

Appunti ed esercizi di meccanica ed elettrodinamica relativistica

Corso di Fisica Generale 3, A.A. 2017-18

CAMILLO IMBIMBO^{1,2,a}

¹ *Dipartimento di Fisica, Università di Genova, Via Dodecaneso 33, Genoa
16146, ITALY*

² *INFN, Sezione di Genova, Via Dodecaneso 33, Genoa 16146, ITALY*

^acamillo.imbimbo@ge.infn.it

Contents

1	Cinematica relativistica	2
1.1	La forma delle matrici di Lorentz	2
1.2	Composizione delle velocità	7
1.3	Boosts in direzione arbitraria	8
1.4	Trasformazione dell'accelerazione	9
1.5	Moto con accelerazione costante	10
2	Decadimento di particelle	12
2.1	Nel sistema del centro di massa	12
2.2	Nel sistema del laboratorio	15
3	Diffusione elastica di 2 particelle	23
3.1	Nel sistema del centro di massa	23
3.2	Nel sistema del laboratorio	25
4	Equazioni di Maxwell e relatività	28
4.1	Le trasformazioni relativistiche dei campi elettro-magnetici . .	30
4.1.1	Caso generale	30
4.1.2	Campo elettrico (magnetico) nullo in un sistema di riferimento	32
4.1.3	Gli invarianti relativistici del campo elettro-magnetico	32
4.1.4	Campi elettrico e magnetico paralleli	33
4.1.5	Le trasformazioni di Lorentz per un filo carico	34
4.2	Le equazioni del moto di una carica in notazione relativistica .	36
4.2.1	Moto in campo elettrico uniforme e costante ($I_1 > 0$, $I_2 = 0$)	37
4.2.2	Moto in campo magnetico uniforme e costante ($I_1 < 0$, $I_2 = 0$)	39
4.2.3	Moto in campi elettrici e magnetici ortogonali tra loro e di uguale intensità ($I_1 = I_2 = 0$)	40

5	Onde nei metalli	42
5.1	Un modello macroscopico	42
5.2	Un modello microscopico	43
5.2.1	Buoni conduttori	45
5.2.2	Cattivi conduttori	46
5.2.3	Alte frequenze	47
6	Radiazione	49
6.1	Potenziali ritardati	49
6.1.1	$I(t) = \theta(t) I_0$	49
6.1.2	$I(t) = (\theta(t) - \theta(t - t_0)) I_0$	50
6.1.3	$I(t) = \delta(t) q$	50
6.2	Potenziali di Liénard-Wiechert	50
6.2.1	Carica che si muove con velocità costante	51
6.2.2	Campi di Liénard-Wiechert di una carica in moto ar- bitrario	54
6.2.3	Campo di una carica uniformemente accelerata	57
6.2.4	Carica ruotante	61
6.3	Radiazione in approssimazione di dipolo	61
6.3.1	Tempo di decadimento dell'atomo classico	63
6.4	Irraggiamento da particelle relativistiche	64

1 Cinematica relativistica

1.1 La forma delle matrici di Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz sono definite da

$$\begin{aligned} \tilde{x}^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\ \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \eta_{\mu\nu} &= \eta_{\rho\sigma} \end{aligned} \tag{1.1}$$

dove $\eta_{\mu\nu}$ è la metrica di Lorentz, diagonale, con $\eta_{\mu\mu} = (1, -1, -1, -1)$. Introduciamo una matrice Λ i cui elementi di matrice sono

$$(\Lambda)^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu \quad (1.2)$$

con μ indice di riga e ν indice di colonna. Allora la (1.1) diventa

$$\tilde{x} = \Lambda x \quad \Lambda^\top \eta \Lambda = \eta \quad (1.3)$$

dove x è il vettore colonna

$$(x)^\mu = x^\mu \quad (1.4)$$

e η è la matrice di Lorentz

$$(\eta)_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (1.5)$$

Il bilineare formato con il vettore x^μ

$$x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu = x^\top \eta x \quad (1.6)$$

è un invariante per trasformazioni di Lorentz. Oltre al vettore x con componenti x^μ , è conveniente introdurre anche il vettore

$$x_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} x^\nu \quad (1.7)$$

Il vettore x^μ si dice *controvariante*, mentre il vettore x_c le cui componenti sono x_μ

$$(x_c)_\mu = x_\mu \quad (1.8)$$

si dice *covariante*. L'invariante di Lorentz (1.6) si riscrive in termini di vettori covarianti e controvarianti nel modo seguente

$$x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu = x_\mu x^\mu = x_c^\top x \equiv x \cdot x \quad (1.9)$$

