(p, \lambda) = \mathcal{R}_\nu^\mu(\hat{p}) \epsilon^\nu(\tilde{p}, \lambda) \quad (16.63)$$

Infatti, da una parte

$$(\mathcal{R}(\hat{p}) \epsilon(\tilde{p}, \lambda)) \cdot (\mathcal{R}(\hat{p}) \tilde{p}) = \epsilon(\tilde{p}, \lambda) \cdot \tilde{p} = 0 \quad (16.64)$$

e dall'altra

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\hat{p}}(\theta) \epsilon(p, \lambda) &= \mathcal{R}_{\hat{p}}(\theta) \mathcal{R}(\hat{p}) \epsilon(\tilde{p}, \lambda) = \mathcal{R}(\hat{p}) \mathcal{R}_{\hat{z}}(\theta) \epsilon(\tilde{p}, \lambda) = \\ &= \mathcal{R}(\hat{p}) e^{i\lambda\theta} \epsilon(\tilde{p}, \lambda) = e^{i\lambda\theta} \mathcal{R}(\hat{p}) \epsilon(\tilde{p}, \lambda) = e^{i\lambda\theta} \epsilon(p, \lambda)\end{aligned}\quad (16.65)$$

Prendiamo quindi il caso in cui

$$\vec{p} = |\vec{p}|(\sin \theta, 0, \cos \theta) \quad (16.66)$$

Allora la rotazione $\mathcal{R}(\hat{p})$ si scrive

$$\mathcal{R}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (16.67)$$

Pertanto i vettori di polarizzazione nella base di elicità sono

$$\begin{aligned}\epsilon^\mu(p, 0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{|\vec{p}|}{m} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\omega_{\vec{p}}}{m} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{|\vec{p}|}{m} \\ \sin \theta \frac{\omega_{\vec{p}}}{m} \\ 0 \\ \cos \theta \frac{\omega_{\vec{p}}}{m} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (16.68)$$

¹Il segno davanti a $\vec{\epsilon}_{\pm}$ è arbitrario ed è stato scelto per rendere più semplice l'azione della parità sui vettori di polarizzazione.

$$\begin{aligned}
\epsilon^\mu(p, \pm 1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \pm i \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \tag{16.69}
\end{aligned}$$

17 Relazione tra Spin e Statistica in Seconda Quantizzazione

Sia $\mathcal{H}^{(1)} \equiv \mathcal{H}^{(+)} \oplus \mathcal{H}^{(-)}$ lo spazio delle soluzioni delle equazioni relativistiche libere classiche, che chiameremo anche (impropriamente) lo spazio degli stati di singola particella. Sia

$$\langle \psi, \psi \rangle = \int_{t \text{ costante}} d^3x j^0(t, \vec{x}) \tag{17.1}$$

con $\psi(x) \in \mathcal{H}^{(1)}$, la forma bilineare su $\mathcal{H}^{(1)}$ associata alla corrente conservata $j^\mu(x)$ relativa alla simmetria

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(x) \quad \psi^\dagger(x) \rightarrow e^{-i\alpha} \psi^\dagger(x) \tag{17.2}$$

Per esempio nel caso del campo scalare di Klein-Gordon

$$\langle \psi, \psi \rangle_{\text{scalare}} = i \int_{t \text{ costante}} d^3x [\psi^*(t, \vec{x}) \partial_t \psi(t, \vec{x}) - \partial_t \psi^*(t, \vec{x}) \psi(t, \vec{x})], \tag{17.3}$$

nel caso del campo di Weyl (left-handed)

$$\langle \psi, \psi \rangle_{\text{weyl}} = \int_{t \text{ costante}} d^3x \psi^\dagger(t, \vec{x}) \bar{\sigma}^0 \psi(t, \vec{x}) = \int_{t \text{ costante}} d^3x \psi^\dagger(t, \vec{x}) \psi(t, \vec{x}) \tag{17.4}$$

e nel caso di un campo di Dirac

$$\langle \psi, \psi \rangle_{\text{dirac}} = \int_{t \text{ costante}} d^3x \bar{\psi}(t, \vec{x}) \gamma^0 \psi(t, \vec{x}) \tag{17.5}$$

Data una soluzione $\psi(x) \in \mathcal{H}^{(1)}$ delle equazioni relativistiche, sia

$$\psi(x) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x) \equiv \sum_{\vec{p}, \sigma} a_{\vec{p}, \sigma} \psi_{\vec{p}, \sigma}^{(+)}(x) + b_{\vec{p}, \sigma}^* \psi_{\vec{p}, \sigma}^{(-)}(x) \tag{17.6}$$

con $\psi^{(\pm)}(x) \in \mathcal{H}^{(\pm)}$, la sua decomposizione in soluzioni ad energia positiva e negativa. L'osservazione importante è che la forma bilineare \langle , \rangle invariante è indefinita nel caso di spin intero

$$\begin{aligned}\langle \psi, \psi \rangle_{scalare} &= \langle \psi^{(+)}, \psi^{(+)} \rangle_{scalare} + \langle \psi^{(-)}, \psi^{(-)} \rangle_{scalare} = \\ &= \sum_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^* a_{\vec{p}} - b_{\vec{p}} b_{\vec{p}}^*\end{aligned}\quad (17.7)$$

mentre è definita positiva nel caso di spin semi-intero:

$$\begin{aligned}\langle \psi, \psi \rangle_{weyl} &= \langle \psi^{(+)}, \psi^{(+)} \rangle_{weyl} + \langle \psi^{(-)}, \psi^{(-)} \rangle_{weyl} = \\ &= \sum_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^* a_{\vec{p}} + b_{\vec{p}} b_{\vec{p}}^*\end{aligned}\quad (17.8)$$

$$\begin{aligned}\langle \psi, \psi \rangle_{dirac} &= \langle \psi^{(+)}, \psi^{(+)} \rangle_{dirac} + \langle \psi^{(-)}, \psi^{(-)} \rangle_{dirac} = \\ &= \sum_{\vec{p}\sigma} a_{\vec{p}\sigma}^* a_{\vec{p}\sigma} + b_{\vec{p}\sigma} b_{\vec{p}\sigma}^*\end{aligned}\quad (17.9)$$

Introducendo pertanto gli operatori di campo relativistici

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(x) &= \hat{\psi}^{(+)}(x) + \hat{\psi}^{(-)}(x) \equiv \\ &\equiv \sum_{\vec{p}, \sigma} \hat{a}_{\vec{p}, \sigma} \psi_{\vec{p}, \sigma}^{(+)}(x) + \hat{b}_{\vec{p}, \sigma}^{\dagger} \psi_{\vec{p}, \sigma}^{(-)}(x)\end{aligned}\quad (17.10)$$

otteniamo le seguenti formule per l'operatore che nella teoria non-relativistica è associato al numero di particelle sullo spazio di Fock:

$$\begin{aligned}\langle \hat{\psi}, \hat{\psi} \rangle_{scalare} &= \langle \hat{\psi}^{(+)}, \hat{\psi}^{(+)} \rangle_{scalare} + \langle \hat{\psi}^{(-)}, \hat{\psi}^{(-)} \rangle_{scalare} = \\ &= \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{b}_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}}^{\dagger}\end{aligned}\quad (17.11)$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{\psi}, \hat{\psi} \rangle_{weyl} &= \langle \hat{\psi}^{(+)}, \hat{\psi}^{(+)} \rangle_{weyl} + \langle \hat{\psi}^{(-)}, \hat{\psi}^{(-)} \rangle_{weyl} = \\ &= \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}}^{\dagger}\end{aligned}\quad (17.12)$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{\psi}, \hat{\psi} \rangle_{dirac} &= \langle \hat{\psi}^{(+)}, \hat{\psi}^{(+)} \rangle_{dirac} + \langle \hat{\psi}^{(-)}, \hat{\psi}^{(-)} \rangle_{dirac} = \\ &= \sum_{\vec{p}\sigma} \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}\sigma} + \hat{b}_{\vec{p}\sigma} \hat{b}_{\vec{p}\sigma}^{\dagger}\end{aligned}\quad (17.13)$$

Pertanto, otteniamo per le corrispondenti Hamiltoniane le espressioni seguenti:

$$\begin{aligned}\langle \hat{\psi}, i \partial_t \hat{\psi} \rangle_{scalare} &= \langle \hat{\psi}^{(+)}, i \partial_t \hat{\psi}^{(+)} \rangle_{scalare} + \langle \hat{\psi}^{(-)}, i \partial_t \hat{\psi}^{(-)} \rangle_{scalare} = \\ &= \sum_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \omega_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger\end{aligned}\quad (17.14)$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{\psi}, i \partial_t \hat{\psi} \rangle_{weyl} &= \langle \hat{\psi}^{(+)}, i \partial_t \hat{\psi}^{(+)} \rangle_{weyl} + \langle \hat{\psi}^{(-)}, i \partial_t \hat{\psi}^{(-)} \rangle_{weyl} = \\ &= \sum_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} - \omega_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger\end{aligned}\quad (17.15)$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{\psi}, i \partial_t \hat{\psi} \rangle_{dirac} &= \langle \hat{\psi}^{(+)}, i \partial_t \hat{\psi}^{(+)} \rangle_{dirac} + \langle \hat{\psi}^{(-)}, i \partial_t \hat{\psi}^{(-)} \rangle_{dirac} = \\ &= \sum_{\vec{p}\sigma} \omega_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}\sigma} - \omega_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}\sigma} \hat{b}_{\vec{p}\sigma}^\dagger\end{aligned}\quad (17.16)$$

Dalle equazioni (17.11-17.13) e (17.14-17.16) deduciamo che le particelle associate ai campi con spin intero devono essere quantizzate come dei bosoni mentre quelle associate ai campi con spin semiintero devono essere quantizzate come dei fermioni: con questa scelta otteniamo infatti la seguente espressione, *definita positiva* per ogni spin, per l'operatore Hamiltoniano \hat{H} (a meno di una costante divergente inessenziale):

$$\hat{H} = \sum_{\vec{p}\sigma} \omega_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}\sigma} + \omega_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}\sigma}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}\sigma}\quad (17.17)$$

Allo stesso tempo deduciamo anche che, con questa scelta della statistica, l'operatore sullo spazio di Fock associato alla carica conservata relativa alla simmetria (17.2) è (trascurando una costante divergente)

$$\hat{Q} = \sum_{\vec{p}\sigma} \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}\sigma} - \hat{b}_{\vec{p}\sigma}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}\sigma}\quad (17.18)$$

e corrisponde al numero di particelle *meno* il numero di antiparticelle. In particolare questo implica che il numero di particelle in meccanica quantistica relativistica non è conservato.

18 Spinori

18.1 Proprietà di coniugazione delle rappresentazioni spinoriali

L'algebra di Lie delle trasformazioni omogenee di Lorentz

$$[J^i, J^j] = i \epsilon_{ijk} J^k \quad [K^i, K^j] = -i \epsilon_{ijk} J^k \quad [J^i, K^j] = i \epsilon_{ijk} K^k \quad (18.1)$$

può essere riscritta in forma fattorizzata ponendo

$$A_{\pm}^i = \frac{1}{2} (J^i \pm i K^i) \quad (18.2)$$

In questa base le relazioni di commutazione diventano

$$[A_{\pm}^i, A_{\pm}^j] = i \epsilon_{ijk} A_{\pm}^k \quad [A_+^i, A_-^j] = 0 \quad (18.3)$$

Le rappresentazioni irriducibili finito-dimensionali dell'algebra delle trasformazioni omogenee di Lorentz sono quindi labellate da una coppia di spin (A_+, A_-) . Le rappresentazioni di dimensioni due, la $(1/2, 0)$ e la $(0, 1/2)$ sono dette rispettivamente spinoriale ed anti-spinoriale. Da quanto detto, una rappresentazione esplicita della $(0, 1/2)$ è data da

$$A_-^i \left(\frac{1}{2}, 0\right) = 0 \Rightarrow A_+^i \left(\frac{1}{2}, 0\right) = J_{\left(\frac{1}{2}, 0\right)}^i = \frac{1}{2} \sigma^i \quad K_{\left(\frac{1}{2}, 0\right)}^i = -\frac{i}{2} \sigma^i \quad (18.4)$$

dove le σ^i sono le matrici di Pauli, mentre per la $(0, 1/2)$ abbiamo

$$J_{\left(0, \frac{1}{2}\right)}^i = \frac{1}{2} \sigma^i \quad K_{\left(0, \frac{1}{2}\right)}^i = +\frac{i}{2} \sigma^i \quad (18.5)$$

Dunque:

$$\left(J_{\left(\frac{1}{2}, 0\right)}^{\mu\nu} \right)^\dagger = J_{\left(0, \frac{1}{2}\right)}^{\mu\nu} \quad (18.6)$$

Poiché

$$R_{\left(\frac{1}{2}, 0\right)}(\Lambda) = e^{\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J_{\left(\frac{1}{2}, 0\right)}^{\mu\nu}} \quad (18.7)$$

dove

$$\Lambda = e^\omega \quad (18.8)$$

abbiamo che

$$\left(R_{\left(\frac{1}{2}, 0\right)}(\Lambda^{-1}) \right)^\dagger = R_{\left(0, \frac{1}{2}\right)}(\Lambda) \quad (18.9)$$

La rappresentazione $(R_{(\frac{1}{2},0)}(\Lambda))^*$ è irriducibile di dimensione due: *a priori*, è dunque equivalente o a se stessa o alla $R_{(0,\frac{1}{2})}$. Per stabilire quali delle due possibilità è realizzata, ricordiamo la seguente

$$(\sigma^i)^t = (\sigma^i)^* = -\sigma_2 \sigma^i \sigma_2 = -\epsilon \sigma^i \epsilon^{-1} \quad (18.10)$$

dove $\epsilon = -i \sigma_2$ è la matrice antisimmetrica con elementi $(\epsilon)_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}$. La (18.10) discende dalla relazione valida per tutte le matrici R 2×2

$$\det R R^{-1} = -(\epsilon R \epsilon)^t \quad (18.11)$$

Dalla (18.10) segue che

$$\begin{aligned} (J_{(\frac{1}{2},0)}^i)^* &= -\epsilon J_{(\frac{1}{2},0)}^i \epsilon^{-1} = -\epsilon J_{(0,\frac{1}{2})}^i \epsilon^{-1} \\ (K_{(\frac{1}{2},0)}^i)^* &= +\epsilon K_{(\frac{1}{2},0)}^i \epsilon^{-1} = -\epsilon K_{(0,\frac{1}{2})}^i \epsilon^{-1} \end{aligned} \quad (18.12)$$

per cui

$$R_{(\frac{1}{2},0)}^*(\Lambda) = e^{\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \epsilon, J_{(\frac{1}{2},0)}^{\mu\nu}} \epsilon^{-1} = \epsilon R_{(0,\frac{1}{2})}(\Lambda) \epsilon^{-1} \quad (18.13)$$

In conclusione abbiamo che la rappresentazione $R_{(\frac{1}{2},0)}$ non è reale, ma la sua coniugata è equivalente alla $R_{(0,\frac{1}{2})}$. Indichiamo dunque nel seguito con $R(\Lambda)$ la matrice $R_{(\frac{1}{2},0)}(\Lambda)$: la rappresentazione $(0, \frac{1}{2})$ sarà fornita dalla matrice $R^\dagger(\Lambda^{-1})$ o, equivalentemente, secondo la (18.13), dalla $R^*(\Lambda)$

Il prodotto tensore della $R_{(\frac{1}{2},0)}$ con la $R_{(0,\frac{1}{2})}$ è la rappresentazione $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, che è equivalente alla vettoriale. Dunque la matrice 4×4

$$M_{\alpha\dot{\alpha};\beta\dot{\beta}}(\Lambda) \equiv R_{\alpha\beta}(\Lambda) R_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}^*(\Lambda) \quad (18.14)$$

dove gli indici $(\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta})$ vanno da 1 a 2, deve essere coniugata alla matrice Λ_ν^μ . Devono pertanto esistere dei numeri $U_{\alpha\dot{\alpha};\mu}$ tali che

$$M_{\alpha\dot{\alpha};\beta\dot{\beta}}(\Lambda) = U_{\alpha\dot{\alpha};\mu} \Lambda_\nu^\mu U_{\nu;\beta\dot{\beta}}^{-1} \quad (18.15)$$

od, equivalentemente

$$R_{\alpha\beta}(\Lambda) R_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}^*(\Lambda) U_{\beta\dot{\beta};\nu} = \Lambda_\nu^\mu U_{\alpha\dot{\alpha};\mu} \quad (18.16)$$

Introducendo quindi 4 matrici 2×2

$$(U_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} = U_{\alpha\dot{\alpha};\mu} \quad (18.17)$$

possiamo riscrivere la (18.16) come segue

$$R(\Lambda) U_\mu R^\dagger(\Lambda) = \Lambda^\nu{}_\mu U_\nu \quad (18.18)$$

La (18.18) implica in particolare che

$$\begin{aligned} e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}} U_0 e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}} &= U_0 \\ e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}} U_i e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}} &= R(\vec{\theta})_{ij} U_j \end{aligned} \quad (18.19)$$

dove $R(\vec{\theta})_{ij}$ è la matrice 3×3 che rappresenta la rotazione di un angolo θ lungo il versore \hat{n} parametrizzata da $\vec{\theta} = \theta \hat{n}$. Dalle (18.19) si verifica facilmente che

$$(U_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} = \sigma_\mu \equiv (1, \sigma^i) \quad (18.20)$$

Nel seguito è utile introdurre anche le matrici

$$\bar{\sigma}_\mu \equiv (1, -\sigma^i) = \sigma^\mu \quad \bar{\sigma}^\mu \equiv (1, \sigma^i) \quad (18.21)$$

Le relazioni (18.16) diventano equivalenti alle seguenti relazioni

$$\begin{aligned} R(\Lambda) \sigma_\mu R^\dagger(\Lambda) &= \Lambda^\nu{}_\mu \sigma_\nu \\ R(\Lambda) \sigma^\mu R^\dagger(\Lambda) &= (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \sigma^\nu \\ R(\Lambda)^\dagger \bar{\sigma}_\mu R(\Lambda) &= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \bar{\sigma}_\nu \\ R(\Lambda)^\dagger \bar{\sigma}^\mu R(\Lambda) &= \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \end{aligned} \quad (18.22)$$

Queste relazioni dimostrano la covarianza delle equazioni di Weyl. In effetti, siano $\psi_{(\frac{1}{2},0)}(x)$ e $\psi_{(0,\frac{1}{2})}(x)$ dei campi che soddisfano le equazioni di Weyl

$$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_{(\frac{1}{2},0)}(x) = 0 \quad \sigma^\mu \partial_\mu \psi_{(0,\frac{1}{2})}(x) = 0 \quad (18.23)$$

L'azione del gruppo di Lorentz sui campi

$$\begin{aligned} U(\Lambda) : \psi_{(\frac{1}{2},0)}(x) &\rightarrow R(\Lambda) \psi_{(\frac{1}{2},0)}(\Lambda^{-1} x) \\ U(\Lambda) : \psi_{(0,\frac{1}{2})}(x) &\rightarrow R(\Lambda^{-1})^\dagger \psi_{(0,\frac{1}{2})}(\Lambda^{-1} x) \end{aligned} \quad (18.24)$$

lascia invariante lo spazio delle soluzioni

$$\begin{aligned} R^\dagger(\Lambda) \bar{\sigma}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} R(\Lambda) \psi_{(\frac{1}{2},0)}(\Lambda^{-1} x) &= \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi_{(\frac{1}{2},0)}(\Lambda^{-1} x) = \\ \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu (\Lambda^{-1})^\lambda{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \psi_{(\frac{1}{2},0)}(x_\Lambda) &= \bar{\sigma}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \psi_{(\frac{1}{2},0)}(x_\Lambda) = 0 \end{aligned} \quad (18.25)$$

dove $x_\Lambda \equiv \Lambda^{-1} x$. Analogamente:

$$\begin{aligned} R(\Lambda^{-1}) \sigma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} R^\dagger(\Lambda^{-1}) \psi_{(0, \frac{1}{2})}(\Lambda^{-1} x) &= \Lambda^\mu_\nu \sigma^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi_{(0, \frac{1}{2})}(\Lambda^{-1} x) = \\ \Lambda^\mu_\nu \sigma^\nu (\Lambda^{-1})^\lambda_\mu \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \psi_{(0, \frac{1}{2})}(x_\Lambda) &= \sigma^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \psi_{(0, \frac{1}{2})}(x_\Lambda) = 0 \end{aligned} \quad (18.26)$$

Notiamo che le Eqs. (18.25-18.26) dimostrano anche che i campi

$$\xi_{(0, \frac{1}{2})}(x) \equiv \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_{(\frac{1}{2}, 0)}(x) \quad (18.27)$$

e

$$\xi_{(\frac{1}{2}, 0)}(x) \equiv \sigma^\mu \partial_\mu \psi_{(0, \frac{1}{2})}(x) \quad (18.28)$$

sono dei campi che si trasformano rispettivamente secondo le rappresentazioni $(0, \frac{1}{2})$ e $(\frac{1}{2}, 0)$. Questo dimostra immediatamente che le equazioni di Dirac nella rappresentazione spinoriale

$$\begin{aligned} i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_{(\frac{1}{2}, 0)}(x) &= m \psi_{(0, \frac{1}{2})}(x) \\ i \sigma^\mu \partial_\mu \psi_{(0, \frac{1}{2})}(x) &= m \psi_{(\frac{1}{2}, 0)}(x) \end{aligned} \quad (18.29)$$

od equivalentemente:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & i \sigma^\mu \partial_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu & 0 \end{pmatrix} - m \right] \begin{pmatrix} \psi_{(\frac{1}{2}, 0)}(x) \\ \psi_{(0, \frac{1}{2})}(x) \end{pmatrix} = 0 \quad (18.30)$$

sono covarianti.

Allo stesso modo, le Eqs. (18.25-18.26) dimostrano che le combinazioni

$$\begin{aligned} j_{(\frac{1}{2}, 0)}^\mu(x) &= \psi_{(\frac{1}{2}, 0)}^\dagger(x) \bar{\sigma}^\mu \psi_{(\frac{1}{2}, 0)}(x) \\ j_{(0, \frac{1}{2})}^\mu &= \psi_{(0, \frac{1}{2})}^\dagger(x) \sigma^\mu \psi_{(0, \frac{1}{2})}(x) \end{aligned} \quad (18.31)$$

si trasformano come dei campi vettoriali. Pertanto il prodotto hermitiano invariante sullo spazio delle soluzioni delle equazioni di Weyl, sia destrorse che sinistrorse, è

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int d^3 \vec{x} \psi_1^\dagger(x) \psi_2(x) \quad (18.32)$$

Le stesse relazioni (18.22) dimostrano la covarianza dei vettori di polarizzazione dei campi di Weyl:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^\mu p_\mu u_{(\frac{1}{2}, 0)}(p) &= \bar{\sigma}^\mu p_\mu v_{(\frac{1}{2}, 0)}(p) = 0 \\ \sigma^\mu p_\mu u_{(0, \frac{1}{2})}(p) &= \sigma^\mu p_\mu v_{(0, \frac{1}{2})}(p) = 0 \end{aligned} \quad (18.33)$$

dove

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_{(\frac{1}{2},0)}(x) &= \sum_{\vec{p}} \frac{u_{(\frac{1}{2},0)}(p) e^{-i p x}}{(2\pi)^{3/2} (2\omega_p)^{1/2}} \hat{a}_{\vec{p}} + \frac{v_{(\frac{1}{2},0)}(p) e^{i p x}}{(2\pi)^{3/2} (2\omega_p)^{1/2}} \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \\ \hat{\psi}_{(0,\frac{1}{2})}(x) &= \sum_{\vec{p}} \frac{u_{(0,\frac{1}{2})}(p) e^{-i p x}}{(2\pi)^{3/2} (2\omega_p)^{1/2}} \hat{a}_{\vec{p}} + \frac{v_{(0,\frac{1}{2})}(p) e^{i p x}}{(2\pi)^{3/2} (2\omega_p)^{1/2}} \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger\end{aligned}\quad (18.34)$$

sono i campi di Weyl liberi. Innanzitutto dimostriamo che lo spazio delle soluzioni delle Eqs. (18.33) per i vettori di polarizzazioni, sia destrorsi che sinistrorsi, è, per $p^2 = 0$ uni-dimensionale. Notiamo infatti che le proprietà (18.10) di coniugazione delle matrici di Pauli implicano che

$$(\bar{\sigma}^\mu)^* = \epsilon \sigma^\mu \epsilon^{-1} \quad (18.35)$$

Pertanto

$$(\bar{\sigma}^\mu p_\mu)^* = \epsilon \sigma^\mu p_\mu \epsilon^{-1} \quad (18.36)$$

e dunque

$$\det \bar{\sigma}^\mu p_\mu = \det \sigma^\mu p_\mu \quad (18.37)$$

Inoltre

$$\bar{\sigma}^\mu p_\mu \sigma^\mu p_\mu = (p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})(p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma}) = p^2 \quad (18.38)$$

e quindi

$$(\det \bar{\sigma}^\mu p_\mu)^2 = (p^2)^2 \quad (18.39)$$

e

$$|\det \bar{\sigma}^\mu p_\mu| = |\det \sigma^\mu p_\mu| = |p^2| \quad (18.40)$$

In conclusione per $p^2 = 0$ le matrici che definiscono i vettori di polarizzazione sono di rango 1.

Tornando alle proprietà di Lorentz dei vettori di polarizzazione, dalle (18.33) segue che

$$\begin{aligned}R^\dagger(\Lambda) (\Lambda p)_\mu \bar{\sigma}^\mu R(\Lambda) u_{(\frac{1}{2},0)}(p) &= (\Lambda p)_\mu \Lambda^\mu_\nu \bar{\sigma}^\nu u_{(\frac{1}{2},0)}(p) = \\ &= p_\nu \bar{\sigma}^\nu u_{(\frac{1}{2},0)}(p) = 0 \\ R(\Lambda^{-1}) (\Lambda p)_\mu \sigma^\mu R(\Lambda^{-1})^\dagger u_{(0,\frac{1}{2})}(p) &= (\Lambda p)_\mu \Lambda^\mu_\nu \sigma^\nu u_{(0,\frac{1}{2})}(p) = \\ &= p_\nu \sigma^\nu u_{(0,\frac{1}{2})}(p) = 0\end{aligned}\quad (18.41)$$

e quindi concludiamo che

$$\begin{aligned} R(\Lambda) u_{(\frac{1}{2},0)}(p) &= D_{(\frac{1}{2},0)}(\Lambda, p) u_{(\frac{1}{2},0)}(\Lambda p) \\ R(\Lambda^{-1})^\dagger u_{(0,\frac{1}{2})}(p) &= D_{(0,\frac{1}{2})}(\Lambda, p) u_{(0,\frac{1}{2})}(\Lambda p) \end{aligned} \quad (18.42)$$

dove $D_{(\frac{1}{2},0)}(\Lambda, p)$ e $D_{(0,\frac{1}{2})}(\Lambda, p)$ sono dei coefficienti che sono fissati dalla condizione di cociclo. Il metodo della rappresentazioni indotta dimostra che questi coefficienti sono funzioni della combinazione

$$W(\Lambda, p) = L(\Lambda p)^{-1} \Lambda L(p) \quad (18.43)$$

e forniscono una rappresentazione del piccolo gruppo, che in questo caso è il gruppo $SO(2)$.

Notiamo che le proprietà (18.35) di coniugazione delle matrici σ^μ implicano che la coniugata complessa dell'equazione di Weyl destrorsa

$$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_{(\frac{1}{2},0)}(x) = 0 \quad (18.44)$$

è l'equazione

$$\sigma^\mu \partial_\mu \epsilon^{-1} \psi_{(\frac{1}{2},0)}^*(x) = 0 \quad (18.45)$$

In altre parole il complesso coniugato di uno spinore di Weyl "destrorso"

$$\psi^c(x) \equiv \epsilon^{-1} \psi^*(x) \quad (18.46)$$

si trasforma come uno spinore "sinistrorso" e viceversa. Denotiamo dunque con \mathcal{H}_R la rappresentazione del gruppo delle trasformazioni inomogenee di Lorentz formata dalle soluzioni dell'equazione di Weyl per uno spinore "destrorso" (18.44). \mathcal{H}_R è decomponibile in rappresentazioni irriducibili:

$$\mathcal{H}_R = \mathcal{H}_R^{(+)} \oplus \mathcal{H}_R^{(-)} \quad (18.47)$$

dove $\mathcal{H}_R^{(\pm)}$ denota il sottospazio delle soluzioni ad energia positiva/negativa. Abbiamo analogamente per l'equazione di Weyl "sinistrorsa" gli spazi

$$\mathcal{H}_L = \mathcal{H}_L^{(+)} \oplus \mathcal{H}_L^{(-)} \quad (18.48)$$

Sappiamo che

$$\mathcal{H}_R^{(+)} \sim \mathcal{H}_{m=0, h=+\frac{1}{2}} \quad \mathcal{H}_L^{(+)} \sim \mathcal{H}_{m=0, h=-\frac{1}{2}} \quad (18.49)$$

dove con $\mathcal{H}_{m=0,h}$ denotiamo la rappresentazione unitaria irriducibile del gruppo delle trasformazioni inomogenee di Lorentz di massa nulla ed elicità h .

L'equazione (18.45) dimostra che

$$\mathcal{H}_R^* \sim \mathcal{H}_L \quad (18.50)$$

dove abbiamo indicato con lo star la rappresentazione coniugata complessa. Poiché la rappresentazione coniugata complessa di una rappresentazione ad energia positiva è una rappresentazione ad energia negativa, concludiamo che

$$(\mathcal{H}_R^{(-)})^* \sim \mathcal{H}_L^{(+)} \quad (\mathcal{H}_L^{(-)})^* \sim \mathcal{H}_R^{(+)} \quad (18.51)$$

e dunque

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_R &\sim \mathcal{H}_{m=0,h=+\frac{1}{2}} \oplus \mathcal{H}_{m=0,h=-\frac{1}{2}}^* \\ \mathcal{H}_L &\sim \mathcal{H}_{m=0,h=-\frac{1}{2}} \oplus \mathcal{H}_{m=0,h=+\frac{1}{2}}^* \end{aligned} \quad (18.52)$$

Questo significa che le anti-particelle di un campo "destrorso" ("sinistrorso") hanno elicità $-\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$). Le equazioni di Weyl *non* sono dunque invarianti sotto coniugazione complessa: particelle ed anti-particelle si trasformano in rappresentazioni inequivalenti del gruppo inomogeneo di Lorentz.

Notiamo anche che l'operatore di coniugazione di parità P manda invece rappresentazioni ad energia positiva (negativa) in rappresentazioni ad energia positiva (negativa) e cambia il segno dell'elicità: dunque

$$P : \mathcal{H}_R^{(\pm)} \rightarrow \mathcal{H}_L^{(\pm)} \quad (18.53)$$

e quindi le equazioni di Weyl non sono invarianti per P .

Componendo C con P abbiamo dunque

$$\begin{aligned} CP : \mathcal{H}_R^{(+)} &\rightarrow \mathcal{H}_R^{(-)} \\ CP : \mathcal{H}_L^{(+)} &\rightarrow \mathcal{H}_L^{(-)} \end{aligned} \quad (18.54)$$

L'operazione di CP manda pertanto \mathcal{H}_R e \mathcal{H}_L in se stessi, e lascia quindi invarianti le equazioni di Weyl.

Veniamo ora alla proprietà di coniugazione dell'equazioni di Dirac (18.29) nella rappresentazione spinoriale: prendendo le coniugate complesse di queste equazioni otteniamo delle equazioni della stessa forma per i campi coniugati:

$$\psi_{(\frac{1}{2},0)}^c(x) = \epsilon^{-1} \psi_{(0,\frac{1}{2})}^*(x) \quad \psi_{(0,\frac{1}{2})}^c(x) = -\epsilon^{-1} \psi_{(\frac{1}{2},0)}^*(x) \quad (18.55)$$

Per quanto riguarda l'inversione spaziale, se indichiamo con \mathcal{P}_ν^μ la matrice che implementa l'inversione spaziale sul quadrivettore x^μ

$$x_P^\mu = \mathcal{P}_\nu^\mu x^\nu = (x^0, -\vec{x}) \quad (18.56)$$

allora

$$\psi_{(\frac{1}{2}, 0)}^P(x) = \eta_P \psi_{(0, \frac{1}{2})}(x_P) \quad \psi_{(0, \frac{1}{2})}^P(x) = \eta_P \psi_{(\frac{1}{2}, 0)}(x_P) \quad (18.57)$$

soddisfano le stesse equazioni di Dirac. η_P è un numero associato alla parità intrinseca dei fermioni ed può essere ± 1 or $\pm i$ a seconda se si sceglie (rispettivamente) $P^2 = 1$ o $P^2 = -1$.

19 Le matrici di Dirac come “interwiners” di rappresentazioni di Lorentz

Abbiamo visto che le relazioni (18.22) soddisfatte dalle matrici σ^μ e $\bar{\sigma}^\mu$ esprimono il fatto che il prodotto tensore $(\frac{1}{2}, 0) \otimes (0, \frac{1}{2})$ è equivalente alla vettoriale $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Nel seguito esploriamo il significato delle relazioni analoghe soddisfatte dalla matrici gamma. Abbiamo visto che nella rappresentazione spinoriale il campo di Dirac si trasforma secondo la seguente

$$U(\Lambda) : \psi(x) \rightarrow S(\Lambda) \psi(\Lambda^{-1} x) \quad (19.1)$$

dove

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} R(\Lambda) & 0 \\ 0 & R^\dagger(\Lambda^{-1}) \end{pmatrix} \quad (19.2)$$

L'invarianza dell'equazione di Dirac nella rappresentazione spinoriale è equivalente alla relazione

$$S(\Lambda)^{-1} \gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu \quad (19.3)$$

che può essere direttamente verificata utilizzando l'espressione esplicita per le matrici gamma nella spinoriale

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (19.4)$$

Utilizzando la rappresentazione (19.4) è possibile verificare direttamente che le matrici gamma soddisfano l'algebra di Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu} \quad (19.5)$$

Passando ad una rappresentazione generica dell'algebra di Clifford per le matrici gamma

$$\tilde{\gamma}^\mu = U^{-1} \gamma^\mu U \quad (19.6)$$

con U invertibile, la relazione di covarianza (19.3) diventa

$$\tilde{S}(\Lambda^{-1}) \tilde{\gamma}^\mu \tilde{S}(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \tilde{\gamma}^\nu \quad (19.7)$$

con

$$\tilde{S}(\Lambda) = U^{-1} S(\Lambda) U \quad (19.8)$$

Le trasformazioni di Lorentz sono degli automorfismi dell'algebra di Clifford. Pertanto il fatto che la rappresentazione irriducibile dell'algebra di Clifford è unica a meno di equivalenze garantisce che qualunque insieme di matrici gamma che obbediscono all'algebra di Clifford soddisfano la relazione di covarianza (19.3) con un $S(\Lambda)$ equivalente alla $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

In questa sezione discutiamo l'affermazione opposta. Sia dato un insieme di matrici gamma γ^μ che soddisfa la relazione di covarianza (19.3). Vogliamo dimostrare che queste matrici necessariamente obbediscono all'algebra di Clifford. Da questo consegue che la relazione di Clifford non soltanto è *sufficiente* a garantire l'invarianza relativistica dell'equazione di Dirac, ma ne è anche condizione *necessaria*.