Si osservi che per trasformazioni di Lorentz, il vettore covariante si trasforma secondo

$$x_c \rightarrow \eta \Lambda x = (\Lambda^\top)^{-1} \eta x = (\Lambda^\top)^{-1} x_c \quad (1.10)$$

Poiché Λ non è una matrice ortogonale, in generale $(\Lambda^\top)^{-1} \neq \Lambda$ e quindi vettori controvarianti si trasformano diversamente da quelli covarianti. Si noti che

$$(\Lambda^\top)^{-1} = \eta \Lambda \eta^{-1} \quad (1.11)$$

dove η^{-1} è la matrice inversa di η , i cui elementi vengono denotati da $\eta^{\mu\nu}$. Si conviene pertanto di “abbassare” gli indici vettoriali con la matrice $\eta_{\mu\nu}$ e “alzarli” la con matrice inversa $\eta^{\mu\nu}$: “abbassando” gli indici del vettore controvariante x^μ si ottiene il vettore covariante x_μ , e, allo stesso modo, la matrice $(\Lambda^\top)^{-1}$ con cui si trasformano i vettori covarianti si ottiene dalla matrice Λ abbassando ed alzando gli indici di riga e colonna

$$((\Lambda^\top)^{-1})_\mu^\nu = \eta_{\mu\rho} \Lambda^\rho_\sigma \eta^{\sigma\nu} \equiv \Lambda_\mu^\nu \quad (1.12)$$

Dalla definizione (1.3) otteniamo

$$\det \Lambda = \pm 1 \quad \Lambda^0_0 = \pm \sqrt{1 + \Lambda^0_i \Lambda^0_i} \Rightarrow |\Lambda^0_0| \geq 1 \quad (1.13)$$

Vediamo pertanto che esistono diverse componenti nell’insieme delle trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{aligned} a) \det \Lambda = 1 \quad \Lambda^0_0 \geq 1 & \quad b) \det \Lambda = 1 \quad \Lambda^0_0 \leq -1 \\ c) \det \Lambda = -1 \quad \Lambda^0_0 \geq 1 & \quad d) \det \Lambda = -1 \quad \Lambda^0_0 \leq -1 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Il sottoinsieme delle trasformazioni di tipo *a)* è chiuso per moltiplicazione e contiene la matrice identica: le trasformazioni di questo tipo sono dette *speciali* e *ortocrone*. Esempi di trasformazioni con $\det \Lambda = -1$ e/o $\Lambda^0_0 \leq -1$

sono l' inversione spaziale e l' inversione temporale

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Esercizio: Dimostrare che una generica trasformazione di Lorentz può essere scritta in una delle 4 forme

$$\Lambda_0 \quad \mathcal{P} \Lambda_0 \quad \mathcal{T} \Lambda_0 \quad \mathcal{P} \mathcal{T} \Lambda_0 \quad (1.16)$$

con Λ_0 speciale e ortocrona.

Una matrice di Lorentz Λ speciale ed ortocrona si può scrivere in forma esponenziale

$$\Lambda = e^\omega \quad (1.17)$$

con

$$\omega^\top \eta + \eta \omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega^\top = -\eta \omega \eta^{-1} \quad (1.18)$$

ovvero la matrice $\omega_{\mu\nu}$ con tutti e due gli indici bassi è antisimmetrica:

$$\omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} \omega^\rho{}_\nu = -\omega^\rho{}_\mu \eta_{\rho\nu} = -\omega_{\nu\mu} \quad (1.19)$$

che implica

$$\omega^i{}_j = -\omega^j{}_i \quad \omega^i{}_0 = \omega^0{}_i \quad (1.20)$$

Le rotazioni spaziali sono le matrici con

$$\begin{aligned} \omega^i{}_0 &= 0 & \omega^0{}_0 &= 1 \\ \mathcal{R} &= \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & R \end{pmatrix} \\ R R^\top &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Una rotazione 3-dimensionale R è specificata da un versore \hat{n} ed un angolo di rotazione $\theta \in [-\pi, \pi]$: denotiamo una tale rotazione con $R(\theta, \hat{n})$. Abbiamo l'identificazione

$$R(\theta, \hat{n}) = R(-\theta, -\hat{n}) \quad (1.22)$$

Scegliendo \hat{n} lungo gli assi cartesiani abbiamo le 3 trasformazioni di Lorentz corrispondenti alle rotazioni spaziali