Notiamo innanzitutto che sia $S^\dagger(\Lambda^{-1})$ che $S^*(\Lambda)$ sono rappresentazioni equivalenti alla $S(\Lambda)$

$$S^\dagger(\Lambda^{-1}) \sim S(\Lambda) \quad S^*(\Lambda) \sim S(\Lambda) \quad (19.9)$$

Possiamo essere piú precisi, anche se questo risultato non è necessario per quello che segue

$$\begin{aligned} S^\dagger(\Lambda^{-1}) &= \gamma^0 S(\Lambda) \gamma^0 \quad \text{nelle rappresentazioni hermitiane} \\ S^*(\Lambda) &= C^{-1} S(\Lambda) C \end{aligned} \quad (19.10)$$

Queste relazioni discendono dalla definizione di matrice C , che daremo nella sezione successiva 21

$$(\gamma^\mu)^* = -C^{-1} \gamma^\mu C \quad (19.11)$$

valida in una rappresentazione generica, e dalla

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (19.12)$$

che vale in rappresentazioni delle matrici gamma *unitariamente equivalenti alla spinoriale*². Inoltre è facile verificare direttamente nella spinoriale la validità della espressione seguente per i generatori di Lorentz

$$J^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (19.13)$$

con

$$S(\Lambda) = e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} J^{\mu\nu}} \quad (19.14)$$

Dalla (19.8) deduciamo che la (19.13) vale in una rappresentazione generica.

Tornando alle equivalenze (19.9), queste implicano che

$$S^t(\Lambda^{-1}) \otimes S(\Lambda) \sim \left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (19.15)$$

D'altra parte

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right) = 2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus (1, 0) \oplus (0, 1) \oplus 2 (0, 0) \quad (19.16)$$

Le matrici gamma vanno pertanto pensate come gli operatori di “intrallacciamento” (interwining operators) tra lo spazio sedici-dimensionale della rappresentazione $S^t(\Lambda^{-1}) \otimes S(\Lambda)$ e quello della quadri-dimensionale rappresentazione vettoriale: in altre parole le γ definiscono degli operatori lineari

$$\gamma : v^{\alpha\beta} \rightarrow v^\mu = \gamma_{\alpha\beta}^\mu v^{\alpha\beta} \quad (19.17)$$

dove α, β che corrono sulla spinoriale di Dirac e μ sulla vettoriale, che *commutano* con l'azione del gruppo di Lorentz nello spazio della spinoriale e della vettoriale. La relazione (19.3) esprime il fatto che, come risulta dalla decomposizione (19.16), la rappresentazione $S^t(\Lambda^{-1}) \otimes S(\Lambda)$ contiene una rappresentazione vettoriale.

La relazione (19.3) implica inoltre che

$$S(\Lambda)^{-1} \gamma^\mu \gamma^\nu S(\Lambda) = \Lambda_\sigma^\mu \Lambda_\lambda^\nu \gamma^\sigma \gamma^\lambda \quad (19.18)$$

ed in particolare

$$S(\Lambda)^{-1} \{\gamma^\mu \gamma^\nu\} S(\Lambda) = \Lambda_\sigma^\mu \Lambda_\lambda^\nu \{\gamma^\sigma \gamma^\lambda\} \quad (19.19)$$

²Queste rappresentazioni sono dette *hermitiane*.

dove $\{, \}$ indica la parte simmetrica. D'altra parte il prodotto tensore di due vettoriali si decompone come segue

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left[(1, 1) \oplus (0, 0)\right]_s \oplus \left[(1, 0) \oplus (0, 1)\right]_a \quad (19.20)$$

dove gli indici s e a indicano rispettivamente la parte simmetrica e quella antisimmetrica. La relazione (19.19) implica che l'operatore $T_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \equiv \{\gamma^\mu \gamma^\nu\}_{\alpha\beta}$ connette una rappresentazione contenuta nella parte simmetrica del prodotto di due vettoriali con una rappresentazione contenuta nel prodotto di due spinori di Dirac. La parte simmetrica del prodotto di due vettoriali contiene la $(1, 1)$ e la $(0, 0)$, secondo la (19.20). Ma la $(1, 1)$ non appare nel prodotto di due spinori di Dirac, come si evince dalla (19.16). Pertanto l'operatore di "intralacciamento" $T_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ connette uno dei due singoletti contenuti nel prodotto di due spinoriali con il singoletto contenuto nella parte simmetrica di due vettoriali. Poiché T commuta con l'azione del gruppo di Lorentz, T è proporzionale all'identità su ogni componente irriducibile dello spazio del prodotto delle spinoriali. Dunque T è nullo sulle componenti che non sono singoletti e la sua immagine è contenuta nel singoletto $(0, 0)_s$. Ricordiamo che la parte simmetrica del prodotto di due vettoriali si decompone nella parte senza traccia e nella traccia: siccome l'immagine di T è contenuta nella traccia deve essere $T_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} t_{\alpha\beta}$. Sui bi-spinori di Dirac $v_{\alpha\beta}$ il gruppo di Lorentz agisce secondo la

$$S^t(\Lambda^{-1}) \otimes S(\Lambda) : v^{\alpha\beta} \rightarrow v_{\Lambda}^{\alpha\beta} = S(\Lambda^{-1})_{\gamma\alpha} S(\Lambda)_{\beta\delta} v^{\gamma\delta} \quad (19.21)$$

Pertanto la componente

$$\delta_{\gamma\delta} v_{\gamma\delta} \quad (19.22)$$

è un singoletto. Questo è precisamente il singoletto che viene proiettato da T nel singoletto $(0, 0)_s$. In conclusione

$$T_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = \lambda g^{\mu\nu} \delta_{\alpha\beta} \quad (19.23)$$

dove λ è uno scalare. La normalizzazione usuale è di scegliere $\lambda = 2$. In questo modo vediamo che l'algebra di Clifford (19.5) è una conseguenza della relazione (19.3) che esprime a sua volta l'invarianza di Lorentz dell'equazione di Dirac.

20 P per gli spinori di Dirac

L'operazione di parità per uno spinore di Dirac in una rappresentazione generica deve avere la forma

$$P : \psi(x) \rightarrow \psi^P(x) = S(P) \psi(x_P) \quad (20.1)$$

dove $S(P)$ è una matrice che agisce sugli indici spinoriali. La condizione cui $S(P)$ deve soddisfare affinché $\psi^P(x)$ sia una soluzione dell'equazione di Dirac è

$$\begin{aligned} & \left[i \gamma^\mu \partial_\mu - m \right] S(P) \psi(x_P) = \\ & = S(P) \left[i S(P)^{-1} \gamma^\mu S(P) \frac{\partial x_P^\nu}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_P^\nu} - m \right] \psi(x_P) = \\ & = S(P) \left[i S(P)^{-1} \gamma^\mu S(P) (\mathcal{P}^{-1})_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x_P^\nu} - m \right] \psi(x_P) = 0 \quad (20.2) \end{aligned}$$

Pertanto deve essere

$$S(P)^{-1} \gamma^\mu S(P) = \mathcal{P}_\nu^\mu \gamma^\nu \quad (20.3)$$

L'esistenza di $S(P)$ è garantita dal fatto che $\gamma^\mu \rightarrow \mathcal{P}_\nu^\mu \gamma^\nu$ è un automorfismo delle matrici dell'algebra di Dirac e che questa ha un'unica rappresentazione irriducibile.

Si noti che nel caso dell'equazione di Weyl, l'invarianza dell'equazione richiederebbe che l'automorfismo $\sigma^i \rightarrow -\sigma^i$ dell'algebra di Pauli fosse implementato da una coniugazione. Ma nel caso dell'algebra di Pauli questo automorfismo connette due rappresentazioni *inequivalenti* dell'algebra: questa è la ragione per cui la matrice 2×2 analoga a $S(P)$ non esiste e le equazioni di Weyl *non* sono invarianti per parità. In generale l'algebra di Clifford in dimensione $d = 2n$ pari ha un'unica rappresentazione irriducibile di dimensione 2^n (che corrisponde alla rappresentazione di Fock fermionica con n oscillatori). In questo caso l'automorfismo che inverte il segno di tutte le matrici è implementato dalla matrice γ_{d+1} , la generalizzazione di γ_5 . L'algebra di Clifford di dimensione $d = 2n + 1$ ha invece due rappresentazioni irriducibili inequivalenti di dimensione 2^n . Le due rappresentazioni, viste come rappresentazioni dell'algebra di Fock fermionica di n oscillatori si distinguono per come viene rappresentato sul vuoto di Fock (con un ± 1) il rimanente elemento hermitiano γ_{2n+1} , che non appartiene all'algebra di Fock.

Una soluzione di (20.3) è

$$S(P) = \eta_P \gamma^0 \quad (20.4)$$

dove η_P è un fattore moltiplicativo³. η_P viene chiamato parità intrinseca e deve soddisfare la condizione

$$\eta_P^2 = P^2 = \pm 1 \Rightarrow \eta_P = \pm 1 \quad \text{oppure} \quad \pm i \quad (20.5)$$

Dunque

$$P : \psi(x) \rightarrow \psi^P(x) = \eta_P \gamma^0 \psi(x_P) \quad (20.6)$$

Determiniamo le proprietà di trasformazione sotto P dei bilineari fermionici:

$$P : \bar{\psi} \Gamma \psi \rightarrow \bar{\psi}^P \Gamma \psi^P \quad (20.7)$$

Otteniamo dalla (20.6)

$$\begin{aligned} \Gamma = 1, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu} & \quad P = +1 \\ \Gamma = \gamma_5, \gamma_\mu \gamma_5 & \quad P = -1 \end{aligned} \quad (20.8)$$

21 C per gli spinori di Dirac

Veniamo all'operazione coniugazione di carica, che agisce secondo

$$C : \psi(x) \rightarrow \psi^c(x) = C \psi^*(x) \quad (21.1)$$

La condizione che $\psi^c(x)$ soddisfi l'equazione di Dirac porta all'equazione

$$C \left[i C^{-1} \gamma^\mu C \partial_\mu - m \right] \psi^*(x) = C \left[-i (\gamma^\mu)^* \partial_\mu - m \right] \psi^*(x) = 0 \quad (21.2)$$

cioè alla relazione

$$C^{-1} \gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^* \quad (21.3)$$

Ancora una volta, l'esistenza di tale matrice è assicurata dall'unicità della rappresentazione irriducibile dell'algebra di Clifford in 4 dimensioni. Anche (21.3) definisce C solo a meno di un fattore scalare moltiplicativo. Nella rappresentazione spinoriale possiamo prendere⁴

$$C = \gamma^2 \quad \text{nella spinoriale} \quad (21.4)$$

³L'equazione (20.3) determina $S(P)$ solo a meno di un fattore moltiplicativo scalare.

⁴Possiamo moltiplicare C per un fattore di fase arbitrario η_C , lasciando invariata la relazione (21.6). Si è soliti prendere $\eta_C = 1$.

Dalla richiesta che

$$(\psi^c(x))^c = \psi(x) \quad (21.5)$$

otteniamo la proprietà

$$C C^* = 1 \quad (21.6)$$

Questo fissa la matrice C a meno una fase, che possiamo includere nella definizione di parità di carica intrinseca. Deduciamo la legge di trasformazione per C per cambio di rappresentazione

$$\gamma_\mu \rightarrow \tilde{\gamma}_\mu = V \gamma_\mu V^{-1} \quad (21.7)$$

Abbiamo

$$\tilde{\gamma}^* = V^* \gamma_\mu^* (V^{-1})^* = -V^* C^{-1} \gamma_\mu C (V^{-1})^* = -V^* C^{-1} V^{-1} \tilde{\gamma}_\mu V C (V^{-1})^* \quad (21.8)$$

Dunque

$$\tilde{C} = V C (V^{-1})^* \quad (21.9)$$

Introduciamo la matrice U_C che implementa le trasposizioni sulle matrici di Dirac

$$\gamma_\mu^t = -U_C^{-1} \gamma_\mu U_C \quad (21.10)$$

Dalla condizione $(\gamma_\mu^t)^t = \gamma_\mu$ otteniamo

$$\gamma_\mu = U_C^t U_C^{-1} \gamma_\mu U_C (U_C^{-1})^t \quad (21.11)$$

Dunque

$$U_C^t = \alpha U_C \quad (21.12)$$

dove α è un numero. Deduciamo la legge di trasformazione per U_C per cambio di rappresentazione

$$\gamma_\mu \rightarrow \tilde{\gamma}_\mu = V \gamma_\mu V^{-1} \quad (21.13)$$

Abbiamo

$$\tilde{\gamma}_\mu^t = (V^{-1})^t \gamma_\mu^t V^t = -(V^{-1})^t U_C^{-1} \gamma_\mu U_C V^t = -(V^{-1})^t U_C^{-1} V^{-1} \tilde{\gamma}_\mu V U_C V^t \quad (21.14)$$

Dunque

$$\tilde{U}_C = V U_C V^t \quad (21.15)$$

Notiamo quindi che la relazione (21.12) non dipende dalla rappresentazione ed è inoltre indipendente dal fattore moltiplicativo in U_C lasciato arbitrario

dalla definizione (21.10). Pertanto α è un numero *intrinseco*, indipendente da tutte le scelte arbitrarie implicite nella definizione di U_C . Possiamo calcolarlo in una qualunque rappresentazione, per esempio nella spinoriale. In questo caso $U_C = \gamma^0 \gamma^2$ e quindi $\alpha = -1$. In conclusione, otteniamo la relazione valida in qualunque rappresentazione

$$U_C^t = -U_C \quad (21.16)$$

In una generica rappresentazione *unitariamente* equivalente alla rappresentazione spinoriale abbiamo inoltre

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0 \quad \text{nelle rappresentazioni hermitiane} \quad (21.17)$$

Per queste rappresentazioni pertanto

$$\begin{aligned} \gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0 &= -C^t \gamma_\mu^t (C^{-1})^t = C^t U_C^{-1} \gamma_\mu U_C (C^{-1})^t = \\ &= (U_C^{-1})^* C^{-1} \gamma_\mu C (U_C)^* \end{aligned} \quad (21.18)$$

Deduciamo

$$\begin{aligned} U_C &= \beta \gamma^0 C^t \\ U_C^* &= \gamma C^{-1} \gamma^0 = \gamma C^* \gamma^0 \end{aligned} \quad (21.19)$$

con β e γ numeri. Prendendo la coniugata della seconda equazione

$$U_C = -\gamma^* \gamma^0 C \quad (21.20)$$

e confrontando con la prima

$$\beta C^t = -\gamma^* C \quad (21.21)$$

Notiamo che questa condizione è invariante per cambi di rappresentazione associati a V unitarie. Calcoliamo dunque il rapporto $\frac{-\gamma^*}{\beta}$ nella *rappresentazione spinoriale*, per la quale

$$C = \gamma^2 = (\gamma^2)^t \quad \text{nella spinoriale} \quad (21.22)$$

In conclusione nelle rappresentazione unitariamente equivalente alla spinoriale, che vengono dette *hermitiane*, vale la seguente proprietà

$$C^t = C \quad \text{nelle rappresentazioni hermitiane} \quad (21.23)$$

Il fattore moltiplicativo β non è fissato dalla definizione di U_C . β è invariante per trasformazioni V unitarie. Abbiamo

$$U_C U_C^* = -|\beta|^2 \quad (21.24)$$

Una scelta comune è $\beta = 1$. In definitiva, con questa scelta in una rappresentazione hermitiana abbiamo

$$U_C = \gamma^0 C \quad \text{nelle rappresentazioni hermitiane} \quad (21.25)$$

Determiniamo le proprietà di trasformazione sotto C dei bilineari fermionici:

$$C : \bar{\psi} \Gamma \psi \rightarrow \bar{\psi}^c \Gamma \psi^c \quad (21.26)$$

Utilizziamo una generica rappresentazione delle matrici gamma unitariamente equivalente alla spinoriale. Abbiamo

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^c \Gamma \psi^c &= \psi^t C^\dagger \gamma^0 \Gamma C \psi^* = -\psi^\dagger C^t \Gamma^t (\gamma^0)^t C^* \psi = \\ &= -\bar{\psi} \gamma^0 C \Gamma^t (-) C^{-1} \gamma^0 C C^* \psi = \bar{\psi} \gamma^0 C \Gamma^t C^{-1} \gamma^0 \psi = \\ &= \bar{\psi} U_C \Gamma^t U_C^{-1} \psi \end{aligned} \quad (21.27)$$

Il segno meno nella prima riga tiene conto della statistica dei campi fermionici (se ne può tenere conto in maniera equivalente, includendo un fattore -1 della parità di carica intrinseca di una coppia fermione-antifermione). In conclusione

$$\bar{\psi}^c \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n} \psi^c = (-1)^n \bar{\psi} \gamma_{\mu_n} \dots \gamma_{\mu_1} \psi \quad (21.28)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \Gamma = 1, \gamma_5, \gamma_\mu \gamma_5 & \quad C = +1 \\ \Gamma = \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu} & \quad C = -1 \end{aligned} \quad (21.29)$$

I settori con $C = 1$ e $C = -1$ corrispondono rispettivamente alle rappresentazioni del gruppo di Lorentz che nella decomposizione del prodotto tensore di due rappresentazioni di Dirac sono anti-simmetriche ($C = 1$) e simmetriche ($C = -1$). La ragione è che C essenzialmente scambia i due fattori del prodotto tensore, e quindi i suoi autospazi sono quelli simmetrici ed antisimmetrici per scambio. L'inclusione del segno meno dovuto alla statistica fa sí che il sottospazio (anti)simmetrico sia quello con $C = -1$ ($C = 1$).

Dimostriamo esplicitamente che i bilineari definiti dalle matrici (21.29) generano, rispettivamente la parte antisimmetrica e simmetrica del prodotto tensore di due rappresentazioni di Dirac. Il tensore

$$T_{\alpha\beta} = (\psi^{(1)})^c_\alpha \psi^{(2)}_\beta \quad (21.30)$$

si trasforma per trasformazioni di Lorentz con la matrice $S(\Lambda) \otimes S(\Lambda)$. Pertanto la parte simmetrica ed antisimmetrica sono sotto-rappresentazioni invarianti. Poiché

$$(C^{-1} \gamma^0)_{\alpha\gamma} T_{\alpha\beta} = \bar{\psi}^{(1)}_\gamma \psi^{(2)}_\beta \quad (21.31)$$

le componenti invarianti di $T_{\alpha\beta}$ sono date da

$$(U_C^{-1} \Gamma)_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = \bar{\psi}^{(1)} \Gamma \psi^{(2)} \quad (21.32)$$

dove Γ è una delle matrici in (21.29). Pertanto le componenti simmetriche ed anti-simmetriche di $T_{\alpha\beta}$ corrispondono, rispettivamente, a matrici $U_C^{-1} \Gamma$ simmetriche ed antisimmetriche:

$$(U_C^{-1} \Gamma)^t = -\Gamma^t U_C^{-1} = \pm U_C^{-1} \Gamma \quad (21.33)$$

cioè

$$U_C \Gamma^t U_C^{-1} = \mp \Gamma \quad (21.34)$$

Confrontando con la (21.27) vediamo dunque che la parte simmetrica (anti-simmetrica) di $T_{\alpha\beta}$ è una rappresentazione con $C = -1$ ($C = 1$).

22 Relazione tra P e C per gli spinori di Dirac

Benché sia $P^2 = 1$ che $P^2 = -1$ siano ambedue possibilità consistenti per uno spinore di Dirac, solo la seconda possibilità definisce un operatore di parità che commuta con la coniugazione di carica. Pertanto per una particella di Dirac realmente neutra (una particella di Majorana) la parità può essere implementata solo se $P^2 = -1$. Per capirne la ragione è più illuminante lavorare in una rappresentazione generale delle matrici di Dirac, piuttosto che nella rappresentazione spinoriale.

Ora se applichiamo prima C e poi P su uno spinore di Dirac otteniamo

$$S(P) C \psi^*(x_P) \quad (22.1)$$

mentre se operiamo prima con P e poi con C abbiamo

$$C S^*(P) \psi^*(x_P) \quad (22.2)$$

Pertanto la richiesta che P e C commutino è

$$S(P) C = C S^*(P) \quad (22.3)$$

Poiché $S(P) = \eta_P \gamma^0$, questa relazione è equivalente alla

$$\eta_P^* \gamma_0^* = \eta_P C^{-1} \gamma^0 C = -\eta_P \gamma_0^* \quad (22.4)$$

ovvero

$$\eta_P^* = -\eta_P \quad \Leftrightarrow \quad \eta_P = \pm i \quad (22.5)$$

Concludiamo che P e C commutano a condizione che

$$P^2 = -1 \quad (22.6)$$

La relazione algebrica più generale tra P e C (che non assume la commutazione) si ottiene considerando la complessa coniugata della (20.3):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\nu^\mu (\gamma^\nu)^* &= (S^*(P))^{-1} (\gamma^\mu)^* S^*(P) = -(C S^*(P))^{-1} (\gamma^\mu)^* C S^*(P) \\ &= -\mathcal{P}_\nu^\mu C^{-1} \gamma^\nu C \end{aligned} \quad (22.7)$$

da cui

$$(C S^*(P) C^{-1})^{-1} (\gamma^\mu)^* C S^*(P) C^{-1} = \mathcal{P}_\nu^\mu \gamma^\nu \quad (22.8)$$

Questo implica che

$$S^*(P) = \lambda C^{-1} S(P) C \Leftrightarrow C S^*(P) = \lambda S(P) C \quad (22.9)$$

dove λ è uno scalare. Da $S(P) = \eta_P \gamma^0$ otteniamo

$$\lambda = -\frac{\eta_P^*}{\eta_P} \quad (22.10)$$

Vediamo dunque che in generale

$$(\psi^P(x))^c = \lambda (\psi^c(x))^P \quad (22.11)$$

In particolare, se η_P è reale, cioè $P^2 = 1$, allora P e C *anti-commutano*.

23 T per gli spinori di Dirac

Sia \mathcal{T}_ν^μ la matrice di Lorentz che implementa l'inversione temporale

$$\mathcal{T} : (t, \vec{x}) \rightarrow (-t, \vec{x}) \quad (23.1)$$

La simmetria dell'equazione di Dirac per inversioni temporali

$$\psi(x) \rightarrow \tilde{S}(T) \psi(\mathcal{T}^{-1} x) \quad (23.2)$$

è equivalente alla esistenza di una matrice $\tilde{S}(T)$ che soddisfa la relazione

$$\tilde{S}(T)^{-1} \gamma^\mu \tilde{S}(T) = \mathcal{T}_\nu^\mu \gamma^\nu \quad (23.3)$$

L'esistenza di questa matrice è garantita dal fatto che

$$\gamma^\mu \rightarrow \mathcal{T}_\nu^\mu \gamma^\nu \quad (23.4)$$

è un automorfismo dell'algebra di Clifford e dal fatto che esiste una sola rappresentazione di questa algebra a meno di equivalenze. Poiché questo automorfismo è ottenibile componendo l'automorfismo

$$P : \gamma^\mu \rightarrow \mathcal{P}_\nu^\mu \gamma^\nu \quad (23.5)$$

implementato dalla matrice $S(P) = \eta_P \gamma^0$ con l'automorfismo

$$\mathcal{I} : \gamma^\mu \rightarrow -\gamma^\mu \quad (23.6)$$

implementato dalla matrice γ_5 ,

$$\gamma^5 \equiv -i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad (23.7)$$

deduciamo immediatamente che una matrice che soddisfa (23.3) è

$$\tilde{S}(T) = \eta_T \gamma^0 \gamma^5 \quad (23.8)$$

dove η_T è una fase. In realtà l'implementazione della simmetria (23.2) a livello di spazio di Fock porta ad uno scambio di particelle con anti-particelle. Pertanto si è soliti definire l'inversione temporale accompagnandola con una coniugazione di carica, che sappiamo già essere anch'essa una simmetria dell'

equazione di Dirac. L' inversione temporale è pertanto definita non da (23.2) bensì dalla

$$T : \psi(x) \rightarrow \psi^T(x) = S(T) \psi^*(\mathcal{T}^{-1} x) \quad (23.9)$$

con

$$S(T)^{-1} \gamma^\mu S(T) = -\mathcal{T}_\nu^\mu (\gamma^\nu)^* \quad (23.10)$$

La matrice $S(T)$ è ovviamente ottenuta componendo C con $\tilde{S}(T)$

$$S(T) = \eta_T \gamma^0 \gamma^5 C \quad (23.11)$$

Notiamo che applicando due volte l'operazione di inversione temporale otteniamo

$$(\psi^T(x))^T = S(T) S(T)^* \psi(x) \quad (23.12)$$

e

$$\begin{aligned} S(T) S(T)^* &= |\eta_T|^2 \gamma^0 \gamma^5 C \gamma_0^* \gamma_5^* C^* = \\ &= |\eta_T|^2 \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \gamma^5 C C^* = -|\eta_T|^2 \end{aligned} \quad (23.13)$$

Quindi, prendiamo

$$|\eta_T| = 1 \quad (23.14)$$

così che

$$T^2 = -1 \quad (23.15)$$

Nella spinoriale

$$S(T) = \eta_T \gamma^0 \gamma^5 \gamma^2 = \eta_T i \gamma^3 \gamma^1 \quad \text{nella spinoriale} \quad (23.16)$$

Confrontiamo le azioni di CT e TC

$$\begin{aligned} (\psi^c(x))^T &= S(T) (\psi^c)^*(\mathcal{T}^{-1} x) = S(T) C^* \psi(\mathcal{T}^{-1} x) = \\ &= \eta_T \gamma^0 \gamma_5 \\ (\psi^T(x))^c &= C (\psi^T)^*(x) = C S(T)^* \psi(\mathcal{T}^{-1} x) = \\ &= \eta_T^* \gamma^0 \gamma_5 \psi(\mathcal{T}^{-1} x) \end{aligned} \quad (23.17)$$

Quindi se vogliamo che C e T commutino, dobbiamo prendere η_T reale, e quindi $\eta_T = \pm 1$. La scelta convenzionale è

$$\eta_T = 1 \quad (23.18)$$

e

$$\begin{aligned} S(T) &= \gamma^0 \gamma^5 C \\ &= i \gamma^3 \gamma^1 \quad \text{nella spinoriale} \end{aligned} \quad (23.19)$$

24 L'azione di P,C,T sullo spazio di Fock

24.1 P

Discutiamo l'azione di P sugli operatori di seconda quantizzazione $a_{\vec{p},\sigma}$ e $b_{\vec{p},\sigma}$, per un campo di Dirac:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^P(x) &= U_P^{-1} \hat{\psi}(x) U_P = \sum_{\vec{p},\sigma} U_P^{-1} a_{\vec{p},\sigma} U_P \psi_{\vec{p},\sigma}^{(+)}(x) + U_P^{-1} b_{\vec{p},\sigma}^\dagger U_P \psi_{\vec{p},\sigma}^{(-)}(x) = \\ &= \sum_{\vec{p},\sigma} a_{\vec{p},\sigma} \eta_P \gamma_0 \psi_{\vec{p},\sigma}^{(+)}(x) + b_{\vec{p},\sigma}^\dagger \eta_P \gamma_0 \psi_{\vec{p},\sigma}^{(-)}(x) \end{aligned} \quad (24.1)$$

dove abbiamo introdotto una base per le soluzioni ad energia positiva e negativa dell'equazione di Dirac⁵:

$$\begin{aligned} \psi_{\vec{p},\sigma}^{(+)}(x) &= u_{\vec{p},\sigma} \frac{e^{-i p x}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (2\omega_{\vec{p}})^{\frac{1}{2}}} \\ \psi_{\vec{p},\sigma}^{(-)}(x) &= v_{\vec{p},\sigma} \frac{e^{i p x}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (2\omega_{\vec{p}})^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (24.2)$$

$\gamma_0 u_{\vec{p},\sigma}$ e $\gamma_0 v_{\vec{p},\sigma}$ sono proporzionali, rispettivamente, a $u_{-\vec{p},-\sigma}$ e $v_{-\vec{p},-\sigma}$. Possiamo verificare direttamente nella spinoriale che⁶

$$\gamma_0 u_{\vec{p},\sigma} = -\sigma u_{-\vec{p},-\sigma} \quad \gamma_0 v_{\vec{p},\sigma} = \sigma v_{-\vec{p},-\sigma} \quad (24.3)$$

⁵Nella prossima sottosezione deriviamo la relazione generale tra i vettori di polarizzazione $v_{\vec{p},\sigma}$ e $u_{\vec{p},\sigma}$, che fissa la normalizzazione di $v_{\vec{p},\sigma}$ in termine di quella di $u_{\vec{p},\sigma}$.

⁶Il fatto che $\gamma_0 v_{\vec{p},\sigma}$ siano proporzionali, rispettivamente, a $u_{-\vec{p},-\sigma}$ e $v_{-\vec{p},-\sigma}$, discende direttamente dal fatto che γ^0 anti-commuta con γ^i e quindi commuta con lo spin J^i : se lo spin non cambia e l'impulso si inverte l'elicità cambia di segno. Il fattore di proporzionalità può essere calcolato in una qualunque rappresentazione ma non dipende dalla scelta di questa.

da cui

$$\gamma_0 \psi_{\vec{p},\sigma}^{(+)}(\mathcal{P}^{-1}x) = -\sigma \psi_{-\vec{p},-\sigma}^{(+)}(x) \quad \gamma_0 \psi_{\vec{p},\sigma}^{(-)}(\mathcal{P}^{-1}x) = \sigma \psi_{-\vec{p},-\sigma}^{(-)}(x) \quad (24.4)$$

Quindi

$$U_P^{-1} a_{\vec{p},\sigma} U_P = -\sigma \eta_P a_{-\vec{p},-\sigma} \quad U_P^{-1} b_{\vec{p},\sigma}^\dagger U_P = \sigma \eta_P b_{-\vec{p},-\sigma}^\dagger \quad (24.5)$$

ovvero

$$U_P^{-1} a_{\vec{p},\sigma}^\dagger U_P = -\sigma \eta_P^* a_{-\vec{p},-\sigma}^\dagger \quad (24.6)$$

Da qui deduciamo l'azione della parità sugli stati di singola particella

$$\begin{aligned} U_P^{-1} a_{\vec{p},\sigma}^\dagger |0\rangle &= -\sigma \eta_P^* a_{-\vec{p},-\sigma}^\dagger |0\rangle \\ U_P^{-1} b_{\vec{p},\sigma}^\dagger |0\rangle &= \sigma \eta_P b_{-\vec{p},-\sigma}^\dagger |0\rangle \end{aligned} \quad (24.7)$$

Se $P^2 = -1$ e $\eta_P = \pm i$

$$\begin{aligned} U_P^{-1} a_{\vec{p},\sigma}^\dagger |0\rangle &= \pm i \sigma a_{-\vec{p},-\sigma}^\dagger |0\rangle \\ U_P^{-1} b_{\vec{p},\sigma}^\dagger |0\rangle &= \pm i \sigma b_{-\vec{p},-\sigma}^\dagger |0\rangle \end{aligned} \quad (24.8)$$

Notiamo che una coppia particella-antiparticella ha parità intrinseca negativa

$$\begin{aligned} U_P^{-1} a_{\vec{p},\sigma}^\dagger b_{\vec{p},\sigma}^\dagger |0\rangle &= -\sigma^2 \eta_P \eta_P^* a_{-\vec{p},-\sigma}^\dagger b_{-\vec{p},-\sigma}^\dagger |0\rangle = \\ &= -a_{-\vec{p},-\sigma}^\dagger b_{-\vec{p},-\sigma}^\dagger |0\rangle \end{aligned} \quad (24.9)$$

24.2 C

Consideriamo ora l'azione di C

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^c(x) &= U_C^{-1} \hat{\psi}(x) U_C = \sum_{\vec{p},\sigma} U_C^{-1} a_{\vec{p},\sigma} U_C \psi_{\vec{p},\sigma}^{(+)}(x) + U_C^{-1} b_{\vec{p},\sigma}^\dagger U_C \psi_{\vec{p},\sigma}^{(-)}(x) = \\ &= \sum_{\vec{p},\sigma} a_{\vec{p},\sigma}^\dagger C (\psi_{\vec{p},\sigma}^{(+)*}(x)) + b_{\vec{p},\sigma} C (\psi_{\vec{p},\sigma}^{(-)*}(x)) \end{aligned} \quad (24.10)$$

Si osservi che

$$C (\psi_{\vec{p},\sigma}^{(+)*}(x)) = C u_{\vec{p},\sigma}^* \frac{e^{ipx}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (2\omega_{\vec{p}})^{\frac{1}{2}}} \quad (24.11)$$

ovvero $C(\psi_{\vec{p},\sigma}^{(+)})^*(x)$ è una soluzione ad energia negativa $-\omega_{\vec{p}}$ e tri-momento $-\vec{p}$. Inoltre, da

$$J_z u_{\vec{0},\sigma} = \sigma u_{\vec{0},\sigma} \quad J_z = \frac{i}{2} [\gamma^1, \gamma^2] \quad (24.12)$$

otteniamo

$$J_z C u_{\vec{0},\sigma}^* = C \frac{i}{2} [\gamma^1, \gamma^2]^* u_{\vec{0},\sigma}^* = -\sigma C u_{\vec{0},\sigma}^* \quad (24.13)$$

In conclusione $C(\psi_{\vec{p},\sigma}^{(+)})^*(x)$ è una soluzione ad energia negativa con momento $-\vec{p}$ e spin $-\sigma$. Possiamo identificare $C(\psi_{\vec{p},\sigma}^{(+)})^*(x)$ con le soluzioni ad energia negativa che abbiamo denotato con $\psi_{\vec{p},\sigma}^{(-)}(x)$ e porre

$$\begin{aligned} v_{\vec{p},\sigma} &= C u_{\vec{p},\sigma}^* \\ u_{\vec{p},\sigma} &= C v_{\vec{p},\sigma}^* \\ \psi_{\vec{p},\sigma}^{(-)}(x) &= C(\psi_{\vec{p},\sigma}^{(+)})^*(x) \end{aligned} \quad (24.14)$$

In effetti, le coniugate complesse di queste funzioni, che vanno identificate con le funzioni d'onda delle anti-particelle associate agli operatori $b_{\vec{p},\sigma}^\dagger$, soddisfano

$$C(\psi_{\vec{p},\sigma}^{(-)})^*(x) = \psi_{\vec{p},\sigma}^{(+)}(x) \quad (24.15)$$

come consegue dalla relazione $C C^* = 1$. In conclusione

$$\hat{\psi}^c(x) = \sum_{\vec{p},\sigma} a_{\vec{p},\sigma}^\dagger \psi_{\vec{p},\sigma}^{(-)}(x) + b_{\vec{p},\sigma} \psi_{\vec{p},\sigma}^{(+)}(x) \quad (24.16)$$

e

$$U_C^{-1} a_{\vec{p},\sigma} U_C = b_{\vec{p},\sigma} \quad U_C^{-1} b_{\vec{p},\sigma}^\dagger U_C = a_{\vec{p},\sigma}^\dagger \quad (24.17)$$

Da qui deduciamo l'azione di C sugli stati di singola particella

$$U_C a_{\vec{p},\sigma}^\dagger |0\rangle = b_{\vec{p},\sigma}^\dagger |0\rangle \quad U_C b_{\vec{p},\sigma}^\dagger |0\rangle = a_{\vec{p},\sigma}^\dagger |0\rangle \quad (24.18)$$

Notiamo che una coppia particella-antiparticella ha parità di carica intrinseca negativa

$$U_C a_{\vec{p},\sigma}^\dagger b_{\vec{p}',\sigma}^\dagger |0\rangle = b_{\vec{p},\sigma}^\dagger a_{\vec{p}',\sigma}^\dagger |0\rangle = -a_{\vec{p}',\sigma}^\dagger b_{\vec{p},\sigma}^\dagger |0\rangle \quad (24.19)$$

24.3 T

Consideriamo ora l'azione di T

$$\begin{aligned}\hat{\psi}^T(x) &= U_T^{-1} \hat{\psi}(x) U_T = \sum_{\vec{p}, \sigma} U_T^{-1} a_{\vec{p}, \sigma} U_T \psi_{\vec{p}, \sigma}^{(+)}(x) + U_T^{-1} b_{\vec{p}, \sigma}^\dagger U_T \psi_{\vec{p}, \sigma}^{(-)}(x) = \\ &= \sum_{\vec{p}, \sigma} a_{\vec{p}, \sigma}^\dagger S(T) (\psi_{\vec{p}, \sigma}^{(+)})^*(\mathcal{T}^{-1} x) + b_{\vec{p}, \sigma} S(T) (\psi_{\vec{p}, \sigma}^{(-)})^*(\mathcal{T}^{-1} x)\end{aligned}\quad (24.20)$$

Si osservi che

$$\begin{aligned}S(T) (\psi_{\vec{p}, \sigma}^{(+)})^*(\mathcal{T}^{-1} x) &= \gamma^0 \gamma^5 \psi_{\vec{p}, \sigma}^{(-)}(\mathcal{T}^{-1} x) = \\ &= -\gamma^5 \gamma^0 v_{\vec{p}, \sigma} \frac{e^{i(\mathcal{T} p) x}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (2\omega_{\vec{p}})^{\frac{1}{2}}} = \gamma^5 v_{-\vec{p}, \sigma} \frac{e^{i(\mathcal{T} p) x}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (2\omega_{\vec{p}})^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}\quad (24.21)$$

è una soluzione ad energia *positiva* con tri-momento $-\vec{p}$ e spin $-\sigma$. Inoltre possiamo verificare direttamente nella spinoriale che⁷

$$\begin{aligned}v_{\vec{p}, \sigma} &= i(2\sigma) \gamma^5 u_{\vec{p}, -\sigma} \\ u_{\vec{p}, \sigma} &= -i(2\sigma) \gamma^5 v_{\vec{p}, -\sigma}\end{aligned}\quad (24.22)$$

Quindi

$$S(T) (\psi_{\vec{p}, \sigma}^{(+)})^*(\mathcal{T}^{-1} x) = (2\sigma) i \psi_{-\vec{p}, -\vec{\sigma}}^{(+)}(x)\quad (24.23)$$

Analogamente

$$\begin{aligned}S(T) (\psi_{\vec{p}, \sigma}^{(-)})^*(\mathcal{T}^{-1} x) &= -\gamma^5 \gamma^0 \psi_{\vec{p}, \sigma}^{(+)}(\mathcal{T}^{-1} x) = \\ &= -\gamma^5 \gamma^0 u_{\vec{p}, \sigma} \frac{e^{-i(\mathcal{T} p) x}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (2\omega_{\vec{p}})^{\frac{1}{2}}} = -\gamma^5 u_{-\vec{p}, \sigma} \frac{e^{-i(\mathcal{T} p) x}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (2\omega_{\vec{p}})^{\frac{1}{2}}} = \\ &= -2\sigma i v_{-\vec{p}, -\sigma} \frac{e^{i(\mathcal{T} p) x}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (2\omega_{\vec{p}})^{\frac{1}{2}}} = -2\sigma i \psi_{-\vec{p}, -\vec{\sigma}}^{(-)}(x)\end{aligned}\quad (24.24)$$

è una soluzione ad energia *negativa* con tri-momento $-\vec{p}$ e spin $-\sigma$. In conclusione

$$\begin{aligned}\hat{\psi}^T(x) &= \sum_{\vec{p}, \sigma} U_T^{-1} a_{\vec{p}, \sigma} U_T \psi_{\vec{p}, \sigma}^{(+)}(x) + U_T^{-1} b_{\vec{p}, \sigma}^\dagger U_T \psi_{\vec{p}, \sigma}^{(-)}(x) = \\ &= \sum_{\vec{p}, \sigma} (-2\sigma) i a_{-\vec{p}, -\sigma}^\dagger \psi_{\vec{p}, \sigma}^{(+)}(x) + 2\sigma i b_{-\vec{p}, -\sigma} \psi_{\vec{p}, \sigma}^{(-)}(x)\end{aligned}\quad (24.25)$$

⁷Il fatto che $\gamma^5 u_{\vec{p}, \sigma}$ sia proporzionale a $v_{\vec{p}, -\sigma}$ discende direttamente dal fatto che γ^5 anti-commuta con γ^μ e commuta con J_z . Il fattore di proporzionalità può essere calcolato in una qualunque rappresentazione ma non dipende dalla scelta di questa.

Quindi

$$\begin{aligned} U_T^{-1} a_{\vec{p},\sigma} U_T &= -2\sigma i a_{-\vec{p},-\sigma}^\dagger & U_T^{-1} b_{\vec{p},\sigma}^\dagger U_T &= 2\sigma i b_{-\vec{p},-\sigma} \\ U_T^{-1} a_{\vec{p},\sigma}^\dagger U_T &= 2\sigma i a_{-\vec{p},-\sigma} & U_T^{-1} b_{\vec{p},\sigma} U_T &= -2\sigma i b_{-\vec{p},-\sigma}^\dagger \end{aligned} \quad (24.26)$$

Il fatto che U_T scambi operatori di creazione con operatori di distruzione, indica che, sullo spazio di Fock, U_T è un operatore *anti-unitario*:

$$\langle U_T \psi_1, U_T \psi_2 \rangle = \langle \psi_2, \psi_1 \rangle \quad (24.27)$$

24.4 Decadimento di un vettore V in una coppia di vettori (W, \bar{W})

Consideriamo un processo di decadimento di una particella vettoriale reale V di massa M in una coppia particella-antiparticella di vettori carichi (W, \bar{W}) di massa m :

$$V \rightarrow W + \bar{W} \quad (24.28)$$

Sia p il quadri-impulso di V , k e \bar{k} i quadri-impulsi di W e \bar{W} rispettivamente:

$$p = k + \bar{k} \quad (24.29)$$

Siano $\epsilon_\mu^V(p, \lambda)$, $\epsilon_\nu^W(k, \sigma)$ e $\epsilon_\rho^{\bar{W}}(\bar{k}, \bar{\sigma})$ i vettori di polarizzazione delle particelle V, W, \bar{W} , dove λ è lo spin lungo l'asse delle z nel sistema di riposo di V , e σ e $\bar{\sigma}$ sono le elicità di W e \bar{W} .

L'ampiezza relativistica invariante ha la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\lambda, p; \sigma, k; \bar{\sigma}, \bar{k}) &= \epsilon_\mu^V(p, \lambda) \bar{\epsilon}_\nu^W(k, \sigma) \bar{\epsilon}_\rho^{\bar{W}}(\bar{k}, \bar{\sigma}) J^{\mu;\nu\rho}(k, \bar{k}) = \\ &\equiv \mathcal{M}(\lambda, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) \end{aligned} \quad (24.30)$$

dove θ è la direzione del 3-momento \vec{k} lungo l'asse delle z nel sistema di riposo di V

$$\begin{aligned} p &= (M, \vec{0}) \\ k &= \left(\frac{M}{2}, |\vec{k}| \sin \theta, 0, |\vec{k}| \cos \theta\right) \\ \bar{k} &= \left(\frac{M}{2}, -|\vec{k}| \sin \theta, 0, -|\vec{k}| \cos \theta\right) \\ |\vec{k}| &= \frac{1}{2} \sqrt{M^2 - 4m^2} \end{aligned} \quad (24.31)$$

24.4.1 Invarianza di Lorentz

Sia \tilde{k} il 4-impulso del W per $\theta = 0$ nel sistema del centro di massa

$$\tilde{k} = \left(\frac{M}{2}, 0, 0, |\vec{k}| \right) \quad (24.32)$$

e sia $\mathcal{R}_y(\theta)$ la matrice di Lorentz 4×4 che implementa le rotazioni di un angolo θ lungo l'asse delle y . La definizione che abbiamo adottato in Eq. (16.56) per i vettori di polarizzazione per W è

$$(\mathcal{R}_y(\theta))^\mu{}_\nu \epsilon^{W\nu}(\tilde{k}, \sigma) = \epsilon^{W\mu}(\mathcal{R}_y(\theta)\tilde{k}, \sigma) = \epsilon^{W\mu}(k, \sigma) \quad (24.33)$$

Infatti $\mathcal{R}_y(\theta)\epsilon^W(\tilde{k}, \sigma)$ è un vettore di polarizzazione con impulso $\mathcal{R}_y(\theta)\tilde{k} = k$, perché la condizione di trasversalità è invariante di Lorentz. Inoltre è un vettore di elicità σ perché l'elicità commuta con $\mathcal{R}_y(\theta)$ ⁸.

Esplicitamente

$$\begin{aligned} \epsilon^{W\mu}(k, 0) &= \left(\frac{|\vec{k}|}{m}, \frac{M \sin \theta}{2m}, 0, \frac{M \cos \theta}{2m} \right) \\ \epsilon^{W\mu}(k, \pm 1) &= \left(0, \frac{\cos \theta}{\sqrt{2}}, \pm \frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned} \quad (24.34)$$

Consideriamo ora l'azione di $\mathcal{R}_y(\theta)$ sul vettore di polarizzazione ϵ^V : poiché nel sistema del centro di massa $\mathcal{R}_y(\theta)p = p$, abbiamo

$$(\mathcal{R}_y(\theta))^\mu{}_\nu \epsilon^{V\nu}(p, \lambda) = \sum_{\sigma'} D_{\lambda'\lambda}^{(1)}(\theta) \epsilon^{V\mu}(p, \lambda') \quad (24.35)$$

dove $D^{(1)}(\theta)$ è la matrice 3×3 che implementa le rotazioni lungo l'asse delle y di un angolo θ nella rappresentazione di spin 1:

$$D^{(1)}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \cos^2 \frac{\theta}{2} & -\sin^2 \frac{\theta}{2} \\ \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & -\sin^2 \frac{\theta}{2} & \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (24.36)$$

Pertanto l'invarianza dell'ampiezza (24.30) per rotazioni $\mathcal{R}_y(\theta)$ implica che

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\lambda, \sigma, \bar{\sigma}; 0) &= \epsilon_\mu^V(p, \lambda) \bar{\epsilon}_\nu^W(\tilde{k}, \sigma) \bar{\epsilon}_\rho^W(\tilde{k}, \bar{\sigma}) J^{\mu;\nu\rho}(\tilde{k}, \tilde{k}) = \\ &= \sum_{\sigma'} D_{\lambda'\lambda}^{(1)}(\theta) \epsilon_\mu^V(p, \lambda') \bar{\epsilon}_\nu^W(k, \sigma) \bar{\epsilon}_\rho^W(\bar{k}, \bar{\sigma}) J^{\mu;\nu\rho}(k, \bar{k}) = \\ &= \sum_{\lambda'} D_{\lambda'\lambda}^{(1)}(\theta) \mathcal{M}(\lambda', \sigma, \bar{\sigma}; \theta) \end{aligned} \quad (24.37)$$

⁸Questa relazione fissa la normalizzazione di $\epsilon_\mu^W(k, \sigma)$ una volta fissata la normalizzazione dei $\epsilon^W(\tilde{k}, \sigma)$: la normalizzazione di questi ultimi è stata scelta in (16.61).

ovvero

$$\mathcal{M}(\lambda, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) = \sum_{\lambda'} D_{\lambda'\lambda}^{(1)}(-\theta) \mathcal{M}(\lambda', \sigma, \bar{\sigma}; 0) \quad (24.38)$$

In conclusione l'invarianza per rotazione determina le ampiezze per un angolo θ in termini delle ampiezze ad angolo $\theta = 0$. La conservazione del momento angolare lungo z implica inoltre che le ampiezze per $\theta = 0$ diverse da zero sono quelle che soddisfano la regola di selezione

$$\lambda = \sigma - \bar{\sigma} \quad (24.39)$$

Pertanto ci sono al più 7 ampiezze ad angolo zero non nulle, che possiamo parametrizzare in termini dei parametri complessi a_i , $i = 1, \dots, 7$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(0, \sigma, \bar{\sigma}; 0) &= \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \\ \mathcal{M}(1, \sigma, \bar{\sigma}; 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_5 \\ a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{M}(-1, \sigma, \bar{\sigma}; 0) &= \begin{pmatrix} 0 & a_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (24.40)$$

Le ampiezze ad angolo θ dipendono dagli a_i nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(0, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) &= \begin{pmatrix} a_1 \cos \theta & -\frac{a_7}{\sqrt{2}} \sin \theta & -\frac{a_5}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ -\frac{a_4}{\sqrt{2}} \sin \theta & a_2 \cos \theta & 0 \\ -\frac{a_6}{\sqrt{2}} \sin \theta & 0 & a_3 \cos \theta \end{pmatrix} \\ \mathcal{M}(1, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) &= \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\sqrt{2}} \sin \theta & -a_7 \sin^2 \frac{\theta}{2} & a_5 \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ a_4 \cos^2 \frac{\theta}{2} & -\frac{a_2}{\sqrt{2}} \sin \theta & 0 \\ -a_6 \sin^2 \frac{\theta}{2} & 0 & \frac{a_3}{\sqrt{2}} \sin \theta \end{pmatrix} \\ \mathcal{M}(-1, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) &= \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\sqrt{2}} \sin \theta & a_7 \cos^2 \frac{\theta}{2} & -a_5 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ -a_4 \sin^2 \frac{\theta}{2} & \frac{a_2}{\sqrt{2}} \sin \theta & 0 \\ a_6 \cos^2 \frac{\theta}{2} & 0 & \frac{a_3}{\sqrt{2}} \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (24.41)$$

24.4.2 Invarianza per P e C

Ne sistema di riposo di V

$$\mathcal{P}_\mu^\nu \epsilon_\nu^V(p, \lambda) = -\epsilon_\mu^V(p, \lambda) \quad (24.42)$$

Questa relazione è coerente col fatto che la parità P commuta con lo spin J_z e $\mathcal{P}p = p$. Il segno meno riflette il fatto che sotto inversione spaziale i 3-vettori spaziali cambiano segno. Analogamente a quanto discusso in Sezione (24.1) nel caso degli spinori di Dirac, deduciamo da (24.42) che l'azione dell'operatore di parità sugli stati di singola particella V con *spin definito* λ nel sistema di riposo e momento $p = (M, \vec{0})$ è

$$U_P^{-1} a_{\vec{0}\lambda}^\dagger |0\rangle = -\eta_P a_{\vec{0}\lambda}^\dagger |0\rangle \quad (24.43)$$

se η_P è la parità intrinseca del campo V

$$U_P^{-1} V^\mu(x) U_P = \eta_P \mathcal{P}_\nu^\mu V^\nu(\mathcal{P}^{-1}x) \quad (24.44)$$

Per quanto riguarda i vettori di polarizzazione delle particelle W , ricordando la loro definizione dei $\epsilon_\mu^W(k, \sigma)$ in (24.33), (16.68) e (16.69), otteniamo, sempre nel sistema di riposo del V :

$$\mathcal{P}_\mu^\nu \epsilon_\nu^W(k, \sigma) = \epsilon_\mu^W(\bar{k}, -\sigma) \quad (24.45)$$

Nel membro di destra compaiono rispettivamente \bar{k} e $-\sigma$ perché $\mathcal{P}k = \bar{k}$ e perché la parità anti-commuta con l'elicità. Con una scelta arbitraria delle normalizzazione dei vettori di polarizzazione potrebbero in linea di principio apparire dei segni, c_σ nel secondo membro, con la restrizione che $1 = c_0^2 = c_{+1}c_{-1}$, che deriva da $\mathcal{P}^2 = 1$. I segni c_σ risultano tutti uguali ad 1 con la normalizzazione degli $\epsilon_\mu^W(k, \sigma)$ fatta in (24.33), (16.68) e (16.69). Pertanto, se indichiamo con $A_{\vec{k}\sigma}^\dagger$ i creatori associati al W abbiamo

$$U_P A_{\vec{k}\sigma}^\dagger |0\rangle = A_{-\vec{k}-\sigma}^\dagger |0\rangle \quad (24.46)$$

La parità intrinseca del W è irrilevante nel processo in questione, in quanto il W è accompagnato dal \bar{W} e la parità intrinseca della coppia bosonica è +1.

In conclusione l'invarianza per parità dell'ampiezza (24.30) equivale all'identità

$$P : \quad \mathcal{M}(\lambda, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) = -\eta_P \mathcal{M}(\lambda, -\sigma, -\bar{\sigma}; \theta + \pi) \quad (24.47)$$

D'altronde scrivendo l'ampiezza in forma covariante ed usando le (24.42) e (24.45) ottiamo

$$\begin{aligned}
\text{P : } \quad \mathcal{M}(\lambda, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) &= \epsilon_\mu^V(p, \lambda) \bar{\epsilon}_\nu^W(k, \sigma) \bar{\epsilon}_\rho^W(\bar{k}, \bar{\sigma}) J^{\mu;\nu\rho}(k, \bar{k}) = \\
&= -\epsilon_\mu^V(p, \lambda) \bar{\epsilon}_\nu^W(\bar{k}, -\sigma) \bar{\epsilon}_\rho^W(k, -\bar{\sigma}) J^{\mu;\nu\rho}(\bar{k}, k) P_J = \\
&= -P_J \mathcal{M}(\lambda, -\sigma, -\bar{\sigma}; \theta + \pi)
\end{aligned} \tag{24.48}$$

dove P_J è la parità del tensore $J^{\mu;\nu\rho}(k, \bar{k})$. In altre parole

$$P_J = \eta_P \tag{24.49}$$

In definitiva se $\eta_P = 1$ ($\eta_P = -1$) allora un'ampiezza invariante per parità deve essere descritta da un tensore $J^{\mu;\nu\rho}(k, \bar{k})$ di parità pari (dispari).

Inoltre l'invarianza sotto una rotazione $R_y(\pi)$ collega le ampiezze a θ con quelle a $\theta + \pi$ nel modo prescritto dalla formula (24.38)

$$R_y(\pi) : \quad \mathcal{M}(\lambda, \sigma, \bar{\sigma}; \theta + \pi) = -\mathcal{M}(-\lambda, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) \tag{24.50}$$

in quanto

$$D^{(1)}(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{24.51}$$

che si ottiene dalla (24.36)⁹ Sostituendo la (24.50) nella (24.47) possiamo quindi riscrivere la richiesta di invarianza per parità in termini delle ampiezze con θ fissato

$$\text{P : } \quad \mathcal{M}(\lambda, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) = \eta_P \mathcal{M}(-\lambda, -\sigma, -\bar{\sigma}; \theta) \tag{24.53}$$

Questa identità è equivalente all'identità tra ampiezze a $\theta = 0$

$$\text{P : } \quad a_1 = \eta_P a_1 \quad a_2 = \eta_P a_3 \quad a_5 = \eta_P a_7 \quad a_4 = \eta_P a_6 \tag{24.54}$$

⁹Questo è anche dedotto dalle

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}_y(\pi))_\mu^\nu \epsilon_\nu^V(p, \lambda) &= -\epsilon_\mu^V(p, -\lambda) \\
(\mathcal{R}_y(\pi))_\mu^\nu \epsilon_\nu^W(k, \pm) &= \epsilon_\mu^W(\bar{k}, \pm)
\end{aligned} \tag{24.52}$$

Quindi per $\eta_P = 1$ l'ampiezza invariante per parità dipende quindi da 4 parametri indipendenti, mentre per $\eta_P = -1$ i parametri sono 3 perché $a_1 = 0$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(0, \sigma, \bar{\sigma}; 0) &= \begin{pmatrix} a_1 (1 + \eta_P)/2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_P a_2 \end{pmatrix} \\
\mathcal{M}(1, \sigma, \bar{\sigma}; 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_5 \\ a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathcal{M}(-1, \sigma, \bar{\sigma}; 0) &= \begin{pmatrix} 0 & \eta_P a_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \eta_P a_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{24.55}
\end{aligned}$$

L'operatore di coniugazione di carica C agisce sul vettore di polarizzazione del vettore neutro attraverso moltiplicazione per la sua parità di carica intrinseca

$$C : (\epsilon_\mu^{(V)}(p, \lambda))^c = \eta_C \epsilon_\mu^{(V)}(p, \lambda) \tag{24.56}$$

C manda invece il vettore di polarizzazione di W in quello di \bar{W} : pertanto equivale a scambiare (k, σ) con $(\bar{k}, \bar{\sigma})$ nell'ampiezza:

$$\mathcal{M}(\lambda, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) = \eta_C \mathcal{M}(\lambda, \bar{\sigma}, \sigma; \theta + \pi) \tag{24.57}$$

Usando l'invarianza sotto $R_y(\pi)$ questa identità si riscrive

$$C : \mathcal{M}(\lambda, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) = -\eta_C \mathcal{M}(-\lambda, \bar{\sigma}, \sigma; \theta) \tag{24.58}$$

In termini delle ampiezze a $\theta = 0$ le (24.58) si riscrivono

$$C : a_{1,2,3} = -\eta_C a_{1,2,3} \quad a_5 = -\eta_C a_6 \quad a_4 = -\eta_C a_7 \tag{24.59}$$

Pertanto le ampiezze a $\lambda = 0$ sono non nulle solo se

$$\eta_C = 1 \Rightarrow a_{1,2,3} = 0 \tag{24.60}$$

L'invarianza simultanea per P e C implica invece che tutte le ampiezze con $\lambda = \pm 1$ sono identiche a meno di segni

$$P \text{ and } C \quad a_5 = -\eta_P \eta_C a_4 \quad a_6 = \eta_P a_4 \quad a_7 = -\eta_C a_4 \tag{24.61}$$

Se $\eta_C = -1$ le ampiezze invarianti sotto P e C dipendono quindi da 3 parametri indipendenti:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(0, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) &= \begin{pmatrix} a_1 \cos \theta & -\frac{a_4}{\sqrt{2}} \sin \theta & \frac{\eta_P a_4}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ -\frac{a_4}{\sqrt{2}} \sin \theta & a_2 \cos \theta & 0 \\ -\frac{\eta_P a_4}{\sqrt{2}} \sin \theta & 0 & \eta_P a_2 \cos \theta \end{pmatrix} \\
\mathcal{M}(1, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) &= \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\sqrt{2}} \sin \theta & -a_4 \sin^2 \frac{\theta}{2} & \eta_P a_4 \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ a_4 \cos^2 \frac{\theta}{2} & \frac{a_2}{\sqrt{2}} \sin \theta & 0 \\ -\eta_P a_4 \sin^2 \frac{\theta}{2} & 0 & \eta_P \frac{a_2}{\sqrt{2}} \sin \theta \end{pmatrix} \\
\mathcal{M}(-1, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) &= \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\sqrt{2}} \sin \theta & a_4 \cos^2 \frac{\theta}{2} & -\eta_P a_4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ -a_4 \sin^2 \frac{\theta}{2} & \frac{a_2}{\sqrt{2}} \sin \theta & 0 \\ \eta_P a_4 \cos^2 \frac{\theta}{2} & 0 & \eta_P \frac{a_2}{\sqrt{2}} \sin \theta \end{pmatrix} \\
\eta_C &= -1
\end{aligned} \tag{24.62}$$

mentre per $\eta_C = 1$, le ampiezze dipendono da un unico parametro

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(0, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_4}{\sqrt{2}} \sin \theta & \frac{\eta_P a_4}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ -\frac{a_4}{\sqrt{2}} \sin \theta & 0 & 0 \\ -\frac{\eta_P a_4}{\sqrt{2}} \sin \theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathcal{M}(1, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) &= \begin{pmatrix} 0 & a_4 \sin^2 \frac{\theta}{2} & \eta_P a_4 \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ a_4 \cos^2 \frac{\theta}{2} & 0 & 0 \\ -\eta_P a_4 \sin^2 \frac{\theta}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathcal{M}(-1, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) &= \begin{pmatrix} 0 & -a_4 \cos^2 \frac{\theta}{2} & -\eta_P a_4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ -a_4 \sin^2 \frac{\theta}{2} & 0 & 0 \\ \eta_P a_4 \cos^2 \frac{\theta}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\eta_C &= 1
\end{aligned} \tag{24.63}$$

$$\eta_C = 1 \tag{24.64}$$

24.4.3 Ampiezza invarianti pari per P

Cerchiamo la forma più generale delle ampiezze invarianti invarianti per parità, scrivendo tutti i possibili contributi tensoriali alla corrente $J^{\mu;\nu\rho}(k, \bar{k})$ covariante che si possono formare con i due 4-vettori k e \bar{k} ed il tensore metrico $g_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\text{pari}}^{VW\bar{W}}(k, \bar{k}) &= \epsilon_\mu^V \bar{\epsilon}_\nu^W \bar{\epsilon}_\rho^{\bar{W}} J^{\mu;\nu\rho}(k, \bar{k}) = \\
&= \epsilon_\mu^V \bar{\epsilon}_\nu^W \bar{\epsilon}_\rho^{\bar{W}} [c_1 g^{\mu\nu} k^\rho + c_2 g^{\rho\mu} \bar{k}^\nu + \\
&+ c_3 g^{\nu\rho} (k^\mu - \bar{k}^\mu) + \frac{c_4}{M^2} k^\rho \bar{k}^\nu (k^\mu - \bar{k}^\mu)]
\end{aligned} \tag{24.65}$$

dove abbiamo tenuto conto delle condizioni di trasversalità

$$k \cdot \epsilon^W = \bar{k} \cdot \epsilon^{\bar{W}} = (k + \bar{k}) \cdot \epsilon^V = 0 \quad (24.66)$$

Vediamo che in effetti l'ampiezza pari sotto parità dipende da 4 parametri, in accordo con l'analisi della sottosezione precedente. Lasciamo come esercizio dimostrare le seguenti relazioni tra i parametri c_i e le ampiezze a $\theta = 0$ definite in (24.55)

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{\sqrt{M^2 - 4m^2}} &= \frac{M^2}{4m^2} (c_2 - c_1) + \left(1 - \frac{M^2}{2m^2}\right) c_3 + \left(1 - \frac{M^2}{2m^2}\right) c_4 \\ \frac{a_2}{\sqrt{M^2 - 4m^2}} &= -c_3 \\ \frac{a_4}{\sqrt{M^2 - 4m^2}} &= -\frac{M}{2m} c_1 \\ \frac{a_5}{\sqrt{M^2 - 4m^2}} &= \frac{M}{2m} c_2 \end{aligned} \quad (24.67)$$

La coniugazione di carica scambia (k, σ) con $(\bar{k}, \bar{\sigma})$, e quindi equivale allo scambio di ν con ρ in $J^{\mu;\nu\rho}(k, \bar{k})$. Pertanto per $\eta_C = -1$, $J^{\mu;\nu\rho}(k, \bar{k})$ deve cambiare di segno sotto questo scambio e quindi

$$\eta_C = -1 \quad c_1 = -c_2 \quad (24.68)$$

e l'ampiezza dipende da soli 3 parametri indipendenti:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{PC}}^{VW\bar{W}}(k, \bar{k}) &= \epsilon_\mu^V \bar{\epsilon}_\nu^W \bar{\epsilon}_\rho^{\bar{W}} J^{\mu;\nu\rho}(k, \bar{k}) \\ &= \epsilon_\mu^V \bar{\epsilon}_\nu^W \bar{\epsilon}_\rho^{\bar{W}} [c_1 (g^{\mu\nu} k^\rho - g^{\rho\mu} \bar{k}^\nu) + \\ &\quad + c_3 g^{\nu\rho} (k^\mu - \bar{k}^\mu) + \frac{c_4}{M^2} k^\rho \bar{k}^\nu (k^\mu - \bar{k}^\mu)] \end{aligned} \quad (24.69)$$

in accordo con l'analisi nella sottosezione precedente. Si noti che la corrente in questo caso è anche automaticamente conservata. Se invece $\eta_C = +1$ allora

$$\eta_C = 1 \quad c_1 = c_2 \quad c_3 = c_4 = 0 \quad (24.70)$$

cioè l'ampiezza dipende da un unico parametro, sempre in accordo con l'analisi nella sottosezione precedente.

24.4.4 Ampiezze invarianti dispari sotto P

In questo caso l'espressione tensoriale più generale per la corrente è

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{dispari}}^{VW\bar{W}}(k, \bar{k}) &= \epsilon_{\mu}^V \bar{\epsilon}_{\nu}^W \bar{\epsilon}_{\rho}^{\bar{W}} J^{\mu;\nu\rho}(k, \bar{k}) = \\ &= \epsilon_{\mu}^V \bar{\epsilon}_{\nu}^W \bar{\epsilon}_{\rho}^{\bar{W}} [b_1 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{\alpha} \bar{k}_{\beta} k^{\rho} + b_2 \epsilon^{\rho\mu\alpha\beta} k_{\alpha} \bar{k}_{\beta} \bar{k}^{\nu} + \\ & b_3 \epsilon^{\nu\rho\alpha\beta} k_{\alpha} \bar{k}_{\beta} (k^{\mu} - \bar{k}^{\mu}) + b_4 \epsilon^{\mu\nu\rho\alpha} k_{\alpha} + b_5 \epsilon^{\mu\nu\rho\alpha} \bar{k}_{\alpha}] \end{aligned} \quad (24.71)$$

Quest'ampiezza sembra dipendere da 5 parametri indipendenti, mentre l'analisi della sottosezione precedente ha determinato che le ampiezze indipendenti dispari per P devono essere 3. In effetti se si tiene conto che i vettori di polarizzazione e i 4-momenti soddisfano sia le equazioni di trasversalità (24.66) che le condizioni di “mass-shell”:

$$k^2 = \bar{k}^2 = m^2 \quad (k + \bar{k})^2 = M^2 \quad (24.72)$$

esistono 2 relazioni lineari tra le 5 strutture tensoriali in (24.71). Per esempio, le seguenti 2 combinazioni lineari delle strutture tensoriali in (24.71) si annullano:

$$\begin{aligned} &\epsilon_{\mu}^V \bar{\epsilon}_{\nu}^W \bar{\epsilon}_{\rho}^{\bar{W}} [\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{\alpha} \bar{k}_{\beta} k^{\rho} - \epsilon^{\rho\mu\alpha\beta} k_{\alpha} \bar{k}_{\beta} \bar{k}^{\nu} + \epsilon^{\nu\rho\alpha\beta} k_{\alpha} \bar{k}_{\beta} (k^{\mu} - \bar{k}^{\mu}) + \\ & + \frac{1}{2} (M^2 - 4m^2) \epsilon^{\mu\nu\rho\alpha} k_{\alpha} + \frac{1}{2} (M^2 - 4m^2) \epsilon^{\mu\nu\rho\alpha} \bar{k}_{\alpha}] = 0 \\ &\epsilon_{\mu}^V \bar{\epsilon}_{\nu}^W \bar{\epsilon}_{\rho}^{\bar{W}} [2 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{\alpha} \bar{k}_{\beta} k^{\rho} + 2 \epsilon^{\rho\mu\alpha\beta} k_{\alpha} \bar{k}_{\beta} \bar{k}^{\nu} + \\ & + M^2 \epsilon^{\mu\nu\rho\alpha} k_{\alpha} + M^2 \epsilon^{\mu\nu\rho\alpha} \bar{k}_{\alpha}] = 0 \end{aligned} \quad (24.73)$$

Possiamo quindi mettere a zero 2 dei parametri b_i e, per esempio, scegliere

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{dispari}}^{VW\bar{W}}(k, \bar{k}) &= \epsilon_{\mu}^V \bar{\epsilon}_{\nu}^W \bar{\epsilon}_{\rho}^{\bar{W}} [b_3 \epsilon^{\nu\rho\alpha\beta} k_{\alpha} \bar{k}_{\beta} (k^{\mu} - \bar{k}^{\mu}) + \\ & + b_4 \epsilon^{\mu\nu\rho\alpha} k_{\alpha} + b_5 \epsilon^{\mu\nu\rho\alpha} \bar{k}_{\alpha}] \end{aligned} \quad (24.74)$$

in accordo con le conclusioni della sottosezione precedente. Lasciamo come esercizio determinare le relazioni tra i parametri $b_{3,4,5}$ e le ampiezze ad angolo $\theta = 0$.

Questo caso esemplifica l'utilità dell'analisi in termini di ampiezze fra stati di elicità definita: abbiamo visto nella sezione (24.4.2) come l'analisi di queste ampiezze determini in modo immediato il numero dei parametri indipendenti di una generica ampiezza. D'altra parte, in alcune situazioni, come questa, non sembra sempre semplice identificare le relazioni lineari che sussistono “on-shell” fra le varie possibili strutture tensoriali — indipendenti “off-shell” — che concorrono a formare una data ampiezza.

24.5 Decadimento di un vettore V in una coppia di fermioni $(\psi, \bar{\psi})$

Consideriamo un processo di decadimento di una particella vettoriale reale V di massa M in una coppia particella-antiparticella di fermioni di Dirac carichi $(\psi, \bar{\psi})$ di massa m :

$$V \rightarrow \psi + \bar{\psi} \quad (24.75)$$

Sia p il quadri-impulso di V , k e \bar{k} i quadri-impulsi di ψ e $\bar{\psi}$ rispettivamente:

$$p = k + \bar{k} \quad (24.76)$$

Siano $\epsilon_\mu^V(p, \lambda)$, $u(k, \sigma)$ e $v(\bar{k}, \bar{\sigma})$ i vettori di polarizzazione delle particelle $V, \psi, \bar{\psi}$, dove λ è lo spin lungo l'asse delle z nel sistema di riposo di V , e σ e $\bar{\sigma}$ sono le elicità di ψ e $\bar{\psi}$.

L'ampiezza relativistica invariante ha la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\lambda, p; \sigma, k; \bar{\sigma}, \bar{k}) &= \epsilon_\mu^V(p, \lambda) \bar{u}(k, \sigma) J^\mu(k, \bar{k}) v(\bar{k}, \bar{\sigma}) = \\ &\equiv \mathcal{M}(\lambda, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) \end{aligned} \quad (24.77)$$

dove θ è la direzione del 3-momento \vec{k} lungo l'asse delle z nel sistema di riposo di V

$$\begin{aligned} p &= (M, \vec{0}) \\ k &= \left(\frac{M}{2}, |\vec{k}| \sin \theta, 0, |\vec{k}| \cos \theta \right) \\ \bar{k} &= \left(\frac{M}{2}, -|\vec{k}| \sin \theta, 0, -|\vec{k}| \cos \theta \right) \\ |\vec{k}| &= \frac{1}{2} \sqrt{M^2 - 4m^2} \end{aligned} \quad (24.78)$$

24.5.1 Invarianza di Lorentz

Sia \tilde{k} il 4-impulso del fermione ψ per $\theta = 0$ nel sistema del centro di massa

$$\tilde{k} = \left(\frac{M}{2}, 0, 0, |\vec{k}| \right) \quad (24.79)$$

e sia $\mathcal{R}_y(\theta)$ la matrice di Lorentz 4×4 che implementa le rotazioni di un angolo θ lungo l'asse delle y . Abbiamo, ricordando la (16.56), che

$$S(\mathcal{R}_y(\theta)) u(\tilde{k}, \sigma) = u(k, \sigma) \quad (24.80)$$

Per quanto riguarda il vettore di polarizzazione ϵ^V , abbiamo visto nella sottosezione precedente

$$(\mathcal{R}_y(\theta))_\mu^\nu \epsilon_\nu^V(p, \lambda) = \sum_{\sigma'} D_{\lambda'\lambda}^{(1)}(\theta) \epsilon_\mu^V(p, \lambda') \quad (24.81)$$

dove $D^{(1)}(\theta)$ è la matrice 3×3 che implementa le rotazioni lungo l'asse delle y di un angolo θ nella rappresentazione di spin 1, in (24.36). Pertanto l'invarianza dell'ampiezza (24.30) per rotazioni $\mathcal{R}_y(\theta)$ implica, esattamente come nel caso nella sottosezione precedente, che

$$\mathcal{M}(\lambda, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) = \sum_{\lambda'} D_{\lambda'\lambda}^{(1)}(-\theta) \mathcal{M}(\lambda', \sigma, \bar{\sigma}; 0) \quad (24.82)$$

Le ampiezze non nulle per $\theta = 0$, tenendo conto della conservazione dell'elicità,

$$\lambda = \sigma - \bar{\sigma} \quad (24.83)$$

sono in generale quattro

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(0, \sigma, \bar{\sigma}; 0) &= \begin{pmatrix} a_{++} & 0 \\ 0 & a_{--} \end{pmatrix} \\ \mathcal{M}(1, \sigma, \bar{\sigma}; 0) &= \begin{pmatrix} 0 & a_{+-} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{M}(-1, \sigma, \bar{\sigma}; 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{-+} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (24.84)$$

Le ampiezze invarianti ad angolo θ dipendono quindi dalle quattro ampiezze a $\theta = 0$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(0, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) &= \begin{pmatrix} a_{++} \cos \theta & -\frac{a_{+-}}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ -\frac{a_{-+}}{\sqrt{2}} \sin \theta & a_{--} \cos \theta \end{pmatrix} \\ \mathcal{M}(1, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) &= \begin{pmatrix} \frac{a_{++}}{\sqrt{2}} \sin \theta & a_{+-} \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ -a_{-+} \sin^2 \frac{\theta}{2} & \frac{a_{--}}{\sqrt{2}} \sin \theta \end{pmatrix} \\ \mathcal{M}(-1, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) &= \begin{pmatrix} \frac{a_{++}}{\sqrt{2}} \sin \theta & -a_{+-} \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ a_{-+} \cos^2 \frac{\theta}{2} & \frac{a_{--}}{\sqrt{2}} \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (24.85)$$

24.5.2 Invarianza per P e C

Abbiamo già visto che nel sistema di riposo del V

$$\mathcal{P}_\mu^\nu \epsilon_\nu^V(p, \lambda) = -\epsilon_\mu^V(p, \lambda) \quad (24.86)$$

Corrispondentemente l'operatore di parità U_P agisce sullo stato di singola particella del campo vettore V , di impulso nullo e spin definito λ lungo z , secondo la

$$U_P^{-1} A_{0\lambda}^\dagger |0\rangle = -\eta_P a_{0\lambda}^\dagger |0\rangle \quad (24.87)$$

dove $A_{\bar{p}\lambda}$ è il distruttore di V e η_P la parità intrinseca di V .

Ricordando le (24.3), l'azione di P sugli spinori nel sistema di riposo del V , è

$$\gamma^0 u(k, \sigma) = -\sigma u(\bar{k}, -\sigma) \quad \gamma^0 v(\bar{k}, \bar{\sigma}) = \bar{\sigma} v(k, -\bar{\sigma}) \quad (24.88)$$

e corrispondentemente l'azione di U_P sugli stati di singola particella dei fermioni

$$\begin{aligned} U_P^{-1} a_{\bar{k},\sigma}^\dagger |0\rangle &= -\sigma \eta_F^* a_{-\bar{k},-\sigma}^\dagger |0\rangle \\ U_P^{-1} b_{-\bar{k},\bar{\sigma}}^\dagger |0\rangle &= \bar{\sigma} \eta_F b_{\bar{k},-\bar{\sigma}}^\dagger |0\rangle \end{aligned} \quad (24.89)$$

se $a_{\bar{k},\sigma}$ e $b_{-\bar{k},\bar{\sigma}}$ sono i distruttori dei fermioni F e \bar{F} con stati di elicità definiti e η_F la parità intrinseca del fermione.

In definitiva l'invarianza per parità dell'ampiezza (24.30) equivale all'identità

$$P : \quad \mathcal{M}(\lambda, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) = \sigma \bar{\sigma} \eta_P \mathcal{M}(\lambda, -\sigma, -\bar{\sigma}; \theta + \pi) \quad (24.90)$$

Usando ancora una volta il fatto che l'invarianza sotto una rotazione $R_y(\pi)$ collega le ampiezze a θ con quelle a $\theta + \pi$ ¹⁰

$$R_y(\pi) : \quad \mathcal{M}(\lambda, \sigma, \bar{\sigma}; \theta + \pi) = -\mathcal{M}(-\lambda, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) \quad (24.91)$$

otteniamo

$$P : \quad \mathcal{M}(\lambda, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) = -\sigma \bar{\sigma} \eta_P \mathcal{M}(-\lambda, -\sigma, -\bar{\sigma}; \theta) \quad (24.92)$$

Questa identità è equivalente alle relazioni tra ampiezze a $\theta = 0$

$$P : \quad a_{++} = -\eta_P a_{--} \quad a_{+-} = \eta_P a_{-+} \quad (24.93)$$

¹⁰Alternativamente, la (16.56) è equivalente alle relazioni $S(\mathcal{R}_y(\pi)) u(k, \sigma) = u(\bar{k}, \sigma)$ e $S(\mathcal{R}_y(\pi)) v(\bar{k}, \bar{\sigma}) = v(k, \bar{\sigma})$

L'ampiezza invariante per parità dipende quindi soltanto da 2 parametri indipendenti

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(0, \sigma, \bar{\sigma}; 0) &= \begin{pmatrix} a_{++} & 0 \\ 0 & -\eta_P a_{++} \end{pmatrix} \\
\mathcal{M}(1, \sigma, \bar{\sigma}; 0) &= \begin{pmatrix} 0 & a_{+-} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathcal{M}(-1, \sigma, \bar{\sigma}; 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \eta_P a_{+-} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{24.94}$$

L'operatore di coniugazione di carica C agisce sul vettore di polarizzazione del vettore neutro attraverso moltiplicazione per la sua parità di carica intrinseca

$$C : \quad (\epsilon_\mu^{(V)}(p, \lambda))^c = \eta_C \epsilon_\mu^{(V)}(p, \lambda) \tag{24.95}$$

C inoltre scambia la particella $\psi_{k, \sigma}$ con $\bar{\psi}_{\bar{k}, \bar{\sigma}}$ e quindi l'invarianza dell'interazione per U_C equivale a¹¹

$$C : \quad \mathcal{M}(\lambda, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) = \eta_C \mathcal{M}(\lambda, \bar{\sigma}, \sigma; \theta + \pi) \tag{24.96}$$

Usando l'invarianza sotto $R_y(\pi)$ questa identità si riscrive

$$C : \quad \mathcal{M}(\lambda, \sigma, \bar{\sigma}; \theta) = -\eta_C \mathcal{M}(-\lambda, \bar{\sigma}, \sigma; \theta) \tag{24.97}$$

In termini delle ampiezze a $\theta = 0$ le (24.97) equivalgono a

$$C : a_{\pm\pm} = -\eta_C a_{\pm\pm} \quad a_{+-} = -\eta_C a_{-+} \tag{24.98}$$

Quindi per $\eta_C = -1$, l'ampiezza dipende da 3 parametri

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(0, \sigma, \bar{\sigma}; 0) &= \begin{pmatrix} a_{++} & 0 \\ 0 & a_{--} \end{pmatrix} \\
\mathcal{M}(1, \sigma, \bar{\sigma}; 0) &= \begin{pmatrix} 0 & a_{+-} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathcal{M}(-1, \sigma, \bar{\sigma}; 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{+-} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{24.99}$$

¹¹Il segno meno che è prodotto nello stato finale dallo scambio di $a_{\vec{k}, \sigma}$ con $b_{-\vec{k}, \bar{\sigma}}$ è in questa formula incluso nel fattore η_C .

mentre per $\eta_C = 1$, l'ampiezza dipende da un solo parametro

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(0, \sigma, \bar{\sigma}; 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{M}(1, \sigma, \bar{\sigma}; 0) &= \begin{pmatrix} 0 & a_{+-} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{M}(-1, \sigma, \bar{\sigma}; 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a_{+-} & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (24.100)$$

24.5.3 Ampiezza invarianti

L'ampiezza pari per P dipende da due coefficienti c_1 e c_2

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\text{pari}}^{VF\bar{F}}(k, \bar{k}) &= \epsilon_\mu^V(p) \bar{u}(k, \sigma) J^\mu(k, \bar{k}) v(\bar{k}, \bar{\sigma}) = \\ &= \epsilon_\mu^V(p) \bar{u}(k, \sigma) [c_1 (k - \bar{k})^\mu + c_2 \gamma^\mu] v(\bar{k}, \bar{\sigma})\end{aligned}\quad (24.101)$$

mentre l' ampiezze dispari per P dipenda da altri due coefficienti c_3 e c_4 :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\text{dispari}}^{VF\bar{F}}(k, \bar{k}) &= \epsilon_\mu^V(p) \bar{u}(k, \sigma) [c_3 (k - \bar{k})^\mu \gamma_5 + \\ &+ c_4 \gamma^\mu \gamma_5] v(\bar{k}, \bar{\sigma})\end{aligned}\quad (24.102)$$

Lasciamo come esercizio verificare che

$$\begin{aligned}a_{++} &= i(M^2 - 4m^2) c_1 - 2im c_2 + iM \sqrt{M^2 - 4m^2} c_3 \\ a_{--} &= -i(M^2 - 4m^2) c_1 + 2im c_2 + iM \sqrt{M^2 - 4m^2} c_3 \\ a_{+-} &= -i\sqrt{2} M c_2 + i\sqrt{2} \sqrt{M^2 - 4m^2} c_4 \\ a_{-+} &= -i\sqrt{2} M c_2 - i\sqrt{2} \sqrt{M^2 - 4m^2} c_4\end{aligned}\quad (24.103)$$

in accordo con le regole (24.93) per inversione di parità. Per quanto riguarda C , la coniugazione di carica opera lo scambio (k, σ) con $(\bar{k}, \bar{\sigma})$ nell'ampiezze (24.101) e (24.102): gli accoppiamenti c_1, c_2 e c_3 hanno $C = -1$ mentre c_4 ha $C = +1$, in accordo con l'analisi della sezione precedente.¹²

¹²Abbiamo assegnato le parità di carica ai bilineari fermionici secondo la regola che abbiamo derivato in (21.29). Questo potrebbe sembrare scorretto, perché nel derivare la formula (21.29) abbiamo incluso un segno che teneva conto del fatto che stavamo considerando bilineari di operatori fermionici. Nell' analisi presente stiamo considerando vettori di polarizzazione spinoriali, ovvero quantità commutanti e quindi si potrebbe pensare che

25 Vettori di Polarizzazione

Indichiamo con $u(\vec{p}, \sigma)$ il vettore di polarizzazione di una particella di impulso \vec{p} e spin σ , le cui componenti sono $(u(\vec{p}, \sigma))_A = u_A(\vec{p}, \sigma)$, dove A è l'indice della rappresentazione finito dimensionale del gruppo delle trasformazioni omogenee di Lorentz che caratterizza il campo associato. Se Λ è trasformazione di Lorentz omogenea, sia $S(\Lambda)$ la matrice con elementi $(S(\Lambda))_{AB} \equiv S(\Lambda)_{AB}$ che rappresenta Λ nella rappresentazione in questione. Per esempio, per il vettore massivo, $A = \mu$ con $\mu = 0, 1, \dots, 3$ indice della rappresentazione vettoriale, mentre per il campo di Dirac $A = \alpha$ dove $\alpha = 1, \dots, 4$ è l'indice della rappresentazione $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$. Il campo relativistico $\hat{\psi}_A(x)$ si trasforma sotto una trasformazione di Lorentz Λ secondo la seguente

$$U(\Lambda) : \hat{\psi}_A(x) \rightarrow S(\Lambda)_{AB} \hat{\psi}_B(\Lambda^{-1} x) \quad (25.1)$$

Le funzioni d'onda di singola particella (a frequenza positiva) sono

$$\psi_A^{(\vec{p}, \sigma)}(x) = u_A(\vec{p}, \sigma) \frac{e^{-i p x}}{(2\pi)^{3/2} (2\omega_{\vec{p}})^{1/2}} \quad (25.2)$$

Gli stati di singola particella $|\vec{p}, \sigma\rangle$ si trasformano secondo la rappresentazione irriducibile del gruppo di Lorentz descritta da

$$U^{(1)}(\Lambda) |\vec{p}, \sigma\rangle = \left(\frac{\omega_{\Lambda \vec{p}}}{\omega_{\vec{p}}} \right)^{1/2} \sum_{\sigma'} D_{\sigma' \sigma}(W(\Lambda, \vec{p})) |\Lambda \vec{p}, \sigma'\rangle \quad (25.3)$$

non dovremmo includere alcun segno extra. Per esempio, il bilineare vettoriale

$$\bar{u}_1 \gamma^\mu v_2 \equiv \bar{u}(\theta, \sigma_1) \gamma^\mu v(\theta, \sigma_2) = \bar{v}_2^c \gamma^\mu u_1^c \quad (24.104)$$

non cambia di segno per la trasformazione di coniugazione di carica

$$u_1 \rightarrow v_2^c \equiv u_2 \quad v_2 \rightarrow u_1^c \equiv v_1 \quad (24.105)$$

D'altra parte per u_2 si intende lo spinore $u_2 = u_{-\vec{k}, \sigma_2} = u(\theta + \pi, \sigma_2)$ che descrive un fermione che si propaga lungo la direzione $\theta + \pi$. Coniugando questa relazione otteniamo $C u^*(\theta + \pi, \sigma_2) = v_2 = v(\theta, \sigma_2)$. Quindi $v_1 = C u^*(\theta, \sigma_1) = v(\theta - \pi, \sigma_1) = -v(\theta + \pi, \sigma_1)$, in quanto per gli spinori $v(\theta + 2\pi, \sigma) = -v(\theta, \sigma)$. In definitiva

$$\bar{u}_1 \gamma^\mu v_2 = \bar{u}(\theta, \sigma_1) \gamma^\mu v(\theta, \sigma_2) = \bar{v}_2^c \gamma^\mu u_1^c = -\bar{u}(\theta + \pi, \sigma_2) \gamma^\mu v(\theta + \pi, \sigma_1) \quad (24.106)$$

In altre parole poiché gli spinori cambiano di segno per una rotazione di 2π , compare un segno extra nella trasformazione sotto C dei bilineari dei vettori di polarizzazione identico a quello che compare nell'analisi della trasformazione dei bilineari di operatori, Eq. (21.29).

dove $D_{\sigma' \sigma}(W(\Lambda, \vec{p}))$ è la rappresentazione unitaria del piccolo gruppo che definisce la rappresentazione indotta $U^{(1)}(\Lambda)$. D'altra parte, Eq. (25.2) implica che

$$\begin{aligned}
U^{(1)}(\Lambda) : \psi_A^{(\vec{p}, \sigma)}(x) &\rightarrow S(\Lambda)_{AB} \psi_B^{(\vec{p}, \sigma)}(\Lambda^{-1} x) = \\
&= S(\Lambda)_{AB} u_B(\vec{p}, \sigma) \frac{e^{-i(\Lambda p) x}}{(2\pi)^{3/2} (2\omega_{\vec{p}})^{1/2}} = \\
&= S(\Lambda)_{AB} u_B(\vec{p}, \sigma) \frac{e^{-i(\Lambda p) x}}{(2\pi)^{3/2} (2\omega_{\Lambda^{-1}\vec{p}})^{1/2}} \left(\frac{\omega_{\Lambda\vec{p}}}{\omega_{\vec{p}}}\right)^{1/2} \quad (25.4)
\end{aligned}$$

Confrontando (25.4) con (25.3) otteniamo

$$S(\Lambda)_{AB} u_B(\vec{p}, \sigma) = \sum_{\sigma'} D_{\sigma' \sigma}(W(\Lambda, \vec{p})) u_A(\Lambda \vec{p}, \sigma') \quad (25.5)$$

In particolare, prendendo in questa equazione $\Lambda = L(p)$ e $p = \bar{p}$ dove \bar{p} è il momento di riferimento ($\bar{p} = (m, \vec{0})$ nel caso massivo) e $p = L(p) \bar{p}$, otteniamo

$$S(L(p))_{AB} u_B(\vec{p}_0, \sigma) = u_A(\vec{p}, \sigma) \quad (25.6)$$

che esprime il vettore di polarizzazione generico in termini del vettore di polarizzazione per il momento di riferimento.

25.1 Vettori di polarizzazione del campo di Dirac

25.1.1 Vettori di polarizzazione con spin definito nel sistema di riposo

Nel caso massivo una scelta conveniente di $L(p)$ è

$$L(p) = R(\hat{\vec{p}}) B_z(|\vec{p}|) R(\hat{\vec{p}})^{-1} \quad (25.7)$$

dove $R(\hat{\vec{p}})$ è una rotazione che porta \hat{z} in $\hat{\vec{p}} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$:

$$R(\hat{\vec{p}}) \hat{z} = \hat{\vec{p}} \quad (25.8)$$

mentre $B_z(|\vec{p}|)$ è un boost (trasformazione di Lorentz speciale) lungo l'asse \hat{z} , corrispondente ad una velocità $v = \frac{|\vec{p}|}{\omega_{\vec{p}}}$.

Una scelta usuale per i vettori di polarizzazione $u_A(\vec{p}_0, \sigma)$ è quella di prenderli autostati del momento angolare J_z lungo l'asse delle z : nella rappresentazione (detta *spinoriale*) delle matrici gamma in cui

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (25.9)$$

il momento angolare è rappresentato dalla matrice

$$J_z = \frac{i}{4} [\gamma^1, \gamma^2] = 1/2 \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (25.10)$$

Pertanto i vettori $u_A(\vec{p}_0, \sigma)$, che soddisfano l'equazione di Dirac per $p^\mu = (m, \vec{0})$,

$$(\gamma^0 - m) u(\vec{p}_0, \sigma) = 0 \quad (25.11)$$

sono

$$u_A(\vec{p}_0, \sigma) = \sqrt{m} (w_\sigma, w_\sigma) \quad (25.12)$$

dove w_σ , $\sigma = \pm$ sono gli autovettori a due componenti di σ_3 con autovalore ± 1 :

$$w_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (25.13)$$

La normalizzazione di (25.12) è stata scelta in modo che

$$\bar{u}(\vec{p}_0, \sigma) \gamma^0 u(\vec{p}_0, \sigma) = 2m \quad (25.14)$$

Sia

$$\vec{p} = |\vec{p}| (\sin \theta, 0, \cos \theta) \quad (25.15)$$

Allora

$$R(\hat{p}) = R_y(\theta) = e^{-i\theta J_y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (25.16)$$

dove J_y è il generatore delle rotazione lungo \hat{y} nella rappresentazione vettoriale, mentre

$$B_z(|\vec{p}|) = e^{i\vartheta_p K_z} = \begin{pmatrix} \cosh \vartheta_p & 0 & 0 & \sinh \vartheta_p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \vartheta_p & 0 & 0 & \cosh \vartheta_p \end{pmatrix} \quad (25.17)$$

dove

$$\tanh \vartheta_p = v = \frac{|p|}{\omega_p} \quad (25.18)$$

e K_z è il generatore dei boost lungo \hat{z} nella rappresentazione vettoriale.

La matrice che implementa la rotazione $R(\hat{p})$ sugli spinori di Dirac, con la scelta (25.9) delle matrici gamma, è

$$S(R(\hat{p})) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\theta\sigma_2} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}\theta\sigma_2} \end{pmatrix} \quad (25.19)$$

mentre quella che implementa il boost $B_z(|\vec{p}|)$ è

$$S(B_z(|\vec{p}|)) = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\vartheta_p\sigma_3} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}\vartheta_p\sigma_3} \end{pmatrix} \quad (25.20)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} u(\vec{p}, \sigma) &= S(L(p)) u(\vec{p}_0, \sigma) = \\ &= S(R(\hat{p})) S(B_z(|\vec{p}|)) S^{-1}(R(\hat{p})) u(\vec{p}_0, \sigma) = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\theta\sigma_2} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}\theta\sigma_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\vartheta_p\sigma_3} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}\vartheta_p\sigma_3} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_2} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{m} w_\sigma \\ \sqrt{m} w_\sigma \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\theta\sigma_2} e^{\frac{1}{2}\vartheta_p\sigma_3} e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_2}, & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}\theta\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\vartheta_p\sigma_3} e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{m} w_\sigma \\ \sqrt{m} w_\sigma \end{pmatrix} = \\ &= \sqrt{m} \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\theta\sigma_2} e^{\frac{1}{2}\vartheta_p\sigma_3} e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_2} w_\sigma \\ e^{-\frac{i}{2}\theta\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\vartheta_p\sigma_3} e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_2} w_\sigma \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (25.21)$$

Tenendo conto che

$$e^{-\frac{i}{2}\theta\sigma_2} \sigma_3 e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_2} = \cos \theta \sigma_3 + \sin \theta \sigma_1 \quad (25.22)$$

abbiamo

$$\begin{aligned} e^{-\frac{i}{2}\theta\sigma_2} e^{\frac{1}{2}\vartheta_p\sigma_3} e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_2} &= \\ &= e^{-\frac{i}{2}\theta\sigma_2} \left(\cosh \frac{\vartheta_p}{2} + \sigma_3 \sinh \frac{\vartheta_p}{2} \right) e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_2} \\ &= \cosh \frac{\vartheta_p}{2} + \sinh \frac{\vartheta_p}{2} (\cos \theta \sigma_3 + \sin \theta \sigma_1) \end{aligned} \quad (25.23)$$

In conclusione i vettori di polarizzazione nella rappresentazione spinoriale (25.9) delle matrici di Dirac si scrivono

$$\begin{aligned}
u(\vec{p}, \sigma) &= \sqrt{m} \begin{pmatrix} [\cosh \frac{\vartheta_p}{2} + \sinh \frac{\vartheta_p}{2} (\cos \theta \sigma_3 + \sin \theta \sigma_1)] w_\sigma \\ [\cosh \frac{\vartheta_p}{2} - \sinh \frac{\vartheta_p}{2} (\cos \theta \sigma_3 + \sin \theta \sigma_1)] w_\sigma \end{pmatrix} = \\
&= \sqrt{m} \begin{pmatrix} [\cosh \frac{\vartheta_p}{2} + \sinh \frac{\vartheta_p}{2} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \vec{\sigma}] w_\sigma \\ [\cosh \frac{\vartheta_p}{2} - \sinh \frac{\vartheta_p}{2} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \vec{\sigma}] w_\sigma \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} [\sqrt{\omega_{\vec{p}} + m} + \sqrt{\omega_{\vec{p}} - m} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \vec{\sigma}] w_\sigma \\ [\sqrt{\omega_{\vec{p}} + m} - \sqrt{\omega_{\vec{p}} - m} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \vec{\sigma}] w_\sigma \end{pmatrix} \quad (25.24)
\end{aligned}$$

Da questo deduciamo che

$$\begin{aligned}
v(\vec{p}, \sigma) &= \gamma^2 u^*(\vec{p}, \sigma) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} -\sigma_2 [\cosh \frac{\vartheta_p}{2} - \sinh \frac{\vartheta_p}{2} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \vec{\sigma}] w_\sigma \\ \sigma_2 [\cosh \frac{\vartheta_p}{2} + \sinh \frac{\vartheta_p}{2} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \vec{\sigma}] w_\sigma \end{pmatrix} = \\
&= \sqrt{m} \begin{pmatrix} -[\cosh \frac{\vartheta_p}{2} + \sinh \frac{\vartheta_p}{2} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \vec{\sigma}] \sigma_2 w_\sigma \\ [\cosh \frac{\vartheta_p}{2} - \sinh \frac{\vartheta_p}{2} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \vec{\sigma}] \sigma_2 w_\sigma \end{pmatrix} = \\
&= (2\sigma) i \sqrt{m} \begin{pmatrix} -[\cosh \frac{\vartheta_p}{2} + \sinh \frac{\vartheta_p}{2} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \vec{\sigma}] w_{-\sigma} \\ [\cosh \frac{\vartheta_p}{2} - \sinh \frac{\vartheta_p}{2} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \vec{\sigma}] w_{-\sigma} \end{pmatrix} = \\
&= (2\sigma) i \gamma^5 u(\vec{p}, -\sigma) \quad (25.25)
\end{aligned}$$

Esercizio: Si verifichi che il vettore di polarizzazione (25.24) soddisfa l'equazione di Dirac, $(p^\mu \gamma_\mu - m) u(p, \sigma) = 0$

Esercizio: Si determinino i vettori di polarizzazione $u(\vec{p}, \sigma)$ nella rappresentazione standard. (*Soluzione:* $u(\vec{p}, \sigma) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \cosh \frac{\vartheta_p}{2} w_\sigma \\ \sinh \frac{\vartheta_p}{2} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \vec{\sigma} w_\sigma \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\omega_{\vec{p}} + m} w_\sigma \\ \sqrt{\omega_{\vec{p}} - m} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \vec{\sigma} w_\sigma \end{pmatrix}).$$

25.1.2 Vettori di polarizzazione con elicità definita

Sia $R_{\hat{p}}(\phi)$ una rotazione lungo l'asse \hat{p} . Si ricordi che la scelta (25.7) per $L(p)$ implica che $W(\mathcal{R}, p) = \mathcal{R}$ se \mathcal{R} è una rotazione. Pertanto, prendendo $\Lambda = R_{\hat{p}}(\phi)$ nella (25.5), otteniamo

$$S(R_{\hat{p}}(\phi)) u(\vec{p}, \sigma) = \sum_{\sigma'} D_{\sigma, \sigma'}(R_{\hat{p}}(\phi)) u(\vec{p}, \sigma') \quad (25.26)$$

È possibile dunque scegliere i vettori di polarizzazione come autovettori delle rotazioni lungo l'asse \vec{p} : denotiamo questi vettori — detti di elicità definita — con $\tilde{u}(\vec{p}, \sigma)$. Avremo:

$$\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \vec{J}^D \tilde{u}(\vec{p}, \sigma) = \frac{1}{2} \sigma \tilde{u}(\vec{p}, \sigma) \quad (25.27)$$

dove \vec{J}^D è il generatore delle rotazioni nella rappresentazione degli spinori di Dirac. Poiché

$$e^{-i\theta J_y} J_z e^{i\theta J_y} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \vec{J} \quad (25.28)$$

la (25.27) diventa

$$J_z^D \left[e^{i\theta J_y^D} \tilde{u}(\vec{p}, \sigma) \right] = \frac{1}{2} \sigma \left[e^{i\theta J_y^D} \tilde{u}(\vec{p}, \sigma) \right] \quad (25.29)$$

Nella rappresentazione spinoriale J_z^D è dato dalla (25.10), e pertanto

$$\begin{pmatrix} \alpha_{p,\sigma} w_\sigma \\ \beta_{p,\sigma} w_\sigma \end{pmatrix} = e^{i\theta J_y^D} \tilde{u}(\vec{p}, \sigma) \quad (25.30)$$

dove $\alpha_{p,\sigma}$ e $\beta_{p,\sigma}$ sono determinati dalla condizione che il membro di sinistra della (25.30) soddisfi l'equazione di Dirac:

$$\frac{\alpha_{p,\sigma}}{\beta_{p,\sigma}} = \frac{\omega_p + \sigma |\vec{p}|}{m} \quad (25.31)$$

Scegliendo la normalizzazione

$$\tilde{u}(\vec{p}, \sigma) \gamma^0 \tilde{u}(\vec{p}, \sigma) = 2\omega_p \quad (25.32)$$

otteniamo

$$\alpha_{p,\sigma} = \sqrt{\omega + \sigma |\vec{p}|} \quad \beta_{p,\sigma} = \sqrt{\omega - \sigma |\vec{p}|} \quad (25.33)$$

In conclusione:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\vec{p}, \sigma) &= e^{-i\theta J_y^D} \begin{pmatrix} \alpha_{p,\sigma} w_\sigma \\ \beta_{p,\sigma} w_\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\theta\sigma_2} \alpha_{p,\sigma} w_\sigma \\ e^{-\frac{i}{2}\theta\sigma_2} \beta_{p,\sigma} w_\sigma \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} [\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \sigma_2] \alpha_{p,\sigma} w_\sigma \\ [\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \sigma_2] \beta_{p,\sigma} w_\sigma \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (25.34)$$

Ripetiamo lo stesso calcolo nel caso della rappresentazione standard delle matrici gamma:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (25.35)$$

Il momento angolare è rappresentato dalle stesse matrici della rappresentazione spinoriale

$$\vec{J}^D = 1/2 \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (25.36)$$

Pertanto $\tilde{u}(\vec{p}, \sigma)$ nella rappresentazione standard è dato da una formula identica in forma alla (25.34)

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\vec{p}, \sigma) &= e^{-i\theta J_y^D} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{p,\sigma} w_\sigma \\ \tilde{\beta}_{p,\sigma} w_\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\theta\sigma_2} \tilde{\alpha}_{p,\sigma} w_\sigma \\ e^{-\frac{i}{2}\theta\sigma_2} \tilde{\beta}_{p,\sigma} w_\sigma \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{p,\sigma} [\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \sigma_2] w_\sigma \\ \tilde{\beta}_{p,\sigma} [\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \sigma_2] w_\sigma \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (25.37)$$

dove i fattori $\tilde{\alpha}_{p,\sigma}$ e $\tilde{\beta}_{p,\sigma}$ sono però determinati dall'equazione di Dirac per $\tilde{u}(\vec{p}, \sigma)$ nella rappresentazione standard:

$$\tilde{\alpha}_{p,\sigma} (\omega_p - m) = \beta'_{p,\sigma} |\vec{p}| \sigma \quad (25.38)$$

Scegliendo ancora la normalizzazione (25.32) otteniamo

$$\tilde{\alpha}_{p,\sigma} = \sqrt{\omega_p + m} \quad \tilde{\beta}_{p,\sigma} = \sigma \sqrt{\omega_p - m} \quad (25.39)$$

Dalla (25.37) ricaviamo la soluzione generale dell'equazione di Dirac nella rappresentazione standard, parametrizzata da uno spinore tridimensionale w generico:

$$\tilde{u}(\vec{p}, \sigma) = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_{\vec{p}} + m} w \\ \sqrt{\omega_{\vec{p}} - m} \hat{p} \cdot \vec{\sigma} w \end{pmatrix} \quad (25.40)$$

in accordo con la soluzione dell'ultimo Esercizio nella sottosezione precedente.

25.2 Derivazione alternativa di $S(P)$.

Una derivazione (à la Weinberg) della matrice $S(P)$, più complicata di quella data nella sezione 20, che non fa uso dell'equazione relativistica ma parte dalla forma esplicita dei vettori di polarizzazione, è la seguente.

Prendiamo come vettori di polarizzazione quelli di spin definito nel sistema di riposo:

$$u(\vec{p}, \sigma) = S(L(p)) u(0, \sigma) \quad (25.41)$$

Sostituendo questa relazione in quella che definisce l'azione della parità sui vettori di polarizzazione otteniamo l'equazione

$$S(P) S(L(p)) u(0, \sigma) = \eta_P S(L(\mathcal{P}p)) u(0, \sigma) \quad (25.42)$$

od, equivalentemente

$$S(P) \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\theta\sigma_2} e^{\frac{1}{2}\vartheta_p\sigma_3} e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_2} w_\sigma \\ e^{-\frac{i}{2}\theta\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\vartheta_p\sigma_3} e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_2} w_\sigma \end{pmatrix} = \eta_P \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}(\theta+\pi)\sigma_2} e^{\frac{1}{2}\vartheta_p\sigma_3} e^{\frac{i}{2}(\theta+\pi)\sigma_2} w_\sigma \\ e^{-\frac{i}{2}(\theta+\pi)\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\vartheta_p\sigma_3} e^{\frac{i}{2}(\theta+\pi)\sigma_2} w_\sigma \end{pmatrix} \quad (25.43)$$

Tenendo conto che

$$e^{-\frac{i}{2}\pi\sigma_2} = -i\sigma_2 \quad (25.44)$$

e

$$\sigma_2\sigma_3\sigma_2 = -\sigma_3 \quad (25.45)$$

deduciamo che

$$\begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}(\theta+\pi)\sigma_2} e^{\frac{1}{2}\vartheta_p\sigma_3} e^{\frac{i}{2}(\theta+\pi)\sigma_2} w_\sigma \\ e^{-\frac{i}{2}(\theta+\pi)\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\vartheta_p\sigma_3} e^{\frac{i}{2}(\theta+\pi)\sigma_2} w_\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\theta\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\vartheta_p\sigma_3} e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_2} w_\sigma \\ e^{-\frac{i}{2}\theta\sigma_2} e^{\frac{1}{2}\vartheta_p\sigma_3} e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_2} w_\sigma \end{pmatrix} \quad (25.46)$$

Eq. (25.43) implica pertanto che

$$S(P) = \eta_P \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} = \eta_P \gamma^0 \quad (25.47)$$

in accordo con (20.4).

26 Matrici densità

Introduciamo le quantità

$$N_{AB}^{(+)}(\vec{p}) \equiv \sum_{\sigma} u_A(\vec{p}, \sigma) u_B^*(\vec{p}, \sigma) \quad N_{AB}^{(-)}(\vec{p}) \equiv \sum_{\sigma} v_A(\vec{p}, \sigma) v_B^*(\vec{p}, \sigma) \quad (26.1)$$

dove $u_A(\vec{p}, \sigma)$ e $v_A(\vec{p}, \sigma)$ sono i vettori di polarizzazione associati, rispettivamente, alle soluzioni a frequenza positiva e negativa:

$$\psi_A^{(\vec{p}, \sigma)^{+}}(x) = \frac{u_A(\vec{p}, \sigma)}{(2\pi)^{3/2} (2\omega_p)^{1/2}} e^{-ipx} \quad \psi_A^{(\vec{p}, \sigma)^{-}}(x) = \frac{v_A(\vec{p}, \sigma)}{(2\pi)^{3/2} (2\omega_p)^{1/2}} e^{ipx} \quad (26.2)$$

Denotiamo con $K_{AB}(p)$ (dove p è il quadrivettore $p = (p^0, \vec{p})$) la trasformata di Fourier dell'operatore d'onda: i vettori di polarizzazione soddisfano allora alle equazioni lineari

$$\sum_B K_{AB}(p) u_B(\vec{p}, \sigma)|_{p^0=\omega_p} = \sum_B K_{AB}(-p) v_B(\vec{p}, \sigma)|_{p^0=\omega_p} = 0 \quad (26.3)$$

Le matrici densità (26.1) soddisfano pertanto le relazioni

$$\begin{aligned} \sum_B K_{AB}(p) N_{BC}^{(+)}(\vec{p})|_{p^0=\omega_p} &= \sum_B N_{AB}^{(+)}(\vec{p}) K_{CB}^*(p)|_{p^0=\omega_p} = 0 \\ \sum_B K_{AB}(-p) N_{BC}^{(-)}(\vec{p})|_{p^0=\omega_p} &= \sum_B N_{AB}^{(-)}(\vec{p}) K_{CB}^*(-p)|_{p^0=\omega_p} = 0 \end{aligned} \quad (26.4)$$

Le condizioni di normalizzazione sulle funzioni d'onda (26.2)

$$\begin{aligned} \langle \psi^{(\vec{p}, \sigma)^{(+)}}, \psi^{(\vec{p}', \sigma')^{(+)}} \rangle &= \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\sigma, \sigma'} \\ \langle \psi^{(\vec{p}, \sigma)^{-}}, \psi^{(\vec{p}', \sigma')^{-}} \rangle &= -(-1)^F \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\sigma, \sigma'}, \end{aligned} \quad (26.5)$$

dove $(-1)^F = +1$ ($(-1)^F = -1$) per spin interi (semi-interi), determinano delle condizioni di normalizzazione per i vettori di polarizzazione. Per i campi con spin intero

$$\sum_{A,B} u_A^* M^{AB} u_B = \sum_{A,B} v_A^* M^{AB} v_B = 1 \quad (26.6)$$

mentre per i campi con spin semi-intero

$$\sum_{A,B} u_A^* M^{AB} u_B = \sum_{A,B} v_A^* M^{AB} v_B = 2\omega_p \quad (26.7)$$

dove M^{AB} è una matrice che rende le (26.6- 26.7) invarianti (o covarianti) di Lorentz. Per esempio, nel caso del campo vettoriale massivo, indicando con $\epsilon_\mu(\vec{p}, \sigma)$ i vettori di polarizzazione delle soluzioni a frequenza positiva e con $\epsilon_\mu^*(\vec{p}, \sigma)$ quelli delle soluzioni a frequenza negativa, la (26.6) diventa

$$\epsilon_\mu^*(-g^{\mu\nu}) \epsilon_\nu = 1 \quad (26.8)$$

cioè la M^{AB} deve essere identificata con la matrice $g^{\mu\nu}$. Per il campo di Dirac invece abbiamo

$$\sum_\alpha u_\alpha^* u_\alpha = \sum_\alpha v_\alpha^* v_\alpha = 2\omega_p \quad (26.9)$$

cioè $M^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$ (per cui ambo i membri dell'equazione (26.9) si trasformano come la componente temporale di un vettore).

Le condizioni di normalizzazione (26.6-26.7) per i vettori di polarizzazione implicano delle condizioni analoghe per le matrici densità

$$\sum_{A,B} N_{AB}^{(\pm)} M^{BA} = (2J + 1) \quad (26.10)$$

per particelle (massive) con spin J intero, e

$$\sum_{A,B} N_{AB}^{(\pm)} M^{BA} = 2\omega_p(2J + 1) \quad (26.11)$$

per particelle (massive) con spin J semi-intero.

Le relazioni (26.4) insieme alle condizioni di normalizzazione (26.6-26.7) implicano

$$\begin{aligned} \sum_B K_{AB}(\pm p) N_{BC}^{(\pm)}(\vec{p}) &= A_{\pm} (p^2 - m^2) \eta_{AC} \\ \sum_B N_{CB}^{(\pm)}(\vec{p}) K^{*AB}(\pm p) &= A_{\pm}^* (p^2 - m^2) \eta_{CA} \end{aligned} \quad (26.12)$$

dove η_{AC} è il tensore che si trasforma sotto trasformazioni di Lorentz come il prodotto tensore della rappresentazione $S(\Lambda)_{AB}$ associata all'indice A e della sua complessa coniugata. Queste equazioni implicano che le matrici densità $N_{AB}^{(\pm)}$ sono (essenzialmente) proporzionali alle matrici inverse degli operatori d'onda K_{AB} : la costante di normalizzazione A_{\pm} può essere determinata tenendo conto delle (26.10-26.11).

26.1 Matrici densità per vettori massivi

In questo caso l'operatore d'onda è

$$K_{\mu\nu}(p) = (p^2 - m^2) g_{\mu\nu} - p_{\mu} p_{\nu} \quad (26.13)$$

Sia $\mathcal{N}_{\mu\nu}^{(\pm)}(p)$ un tensore, funzione del *quadri-impulso* p^{μ} che, quando ristretto a $p^0 = \omega_p$, coincide con la matrice densità $N_{\mu\nu}^{(\pm)}(\vec{p})$:

$$\mathcal{N}_{\mu\nu}^{(\pm)}(p)|_{p^0=\omega_p} = N_{\mu\nu}^{(\pm)}(\vec{p}) \quad (26.14)$$

È chiaro che $\mathcal{N}^{(\pm)}(p)$ è determinata dalla condizione (26.14) solo *a meno di termini proporzionali a $p^2 - m^2$* . Cerchiamo un $\mathcal{N}^{(\pm)}(p)$ che soddisfi (26.12):

$$\mathcal{N}_{\mu\nu}^{(\pm)}(p) = A \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right) \quad (26.15)$$

La condizione (26.10) implica

$$A = -1 \quad (26.16)$$

per cui

$$\mathcal{N}_{\mu\nu}^{(\pm)}(p) = \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} - g_{\mu\nu} \quad (26.17)$$

Esercizio: Verificare la (26.17) partendo dalle espressioni esplicite per i vettori di polarizzazione $\epsilon_\mu(\vec{p}, \sigma)$.

26.2 Matrici densità per il campo di Dirac

In questo caso l'operatore d'onda è

$$K_{\alpha\beta}(p) = (\hat{p} - m)_{\alpha\beta} \quad (26.18)$$

Sia $\mathcal{N}_{\alpha\beta}^{(\pm)}(p)$ un tensore, funzione del *quadri-impulso* p^μ che, quando ristretto a $p^0 = \omega_p$, coincida con la matrice densità $N_{\alpha\beta}^{(\pm)}(\vec{p})$:

$$\mathcal{N}_{\alpha\beta}^{(\pm)}(p)_{\alpha\beta}|_{p^0=\omega_p} = N_{\alpha\beta}^{(\pm)}(\vec{p}) \quad (26.19)$$

È chiaro che $\mathcal{N}^{(\pm)}(p)$ è determinata dalla condizione (26.19) solo *a meno di termini proporzionali a $p^2 - m^2$* .

Cerchiamo un $\mathcal{N}_{\alpha\beta}^{(\pm)}(p)$ che soddisfi (26.12). Si noti che in questo caso le matrici densità $N_{AB}^{(\pm)}(p)$ si trasforma per trasformazioni di Lorentz secondo la

$$N^{(\pm)}(p) \rightarrow S(\Lambda) N^{(\pm)}(p) S^\dagger(\Lambda) \quad (26.20)$$

Questo implica che il tensore η_{AC} nelle (26.12) non è una semplice delta di Kronecker. D'altra parte dalla (26.20) deduciamo

$$N^{(\pm)}(p)\gamma^0 \rightarrow S(\Lambda) N^{(\pm)}(p) \gamma^0 S^{-1}(\Lambda) \quad (26.21)$$

Quindi le relazioni (26.12) si riscrivono

$$\begin{aligned} K(\pm p) \mathcal{N}^{(\pm)}(\vec{p}) \gamma^0 &= A_{\pm} (p^2 - m^2) \mathbf{1} \\ \mathcal{N}^{(\pm)}(\vec{p}) \gamma^0 K^{*AB}(\pm p) &= A_{\pm}^* (p^2 - m^2) \mathbf{1} \end{aligned} \quad (26.22)$$

la cui soluzione ha la forma

$$(\mathcal{N}^{(\pm)}(\pm p) \gamma^0)_{\alpha\beta} = A_{\pm} (\hat{p} + m)_{\alpha\beta} \quad (26.23)$$

La condizione (26.10) implica¹³

$$\text{Tr} \mathcal{N}^{(\pm)}(p) = \text{Tr} (\mathcal{N}^{(\pm)}(p) \gamma^0) \gamma^0 = A_{\pm} 4 (\pm \omega_{\vec{p}}) = 2 \omega_{\vec{p}} \times 2 \quad (26.24)$$

ovvero

$$A_{\pm} = \pm 1 \quad (26.25)$$

per cui

$$(\mathcal{N}^{(\pm)}(p) \gamma^0)_{\alpha\beta} = \sum_{\sigma} u^{(\pm)}(\vec{p}, \sigma) \bar{u}^{(\pm)}(\vec{p}, \sigma) = \hat{p} \pm m \quad (26.26)$$

Esercizio: Verificare la (26.26) partendo dalle espressioni esplicite per i vettori di polarizzazione $u(\vec{p}, \sigma)$ e $v(\vec{p}, \sigma)$.

27 Causalità

Supponiamo di definire gli operatori di campo prendendo una combinazione lineare arbitraria delle parti a frequenza positiva e negativa:

$$\phi_A(x) = \alpha \phi_A^{(+)}(x) + \beta \phi_A^{(-)}(x) \quad (27.1)$$

dove A è l'indice di una rappresentazione di Lorentz generica. Allora

$$\begin{aligned} [\phi_A(x), \phi_B^{\dagger}(x')]_{\mp} &= |\alpha|^2 \sum_{\vec{p}} \frac{N_{AB}^{(+)}(p)}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{p}}} e^{-ip(x-x')} + \\ &\mp |\beta|^2 \sum_{\vec{p}} \frac{N_{AB}^{(-)}(p)}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{p}}} e^{ip(x-x')} \end{aligned} \quad (27.2)$$

¹³Equivalentemente, da $\bar{u}^{(\pm)}(\vec{p}, \sigma) u^{(\pm)}(\vec{p}, \sigma) = \pm 2m$, otteniamo $\text{Tr} (\mathcal{N}^{(\pm)}(p) \gamma^0) = \pm 2m \times 2 = A_{\pm} 4m$.

dove

$$N_{AB}^{(\pm)}(p) = \sum_{\sigma} u_A^{(\pm)}(p) (u^{(\pm)})_B^*(p) \quad (27.3)$$

e denotiamo con p il quadrivettore $(\omega_{\vec{p}}, \vec{p})$. Siano $\mathcal{N}_{AB}^{(\pm)}(p)$ le matrici funzioni polinomiali covarianti del quadri-momento p che, ristrette sul mass-shell, coincidono con le matrici densità (27.3). Le (27.3) si riscrivono

$$\begin{aligned} [\phi_A(x), \phi_B^\dagger(x')]_{\mp} &= |\alpha|^2 \mathcal{N}_{AB}^{(+)}(i \partial_\mu) \Delta_+(x - x') + \\ &\mp |\beta|^2 \mathcal{N}_{AB}^{(-)}(i \partial_\mu) \Delta_+(x' - x) \end{aligned} \quad (27.4)$$

dove

$$\Delta_+(x) \equiv \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{p}}} e^{-ipx} \quad (27.5)$$

Osserviamo che $\Delta_+(x)$ è invariante per trasformazioni di Lorentz omogenee ortocrone. Pertanto se $x^2 < 0$

$$\Delta_+(-x) = \Delta_+(x) \quad x^2 < 0 \quad (27.6)$$

Infatti, i punti x e $-x$, se $x^2 < 0$, appartengono alla stessa orbita del gruppo di Lorentz omogeneo ortocrono, ovvero allo stesso foglio $x^2 = -C^2$ con C costante. Inoltre abbiamo visto nelle sezioni precedenti, che l'invarianza di Lorentz implica che

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{AB}^{(+)}(+p) &= \mathcal{N}_{AB}^{(-)}(-p) && \text{per spin interi} \\ \mathcal{N}_{AB}^{(+)}(+p) &= -\mathcal{N}_{AB}^{(-)}(-p) && \text{per spin seminteri} \end{aligned} \quad (27.7)$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{AB}^{(+)}(i \partial_\mu) \Delta_+(x) &= \mathcal{N}_{AB}^{(-)}(i \partial_\mu) \Delta_+(-x) \quad x^2 < 0 && \text{per spin interi} \\ \mathcal{N}_{AB}^{(+)}(i \partial_\mu) \Delta_+(x) &= -\mathcal{N}_{AB}^{(-)}(i \partial_\mu) \Delta_+(-x) \quad x^2 < 0 && \text{per spin seminteri} \end{aligned} \quad (27.8)$$

Pertanto la richiesta di causalità

$$[\phi_A(x), \phi_B^\dagger(x')]_{\mp}|_{(x-x')^2 < 0} = 0 \quad (27.9)$$

seleziona i commutatori per gli spin interi e gli anti-commutatori per quelli semi-interi. Inoltre impone di sommare la parte a frequenza positiva e quella a frequenza negativa con lo stesso peso:

$$|\alpha|^2 = |\beta|^2 \quad (27.10)$$

Con queste scelte (e scegliendo $\alpha = \beta = 1$) otteniamo per il commutatore di due campi per x ed x' arbitrari l'espressione

$$[\phi_A(x), \phi_B^\dagger(x')]_{\mp} = \sum_{\vec{p}} \frac{N_{AB}^{(+)}(p)}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{p}}} \left[e^{-ip(x-x')} - e^{ip(x-x')} \right] \quad (27.11)$$

28 Propagatori

Definiamo il propagatore per un campo $\psi_A(x)$ secondo la seguente formula:

$$\begin{aligned} -i \Delta_{AB}(x, x') &\equiv -i \Delta_{AB}(x - x') = \langle 0 | T(\psi_A(x) \psi_B^\dagger(x') | 0 \rangle = \\ &= \theta(x^0 - x'^0) [\psi_A^{(+)}(x), \psi_B^{(+)\dagger}(x')] + \\ &\quad \pm \theta(x'^0 - x^0) [\psi_B^{(-)\dagger}(x'), \psi_A^{(-)}(x)] = \\ &= \theta(x^0 - x'^0) \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p} e^{-ip(x-x')} u_A(\vec{p}, \sigma) u_B^*(\vec{p}, \sigma) + \\ &\quad \pm \theta(x'^0 - x^0) \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p} e^{ip(x-x')} v_A(\vec{p}, \sigma) v_B^*(\vec{p}, \sigma) \end{aligned} \quad (28.1)$$

dove $\psi_A^{(\pm)}$ sono le componenti a frequenza positiva e negative del campo $\psi_A(x)$

$$\psi_A(x) = \psi_A^{(+)}(x) + \psi_A^{(-)}(x), \quad (28.2)$$

$u_A(\vec{p}, \sigma)$ ($v_A(\vec{p}, \sigma)$) sono i vettori di polarizzazione delle soluzioni a frequenza positiva (negativa) e il segno superiore (inferiore) corrisponde a campi bosonici (fermionici). Facciamo uso della rappresentazione integrale della funzione teta:

$$\theta(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{e^{-ist}}{s + i\epsilon} \quad (28.3)$$

con $\epsilon > 0$. Eq.(28.1) diventa

$$-i \Delta_{AB}(x) = \int \frac{d^3 \vec{p} dp^0}{2\omega_p (p^0 + i\epsilon)} \left[e^{-i((p^0 + \omega_p)t - \vec{p} \cdot \vec{x})} \sum_{\sigma} u_A(\vec{p}, \sigma) u_B^*(\vec{p}, \sigma) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \pm e^{i(p^0 + \omega_p)t - \vec{p} \cdot \vec{x}} \sum_{\sigma} v_A(\vec{p}, \sigma) v_B^*(\vec{p}, \sigma) \Big] = \\
& = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^3 \vec{p} dp^0}{2\omega_p (p^0 - \omega_p + i\epsilon)} \left[e^{-i(p^0 t - \vec{p} \cdot \vec{x})} \sum_{\sigma} u_A(\vec{p}, \sigma) u_B^*(\vec{p}, \sigma) + \right. \\
& \quad \left. \pm e^{i(p^0 t - \vec{p} \cdot \vec{x})} \sum_{\sigma} v_A(\vec{p}, \sigma) v_B^*(\vec{p}, \sigma) \right] = \\
& = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{2\omega_p} \left[\frac{e^{-ipx}}{(p^0 - \omega_p + i\epsilon)} \sum_{\sigma} u_A(\vec{p}, \sigma) u_B^*(\vec{p}, \sigma) + \right. \\
& \quad \left. \pm \frac{e^{ipx}}{(p^0 - \omega_p + i\epsilon)} \sum_{\sigma} v_A(\vec{p}, \sigma) v_B^*(\vec{p}, \sigma) \right] = \\
& = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p e^{-ipx}}{2\omega_p} \left[\frac{1}{(p^0 - \omega_p + i\epsilon)} \sum_{\sigma} u_A(\vec{p}, \sigma) u_B^*(\vec{p}, \sigma) + \right. \\
& \quad \left. \pm \frac{1}{(-p^0 - \omega_p + i\epsilon)} \sum_{\sigma} v_A(-\vec{p}, \sigma) v_B^*(-\vec{p}, \sigma) \right] = \\
& = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left[\frac{p^0}{\omega_p} \frac{(N_{AB}^{(+)}(\vec{p}) \mp N_{AB}^{(-)}(-\vec{p}))}{2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{(N_{AB}^{(+)}(\vec{p}) \pm N_{AB}^{(-)}(-\vec{p}))}{2} \right] \equiv \\
& \equiv \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} P_{AB}(p) \tag{28.4}
\end{aligned}$$

dove abbiamo definito la funzione del quadri-impulso p^μ

$$P_{AB}(p) = \left[\frac{p^0}{\omega_p} \frac{(N_{AB}^{(+)}(\vec{p}) \mp N_{AB}^{(-)}(-\vec{p}))}{2} + \frac{(N_{AB}^{(+)}(\vec{p}) \pm N_{AB}^{(-)}(-\vec{p}))}{2} \right] \tag{28.5}$$

La differenza tra due propagatori definiti da integrali di contorno che differiscono per il modo di aggirare una singolarità nel piano p^0 data da $p^0 = \pm\omega_{\vec{p}}$ è un integrale di contorno nel piano complesso p^0 . Prendendo, per esemplificare, il caso del propagatore scalare, abbiamo

$$\int_{C_{\pm\omega_{\vec{p}}}} \frac{i dp^0}{2\pi} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 - m^2} e^{-ipx} \tag{28.6}$$

dove $C_{\pm\omega_{\vec{p}}}$ è un contorno *chiuso* nel piano complesso p^0 che aggira il punto $p^0 = \pm\omega_{\vec{p}}$. Si osservi che non abbiamo più indicato il $i\epsilon$ che entra nella definizione di propagatore in quanto il percorso di integrazione è adesso interamente nel piano complesso dove l'integrando non ha singolarità. Quindi la differenza tra due modi diversi di aggirare la singolarità si scrive, scambiando l'ordine di integrazione,

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_{C_{\pm\omega_{\vec{p}}}} \frac{i dp^0}{2\pi} \frac{1}{p^0 - \omega_{\vec{p}}} \frac{1}{p^0 + \omega_{\vec{p}}} e^{-i p x} = \\
& = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_{C_{\pm\omega_{\vec{p}}}} \frac{i dp^0}{2\pi} \frac{1}{p^0 - \omega_{\vec{p}}} \frac{1}{p^0 + \omega_{\vec{p}}} e^{-i p x} = \\
& = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\pm 2\omega_{\vec{p}}} [e^{-i p x}]_{p^0=\pm\omega_{\vec{p}}} \tag{28.7}
\end{aligned}$$

dove abbiamo applicato la formula di Cauchy per l'integrale di contorno intorno ad un polo. L'espressione ottenuta è esplicitamente una soluzione dell'equazione d'onda libera. In conclusione diverse prescrizioni per aggirare la singolarità corrispondono a propagatori che differiscono per soluzioni dell'equazione d'onda libera, come è appropriato per l'inverso dell'operatore d'onda.

28.1 Propagatore per vettori massivi

In questo caso dobbiamo scegliere nella (28.4) i segni superiori. Abbiamo dunque

$$\begin{aligned}
\frac{(N_{00}^{(+)}(\vec{p}) - N_{00}^{(-)}(-\vec{p}))}{2} &= \frac{(N_{ij}^{(+)}(\vec{p}) - N_{ij}^{(-)}(-\vec{p}))}{2} = 0 \\
\frac{(N_{0i}^{(+)}(\vec{p}) - N_{0i}^{(-)}(-\vec{p}))}{2} &= \frac{\omega_p p_i}{m^2} \tag{28.8}
\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}
\frac{(N_{00}^{(+)}(\vec{p}) + N_{00}^{(-)}(-\vec{p}))}{2} &= \frac{\omega_p^2}{m^2} - 1 \quad \frac{(N_{ij}^{(+)}(\vec{p}) + N_{ij}^{(-)}(-\vec{p}))}{2} = \frac{p_i p_j}{m^2} + \delta_{ij} \\
\frac{(N_{0i}^{(+)}(\vec{p}) + N_{0i}^{(-)}(-\vec{p}))}{2} &= 0 \tag{28.9}
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} P_{00}(p) &= \frac{\omega_p^2}{m^2} - 1 & P_{ij}(p) &= \frac{p_i p_j}{m^2} + \delta_{ij} \\ P_{0i}(p) &= \frac{p_0 p_i}{m^2} \end{aligned} \quad (28.10)$$

od, equivalentemente,

$$P_{\mu\nu}(p) = \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} - g_{\mu\nu} - \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} \frac{(p^2 - m^2)}{m^2} \quad (28.11)$$

Si noti che il termine non-covariante nel numeratore del propagatore corrisponde ad un termine nel propagatore $\Delta_{\mu\nu}(x)$ “locale”, cioè proporzionale ad una delta function

$$\frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left[-\delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} \frac{(p^2 - m^2)}{m^2} \right] = -\frac{i}{m^2} \delta(x) \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} \quad (28.12)$$

Questo termine è dunque sempre rimovibile con una scelta opportuna del T-prodotto, così che possiamo prendere come numeratore del propagatore del vettore massivo l'espressione covariante

$$P_{\mu\nu}^{cov}(p) = \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} - g_{\mu\nu} \quad (28.13)$$

28.2 Propagatore per il campo di Dirac

In questo caso dobbiamo scegliere nella (28.4) i segni inferiori. Abbiamo dunque

$$\frac{(N^{(+)}(\vec{p}) + N^{(-)}(-\vec{p})) \gamma^0}{2} = \omega_p \gamma^0 \quad (28.14)$$

mentre

$$\frac{(N^{(+)}(\vec{p}) - N^{(-)}(-\vec{p})) \gamma^0}{2} = -\vec{p} \cdot \vec{\gamma} + m \quad (28.15)$$

Pertanto

$$P(p) \gamma^0 = p^0 \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + m = \hat{p} + m \quad (28.16)$$

29 Tempi di decadimento e sezioni d'urto

Indichiamo con i e f gli stati iniziali e finali del processo: l'elemento di matrice S corrispondente ha la forma

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) T_{fi} = \\ &= \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \frac{M_{fi}}{\prod_{i,f} (2\omega_{i,f})^{1/2} (2\pi)^{3/2}} \end{aligned} \quad (29.1)$$

L'elemento di matrice M_{fi} (ottenuto dalle regole di Feynman senza fattori $\frac{1}{(2\omega_p)^{1/2} (2\pi)^{3/2}}$ per linee entranti ed uscenti) è invariante di Lorentz.

La probabilità del processo $i \rightarrow f$ è dunque

$$\begin{aligned} dw_{i \rightarrow f} &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \int d^4x e^{i(P_f - P_i)x} \frac{|M_{fi}|^2}{\prod_{i,f} (2\omega_{i,f}) (2\pi)^3} = \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) V T \frac{|M_{fi}|^2}{\prod_{i,f} (2\omega_{i,f}) (2\pi)^3} \end{aligned} \quad (29.2)$$

La probabilità del processo $i \rightarrow f$ per unità di tempo è:

$$dP_{i \rightarrow f} = \frac{dw_{i \rightarrow f}}{T} = \frac{dw_{i \rightarrow f}}{T} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) V \frac{|M_{fi}|^2}{\prod_{i,f} (2\omega_{i,f}) (2\pi)^3} \quad (29.3)$$

La probabilità per unità di tempo che lo stato i transisca in uno stato con impulsi che si trovano nella cella $d^3 \vec{p}_f$ dello spazio delle fasi centrata in $\{\vec{p}_i\}$ è

$$d\Gamma_{i \rightarrow f} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) V \frac{|M_{fi}|^2}{\prod_i (2\omega_i) (2\pi)^3} \prod_f \frac{d^3 \vec{p}_f}{(2\omega_f) (2\pi)^3} \quad (29.4)$$

La formula sarebbe corretta se $|i\rangle$ fosse uno stato normalizzabile dello spettro discreto, con norma 1. Gli stati $|i\rangle$ che stiamo invece utilizzare sono stati del continuo normalizzati con la delta di Dirac del momento $\delta(\vec{p}_i - \vec{p}'_i)$: supponiamo allora di essere in un volume finito V , in questo caso $\vec{p}_i \approx \frac{(2\pi)}{L} \vec{n}_i$ con \vec{n}_i interi discreti. Pertanto

$$\delta(\vec{p}_i - \vec{p}'_i) \approx \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\vec{n}_i, \vec{n}'_i} \quad (29.5)$$

dove $\delta_{\vec{n}_i, \vec{n}'_i}$ sono delta di Kronecker. In conclusione, i vettori

$$\prod_i |\vec{p}_i\rangle \frac{(2\pi)^{3/2}}{V^{1/2}} \quad (29.6)$$

sono normalizzati ad 1. La formula per la probabilità di transizione per unità di tempo (29.4) deve essere dunque normalizzata come segue

$$d\Gamma_{i \rightarrow f} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \frac{V}{V^{N_i}} \frac{|M_{fi}|^2}{\prod_i 2\omega_i} \prod_f \frac{d^3 \vec{p}_f}{(2\omega_f) (2\pi)^3} \quad (29.7)$$

dove N_i è il numero di particelle nello stato iniziale.

29.1 Decadimenti

In questo caso $N_i = 1$ e la formula (29.7) diventa

$$d\Gamma_{i \rightarrow f} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \frac{|M_{fi}|^2}{2m} \prod_f \frac{d^3 \vec{p}_f}{(2\omega_f) (2\pi)^3} \quad (29.8)$$

29.1.1 Decadimento di uno in due

Consideriamo in particolare il decadimento di una particella di massa m in uno stato finale con 2 particelle. Siano $\vec{p}'_{1,2}$ e $\omega'_{1,2}$ i momenti le energie delle particelle prodotte nel decadimento. Mettiamoci nel sistema di quiete della particella che decade, $\vec{p}_i = 0$, dunque $\vec{p}'_1 = -\vec{p}'_2 = \vec{p}'$ e $m = \omega'_1 + \omega'_2$. Dunque la (29.8) diventa

$$\begin{aligned} d\Gamma_{i \rightarrow f} &= \frac{1}{(2m) (2\pi)^2} \delta^{(3)}(\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2) \delta(\omega'_1 + \omega'_2 - m) |M_{fi}|^2 \frac{d^3 \vec{p}'_1 d^3 \vec{p}'_2}{(4\omega'_1 \omega'_2)} \\ &= \frac{1}{32 \pi^2 m} \delta(\omega'_1 + \omega'_2 - m) |M_{fi}|^2 \frac{d^3 \vec{p}'}{\omega'_1 \omega'_2} \\ &= \frac{1}{32 \pi^2 m} \delta(\omega'_1 + \omega'_2 - m) |M_{fi}|^2 \frac{d\Omega' |\vec{p}'|^2 d|\vec{p}'|}{\omega'_1 \omega'_2} \end{aligned} \quad (29.9)$$

Poiché

$$|\vec{p}'| d|\vec{p}'| = \omega'_1 d\omega'_1 \quad (29.10)$$

la (29.9) diventa

$$\begin{aligned} d\Gamma_{i \rightarrow f} &= \frac{1}{32 \pi^2 m} \delta(\omega'_1 + \sqrt{(\omega'_1)^2 - m_1^2 + m_2^2} - m) |M_{fi}|^2 \frac{d\omega'_1 d\Omega' |\vec{p}'|}{\omega'_2} \\ &= \frac{1}{32 \pi^2 m} \frac{1}{1 + \frac{\omega'_1}{\omega'_2}} |M_{fi}|^2 \frac{d\Omega' |\vec{p}'|}{\omega'_2} = \frac{1}{32 \pi^2 m^2} |M_{fi}|^2 |\vec{p}'| d\Omega' \quad (29.11) \end{aligned}$$

29.2 Diffusione di 2 particelle

Prendiamo $N_i = 2$ nella (29.7). In questo caso la grandezza fisicamente interessante è la sezione d'urto:

$$d\sigma_{i \rightarrow f} = \frac{d\Gamma_{i \rightarrow f}}{u/V} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \frac{|M_{fi}|^2}{4 \omega_1 \omega_2 u} \prod_f \frac{d^3 \vec{p}_f}{(2\omega_f) (2\pi)^3} \quad (29.12)$$

dove u è la velocità relativa delle due particelle nel sistema del centro di massa:

$$\begin{aligned} u &= v_1 + v_2 = \frac{|\vec{p}_1|}{\omega_1} + \frac{|\vec{p}_2|}{\omega_2} = \\ &= \frac{|\vec{p}'| (\omega_1 + \omega_2)}{\omega_1 \omega_2} = \end{aligned} \quad (29.13)$$

e dunque u/V coincide con la definizione ordinaria di densità di flusso nel sistema del baricentro. La grandezza nel numeratore della ultima equazione in (29.13) è un invariante di Lorentz

$$I = |\vec{p}'| (\omega_1 + \omega_2) = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \quad (29.14)$$

La sezione d'urto invariante è pertanto

$$d\sigma_{i \rightarrow f} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \frac{|M_{fi}|^2}{4I} \prod_f \frac{d^3 \vec{p}_f}{(2\omega_f) (2\pi)^3} \quad (29.15)$$

29.2.1 Sezione d'urto di due in due

Nel sistema del baricentro,

$$E \equiv \omega_1 + \omega_2 = \omega'_1 + \omega'_2 \quad \vec{p} \equiv \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \quad \vec{p}' \equiv \vec{p}'_1 = -\vec{p}'_2 \quad (29.16)$$

Eq. (29.15) diventa

$$\begin{aligned} d\sigma_{i \rightarrow f} &= \frac{1}{64\pi^2} \delta\left(E - \omega'_1 - \sqrt{(\omega'_1)^2 - m_1^2 + m_2^2}\right) \frac{|M_{fi}|^2}{I} \frac{d^3\vec{p}'}{\omega'_1 \omega'_2} = \\ &= \frac{1}{64\pi^2} \frac{|M_{fi}|^2}{I} \frac{|\vec{p}'| d\Omega'}{\omega'_1 + \omega'_2} = \frac{1}{64\pi^2} |M_{fi}|^2 \frac{|\vec{p}'| d\Omega'}{|\vec{p}| E^2} \end{aligned} \quad (29.17)$$

Può essere utile esprimere la (29.17) in termini della variabile invariante

$$t \equiv (p_1 - p'_1)^2 = m_1^2 + m_2^2 - 2\omega_1 \omega'_1 + 2|\vec{p}| |\vec{p}'| \cos\theta \quad (29.18)$$

dove θ è l'angolo di diffusione. Dunque

$$dt = 2|\vec{p}| |\vec{p}'| d\cos\theta \quad (29.19)$$

e

$$d\Omega' = -d\phi d\cos\theta = -\frac{d\phi dt}{2|\vec{p}| |\vec{p}'|} \quad (29.20)$$

per cui

$$d\sigma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{64\pi^2} |M_{fi}|^2 \frac{d\phi d(-t)}{2|\vec{p}|^2 E^2} \quad (29.21)$$

Nel caso ci sia simmetria per rotazioni lungo la direzione del moto, l'ampiezza non dipende da ϕ . In questo caso

$$\begin{aligned} d\sigma_{i \rightarrow f} &= \frac{1}{64\pi} |M_{fi}|^2 \frac{d(-t)}{|\vec{p}|^2 E^2} = \frac{1}{64\pi} |M_{fi}|^2 \frac{d(-t)}{I^2} = \\ &= \frac{1}{16\pi} |M_{fi}|^2 \frac{d(-t)}{[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2]} \end{aligned} \quad (29.22)$$

dove abbiamo utilizzato la relazione

$$I^2 = \frac{1}{4} [s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2] \quad (29.23)$$

29.2.2 Diffusione da potenziale

In un potenziale esterno non abbiamo conservazione del momento ma solo dell'energia: pertanto l'elemento di matrice S si scrive

$$S_{fi} = \delta_{fi} + 2\pi i \delta(E_f - E_i) T_{fi} \quad (29.24)$$

e la probabilità di transizione per unità di tempo

$$\frac{dw_{i \rightarrow f}}{T} = 2\pi \delta(E_f - E_i) \frac{|M_{fi}|^2}{\prod_i (2\omega_i) V} \prod_f \frac{d^3 \vec{p}_f}{(2\pi)^3 2\omega_f} \quad (29.25)$$

Consideriamo il caso della diffusione di una particella di energia ω in un potenziale esterno. La (29.25) diventa

$$\frac{dw_{i \rightarrow f}}{T} = 2\pi \delta(E_f - \omega) \frac{|M_{fi}|^2}{2\omega V} \prod_f \frac{d^3 \vec{p}_f}{(2\pi)^3 2\omega_f} \quad (29.26)$$

La grandezza interessante in questo caso è la sezione d'urto. Se $v = |\vec{p}|/\omega$ è la velocità della particella incidente, allora la sezione d'urto differenziale è

$$d\sigma = \frac{dw_{i \rightarrow f}}{T(v/V)} = 2\pi \delta(E_f - \omega) \frac{|M_{fi}|^2}{2|\vec{p}|} \prod_f \frac{d^3 \vec{p}_f}{(2\pi)^3 2\omega_f} \quad (29.27)$$

Nel caso in cui nello stato finale si ha ancora una particella (diffusione elastica) con impulso \vec{p}' , la sezione d'urto è

$$d\sigma = \frac{dw_{i \rightarrow f}}{T(v/V)} = \frac{1}{16\pi^2} |M_{fi}|^2 d\Omega' \quad (29.28)$$

30 Il fotone

Si considerino le equazioni relativisticamente invarianti

$$\begin{aligned} \partial^2 A_\mu(x) &= 0 \\ \partial^\mu A_\mu(x) &= 0 \end{aligned} \quad (30.1)$$

la cui soluzione generale si scrive

$$A_\mu(x) = \sum_{\vec{p}, \sigma} \epsilon_\mu(\vec{p}, \sigma) \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}(2\pi)^{\frac{3}{2}}} a_{\vec{p}, \sigma} + \epsilon_\mu^*(\vec{p}, \sigma) \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}(2\pi)^{\frac{3}{2}}} a_{\vec{p}, \sigma}^\dagger \quad (30.2)$$

dove i vettori di polarizzazione con $\sigma = \pm, 3$ sono una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione

$$p^\mu \epsilon_\mu(\vec{p}, \sigma) = 0 \quad (30.3)$$

Osserviamo che poiché siamo nel caso massless, possiamo prendere

$$\epsilon_\mu(\vec{p}, 3) = p_\mu \quad (30.4)$$

Studiamo la rappresentazione del gruppo delle trasformazioni inomogenee di Lorentz definita da (30.1)-(30.3). A questo scopo scegliamo un momento di riferimento

$$\bar{p}_\mu = \omega (1, 0, 0, 1) \quad (30.5)$$

e consideriamo il piccolo gruppo relativo, isomorfo a $ISO(2)$. I generatori di questo gruppo sono $\{A, B, J_3\}$ con

$$A = J_1 + K_2 \quad B = J_2 - K_1 \quad (30.6)$$

Lo spazio $W_{\bar{p}}$ generato dai vettori di polarizzazione $\epsilon_\mu(\bar{p}, \sigma)$ è lasciato invariante dal piccolo gruppo (30.6). $W_{\bar{p}}$ contiene però un sottospazio invariante W_3 di dimensione 1: W_3 è generato da

$$\epsilon_\mu(\bar{p}, 3) = \bar{p}_\mu \quad (30.7)$$

$W_{\bar{p}}$ non è dunque una rappresentazione irriducibile del piccolo gruppo. Prendiamo come altri due elementi della base di $W_{\bar{p}}$ i vettori

$$\epsilon_\mu(\bar{p}, \pm) = (0, \vec{e}_\pm) \quad \vec{e}_\pm \equiv (1, \pm i, 0) \quad (30.8)$$

e determiniamo l'azione del piccolo gruppo sulla base $\{\epsilon_\mu(\bar{p}, \sigma)\}$ così scelta. Abbiamo

$$\begin{aligned} A &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ B &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ J_3 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (30.9)$$

Sia dunque

$$w = \sum_{\sigma} a_{\sigma} \epsilon(\bar{p}, \sigma) \quad (30.10)$$

un elemento generico di $W_{\bar{p}}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} Aw &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_+ + a_- \\ i(a_+ - a_-) \\ -a_3 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} i(a_+ - a_-) \\ 0 \\ 0 \\ i(a_+ - a_-) \end{pmatrix} = \\ &= -(a_+ - a_-) \epsilon(\bar{p}, 3) \\ Bw &= -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_+ + a_- \\ i(a_+ - a_-) \\ -a_3 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} a_+ + a_- \\ 0 \\ 0 \\ a_+ + a_- \end{pmatrix} = \\ &= -i(a_+ + a_-) \epsilon(\bar{p}, 3) \\ J_3 w &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_+ + a_- \\ i(a_+ - a_-) \\ -a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_+ - a_- \\ i(a_+ + a_-) \\ -0 \end{pmatrix} = \\ &= a_+ \epsilon(\bar{p}, +) - a_- \epsilon(\bar{p}, -) \end{aligned} \quad (30.11)$$

Vediamo dunque che benché $W_3 \subset W_{\bar{p}}$ sia invariante, e

$$W_{\bar{p}} = W_3 \oplus W_{trans} \quad (30.12)$$

dove W_{trans} è il sottospazio dei vettori trasversi

$$w_{trans} = a_+ \epsilon(\bar{p}, +) + a_- \epsilon(\bar{p}, -), \quad (30.13)$$

il sottospazio W_{trans} non è invariante:

$$(\alpha A + \beta B) w_{trans} = [-a_+ (\alpha + i\beta) + a_- (\alpha + i\beta)] \epsilon(\bar{p}, 3) \quad (30.14)$$

In altre parole la rappresentazione del piccolo gruppo su $W_{\bar{p}}$ non è irriducibile (contiene una sotto-rappresentazione invariante W_3) ma non è *decomponibile*. Non ci sono pertanto equazioni differenziali relativisticamente invarianti che possiamo aggiungere a (30.1) per ottenere una rappresentazione del piccolo gruppo irriducibile, di dimensione 2, corrispondente alle polarizzazioni fisiche del fotone.

Notiamo però che l'azione di $\alpha A + \beta B$ su w_{trans} produce un elemento in W_3 . Pertanto possiamo definire una rappresentazione del piccolo gruppo sullo spazio *quoziente*

$$W_{fotone} = W_{\bar{p}}/W_3 \quad (30.15)$$

Gli elementi di W_{fotone} sono classi di equivalenza rispetto alla relazione di equivalenza

$$\epsilon' \sim \epsilon \Leftrightarrow \epsilon' = \epsilon + \gamma \bar{p} \quad \gamma \bar{p} \in W_3 \quad (30.16)$$

Si noti che se $\epsilon \in W_{\bar{p}}$, tutti gli elementi della classe $[\epsilon]$ appartengono a $W_{\bar{p}}$, perché $\bar{p}^2 = 0$. W_{fotone} è uno spazio vettoriale di dimensione 2, e se $[\epsilon]$ è un elemento di questo spazio

$$(\alpha A + \beta B) [\epsilon] = [(\alpha A + \beta B) \epsilon] = [0] \quad (30.17)$$

In altre parole $A = B = 0$ su W_{fotone} . Pertanto la rappresentazione del piccolo gruppo definita da W_{fotone} è precisamente la rappresentazione corrispondente alla rappresentazione unitaria del gruppo di Lorentz non-omogeneo associata al fotone. Sottolineiamo che W_{fotone} *non* è un sottospazio di $W_{\bar{p}}$.

Passando a vettori di polarizzazione con momento generico, abbiamo quindi che due vettori di polarizzazione che differiscono per un vettore proporzionale a p_μ corrispondono a stati fisici identici

$$\epsilon'_\mu(p) \sim \epsilon_\mu(p) + \gamma p_\mu \quad (30.18)$$

Questo vuol dire, che due soluzioni $A'_\mu(x)$ ed $A_\mu(x)$ delle equazioni di campo (30.2) sono da considerare come configurazioni equivalenti se differiscono per una trasformazione di gauge

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Omega(x) \quad (30.19)$$

Una conseguenza importante è che l'azione delle trasformazioni di Lorentz sull'operatore di campo $\hat{A}_\mu(x)$ differisce da una trasformazione di Lorentz su un campo vettoriale per una trasformazione di gauge

$$U(\Lambda)^{-1} \hat{A}_\mu(x) U(\Lambda) = \Lambda^\nu_\mu (\hat{A}_\nu(\Lambda^{-1} x) + \partial_\nu \hat{\Omega}(\Lambda, x)) \quad (30.20)$$

Pertanto gli operatori che descrivono l'interazione del campo con la materia,

$$\int d^4x \mathcal{L}_I(x) = \int d^4x \hat{j}^\mu(x) \hat{A}_\mu(x) \quad (30.21)$$

dove $\hat{j}(x)$ è l'operatore di corrente di materia, sono effettivamente invarianti di Lorentz solo se

$$\partial_\mu \hat{j}^\mu(x) = 0 \quad (30.22)$$

La condizione (30.22) quando implementata a livello di ampiezze fisiche dà luogo alla identità di Ward dell' electromagnetismo.

30.1 Propagatore del campo fotonico nella gauge di Landau

Per implementare $\partial^\mu A_\mu = 0$, consideriamo la densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + b(x) \partial^\mu A_\mu \quad (30.23)$$

dove abbiamo introdotto un campo $b(x)$ scalare *reale*. Le equazioni del moto di $b(x)$ riproducono la condizione di trasversalità del campo fotonico:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta b(x)} = 0 \Rightarrow \partial^\mu A_\mu = 0 \quad (30.24)$$

Le equazioni del campo A_μ associate alla lagrangiana (30.23) sono

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} - \partial_\nu b(x) = 0 \quad (30.25)$$

Prendendo la divergenza di quest'ultima equazione otteniamo

$$\partial^2 b(x) = 0 \quad (30.26)$$

ovvero $b(x)$ è un *campo libero*, che può essere scritto come

$$b(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} (\beta_{\vec{p}} e^{-ipx} + \beta_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx}) \quad (30.27)$$

dove come sempre la componente del quadri-momento nei fattori esponenziali è quella associata ad una particella di massa nulla

$$\omega_{\vec{p}} = |\vec{p}| \quad (30.28)$$

Calcoliamo il propagatore per i campi A_μ e $b(x)$. La trasformata di Fourier delle equazioni d'onda sono

$$\begin{aligned} -(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \tilde{A}_\nu + i p_\nu \tilde{b}(p) &= 0 \\ p^\mu \tilde{A}_\mu &= 0 \end{aligned} \quad (30.29)$$

dove $\tilde{A}_\mu(p)$ e $\tilde{b}(p)$ sono le trasformate di Fourier dei campi A_μ e b . La trasformata di Fourier dell'operatore d'onda è pertanto la matrice

$$K(p) = \begin{pmatrix} K^{\mu\nu} & K^{\mu 5} \\ K^{5\nu} & K^{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p^2 g^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu & +i p^\mu \\ -i p^\nu & 0 \end{pmatrix} \quad (30.30)$$

La trasformata di Fourier del propagatore ha la forma

$$\tilde{G}(p) = K(p)^{-1} = \begin{pmatrix} \Delta_{\nu\rho} & \Delta_{\nu 5} \\ \Delta_{5\rho} & \Delta_{55} \end{pmatrix} \quad (30.31)$$

ed è determinata dalle condizioni

$$\begin{aligned} K^{\mu\nu} \Delta_{\nu\rho} + K^{\mu 5} \Delta_{5\rho} &= -(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \Delta_{\nu\rho} + i p^\mu \Delta_{5\rho} = \delta_\rho^\mu \\ K^{\mu\nu} \Delta_{\nu 5} + K^{\mu 5} \Delta_{55} &= -(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \Delta_{\nu 5} + i p^\mu \Delta_{55} = 0 \\ K^{5\nu} \Delta_{\nu\rho} + K^{55} \Delta_{5\rho} &= -i p^\nu \Delta_{\nu\rho} = 0 \\ K^{5\nu} \Delta_{\nu 5} + K^{55} \Delta_{55} &= -i p^\nu \Delta_{\nu 5} = 1 \end{aligned} \quad (30.32)$$

Inserendo in queste equazioni la più generale espressione covariante per $\Delta_{\mu\nu}$, $\Delta_{\mu 5}$ e $\Delta_{5\mu}$, otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta_{\nu\rho} &= a(p^2) p_\nu p_\rho + b(p^2) g_{\nu\rho} \\ \Delta_{5\rho} &= c(p^2) p_\rho \\ \Delta_{\nu 5} &= d(p^2) p_\nu \end{aligned} \quad (30.33)$$

L'ultima delle (30.32) implica

$$d(p^2) = \frac{i}{p^2} \quad (30.34)$$

mentre dalla seconda ricaviamo

$$\Delta_{55} = 0 \quad (30.35)$$

e dalla terza

$$\Delta_{\nu\rho} = a(p^2) (p_\nu p_\rho - p^2 g_{\nu\rho}) \quad (30.36)$$

Sostituendo quest'ultima nella prima

$$a(p^2) p^4 \delta_\rho^\mu - p^2 p^\mu p_\rho a(p^2) + i p^\mu p_\rho c(p^2) = \delta_\rho^\mu \quad (30.37)$$

ovvero

$$a(p^2) = \frac{1}{p^4} \quad c(p^2) = -\frac{i}{p^2} \quad (30.38)$$

In conclusione

$$\tilde{G}(p) = \begin{pmatrix} \frac{-g_{\nu\rho} + \frac{p_\nu p_\rho}{p^2}}{p^2 + i\epsilon} & \frac{i p_\nu}{p^2 + i\epsilon} \\ -\frac{i p_\rho}{p^2 + i\epsilon} & 0 \end{pmatrix} \quad (30.39)$$

dove abbiamo introdotto al prescrizione causale di Feynman nei denominatori.

Andando nello spazio delle x , otteniamo per i T -prodotti degli operatori di campo $A_\mu(x)$ e $b(x)$ le espressioni integrali

$$\begin{aligned} -i \langle 0|T(A_\nu(x) A_\rho(0)|0\rangle &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-g_{\nu\rho} + \frac{p_\nu p_\rho}{p^2}}{p^2 + i\epsilon} e^{-ipx} \\ -i \langle 0|T(b(x) b(0)|0\rangle &= 0 \\ -i \langle 0|T(A_\nu(x) b(0)|0\rangle &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i p_\nu}{p^2 + i\epsilon} e^{-ipx} \end{aligned} \quad (30.40)$$

In definitiva nella gauge di Landau, il propagatore per il campo fotonico nello spazio dei momenti è

$$\Delta_{\mu\nu}(p) = i \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}}{p^2 + i\epsilon} \quad (30.41)$$

Osserviamo che il propagatore per il campo libero $b(x)$ è identicamente nullo. Pertanto nei Feynman non compaiono linee interne associate al campo $b(x)$. Inoltre il campo $b(x)$ appare quadraticamente nell'azione e quindi non contribuisce ai vertici: questo rimane vero in una teoria che include campi di materia carica se l'accoppiamento dell'elettromagnetismo alla materia coinvolge solo il campo A_μ e non $b(x)$. Pertanto nei grafici di Feynman non

compariranno neanche propagatori $\langle 0|T(A_\nu b)|0\rangle$. In definitiva il calcolo delle ampiezze richiede solo l'uso del propagatore fotonico (30.41). Resta da capire che succede alle ampiezze che coinvolgono particelle b sulle gambe esterne dei grafici di Feynman. Per capire questo dobbiamo determinare le regole di commutazione degli oscillatori di b con quelli del campo fotonico A_μ . Una questione che discutiamo nella sezione successiva.

30.2 Lo spazio degli stati di Gupta-Bleuler

Nella sottosezione precedente abbiamo discusso le regole di Feynman per il campo fotonico che si ottengono dopo avere introdotto il campo ausiliario $b(x)$ nella densità lagrangiana (30.23). In questa sezione vogliamo discutere lo spazio di Fock associato a questa densità lagrangiana.

Dall'espressione (30.27) per $b(x)$ otteniamo

$$\begin{aligned} -i \langle 0|T(b(x) b(0))|0\rangle &= \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \frac{d^3\vec{p}'}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}'}}} \times \\ &\times [\beta_{\vec{p}} e^{-ipx} + \beta_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx}, \beta_{\vec{p}'} + \beta_{\vec{p}'}^\dagger] \end{aligned} \quad (30.42)$$

D'altra parte abbiamo visto che il propagatore del campo $b(x)$ è identicamente nullo

$$\langle 0|T(b(x) b(0))|0\rangle = 0 \quad (30.43)$$

Pertanto gli operatori $\beta_{\vec{p}}$ e $\beta_{\vec{p}}^\dagger$ associati al campo $b(x)$ non soddisfano le regole di commutazione standard per i campi scalari, ma devono mutualmente commutare

$$[\beta_{\vec{p}}, \beta_{\vec{p}'}] = [\beta_{\vec{p}}^\dagger, \beta_{\vec{p}'}^\dagger] = [\beta_{\vec{p}}, \beta_{\vec{p}'}^\dagger] = 0 \quad (30.44)$$

Consideriamo ora la divergenza della terza equazione in (30.40)

$$-i \partial^\nu \langle 0|T(A_\nu(x) b(0))|0\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p^2}{p^2 + i\epsilon} e^{-ipx} = \delta^{(4)}(x) \quad (30.45)$$

D'altronde il membro di sinistra di questa equazione si può scrivere come

$$\begin{aligned} -i \langle 0|T\partial^\nu A_\nu(x) b(0)|0\rangle &- i \delta(x^0) [A_0(\vec{x}, 0), b(0)] = \\ &-i \delta(x^0) [A_0(\vec{x}, 0), b(0)] \end{aligned} \quad (30.46)$$

perché $\partial^\mu A_\mu(x) = 0$. Deduciamo che

$$[A_0(\vec{x}, 0), b(0)] = i \delta^{(3)}(\vec{x}) \quad (30.47)$$

In altre parole $b(x)$ svolge il ruolo di momento coniugato al campo $A_0(x)$. Consideriamo ora l'equazione d'onda per A_μ . In presenza del termine proporzionale a $b(x)$ nella lagrangiana, questa è

$$\partial^2 A_\mu = \partial_\mu b(x) \quad (30.48)$$

La soluzione generale di questa equazione si può scrivere come

$$A_\mu(x) = A_\mu^{(0)}(x) + A_\mu^{(b)}(x) \quad (30.49)$$

dove $A_\mu^{(0)}(x)$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea

$$\begin{aligned} \partial^2 A_\mu^{(0)}(x) &= 0 \\ \partial^\mu A_\mu^{(0)}(x) &= 0 \end{aligned} \quad (30.50)$$

mentre $A_\mu^{(b)}(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione inomogena, proporzionale a $b(x)$

$$A_\mu^{(b)}(x) = \int d^4 x' G_F(x - x') \partial_\mu b(x') \quad \partial^\mu A_\mu^{(b)}(x) = 0 \quad (30.51)$$

dove $b(x)$ è dato da (30.27) e $G_F(x)$ è una opportuna funzione di Green.

Sappiamo che la soluzione omogenea si scrive

$$\begin{aligned} A_\mu^{(0)}(x) &= \sum_{\sigma=\pm,0} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p},\sigma} \epsilon_\mu(p, \sigma) e^{-i p x} + \\ &+ a_{\vec{p},\sigma}^\dagger \epsilon_\mu^*(p, \sigma) e^{i p x}) \end{aligned} \quad (30.52)$$

dove

$$p^\mu \epsilon_\mu(\vec{p}, \sigma) = 0 \quad (30.53)$$

con $\epsilon(\vec{p}, \pm)$ i vettori di polarizzazioni fisici e

$$\epsilon^\mu(\vec{p}, 0) = i p^\mu \quad (30.54)$$

il vettore di polarizzazione longitudinale non-fisico.

Poiché vogliamo che $\epsilon(\vec{p}, \pm)$ siano fisici, imponiamo che gli operatori di creazione e distruzione fisici obbediscano le regole di commutazione standard

$$[a_{\vec{p},h}, a_{\vec{p}',h'}^\dagger] = \delta(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{hh'} \quad h, h' = \pm 1 \quad (30.55)$$

creando così degli stati di particella con elicità definita. La relazione (30.47) impone però che

$$\begin{aligned} i \delta^{(3)}(\vec{x}) = [A_0(\vec{x}, 0), b(0)] &= [A_0^{(0)}(x), b(0)] = \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{p}}} \sqrt{2\omega_{\vec{p}'}}} \times \\ &\times ([a_{\vec{p},0}, \beta_{\vec{p}'}^\dagger] i \omega_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + [a_{\vec{p},0}^\dagger, \beta_{\vec{p}'}] (-i \omega_{\vec{p}}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}) \end{aligned} \quad (30.56)$$

Per soddisfare questa relazione dobbiamo quindi imporre

$$[a_{\vec{p},0}, \beta_{\vec{p}'}^\dagger] = \delta(\vec{p} - \vec{p}') \quad [a_{\vec{p},0}^\dagger, \beta_{\vec{p}'}] = -\delta(\vec{p} - \vec{p}') \quad (30.57)$$

Consideriamo allora le combinazioni

$$\begin{aligned} A_{\vec{p}}^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{\vec{p},0} \pm \beta_{\vec{p}'}) \\ (A_{\vec{p}}^\pm)^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{\vec{p},0}^\dagger \pm \beta_{\vec{p}'}^\dagger) \end{aligned} \quad (30.58)$$

che soddisfano

$$\begin{aligned} [A_{\vec{p}}^+, (A_{\vec{p}'}^+)^\dagger] &= \delta(\vec{p} - \vec{p}') \\ [A_{\vec{p}}^-, (A_{\vec{p}'}^-)^\dagger] &= -\delta(\vec{p} - \vec{p}') \\ [A_{\vec{p}}^+, (A_{\vec{p}'}^-)^\dagger] &= [A_{\vec{p}}^-, (A_{\vec{p}'}^+)^\dagger] = 0 \end{aligned} \quad (30.59)$$

Vediamo quindi che i creatori $a_{\vec{p},\pm}^\dagger$ e $(A_{\vec{p}}^\pm)^\dagger$ creano stati a norma positiva ma il creatore $(A_{\vec{p}}^-)^\dagger$ agendo sul vuoto crea uno stato di singola particella a *norma negativa*. Lo spazio di Fock \mathcal{H}_{Fock} associato ai campi $A_\mu(x)$ e $b(x)$ è quindi uno spazio vettoriale a *norma indefinita*. Uno spazio vettoriale del genere non ammette l'usuale interpretazione probabilistica che caratterizza la meccanica quantistica.

La soluzione di questo problema, dovuta a Gupta e Bleuler, consiste nel definire, preliminarmente un sottospazio \mathcal{H}_{fisici} dello spazio di Fock: \mathcal{H}_{fisici} è il sottospazio degli stati annichilati dall'operatore distruttore $\beta_{\vec{p}}$

$$\mathcal{H}_{fisici} = \{\psi \in \mathcal{H}_{Fock} \mid \beta_{\vec{p}}\psi = 0\} \quad (30.60)$$

Grazie alla seconda delle (30.57) gli stati fisici sono gli stati dello spazio di Fock che non contengono il creatore $a_{\vec{p},0}^\dagger$, ovvero il creatore associato alle polarizzazioni longitudinali $\epsilon_\mu(p,0) = p^\mu$. In altre parole \mathcal{H}_{fisici} è lo spazio di Fock generato da $a_{\vec{p},\pm}^\dagger$ e da $\beta_{\vec{p}}^\dagger$.

\mathcal{H}_{fisici} è uno spazio di stati a norma *semi-positiva*: non è quindi ancora lo spazio degli stati fisici del fotone \mathcal{H}_{fotoni} . Quest'ultimo è definito come il quoziente

$$\mathcal{H}_{fotoni} = \mathcal{H}_{fisici} / \sim \quad (30.61)$$

dello spazio di \mathcal{H}_{fisici} per la relazione di equivalenza

$$\psi' \sim \psi \Rightarrow \psi' = \psi + \int d^3\vec{p} \beta_{\vec{p}}^\dagger \chi_{\vec{p}} \quad (30.62)$$

dove $\chi_{\vec{p}}$ è un qualunque stato in \mathcal{H}_{fisici} . Ogni classe di equivalenza ha pertanto un rappresentante che è uno stato che contiene esclusivamente creatori fisici $a_{\vec{p},\pm}^\dagger$. Tutti gli altri stati nella stessa classe di equivalenza differiscono da questo stato per una combinazione lineare di stati che contengono creatori $\beta_{\vec{p}}^\dagger$. È importante notare che due stati fisici nella stessa classe di equivalenza hanno gli stessi prodotti scalari con qualunque altro stato fisico

$$\langle \psi_2, \psi_1' \rangle = \langle \psi_2, \psi_1 + \int d^3\vec{p} \beta_{\vec{p}}^\dagger \chi_{\vec{p}} \rangle = \langle \psi_2, \psi_1 \rangle \quad (30.63)$$

perché uno stato che contiene $\beta_{\vec{p}}^\dagger$ è ortogonale a qualunque altro stato fisico. Pertanto il prodotto scalare semi-definito positivo su \mathcal{H}_{fisici} si proietta su un prodotto scalare definito positivo sullo spazio quoziente \mathcal{H}_{fotoni} .

La questione che rimane da verificare è che lo spazio degli stati di Gupta-Bleuler (30.60) sia lasciato invariato dall'evoluzione temporale: questo è assicurato dal fatto che il campo $b(x)$ è un campo *libero*: se \hat{H} è l'Hamiltoniana *interagente* allora

$$e^{i\hat{H}t} \beta_{\vec{p}} e^{-i\hat{H}t} = e^{-i\omega_{\vec{p}}t} \beta_{\vec{p}} \quad (30.64)$$

Pertanto

$$\beta_{\vec{p}} (e^{-i\hat{H}t} \psi_{fisico}) = e^{-i\omega_{\vec{p}}t} \beta_{\vec{p}} \psi_{fisico} = 0 \quad (30.65)$$

ovvero l'evoluto temporale di uno stato fisico è ancora fisico. La matrice di scattering S pertanto manda stati fisici in stati fisici.

30.3 Propagatore del campo fotonico in un gauge covariante generico

Abbiamo visto che il campo ausiliario $b(x)$ che abbiamo introdotto in (30.23) per poter definire un propagatore fotonico si disaccoppia dai diagrammi di Feynman delle ampiezze di scattering e, attraverso il meccanismo di Gupta-Bleuler, cancella il contributo dei gradi di libertà non-fisici del campo fotonico.

Nonostante ciò, la specifica modifica in (30.23) della densità lagrangiana dell'elettromagnetismo può sembrare artificiale ed immotivata. In questa sottosezione mostriamo che esiste in effetti una certa libertà nei termini che vanno aggiunti alla densità lagrangiana del campo fotonico gauge invariante per poter definire un propagatore. Queste scelte diverse del settore della teoria che coinvolge il campo b corrispondono a scelte del gauge diverse: esse sono però fisicamente equivalenti, ovvero portano alla stessa matrice di scattering fisica. Questa affermazione non è immediata da verificare nel contesto dell'analisi dei grafici di Feynman: una sua giustificazione più elegante è derivabile nel contesto della formulazione di BRS della teoria che discuteremo nella sezione successiva.

Consideriamo una modifica della densità lagrangiana gauge-invariante più generale di (30.23)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + b(x) \partial^\mu A_\mu + \frac{\alpha}{2} b^2(x) \quad (30.66)$$

dove α è un parametro arbitrario. Per $\alpha \rightarrow 0$ riotteniamo naturalmente la lagrangiana associata alla scelta di gauge $\partial^\mu A_\mu = 0$. Per α generico l'equazioni del moto per $b(x)$ diventano

$$\partial^\mu A_\mu + \alpha b(x) = 0 \quad (30.67)$$

Le equazioni per A_μ sono ancora date da

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} - \partial_\nu b(x) = 0 \quad (30.68)$$

La trasformata di Fourier dell'operatore d'onda è pertanto la matrice

$$K(p) = \begin{pmatrix} K^{\mu\nu} & K^{\mu 5} \\ K^{5\nu} & K^{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p^2 g^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu & +i p^\mu \\ -i p^\nu & -\alpha \end{pmatrix} \quad (30.69)$$

La trasformata di Fourier del propagatore nel gauge α

$$\tilde{G}^{(\alpha)}(p) = K(p)^{-1} = \begin{pmatrix} \Delta_{\nu\rho} & \Delta_{\nu 5} \\ \Delta_{5\rho} & \Delta_{55} \end{pmatrix} \quad (30.70)$$

è determinata dalle equazioni

$$\begin{aligned} K^{\mu\nu} \Delta_{\nu\rho} + K^{\mu 5} \Delta_{5\rho} &= -(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \Delta_{\nu\rho} + i p^\mu \Delta_{5\rho} = \delta_\rho^\mu \\ K^{\mu\nu} \Delta_{\nu 5} + K^{\mu 5} \Delta_{55} &= -(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \Delta_{\nu 5} + i p^\mu \Delta_{55} = 0 \\ K^{5\nu} \Delta_{\nu\rho} + K^{55} \Delta_{5\rho} &= -i p^\nu \Delta_{\nu\rho} - \alpha \Delta_{5\rho} = 0 \\ K^{5\nu} \Delta_{\nu 5} + K^{55} \Delta_{55} &= -i p^\nu \Delta_{\nu 5} - \alpha \Delta_{55} = 1 \end{aligned} \quad (30.71)$$

Inserendo in queste equazioni le espressioni generiche

$$\begin{aligned} \Delta_{\nu\rho} &= a(p^2) p_\nu p_\rho + b(p^2) g_{\nu\rho} \\ \Delta_{5\rho} &= c(p^2) p_\rho \\ \Delta_{\nu 5} &= d(p^2) p_\nu \end{aligned} \quad (30.72)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} -i p^2 d - \alpha \Delta_{55} &= 1 \\ i a(p^2) p^2 p_\rho + i b(p^2) p_\rho - \alpha c(p^2) p_\rho &= 0 \\ i p^\mu \Delta_{55} &= 0 \\ -b(p^2) p^2 \delta_\rho^\mu + p^\mu p_\rho b(p^2) + i p_\mu c(p^2) p_\rho &= \delta_\rho^\mu \end{aligned} \quad (30.73)$$

da cui

$$\begin{aligned} b(p^2) &= -\frac{1}{p^2} & c(p^2) &= -\frac{i}{p^2} & \Delta_{55}(p) &= 0 \\ d(p^2) &= \frac{i}{p^2} & a(p^2) &= \frac{1-\alpha}{p^4} \end{aligned} \quad (30.74)$$

In conclusione, il propagatore per α generico si scrive

$$\tilde{G}^{(\alpha)}(p) = \begin{pmatrix} \frac{-g_{\nu\rho} + (1-\alpha) \frac{p_\nu p_\rho}{p^2}}{p^2 + i\epsilon} & \frac{i p_\nu}{p^2 + i\epsilon} \\ -\frac{i p_\rho}{p^2 + i\epsilon} & 0 \end{pmatrix} \quad (30.75)$$

dove abbiamo introdotto al prescrizione causale di Feynman nei denominatori. Il propagatore del campo A_μ nell' α -gauge è pertanto

$$\Delta_{\mu\nu}^{(\alpha)}(p) = i \frac{-g_{\nu\rho} + \frac{(1-\alpha) p_\nu p_\rho}{p^2}}{p^2 + i\epsilon} \quad (30.76)$$

In particolare, la scelta

$$\alpha = 1 \quad (30.77)$$

definisce il cosiddetto gauge di Feynman. Questa scelta ha il vantaggio di portare ad un propagatore per il campo vettoriale fotonico identico a quello di 4 campi scalari senza massa

$$\Delta_{\mu\nu}^F(p) = \frac{-i g_{\nu\rho}}{p^2 + i\epsilon} \quad (30.78)$$

Anche per $\alpha \neq 0$ il propagatore $\langle bb \rangle$ del campo $b(x)$ si annulla: pertanto i diagrammi di Feynman non contengono linee interne associate a $b(x)$. Se l'accoppiamento alla materia avviene sempre esclusivamente attraverso $A_\mu(x)$ non ci sono vertici che coinvolgono $b(x)$: pertanto, come nel gauge di Landau, i grafici di Feynman coinvolgono soltanto il propagatore del fotone.

In generale i singoli diagrammi di Feynman, che contengono linee fotoniche interne, dipenderanno dal parametro α che compare nel propagatore. La conservazione della corrente assicura che l'ampiezza totale ottenuta sommando i vari diagrammi per un dato processo ad un ordine perturbativo fissato risulta indipendente da α . I diagrammi possono quindi essere calcolati indifferentemente usando il propagatore per una qualunque scelta di α . Una dimostrazione sistematica e più soddisfacente di queste ultime affermazioni si ottiene introducendo una particolare simmetria che soggiace questo sistema, la cosiddetta simmetria di BRS.

31 Introduzione alla simmetria di BRS

L'idea fondamentale è di aggiungere al campo $b(x)$ che implementa il gauge di Landau

$$\mathcal{L}_{bosons} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + b(x) \partial^\mu A_\mu \quad (31.79)$$

anche due nuovi campi *anti-commutanti* $c(x)$ e $\bar{c}(x)$ la cui dinamica è data dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_{fermions} = \bar{c} \partial^2 c \quad (31.80)$$

I campi $c(x)$ e $\bar{c}(x)$ sono presi *hermitiani*. Essendo campi liberi essi ammettono la decomposizione in onde piane

$$\begin{aligned} c(x) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} (c_{\vec{p}} e^{-ipx} + c_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx}) \\ \bar{c}(x) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} (\bar{c}_{\vec{p}} e^{-ipx} + \bar{c}_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx}) \end{aligned} \quad (31.81)$$

Il propagatore corrispondente è

$$i \langle 0|T(c(x)\bar{c}(0))\rangle = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + i\epsilon} e^{-ipx} \quad (31.82)$$

Le regole di anti-commutazione per gli operatori di creazione e distruzione corrispondenti sono

$$\begin{aligned} [c_{\vec{p}}, \bar{c}_{\vec{p}'}^\dagger]_+ &= \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \\ [\bar{c}_{\vec{p}}, c_{\vec{p}'}^\dagger]_+ &= \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \end{aligned} \quad (31.83)$$

Questi operatori generano uno spazio di Fock di stati $\mathcal{H}_{c\bar{c}}$ della forma

$$c_{\vec{p}_1}^\dagger \cdots \bar{c}_{\vec{q}_1}^\dagger \cdots |0\rangle \quad (31.84)$$

Il settore bosonico è governato dalle regole per gli oscillatori associati alla componente longitudinale di A_μ e a $b(x)$

$$[a_{\vec{p},0}, \beta_{\vec{p}'}^\dagger] = \delta(\vec{p} - \vec{p}') \quad [a_{\vec{p},0}^\dagger, \beta_{\vec{p}'}] = -\delta(\vec{p} - \vec{p}') \quad (31.85)$$

che generano lo spazio di Fock degli stati $\mathcal{H}_{a_0 b}$ della forma

$$\beta_{\vec{p}_1}^\dagger \cdots a_{\vec{q}_1}^\dagger \cdots |0\rangle \quad (31.86)$$

e dagli oscillatori trasversi che hanno regole di commutazione usuali e generano lo spazio di Fock trasverso \mathcal{H}_{a_h} . Lo spazio degli stati totale è quindi il prodotto tensore $\mathcal{H}_{\text{BRS}} = \mathcal{H}_{c\bar{c}} \otimes \mathcal{H}_{a_0 b} \otimes \mathcal{H}_{a_h}$. Si tratta di uno spazio di stati a metrica indefinita, che quindi non ammette l'interpretazione di spazio degli stati di un sistema quantistico.

Consideriamo ora l'operatore, detto operatore di BRS:

$$Q = \int d^3\vec{p} [c_{\vec{p}}^\dagger \beta_{\vec{p}} + \beta_{\vec{p}}^\dagger c_{\vec{p}}] \quad (31.87)$$

Si noti che Q è un operatore fermionico. L'azione di Q sugli oscillatori è

$$\begin{aligned} [Q, c_{\vec{p}}^\dagger]_+ &= 0 & [Q, \bar{c}_{\vec{p}}^\dagger]_+ &= \beta_{\vec{p}}^\dagger \\ [Q, \beta_{\vec{p}}^\dagger] &= 0 & [Q, a_{0\vec{p}}^\dagger] &= c_{\vec{p}}^\dagger \end{aligned} \quad (31.88)$$

Analogamente

$$\begin{aligned} [Q, c_{\vec{p}}]_+ &= 0 & [Q, \bar{c}_{\vec{p}}]_+ &= \beta_{\vec{p}} \\ [Q, \beta_{\vec{p}}] &= 0 & [Q, a_{0\vec{p}}] &= c_{\vec{p}} \end{aligned} \quad (31.89)$$

Notiamo anche che

$$Q^2 = 0 \quad Q^\dagger = Q \quad (31.90)$$

Le regole di commutazione di Q con gli oscillatori implicano le seguenti regole con i campi

$$\begin{aligned} [Q, c(x)] &= 0 & [Q, \bar{c}(x)] &= b(x) & [Q, b(x)] &= 0 \\ [Q, A_\mu(x)] &= [Q, A_\mu^{(0)}(x)] = \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} (i p_\mu c_{\vec{p}} e^{-ipx} - i p_\mu c_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx}) = \\ &= \partial_\mu c(x) \end{aligned} \quad (31.91)$$

Consideriamo pertanto la densità lagrangiana totale

$$\mathcal{L}_{BRS} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + b(x) \partial^\mu A_\mu + \bar{c} \partial^2 c \quad (31.92)$$

Dall'ultima delle (31.91) vediamo che la parte gauge-invariante della densità lagrangiana è anche Q -invariante

$$Q \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) = 0 \quad (31.93)$$

Inoltre la parte non-gauge invariante della densità lagrangiana si scrive, grazie alle (31.91)

$$b(x) \partial^\mu A_\mu + \bar{c} \partial^2 c = Q (\bar{c}(x) \partial^\mu A_\mu) \quad (31.94)$$

Pertanto anche questa parte della lagrangiana è Q -invariante. In definitiva Q è una simmetria della lagrangiana totale

$$Q \mathcal{L}_{BRS} = 0 \quad (31.95)$$

Definiamo allora il sottospazio degli stati annichilati da Q :

$$\mathcal{H}_{fisici} = \{\psi \in \mathcal{H}_{BRS} \mid Q\psi = 0\} = \ker Q \quad (31.96)$$

Osserviamo che il fatto che $Q^2 = 0$ implica che gli stati che sono nell'immagine di Q appartengono a \mathcal{H}_{fisici} :

$$\text{Im}Q = \{\psi \in \mathcal{H}_{BRS} \mid \psi = Q\chi, \chi \in \mathcal{H}_{BRS}\} \subset \mathcal{H}_{fisici} \quad (31.97)$$

Gli stati nell'immagine di Q vengono detti Q -esatti. Questi stati hanno tutti norma nulla e sono tutti ortogonali a \mathcal{H}_{fisici}

$$\langle Q\chi_1, \psi_{phys} \rangle = \langle \chi_1, Q\psi_{phys} \rangle = 0 \quad (31.98)$$

Lo spazio degli stati del fotone è pertanto definito come il quoziente

$$\mathcal{H}_{fotoni} = \ker Q / \text{Im}Q \quad (31.99)$$

\mathcal{H}_{fisici} è conservato dall'evoluzione temporale associata alla densità \mathcal{L}_{BRS} . Sarà conservato dalla evoluzione associata alla Hamiltoniana che include anche l'interazione con la materia, a patto che anche essa conservi Q . Poichè l'azione di Q sul campo di gauge è quella di una trasformazione di gauge con parametro $c(x)$, Q è conservato dalla evoluzione temporale totale se l'interazione con il campo di materia è gauge-invariante. In questo caso la matrice S si proietta su una matrice unitaria che agisce sul quoziente \mathcal{H}_{fotoni} .

Notiamo che \mathcal{H}_{fisici} è il sottospazio degli stati in $\mathcal{H}_{c\bar{c}} \otimes \mathcal{H}_{a_0 b} \otimes \mathcal{H}_{a_h}$ che sono $\beta_{\bar{c}}$ e $c_{\bar{c}}$ invarianti: per quanto riguarda il settore bosonico questi sono quindi proprio gli stati di Gupta-Bleuler, mentre per quanto riguarda il settore fermionico, questi sono gli stati che non contengono l'oscillatore $\bar{c}_{\bar{p}}$.

Consideriamo ora la lagrangiana corrispondente ad un α -gauge

$$\mathcal{L}_{BRS}^{(\alpha)} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + b \partial^\mu A_\mu + \alpha b^2 + \bar{c} \partial^2 c \quad (31.100)$$

Notiamo che essa può essere riscritta come

$$\mathcal{L}_{BRS}^{(\alpha)} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + Q(\bar{c} \partial^\mu A_\mu + \alpha \bar{c} b) \quad (31.101)$$

Pertanto $\mathcal{L}_{BRS}^{(\alpha)}$ è Q -invariante: e lo rimane anche dopo l'accoppiamento a materia in modo gauge invariante esattamente come la lagrangiana con

$\alpha = 0$ corrispondente al gauge di Landau. È pertanto possibile definire, in corrispondenza alla lagrangiana nel gauge α , una evoluzione temporale ed una matrice S unitaria sullo spazio quoziente $\ker Q/\text{Im}Q$ — esattamente come nel caso $\alpha = 0$.

L'evoluzione temporale sullo spazio totale \mathcal{H}_{BRS} naturalmente dipende da α , in quanto teorie con α diverse avranno Hamiltoniane diverse. Tali Hamiltoniane differiscono però per termini Q -esatti

$$H^{(\alpha)} = H^{(\alpha=0)} + [Q, V_\alpha] \quad (31.102)$$

L'evoluto temporale di uno stato fisico con l'Hamiltoniana $H^{(\alpha)}$ differirà pertanto dall'evoluto con l'Hamiltoniana $H^{(\alpha=0)}$ per stati che saranno pure Q -esatti. Conseguentemente l'evoluzione e la matrice S sullo spazio quoziente $\ker Q/\text{Im}Q$ sono ambedue indipendenti da α .

La riformulazione del meccanismo di Gupta-Bleuler in elettrodinamica nel linguaggio dell'operatore di BRS Q permette di capire in maniera immediata l'indipendenza dalla scelta di gauge dell'azione per il fotone: tutte le scelte che differiscono per termini Q esatti sono fisicamente equivalenti. Inoltre la formulazione di BRS è direttamente applicabile anche alle generalizzazioni dell'elettrodinamica come le teorie di Yang-Mills per le quali l'analogo del campo $b(x)$ non può essere preso come libero: per queste teorie il meccanismo di cancellazione dei gradi di libertà non fisici corrispondenti alle componenti longitudinali dei vettori necessariamente coinvolge anche i campi fermionici c e \bar{c} oltre che il campo $b(x)$: gradi di libertà longitudinali dei vettori insieme quelli associati a $b(x)$, $c(x)$ e $\bar{c}(x)$ formano il cosiddetto quartetto di Kugo-Ojima. La supersimmetria Q che assicura la cancellazione del quartetto è un esempio di simmetria topologica.

32 I fattori di forma dell'elettrone

L'interazione di un elettrone con un campo elettromagnetico esterno è descritta dalla ampiezza invariante

$$M_{fi} = -e \bar{u}_2(p_2) \Gamma^\mu u_1(p_1) A_\mu(k) \equiv -e j_{fi}^\mu A_\mu(k) \quad (32.103)$$

dove $A_\mu(k)$ è la trasformata di Fourier del campo esterno e

$$k = p_2 - p_1 \quad (32.104)$$

La matrice Γ^μ può essere decomposta nella base

$$\Gamma^A = \{\mathbb{I}, \gamma_5 \gamma^\mu, \gamma_5 \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}\} \quad (32.105)$$

Poiché l'interazione elettromagnetica conserva la parità, l'elemento di matrice della corrente in (32.103) deve essere una combinazione lineare dei bilineari

$$j_{fi}^\mu = A k^\mu \bar{u}_2 u_1 + B P^\mu \bar{u}_2 u_1 + C \bar{u}_2 \gamma^\mu u_1 \quad (32.106)$$

dove abbiamo introdotto la seconda combinazione linearmente indipendente dei momenti p_1 e p_2

$$P = p_1 + p_2 \quad (32.107)$$

A , B e C sono funzioni scalari dei momenti k e P . La condizione che la corrente sia conservata

$$j_{fi}^\mu k_\mu = 0 = A k^2 \bar{u}_2 u_1 + C \bar{u}_2 (\not{p}_2 - \not{p}_1) u_1 = A k^2 \bar{u}_2 u_1 \quad (32.108)$$

impone che

$$A = 0 \quad (32.109)$$

In definitiva la forma generale dell'elemento di matrice della corrente è

$$j_{fi}^\mu = B(k^2) P^\mu \bar{u}_2 u_1 + C(k^2) \bar{u}_2 \gamma^\mu u_1 \quad (32.110)$$

in quanto k^2 l'unico invariante che si può costruire con p_1 e p_2 , per i quali $p_1^2 = p_2^2 = m_2^2$. Poiché

$$\begin{aligned} k_\nu \bar{u}_2 \sigma^{\mu\nu} u_1 &= \frac{1}{2} \bar{u}_2 [\gamma^\mu (\not{p}_2 - \not{p}_1) - (\not{p}_2 - \not{p}_1) \gamma^\mu] u_1 = \\ &= \frac{1}{2} \bar{u}_2 [\gamma^\mu (\not{p}_2 - m) - (m - \not{p}_1) \gamma^\mu] u_1 = \\ &= -m \bar{u}_2 \gamma^\mu u_1 + \frac{1}{2} \bar{u}_2 [\gamma^\mu \not{p}_2 + \not{p}_1 \gamma^\mu] u_1 = \\ &= -2m \bar{u}_2 \gamma^\mu u_1 + P^\mu \bar{u}_2 u_1 \end{aligned} \quad (32.111)$$

l'elemento di matrice della corrente si può anche scrivere come

$$\begin{aligned} j_{fi}^\mu &= B(k^2) (k_\nu \bar{u}_2 \sigma^{\mu\nu} u_1 + 2m \bar{u}_2 \gamma^\mu u_1) + C(k^2) \bar{u}_2 \gamma^\mu u_1 = \\ &= f(k^2) \bar{u}_2 \gamma^\mu u_1 - \frac{g(k^2)}{2m} k_\nu \bar{u}_2 \sigma^{\mu\nu} u_1 \end{aligned} \quad (32.112)$$

dove

$$f(k^2) \equiv C(k^2) + 2m B(k^2) \quad g(k^2) \equiv -2m B(k^2) \quad (32.113)$$

sono fattori di forma adimensionali.

Ricordiamo che

$$(\bar{u}_2 \Gamma u_1)^* = \bar{u}_1 \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0 u_2 \quad (32.114)$$

Quindi

$$(\bar{u}_2 \gamma^\mu u_1)^* = \bar{u}_1 \gamma^\mu u_2 \quad (\bar{u}_2 \sigma^{\mu\nu} u_1)^* = -\bar{u}_1 \sigma^{\mu\nu} u_2 \quad (32.115)$$

Abbiamo pertanto che

$$\begin{aligned} M_{fi}^* &= -e (j_{fi}^\mu)^* A_\mu^*(k) = \\ &= -e A_\mu(-k) [f^*(k^2) \bar{u}_1 \gamma^\mu u_2 - \frac{g^*(k^2)}{2m} (-k)_\nu \bar{u}_1 \sigma^{\mu\nu} u_1] \end{aligned} \quad (32.116)$$

La relazione di unitarietà per la matrice S dà però la condizione

$$M_{fi} - M_{if}^* = 0 \quad (32.117)$$

per $k^2 < 4m^2$. Pertanto

$$f^*(k^2) = f(k^2) \quad g^*(k^2) = g(k^2) \quad \text{per } k^2 < 4m^2 \quad (32.118)$$

cioè le funzioni analitiche $f(t)$ e $g(t)$ con $t = k^2$ sono reali sull'asse reale per $t < 4m^2$. Questo porta alla rappresentazione delle due funzioni attraverso le relazioni di dispersione

$$\begin{aligned} \frac{f(t) - 1}{t} &= \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dt'}{\pi} \Im\left(\frac{f(t') - 1}{t'}\right) \frac{1}{t' - t + i\epsilon} \\ g(t) &= \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dt'}{\pi} \frac{\Im(g(t'))}{t' - t + i\epsilon} \end{aligned} \quad (32.119)$$

33 I determinanti funzionali

33.1 Il determinante per l'oscillatore armonico in 1d

Si consideri il sistema uni-dimensionale descritto dall'Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \quad (33.1)$$

La rappresentazione di Feynman per gli elementi di matrice dell'operatore evoluzione temporale si scrive

$$\langle x_2 | e^{-\frac{i}{\hbar} T \hat{H}} | x_1 \rangle = \mathcal{N} \int [dx(t)]_{\substack{x(0)=x_1 \\ x(T)=x_2}} e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t), \dot{x}(t)]} \quad (33.2)$$

dove

$$S[x(t), \dot{x}(t)] = \int_0^T \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x(t)) \right] \quad (33.3)$$

è l'azione classica del sistema e \mathcal{N} è un fattore di normalizzazione (tipicamente divergente) indipendente dai parametri del problema.

Il membro di sinistra dell'equazione (33.2) può essere riscritto in termini degli autovalori E_n ed delle autofunzioni $\psi_n(x)$ di \hat{H} :

$$\langle x_2 | e^{-\frac{i}{\hbar} T \hat{H}} | x_1 \rangle = \sum_n e^{-\frac{i E_n T}{\hbar}} \psi_n^*(x_2) \psi_n(x_1) \quad (33.4)$$

In particolare,

$$\int dx \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar} T \hat{H}} | x \rangle = \text{Tr} e^{-\frac{i}{\hbar} T \hat{H}} = \sum_n e^{-\frac{i E_n T}{\hbar}} \quad (33.5)$$

Nel caso particolare di un oscillatore armonico:

$$V(x) = \frac{m\omega^2}{2} x^2 \quad (33.6)$$

le formule (33.4) e (33.5) diventano

$$\langle x_2 | e^{-\frac{i}{\hbar} T \hat{H}} | x_1 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega T} \psi_n^*(x_2) \psi_n(x_1) \quad (33.7)$$

e

$$\text{Tr} e^{-\frac{i}{\hbar} T \hat{H}} = \frac{e^{-\frac{i\omega T}{2}}}{1 - e^{-i\omega T}} \quad (33.8)$$

La rappresentazione di Feynman in termini dei cammini $x(t)$ dà per l'elemento di matrice (33.2) l'espressione:

$$\langle x_2 | e^{-\frac{i}{\hbar} T \hat{H}} | x_1 \rangle = \frac{1}{[\det(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2)]^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{i}{\hbar} S[\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)]} \quad (33.9)$$

dove $\bar{x}(t)$ è la soluzione delle equazioni del moto classiche che soddisfa le condizioni al contorno $x(0) = x_1$ e $x(T) = x_2$. Cominciamo col calcolare il termine esponenziale:

$$\begin{aligned} S[\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)] &= \frac{1}{2} \int_0^T dt \left[\frac{d}{dt} (m \dot{\bar{x}} \bar{x}(t)) - \bar{x}(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) \bar{x}(t) \right] \quad (33.10) \\ &= \frac{m}{2} \int_0^T dt \frac{d}{dt} (\bar{x} \dot{\bar{x}}(t)) = \frac{m}{2} \left[\bar{x}(T) \dot{\bar{x}}(T) - \bar{x}(0) \dot{\bar{x}}(0) \right] \end{aligned}$$

Dobbiamo dunque determinare $\dot{\bar{x}}(T)$ e $\dot{\bar{x}}(0)$ in termini di $\bar{x}(0) = x_1$ e $\bar{x}(T) = x_2$. La soluzione generica delle equazioni del moto si scrive

$$\bar{x}(t) = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t} \quad (33.11)$$

Dunque

$$x_1 = A + B \quad x_2 = A z + B z^* \quad (33.12)$$

dove abbiamo posto

$$z(T) \equiv e^{i\omega T} \quad (33.13)$$

Risolvendo (33.12) in termini di A e B otteniamo

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{(z^* - z)} \begin{pmatrix} z^* & -1 \\ -z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (33.14)$$

Da (33.11) otteniamo anche

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}(0) \\ \dot{\bar{x}}(T) \end{pmatrix} &= i\omega \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ z & -z^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \\ &= \frac{i\omega}{(z^* - z)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ z & -z^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^* & -1 \\ -z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{i\omega}{(z^* - z)} \begin{pmatrix} (z + z^*) & -2 \\ -2 & -(z + z^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (33.15) \end{aligned}$$

Pertanto l'azione valutata sulla soluzione classica si scrive

$$\begin{aligned} S[\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)] &= \frac{m}{2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}(0) \\ \dot{\bar{x}}(T) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{i\omega m}{2(z^* - z)} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z + z^* & -2 \\ -2 & -z - z^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{i\omega m}{2(z - z^*)} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z + z^* & -2 \\ 2 & z + z^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{i\omega m}{2(z - z^*)} \left[(z + z^*)(x_1^2 + x_2^2) - 4x_1 x_2 \right] \quad (33.16) \end{aligned}$$

Sostituendo questa espressione nella (33.9), prendendo $x_1 = x_2 = x$ ed integrando rispetto ad x otteniamo

$$\begin{aligned}
\int dx \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar} T \hat{H}} | x \rangle &= \frac{1}{[\det(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2)]^{\frac{1}{2}}} \int dx e^{-\frac{\omega m (z+z^*-2)}{(z-z^*) \hbar} x^2} \\
&= \frac{1}{[\det(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2)]^{\frac{1}{2}}} \int dx e^{-\frac{\omega m (z-1)}{(z+1) \hbar} x^2} \\
&= \frac{\sqrt{\frac{\hbar \pi (1+z)}{\omega m (z-1)}}}{[\det(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2)]^{\frac{1}{2}}} \tag{33.17}
\end{aligned}$$

Confrontando con l'espressione (33.8) per la funzione di partizione ottenuta attraverso il formalismo operatoriale arriviamo, in maniera indiretta, alla seguente formula per il determinante funzionale

$$[\det(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2)]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\hbar \pi (z^2 - 1)}{z \omega m}} \tag{33.18}$$

od equivalentemente

$$\det(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2) = \frac{2 \pi i \hbar}{\omega m} \sin(\omega T) \tag{33.19}$$

Notiamo che l'operatore differenziale hermitiano e definito positivo che si ottiene per rotazione di Wick dall'operatore differenziale originario è

$$-\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \tag{33.20}$$

Il suo determinante funzionale si ottiene da (33.19) per continuazione analitica $T \rightarrow -iT$ ed è una funzione reale:

$$\det(-\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2) = \frac{2 \pi \hbar}{\omega m} \sinh(\omega T) \tag{33.21}$$

Notiamo che gli autovalori dell'operatore (hermitiano) (33.20) sono

$$\frac{\pi^2 n^2}{T^2} + \omega^2 \tag{33.22}$$

con $n = 1, 2, \dots$, e le autofunzioni corrispondenti sono $\sin \frac{\pi \omega t}{T}$. Pertanto la definizione diretta del determinante (33.21) come prodotto degli autovalori darebbe

$$\det\left(-\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi^2 n^2}{T^2} + \omega^2\right) \quad (33.23)$$

che è un'espressione divergente. Consideriamo però il rapporto dei determinanti

$$\frac{\det\left(-\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)}{\det\left(-\frac{d^2}{dt^2}\right)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2 n^2}\right) \quad (33.24)$$

Questo prodotto infinito è convergente e dà

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2 n^2}\right) = \frac{\sinh(\omega T)}{\omega T} \quad (33.25)$$

in accordo con il risultato ottenuto indirettamente, (33.21).

33.2 Determinanti funzionali e tracce

Sia $D(\alpha)$ un operatore lineare hermitiano con spettro positivo dipendente da un parametro α (le stesse considerazioni si applicano se α è una famiglia di parametri o perfino una funzione). Siano ψ_n e $\lambda_n(\alpha)$ le autofunzioni e gli autovalori — ambedue dipendenti da α — di $D(\alpha)$:

$$D(\alpha) \psi_n = \lambda_n(\alpha) \psi_n \quad (33.26)$$

Scriviamo il logaritmo del determinante di $D(\alpha)$ nel modo seguente

$$\log \det D(\alpha) = \log \prod_n \lambda_n(\alpha) = \sum_n \log \lambda_n(\alpha) \quad (33.27)$$

Dall'identità

$$\frac{1}{\lambda_n} = \int_0^{\infty} dT e^{-\lambda_n T} \quad (33.28)$$

otteniamo, integrando rispetto a λ_n , l'equazione

$$\log \lambda_n(\alpha) - \log \lambda_n(\alpha_0) = - \int_0^{\infty} \frac{dT}{T} \left[e^{-\lambda_n(\alpha) T} - e^{-\lambda_n(\alpha_0) T} \right] \quad (33.29)$$

Si noti che la funzione che compare nel secondo membro della Eq. (33.29) è integrabile in quanto per $T \rightarrow 0$ abbiamo

$$-\frac{1}{T} \left[e^{-\lambda_n(\alpha)T} - e^{-\lambda_n(\alpha_0)T} \right] \rightarrow \left[\lambda_n(\alpha) - \lambda_n(\alpha_0) \right] + O(T) \quad (33.30)$$

Al contrario, ciascuno dei due termini che compare nel secondo membro della (33.29) tende alla funzione $\frac{1}{T}$ per $T \rightarrow 0$ e quindi non sarebbe, da solo, integrabile. Per questa ragione la rappresentazione integrale (33.29) è possibile solo per la differenza $\log \lambda_n(\alpha) - \log \lambda_n(\alpha_0)$ e non per ciascun logaritmo separatamente.

Sostituendo (33.29) in Eq. (33.27) otteniamo una formula per il determinante dell'operatore in termini della traccia del suo esponenziale:

$$\begin{aligned} \log \frac{\det D(\alpha)}{\det D(\alpha_0)} &= - \int_0^\infty \frac{dT}{T} \sum_n [e^{-\lambda_n(\alpha)T} - e^{-\lambda_n(\alpha_0)T}] \\ &= - \int_0^\infty \frac{dT}{T} [\text{Tr} e^{-D(\alpha)T} - \text{Tr} e^{-D(\alpha_0)T}] \end{aligned} \quad (33.31)$$

Determiniamo quali sono le condizioni per cui l'integrale rispetto a T che appare nel secondo membro di questa equazione (33.31) sia convergente. L'integrando tende per $T \rightarrow 0$ all'espressione

$$-\frac{1}{T} [\text{Tr} e^{-D(\alpha)T} - \text{Tr} e^{-D(\alpha_0)T}] \rightarrow [\text{Tr} D(\alpha) - \text{Tr} D(\alpha_0)] \quad (33.32)$$

Pertanto l'integrale in Eq. (33.31) è convergente solo se la differenza di tracce operatoriali nella (33.32) esiste. Spesso per gli operatori di interesse le tracce in questione non sono ben definite: è utile in questo caso definire una versione regolarizzata della formula (33.31)

$$\log \frac{\det_\epsilon D(\alpha)}{\det_\epsilon D(\alpha_0)} \equiv - \int_\epsilon^\infty \frac{dT}{T} [\text{Tr} e^{-D(\alpha)T} - \text{Tr} e^{-D(\alpha_0)T}] \quad (33.33)$$

ed analizzare poi il limite $\epsilon \rightarrow 0$ per individuare il significato fisico della divergenza corrispondente.

Problema: Calcolare $\det D(\omega) \equiv \det(-\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2)$ utilizzando la formula (33.33) per t su un intervallo sull'asse reale di lunghezza L con $L \rightarrow \infty$.

Calcoliamo per prima cosa la “funzione di partizione”

$$\text{Tr} e^{-T(-\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2)} = \int \frac{L dk}{2\pi} e^{-T(k^2 + \omega^2)} = \frac{L}{2\sqrt{\pi T}} e^{-T\omega^2} \quad (33.34)$$

Pertanto dalla (33.33) otteniamo

$$\begin{aligned}
\log \frac{\det_\epsilon D(\omega)}{\det_\epsilon D(0)} &= - \int_\epsilon^\infty \frac{dT}{T} \frac{L}{2\sqrt{\pi T}} \left[e^{-T\omega^2} - 1 \right] \\
&= - \frac{L}{2\sqrt{\pi}} \int_\epsilon^\infty \frac{dT}{T^{3/2}} \left[e^{-T\omega^2} - 1 \right] \\
&= - \frac{L\omega}{2\sqrt{\pi}} \int_{\epsilon\omega^2}^\infty \frac{dT}{T^{3/2}} \left[e^{-T} - 1 \right] \\
&\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} - \frac{L\omega}{2\sqrt{\pi}} (-2\sqrt{\pi}) = L\omega
\end{aligned} \tag{33.35}$$

Questa formula è in accordo con la formula (33.21) che nel limite $L \rightarrow \infty$ dà

$$\frac{\det(-\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2)}{\det(-\frac{d^2}{dt^2})} = \frac{\sinh(\omega L)}{L} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{e^{\omega L}}{L} \tag{33.36}$$

da cui

$$\log \frac{\det(-\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2)}{\det(-\frac{d^2}{dt^2})} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \omega L + O(\log(L)) \tag{33.37}$$

33.3 Campo scalare in campo magnetico costante

Consideriamo un potenziale vettore

$$A_\mu \equiv (A_0, A_1, A_2, A_3) = (0, 0, B x_1, 0) \tag{33.38}$$

corrispondente ad un campo magnetico costante $\vec{B} = (0, 0, B)$ lungo l'asse x_3 . Consideriamo un campo scalare complesso in presenza di questo campo esterno. L'azione del sistema è

$$S_B(\phi, \phi^*) = - \int d^4x \phi^*(x) \left[\hbar^2 D_\mu D^\mu + c^2 m^2 \right] \phi(x) \tag{33.39}$$

dove abbiamo scelto la metrica di Lorentz $(1, -1, -1, -1)$ e abbiamo posto e

$$-i\hbar D_\mu \equiv -i\hbar \partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \tag{33.40}$$

In termini degli operatori di prima quantizzazione \hat{p}_μ , la definizione (33.40) esprime il fatto che per tenere conto della presenza di un campo elettromagnetico esterno bisogna operare la seguente sostituzione sui momenti canonici

$$\hat{p}_\mu \rightarrow \hat{p}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \tag{33.41}$$

L'integrale di Feynman per questo sistema si scrive

$$e^{\frac{i}{\hbar} S_{eff}(B)} = \int [d\phi d\phi^*] e^{\frac{i}{\hbar} S_B(\phi, \phi^*)} = \frac{1}{\det[\hbar^2 D_\mu D^\mu + c^2 m^2]} \quad (33.42)$$

L'azione effettiva per il campo elettromagnetico prodotta dalla materia è dunque

$$\frac{i}{\hbar} S_{eff}(B) = -\log \det[\hbar^2 D_\mu D^\mu + c^2 m^2] \quad (33.43)$$

Vogliamo dunque calcolare il determinante del seguente operatore

$$\hat{H}(B) \equiv -\hat{p}_0^2 + \hat{p}_1^2 + (\hat{p}_2 - \frac{e}{c} B x_1)^2 + \hat{p}_3^2 + c^2 m^2 \quad (33.44)$$

dove abbiamo introdotto gli operatori "momento" $\hat{p}_\mu = -i\hbar \partial_\mu$. L'operatore $\hat{H}(B)$ non è definito positivo a causa del segno meno davanti al primo termine. Consideriamo allora l'operatore definito positivo ottenuto per rotazione di Wick $x_0 \rightarrow -ix_0$.

$$\hat{H}_{euc}(B) \equiv \hat{p}_0^2 + \hat{p}_1^2 + (\hat{p}_2 - \frac{e}{c} \hat{x}_1 B)^2 + \hat{p}_3^2 + c^2 m^2 \quad (33.45)$$

Con questa sostituzione l'integrale di Feynman in (33.42) diventa reale

$$e^{\frac{i}{\hbar} S_{eff}(B)} \rightarrow e^{-\frac{S_{eff}(B)}{\hbar}} \quad (33.46)$$

per cui

$$\frac{S_{eff}(B)}{\hbar} = \log \det \hat{H}_{euc}(B) \quad (33.47)$$

Per applicare la formula (33.33) dobbiamo dunque calcolare la funzione di partizione per l'operatore $\hat{H}_{euc}(B)$

$$Z(B, T) \equiv \text{Tr} e^{-T \hat{H}_{euc}(B)} \quad (33.48)$$

L'operatore (33.45) può essere visto come l'Hamiltoniana di un sistema di meccanica quantistica: gli operatori momento \hat{p}_0 , \hat{p}_3 e \hat{p}_2 commutano tra loro e con questa Hamiltoniana ed hanno spettro continuo. Per ottenere uno spettro discreto conviene mettere il sistema in una scatola quadridimensionale con $0 \leq x_\mu \leq L_\mu$. La funzione di partizione (euclidea) per questo sistema quantistico si scrive dunque

$$Z(B, T) = \int \frac{dp_0 L_0}{2\pi\hbar} \frac{dp_2 L_2}{2\pi\hbar} \frac{dp_3 L_3}{2\pi\hbar} e^{-T(p_0^2 + p_3^2 + c^2 m^2)} \text{Tr} e^{-T[p_1^2 + e^2 B^2 (x_1 - \frac{c p_2}{e B})^2]} \quad (33.49)$$

dove la traccia nel secondo membro è la traccia sullo spazio degli stati di un oscillatore armonico unidimensionale

$$H_{osc} = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2} (x - x_0)^2 \quad (33.50)$$

con le identificazioni di $\mu = \frac{1}{2}$ e

$$\omega = 2 \frac{eB}{c} \quad (33.51)$$

Si noti che l'oscillatore è centrato in

$$(x_1)_0 = \frac{cp_2}{eB} \quad (33.52)$$

Pertanto gli autovalori del momento p_2 devono essere presi in un intervallo limitato

$$0 \leq x_1 \leq L_1 \Rightarrow 0 \leq p_2 \leq \frac{e}{c} B L_1 \quad (33.53)$$

In definitiva (33.49) si scrive

$$\begin{aligned} Z(B, T) &= \int \frac{dp_0 L_0}{2\pi\hbar} \frac{dp_2 L_2}{2\pi\hbar} \frac{dp_3 L_3}{2\pi\hbar} e^{-T(p_0^2 + p_3^2 + c^2 m^2)} \frac{e^{-\frac{eB\hbar}{c} T}}{1 - e^{-2\frac{eB\hbar}{c} T}} \\ &= \frac{L_0 L_2 L_3}{8\pi^2 \hbar^3 T} \int dp_2 \frac{e^{-\frac{eB\hbar}{c} T}}{1 - e^{-2\frac{eB\hbar}{c} T}} e^{-c^2 m^2 T} \\ &= \frac{V_4 e B}{8\pi^2 c \hbar^3 T} \frac{e^{-c^2 m^2 T}}{e^{\frac{eB\hbar}{c} T} - e^{-\frac{eB\hbar}{c} T}} \end{aligned} \quad (33.54)$$

dove $V_4 \equiv L_0 L_1 L_2 L_3$ è il volume 4-dimensionale in cui abbiamo posto il sistema. Notiamo che il limite di questa espressione per $B \rightarrow 0$ è

$$Z(0, T) = \frac{V_4}{16\pi^2 \hbar^4 T^2} e^{-c^2 m^2 T} \quad (33.55)$$

La formula (33.33) per il logaritmo del determinante diventa allora

$$\begin{aligned} \frac{S_{eff}(B) - S_{eff}(0)}{\hbar V_4} &= \frac{1}{V_4} \log \frac{\det_\epsilon H_{euc}(B)}{\det H_{euc}(0)} \\ &= - \int_\epsilon^\infty \frac{dT}{T} [Z(B, T) - Z(0, T)] \\ &= - \int_\epsilon^\infty \frac{dT}{16\pi^2 \hbar^4 T^3} \left[\frac{2 \frac{eB\hbar}{c} T}{e^{\frac{eB\hbar}{c} T} - e^{-\frac{eB\hbar}{c} T}} - 1 \right] e^{-c^2 m^2 T} \end{aligned} \quad (33.56)$$

L'integrale nel secondo membro della equazione precedente diverge logicamente per $\epsilon \rightarrow 0$ in quanto

$$\frac{1}{T^3} \left[\frac{2 \frac{eB\hbar}{c} T}{e^{\frac{eB\hbar}{c} T} - e^{-\frac{eB\hbar}{c} T}} - 1 \right] e^{-c^2 m^2 T} \rightarrow \frac{-1}{3!} \frac{e^2 B^2 \hbar^2}{c^2 T} + O(T^0) \quad (33.57)$$

Riscriviamo pertanto la (33.56) aggiungendo e sottraendo il termine divergente

$$\begin{aligned} \frac{S_{eff}(B) - S_{eff}(0)}{\hbar V_4} &= \frac{e^2 B^2}{16 \cdot 3! \pi^2 c^2 \hbar^2} \int_{\epsilon c^2 m^2}^{\infty} \frac{dT}{T} e^{-T} + \quad (33.58) \\ &- \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dT}{16 \pi^2 T^3 \hbar^4} \left[\frac{2 \frac{eB\hbar}{c} T}{e^{\frac{eB\hbar}{c} T} - e^{-\frac{eB\hbar}{c} T}} - 1 + \frac{e^2 B^2 \hbar^2 T^2}{3! c^2} \right] e^{-c^2 m^2 T} \\ &= - \frac{e^2 B^2}{16 \cdot 3! \pi^2 c^2 \hbar^2} \log \frac{\epsilon}{C} + \\ &- \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dT}{16 \pi^2 \hbar^4 T^3} \left[\frac{2 \frac{eB\hbar}{c} T}{e^{\frac{eB\hbar}{c} T} - e^{-\frac{eB\hbar}{c} T}} - 1 + \frac{e^2 B^2 \hbar^2 T^2}{3! c^2} \right] e^{-c^2 m^2 T} \end{aligned}$$

dove C è una costante numerica. Definiamo allora l'azione effettiva *rinormalizzata*

$$\begin{aligned} \frac{S_{eff}^{rin}(B)}{V_4} &\equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{S_{eff}(B) - S_{eff}(0)}{V_4} + \frac{e^2 B^2}{16 \cdot 3! \hbar c^2 \pi^2} \log \frac{\epsilon}{C} = \quad (33.59) \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{dT}{16 \pi^2 \hbar^3 T^3} \left[\frac{2 \frac{eB\hbar}{c} T}{e^{\frac{eB\hbar}{c} T} - e^{-\frac{eB\hbar}{c} T}} - 1 + \frac{e^2 B^2 \hbar^2 T^2}{3! c^2} \right] e^{-c^2 m^2 T} \\ &= - \frac{m^4 c^4}{16 \pi^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{dT}{T^3} \left[\frac{2 b T}{e^{bT} - e^{-bT}} - 1 + \frac{b^2 T^2}{3!} \right] e^{-T} \end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto il parametro adimensionale

$$b \equiv \frac{e B \hbar}{m^2 c^3} \quad (33.60)$$

Il significato dell'azione rinormalizzata è il seguente. L'azione totale per unità di volume quadridimensionale associata al campo magnetico costante è data dalla somma dell'azione classica

$$S_0 = \frac{1}{8 c \pi} \int d^4 x (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) = - \frac{V_4 B^2}{8 c \pi} \quad (33.61)$$

e dell'azione effettiva $S_{eff}(B)$ prodotta dal campo di materia scalare. Possiamo quindi scrivere l'azione totale come la somma di un termine quadratico nel campo magnetico

$$S^{(2)} = -\frac{V_4 B^2}{8 c \pi} \left(1 + \frac{e^2}{2 \cdot 3! \pi \hbar c} \log \frac{\epsilon}{C} \right) \quad (33.62)$$

e dell'azione effettiva rinormalizzata in (33.60) la cui espansione per piccoli b parte dal termine b^4 :

$$\begin{aligned} S_{eff}^{rin}(B) &= -\frac{m^4 c^4 V_4}{16 \pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{dT}{T^3} \left[\frac{2 b T}{e^{bT} - e^{-bT}} - 1 + \frac{b^2 T^2}{3!} \right] e^{-T} \\ &= -\frac{m^4 c^4 V_4}{16 \pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dT \left[\frac{7 b^4}{360} e^{-T} T - \frac{31 b^6}{15120} e^{-T} T^3 + O(b^8) \right] \\ &= -\frac{m^4 c^4 V_4}{16 \pi^2 \hbar^3} \left[\frac{7 b^4}{360} - \frac{31 b^6}{2520} + O(b^8) \right] \\ &= -\frac{7}{360} \frac{m^4 c^4 V_4}{16 \pi^2 \hbar^3} \frac{e^4 B^4 \hbar^4}{m^8 c^{12}} + O(B^6) \\ &= -\frac{7}{2 \cdot 360 \pi \hbar c} \frac{e^2}{m^4 c^6} \frac{e^2 B^2 \hbar^2}{8 \pi c} V_4 B^2 + O(B^6) \end{aligned} \quad (33.63)$$

L'equazione (33.62) mostra che all'ordine $\frac{\epsilon}{\hbar c}$ tutto l'effetto della divergenza logaritmica può essere riassorbito riscaldando il campo B o equivalentemente il campo vettore A_μ e introducendo un campo "rinormalizzato"

$$A_\mu^{rin} = A_\mu \left(1 + \frac{e^2}{4 \cdot 3! \pi \hbar c} \log \frac{\epsilon}{C} \right) \quad (33.64)$$

L'azione totale $S^{(2)} + S_{eff}$ è un funzionale del campo rinormalizzato (33.64) finito per $\epsilon \rightarrow 0$. Poiché l'accoppiamento del campo elettro-magnetico alla materia avviene attraverso l'interazione $e \int d^4 x A_\mu j^\mu$ la ridefinizione (33.64) è equivalente ad introdurre una carica "rinormalizzata"

$$e_{rin} \equiv e \left(1 - \frac{e^2}{4 \cdot 3! \pi \hbar c} \log \frac{\epsilon}{C} \right) \quad (33.65)$$

L'idea della rinormalizzazione è di considerare il limite $\epsilon \rightarrow 0$ mantenendo finito e_{rin} (e quindi prendendo una carica "nuda" e divergente): tutte le grandezze fisiche saranno delle funzioni finite quando espresse in termini di e_{rin} .

33.4 Campo scalare in campo elettrico costante

Un campo elettrico costante nella direzione delle asse delle z può essere descritto dal potenziale vettore

$$A_\mu = (E x_3, 0, 0, 0) \quad (33.66)$$

L'operatore di cui vogliamo dunque calcolare il determinante è l'analogo dell'operatore (33.44)

$$\hat{H}(E) \equiv -(\hat{p}_0 - \frac{eE}{c}x_3)^2 + \hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2 + c^2 m^2 \quad (33.67)$$

Effettuando la rotazione di Wick $x_0 \rightarrow -ix_0$, $p_0 \rightarrow ip_0$ nella (33.67) otteniamo

$$\hat{H}_{euc}(E) \equiv (\hat{p}_0 - \frac{ieE}{c}x_3)^2 + \hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2 + c^2 m^2 \quad (33.68)$$

Notiamo che l'operatore ottenuto *non* è hermitiano: il suo spettro non sarà reale e, di conseguenza, il determinante avrà una parte immaginaria. Applichiamo infatti i risultati della sezione precedente sostituendo nelle formule ottenute nel caso magnetico il campo magnetico B con iE . Dalla (33.60) ricaviamo

$$\begin{aligned} \frac{S_{eff}^{rin}(E)}{V_4} &= -\frac{m^4 c^4}{16 \pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dT \left[\frac{2iaT}{e^{iaT} - e^{-iaT}} - 1 - \frac{a^2 T^2}{3!} \right] e^{-T} \\ &= -\frac{m^4 c^4}{16 \pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dT \left[\frac{aT}{\sin(aT)} - 1 - \frac{a^2 T^2}{3!} \right] e^{-T} \end{aligned} \quad (33.69)$$

dove il parametro adimensionale a è definito dalla relazione

$$a \equiv \frac{eE\hbar}{m^2 c^3} \quad (33.70)$$

Notiamo che l'integrando che appare nella (33.69) ha dei poli semplici per valori di T che soddisfano la condizione

$$aT = n\pi \quad (33.71)$$

dove n è un intero positivo. L'integrazione sul semi-asse reale $T > 0$ è dunque, strettamente parlando, non definita. Definiamo l'integrale per continuazione analitica dando al parametro a una piccola parte immaginaria $a \rightarrow a + i\epsilon$ con

$\epsilon > 0$. Questo equivale a definire l'integrale integrando su un cammino che corre lungo l'asse $T > 0$ che aggiri il punto $T_n = \frac{n\pi}{a}$ nel semipiano complesso inferiore. L'integrazione intorno ai poli dà il seguente contributo alla parte immaginaria dell'azione effettiva

$$\begin{aligned} \text{Img} \frac{S_{eff}^{rin}(E)}{V_4} &= \frac{m^4 c^4 a^2}{16 \pi^2 \hbar^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} \pi e^{-\frac{n\pi}{a}} \\ &= \frac{e^2 E^2}{16 \pi^3 \hbar c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} e^{-\frac{n\pi m^2 c^3}{e E \hbar}} \end{aligned} \quad (33.72)$$

Notiamo che per $a \ll 1$ il termine dominante della serie che appare nella (33.73) è quello con $n = 1$

$$\text{Img} \frac{S_{eff}^{rin}(E)}{V_4} \approx \frac{e^2 E^2}{16 \pi^3 \hbar c^2} e^{-\frac{\pi m^2 c^3}{e E \hbar}} \quad (33.73)$$

Possiamo dare un'interpretazione semplice del fattore esponenziale nel linguaggio di prima quantizzazione. La parte immaginaria dell'azione effettiva segnala un'instabilità dello stato di vuoto del campo elettromagnetico dovuta alla probabilità (esponenzialmente piccola) che il campo elettrico produca delle coppie particella-antiparticella. Questo processo può essere pensato, in prima quantizzazione, come una transizione tra uno stato di particella a frequenza negativa (l'anti-particella nello stato finale) ad uno a frequenza positiva (la particella nello stato finale). La formula di Feynman (33.2) per l'ampiezza di transizione di un processo si riduce nell'approssimazione semi-classica a

$$\langle f | e^{-\frac{iT}{\hbar}} H | i \rangle \propto e^{\frac{i}{\hbar} S^{class}[i, f]} \approx e^{\frac{i}{\hbar} \int_i^f p(x) dx} \quad (33.74)$$

dove $S^{class}[i, f]$ è l'azione classica valutata per una traiettoria che va dallo stato i allo stato f , $p(x)$ è il momento della particella per una data energia ed abbiamo utilizzato la relazione $S^{class}[i, f] = \int_i^f p(x) dx - \epsilon(t_f - t_i)$ che lega azione ed energia ϵ . L'azione $S^{class}[i, f]$ è un numero reale per una traiettoria classicamente permessa. Le regioni classicamente non permesse sono quelle che corrispondono a $p(x)$ immaginari e danno quindi un contributo esponenzialmente piccolo all'ampiezza di transizione: è questa l'interpretazione dell'effetto tunnel (penetrazione di barriera) in termini della formula di Feynman. Per valutare quindi l'ampiezza di transizione attraverso una barriera

di potenziale dobbiamo considerare la traiettoria complessa corrispondente a p immaginari che è soluzione delle equazioni del moto “euclidee” — queste sono le equazioni del moto che si ottengono dall’azione originaria cambiando il segno del: $V_{eucl}(x) = -V(x)$.

Nel nostro caso dobbiamo considerare la relazione momento-energia per una particella relativistica in un campo elettrico costante E lungo la direzione z :

$$cp(z) = \sqrt{(\epsilon - eEz)^2 - c^4 m^2} \quad (33.75)$$

dove ϵ è l’energia della particella. Le regioni classicamente permesse sono quelle per cui

$$(\epsilon - eEz)^2 - c^4 m^2 = (\epsilon - eEz - mc^2)(\epsilon - eEz + mc^2) \geq 0 \quad (33.76)$$

cioè la regione con $z \leq z_1 \equiv \frac{\epsilon - mc^2}{eE}$ (regione delle particelle) e la regione $z \geq z_2 \equiv \frac{\epsilon + mc^2}{eE}$ (regione delle anti-particelle). L’ampiezza di transizione del processo classicamente non permesso che va dalla regione $z < z_1$ alla $z > z_2$ è dunque proporzionale al fattore esponenziale

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{c\hbar} \int_{z_1}^{z_2} dz \sqrt{m^2 c^4 - (\epsilon - eEz)^2}} &= e^{-\frac{1}{eE\hbar} \int_{-mc^2}^{mc^2} dy \sqrt{c^4 m^2 - y^2}} \quad (33.77) \\ &= e^{-\frac{2m^2 c^3}{eE\hbar} \int_0^1 dy \sqrt{1-y^2}} = e^{-\frac{\pi m^2 c^3}{2eE\hbar}} \end{aligned} \quad (33.78)$$

La probabilità di produzione di coppie per unità di tempo e di volume è pertanto proporzionale a $e^{-\frac{\pi m^2 c^3}{eE\hbar}}$ in accordo con la (33.73).

34 Integrale di Feynman e matrice S

L’elemento di matrice S tra due stati ψ_1 e ψ_2 è definito da

$$S_{21} = \langle \psi_2 | \hat{S} | \psi_1 \rangle = \lim_{\substack{t_2 \rightarrow +\infty \\ t_1 \rightarrow -\infty}} \langle \psi_2 | e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t_2} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_2 - t_1)} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t_1} | \psi_1 \rangle \quad (34.1)$$

dove \hat{H} è l’Hamiltoniana interagente e \hat{H}_0 quella libera. La formula (34.1) è valida in generale, sia in meccanica quantistica non-relativistica che in teoria dei campi. Consideriamo il caso di una particella in 3 dimensioni, di coordinate \vec{x} , diffusa da un potenziale $V(\vec{x})$: in questo caso (34.1) diventa

$$S_{21} = \lim_{\substack{t_2 \rightarrow +\infty \\ t_1 \rightarrow -\infty}} \int d\vec{x}_2 d\vec{x}_1 \psi_2^*(\vec{x}_2, t_2) \psi_1(\vec{x}_1, t_1) \langle \vec{x}_2 | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_2 - t_1)} | \vec{x}_1 \rangle \quad (34.2)$$

dove $\psi_1(\vec{x}_1, t_1)$ e $\psi_2(\vec{x}_2, t_2)$ sono le funzioni d'onda degli stati $|\psi_{2,1}(t_{2,1})\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t_{2,1}}|\psi_{2,1}\rangle$ che evolvono secondo l'Hamiltoniana libera. Supponendo che l'Hamiltoniana libera sia

$$\hat{H}_0 = \frac{p^2}{2m} \quad (34.3)$$

abbiamo

$$S_{21} = \lim_{\substack{t_2 \rightarrow +\infty \\ t_1 \rightarrow -\infty}} \int \frac{\hbar^3 d\vec{k}_2 d\vec{k}_1}{(2\pi)^3} \phi_2^*(\vec{k}_2) \phi_1(\vec{k}_1) e^{-i t_1 \frac{\hbar \vec{k}_1^2}{2m}} e^{i t_2 \frac{\hbar \vec{k}_2^2}{2m}} \times \\ \times \int d\vec{x}_2 d\vec{x}_1 e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}_1} e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}_2} \langle \vec{x}_2 | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_2-t_1)} | \vec{x}_1 \rangle \quad (34.4)$$

Possiamo calcolare gli integrali in $\vec{k}_{1,2}$ utilizzando il metodo del punto sella (in quanto $|t_{1,2}| \rightarrow \infty$): poniamo

$$\vec{k}_{1,2} = \vec{k}_{1,2} + \vec{k}_{1,2} \quad (34.5)$$

dove $\vec{k}_{1,2}$ sono determinati dalla condizione di stazionarietà delle fasi oscillanti

$$\hbar \vec{k}_{1,2} = \frac{m \vec{x}_{1,2}}{t_{1,2}} \quad (34.6)$$

Dunque

$$S_{21} = \lim_{\substack{t_2 \rightarrow +\infty \\ t_1 \rightarrow -\infty}} \left(\frac{m^2}{t_1 t_2} \right)^{3/2} \int d\vec{x}_2 d\vec{x}_1 \phi_2^* \left(\frac{m \vec{x}_2}{\hbar t_2} \right) \phi_1 \left(\frac{m \vec{x}_1}{\hbar t_1} \right) e^{i t_1 \frac{\hbar \vec{k}_1^2}{2m}} e^{-i t_2 \frac{\hbar \vec{k}_2^2}{2m}} \times \\ \times \langle \vec{x}_2 | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_2-t_1)} | \vec{x}_1 \rangle \\ = \lim_{\substack{t_2 \rightarrow +\infty \\ t_1 \rightarrow -\infty}} \left(\frac{\hbar^4 t_1 t_2}{m^2} \right)^{3/2} \int d\vec{k}_2 d\vec{k}_1 \phi_2^*(\vec{k}_2) \phi_1(\vec{k}_1) e^{i t_1 \frac{\hbar \vec{k}_1^2}{2m}} e^{-i t_2 \frac{\hbar \vec{k}_2^2}{2m}} \times \\ \times \left\langle \vec{x}_2(t_2) \left| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_2-t_1)} \right| \vec{x}_1(t_1) \right\rangle \quad (34.7)$$

dove $\vec{x}_2(t_2)$ e $\vec{x}_1(t_1)$ sono le traiettorie classiche *libere*, rispettivamente per tempi grandi positivi ($t_2 \rightarrow +\infty$) e negativi ($t_1 \rightarrow -\infty$):

$$\vec{x}_2(t_2) \equiv \frac{\hbar \vec{k}_2 t_2}{m} \quad \vec{x}_1(t_1) \equiv \frac{\hbar \vec{k}_1 t_1}{m} \quad (34.8)$$

Verifichiamo la correttezza dell' Eq. (34.7) nel caso banale in cui $\hat{H} = \hat{H}_0$. In questo caso

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}_2 | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t_2-t_1)} | \vec{x}_1 \rangle &= \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{-i \frac{\hbar \vec{k}^2}{2m} (t_2-t_1) + i \vec{k} \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)} = \\ &= \left(\frac{m}{2\pi \hbar i (t_2 - t_1)} \right)^{3/2} e^{i \frac{m (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2}{2\hbar (t_2 - t_1)}} \end{aligned} \quad (34.9)$$

Pertanto nel caso libero (34.7) diventa

$$\begin{aligned} S_{21}^{libero} &= \lim_{\substack{t_2 \rightarrow +\infty \\ t_1 \rightarrow -\infty}} \left(\frac{\hbar^4 t_1 t_2}{m^2} \right)^{3/2} \int d\vec{k}_2 d\vec{k}_1 \phi_2^*(\vec{k}_2) \phi_1(\vec{k}_1) e^{i t_1 \frac{\hbar \vec{k}_1^2}{2m}} e^{-i t_2 \frac{\hbar \vec{k}_2^2}{2m}} \times \\ &\quad \times \left(\frac{m}{2\pi \hbar i (t_2 - t_1)} \right)^{3/2} e^{i \hbar \frac{(\vec{k}_2 t_2 - \vec{k}_1 t_1)^2}{2m(t_2 - t_1)}} = \\ &= \lim_{\substack{t_2 \rightarrow +\infty \\ t_1 \rightarrow -\infty}} \left(\frac{t_1 t_2 \hbar^3}{2\pi i m (t_2 - t_1)} \right)^{3/2} \int d\vec{k}_2 d\vec{k}_1 \phi_2^*(\vec{k}_2) \phi_1(\vec{k}_1) \times \\ &\quad \times e^{i \hbar \frac{t_1 t_2 \vec{k}_1^2 + t_2 t_1 \vec{k}_2^2 - 2\vec{k}_2 \cdot \vec{k}_1 t_1 t_2}{2m(t_2 - t_1)}} = \\ &= \lim_{\substack{t_2 \rightarrow +\infty \\ t_1 \rightarrow -\infty}} \left(\frac{t_1 t_2 \hbar^3}{2\pi i m (t_2 - t_1)} \right)^{3/2} \int d\vec{k}_2 d\vec{k}_1 \phi_2^*(\vec{k}_2) \phi_1(\vec{k}_1) e^{i \frac{\hbar t_1 t_2 (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2}{2m(t_2 - t_1)}} = \\ &= \hbar^3 \int d\vec{k}_2 d\vec{k}_1 \phi_2^*(\vec{k}_2) \phi_1(\vec{k}_1) \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) = \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle \end{aligned} \quad (34.10)$$

34.1 L'approssimazione iconale

Partiamo dall'espressione l' elemento di matrice dell'operatore di evoluzione che appare in Eq. (34.2)

$$\langle \vec{k}_2 | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_2-t_1)} | \vec{k}_1 \rangle \equiv \int d\vec{x}_2 d\vec{x}_1 e^{i \vec{k}_1 \cdot \vec{x}_1} e^{-i \vec{k}_2 \cdot \vec{x}_2} \langle \vec{x}_2 | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_2-t_1)} | \vec{x}_1 \rangle \quad (34.11)$$

Poniamo

$$\vec{k} \equiv \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \quad \vec{p} \equiv \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{2} \quad (34.12)$$

Cerchiamo un'approssimazione valida nel caso

$$\vec{p}^2 \gg \vec{k}^2 \quad (34.13)$$

In questo caso possiamo supporre che (se il potenziale $V(\vec{x})$ decresce con sufficiente rapidità all'infinito) l'integrale di Feynman sia dominato dalla traiettoria rettilinea. Posto

$$\vec{s} \equiv \vec{x}_2 - \vec{x}_1 \quad \vec{x} \equiv \frac{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}{2} \quad (34.14)$$

la traiettoria rettilinea in questione è

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_1 + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = \vec{x} + \vec{s} \frac{t - \frac{t_1+t_2}{2}}{t_2 - t_1} \quad (34.15)$$

L'azione classica per questa traiettoria vale

$$\bar{S} = \frac{m\vec{s}^2}{2\Delta t} - \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} d\tau V\left(\vec{x} + \vec{s} \frac{\tau}{\Delta t}\right) \quad (34.16)$$

dove abbiamo posto $\Delta t \equiv t_2 - t_1 \rightarrow +\infty$. Inoltre abbiamo

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{x}_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{x}_2 = -\vec{k} \cdot \vec{x} - \vec{p} \cdot \vec{s} \quad (34.17)$$

Pertanto approssimiamo l'elemento di matrice (34.11) con

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}_2 | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t} | \vec{k}_1 \rangle &\approx \left(\frac{m}{2\pi \hbar i \Delta t} \right)^{3/2} \int d\vec{x} d\vec{s} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\vec{p} \cdot \vec{s}} \times \\ &\times e^{\frac{i m \vec{s}^2}{2\hbar \Delta t} - \frac{i}{\hbar} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} d\tau V\left(\vec{x} + \vec{s} \frac{\tau}{\Delta t}\right)} = \\ &= \left(\frac{\hbar \Delta t}{2\pi i m} \right)^{3/2} \int d\vec{x} d\vec{q} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\frac{\vec{p} \cdot \vec{q} \Delta t \hbar}{m}} e^{\frac{i \hbar \Delta t \vec{q}^2}{2m} - \frac{i}{\hbar} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} d\tau V\left(\vec{x} + \frac{\hbar}{m} \vec{q} \tau\right)} \end{aligned} \quad (34.18)$$

dove il fattore davanti all'esponenziale (il determinante) è quello ottenuto dal confronto con l'integrale di Feynman nel caso libero, Eq. (34.9) e nella seconda riga abbiamo operato la sostituzione nella variabile d'integrazione $\vec{s} \equiv \frac{\hbar \Delta t}{m} \vec{q}$. Nell'ipotesi che l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau V\left(\vec{x} + \frac{\hbar}{m} \vec{q} \tau\right) \quad (34.19)$$

sia convergente, possiamo effettuare l'integrazione in \vec{q} col metodo del punto sella, in quanto $\Delta t \rightarrow \infty$. Il punto sella localizza \vec{q} intorno al valore \vec{q} dato da

$$\vec{q} = \vec{p} \quad (34.20)$$

Dunque

$$\langle \vec{k}_2 | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_2-t_1)} | \vec{k}_1 \rangle \approx e^{-\frac{i \hbar \Delta t \vec{p}^2}{2m}} \int d\vec{x} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau V(\vec{x} + \frac{\hbar}{m} \vec{p} \tau)} \quad (34.21)$$

Sostituendo quest'espressione nella formula (34.4) per l'elemento di matrice S otteniamo

$$\begin{aligned} S_{21}^{siconale} &= \lim_{\substack{t_2 \rightarrow +\infty \\ t_1 \rightarrow -\infty}} \int \frac{\hbar^3 d\vec{k}_2 d\vec{k}_1}{(2\pi)^3} \phi_2^*(\vec{k}_2) \phi_1(\vec{k}_1) e^{-i t_1 \frac{\hbar \vec{k}_1^2}{2m}} e^{i t_2 \frac{\hbar \vec{k}_2^2}{2m}} \times \\ &\times e^{-\frac{i \hbar \Delta t \vec{p}^2}{2m}} \int d\vec{x} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau V(\vec{x} + \frac{\hbar}{m} \vec{p} \tau)} = \\ &= \lim_{\substack{t_2 \rightarrow +\infty \\ t_1 \rightarrow -\infty}} \int \frac{\hbar^3 d\vec{k} d\vec{p}}{(2\pi)^3} \phi_2^*(\vec{p} + \vec{k}/2) \phi_1(\vec{p} - \vec{k}/2) e^{i(t_1+t_2) \frac{\hbar \vec{k} \cdot \vec{p}}{2m}} \times \\ &\times \int d\vec{x} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau V(\vec{x} + \frac{\hbar}{m} \vec{p} \tau)} = \end{aligned} \quad (34.22)$$

dove, nella fase dell'esponenziale $e^{-i t_1 \frac{\hbar \vec{k}_1^2}{2m} + i t_2 \frac{\hbar \vec{k}_2^2}{2m}}$ abbiamo trascurato \vec{k}^2 rispetto a \vec{p}^2 .

Decomponiamo il vettore \vec{x} in una parte lungo \vec{p} ed in una ortogonale

$$\vec{x} = \vec{\rho} + \vec{x} \cdot \hat{z} \hat{z} \quad (34.23)$$

dove $\hat{z} \equiv \frac{\vec{p}}{p}$ è il vettore unitario lungo \vec{p} ($p \equiv |\vec{p}|$) e $\vec{\rho} \cdot \vec{p} = 0$. L'integrale (34.19) dipende solo da $\vec{\rho}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau V(\vec{\rho} + \vec{p}(\frac{\vec{x} \cdot \vec{p}}{p^2} + \frac{\hbar \tau}{m})) = \frac{m}{\hbar p} \int_{-\infty}^{\infty} dz V(\vec{\rho} + \hat{z} z) \quad (34.24)$$

La formula (34.22) si riscrive dunque come segue

$$\begin{aligned} S_{21}^{siconale} &= \lim_{\substack{t_2 \rightarrow +\infty \\ t_1 \rightarrow -\infty}} \int \frac{\hbar^3 d\vec{k} d\vec{p}}{(2\pi)^3} \phi_2^*(\vec{p} + \vec{k}/2) \phi_1(\vec{p} - \vec{k}/2) e^{i(t_1+t_2) \frac{\hbar \vec{k} \cdot \vec{p}}{2m}} \times \\ &\times \int d^2 \vec{\rho} (2\pi) \delta(\vec{k} \cdot \hat{z}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{\rho}} e^{-\frac{im}{\hbar^2 p} \int_{-\infty}^{\infty} dz V(\vec{\rho} + \hat{z} z)} = \\ &= \int \frac{\hbar^3 d\vec{k} d\vec{p}}{(2\pi)^2} \phi_2^*(\vec{p} + \vec{k}/2) \phi_1(\vec{p} - \vec{k}/2) \delta(k_z) \times \\ &\times \int d^2 \vec{\rho} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{\rho}} e^{-\frac{im}{\hbar^2 p} \int_{-\infty}^{\infty} dz V(\vec{\rho} + \hat{z} z)} \end{aligned} \quad (34.25)$$

dove k_z è la componente di \vec{k} lungo \vec{p} . L'elemento di matrice S tra stati di impulso \vec{p}_1 e \vec{p}_2 è dunque nell'approssimazione iconale

$$S_{p_2, p_1}^{iconale} = \frac{\delta(k_z)}{(2\pi)^2} \int d^2 \vec{\rho} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{\rho}} e^{-\frac{im}{\hbar^2 p} \int_{-\infty}^{\infty} dz V(\vec{\rho} + \hat{z} z)} \quad (34.26)$$

Definendo l'operatore \hat{T} attraverso la relazione

$$\hat{S} = 1 - 2\pi i \delta(E_2 - E_1) \hat{T} \quad (34.27)$$

abbiamo infine

$$\hat{T}_{p_2, p_1} = \frac{ip}{m(2\pi)^3} \int d^2 \vec{\rho} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{\rho}} \left[e^{-\frac{im}{\hbar^2 p} \int_{-\infty}^{\infty} dz V(\vec{\rho} + \hat{z} z)} - 1 \right] \quad (34.28)$$

Ricordiamo che l'ampiezza di diffusione $f_{\vec{p}_1}(\vec{p}_1/p, \vec{p}_2/p)$ è legata all'elemento di matrice S_{p_2, p_1} dalla relazione

$$S_{p_2, p_1} = \delta_{\vec{p}_1, \vec{p}_2} + \delta_{|\vec{p}_1|, |\vec{p}_2|} \frac{i}{2\pi |\vec{p}_1|} f_{\vec{p}_1}(\vec{p}_1/p, \vec{p}_2/p) \quad (34.29)$$

Pertanto l'approssimazione iconale dell'ampiezza di diffusione è

$$f_{\vec{p}_1}^{iconale}(\vec{p}_1/p, \vec{p}_2/p) = \frac{p}{2\pi i} \int d^2 \vec{\rho} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{\rho}} \left[e^{-\frac{im}{\hbar^2 p} \int_{-\infty}^{\infty} dz V(\vec{\rho} + \hat{z} z)} - 1 \right] \quad (34.30)$$

Sia a il raggio del potenziale $V(\vec{x})$. Deriviamo le condizioni di validità dell'approssimazione di Born dall'Eq. (34.30). Sia V_0 è l'ordine di grandezza del potenziale nel suo raggio d'azione a : se

$$V_0 \ll \frac{\hbar^2}{m a^2} (a p) \quad (34.31)$$

allora la formula (34.30) si riduce all'approssimazione di Born

$$f_{\vec{p}_1}^{Born}(\vec{p}_1/p, \vec{p}_2/p) = -\frac{m}{2\pi \hbar^2} \int d^3 \vec{x} e^{-i(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \cdot \vec{x}} V(\vec{x}) \quad (34.32)$$

L'approssimazione iconale è valida invece anche in una situazione per cui

$$\frac{\hbar^2}{m a^2} (a p) \sim V_0 \ll \frac{\hbar^2}{m a^2} (a p)^2 \quad (34.33)$$

In effetti, l'approssimazione iconale richiede, come abbiamo visto, che $p \gg k$. La variazione del momento $|\hbar \vec{k}|$ è stimata dal prodotto della forza che agisce sulla particella per l'intervallo di tempo ($\sim \frac{a}{\hbar p/m}$) durante il quale la particella sente un potenziale non nullo:

$$\hbar k \sim \frac{V_0}{a} \frac{a m}{\hbar p} = \frac{V_0 m}{\hbar p} \quad (34.34)$$

Dunque deve essere

$$\frac{V_0 m}{\hbar p} \ll \hbar p \quad (34.35)$$

che coincide con la (34.33).