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x(\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ \mathcal{R}_y(\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \\ \mathcal{R}_z(\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.23)$$

È facile verificare che

$$\mathcal{R}_i(\theta_1) \mathcal{R}_i(\theta_2) = \mathcal{R}_i(\theta_1 + \theta_2) \quad (1.24)$$

Se consideriamo matrici corrispondenti a “rotazioni” generalizzate che coin-

volgono il tempo, otteniamo i boosts di Lorentz

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_x(\theta_v) &= \begin{pmatrix} \cosh \theta_v & \sinh \theta_v & 0 & 0 \\ \sinh \theta_v & \cosh \theta_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathcal{B}_y(\theta_v) &= \begin{pmatrix} \cosh \theta_v & 0 & \sinh \theta_v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh \theta_v & 0 & \cosh \theta_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathcal{B}_z(\theta_v) &= \begin{pmatrix} \cosh \theta_v & \sinh \theta_v & 0 & 0 \\ \sinh \theta_v & \cosh \theta_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.25}
\end{aligned}$$

Le matrici $\mathcal{B}_i(\theta_v)$ descrivono la relazione tra coordinate per sistemi inerziali con assi paralleli che si muovono relativamente uno all'altro con velocità v lungo l'asse i , con v dato da

$$\begin{aligned}
\tanh \theta_v &= \frac{v}{c} \\
\cosh \theta_v &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \sinh \theta_v = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.26}
\end{aligned}$$

È facile verificare che

$$\mathcal{B}_i(\theta_{v_1}) \mathcal{B}_i(\theta_{v_2}) = \mathcal{B}_i(\theta_{v_1} + \theta_{v_2}) \tag{1.27}$$

1.2 Composizione delle velocità

Si considerino 3 sistemi di riferimento con assi paralleli $\{O, x\}$, $\{O_1, x_1\}$ e $\{O_2, x_2\}$, con O_2 che si muove lungo l'asse x con velocità v_2 nel sistema O_1 ed O_1 che si muove con velocità v_1 lungo i nel sistema O . Abbiamo

$$\begin{aligned}
x &= \mathcal{B}_i(\theta_{v_1}) x_1 \quad x_1 = \mathcal{B}_i(\theta_{v_2}) x_2 \Rightarrow \\
x &= \mathcal{B}_i(\theta_{v_1}) \mathcal{B}_i(\theta_{v_2}) x_2 = \mathcal{B}_i(\theta_{v_1} + \theta_{v_2}) x_2 \tag{1.28}
\end{aligned}$$

Il sistema $\{O_2, x_2\}$ si muove pertanto rispetto al sistema $\{O, x\}$ ad una velocità v_{12} data da

$$\theta_{v_{12}} = \theta_{v_1} + \theta_{v_2} \Rightarrow \frac{v_{12}}{c} = \tanh(\theta_{v_1} + \theta_{v_2}) \quad (1.29)$$

Usando l'identità

$$\tanh(\theta_{v_1} + \theta_{v_2}) = \frac{\tanh \theta_{v_1} + \tanh \theta_{v_2}}{1 + \tanh \theta_{v_1} \tanh \theta_{v_2}} \quad (1.30)$$

otteniamo la legge di composizione delle velocità

$$v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad (1.31)$$

Una derivazione alternativa dello stesso risultato è la seguente

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma \left(\Delta x + \frac{v}{c} c \Delta t \right) \\ \Delta c t' &= \gamma \left(\frac{v}{c} \Delta x + c \Delta t \right) \\ \frac{\Delta x'}{\Delta t'} &= \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t}} \end{aligned} \quad (1.32)$$

1.3 Boosts in direzione arbitraria

Definiamo i generatori dei boosts di Lorentz come

$$K_i \equiv \left. \frac{d\mathcal{B}_i(\theta_v)}{d\theta_v} \right|_{\theta_v=0} \quad (1.33)$$

Abbiamo

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

Un boost in una direzione generica associata alla velocità

$$\vec{v} = |\vec{v}| \hat{v} \quad \hat{v}^2 = 1 \quad (1.35)$$

si può scrivere come

$$\mathcal{B}(\theta_v, \hat{v}) = e^{\theta_v \hat{v} \cdot \vec{K}} = e^{\theta_v K_{\hat{v}}} \quad (1.36)$$

dove

$$K_{\hat{v}} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{v}_1 & \hat{v}_2 & \hat{v}_3 \\ \hat{v}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{v}_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{v}_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

Abbiamo

$$K_{\hat{v}}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{v}_1^2 & \hat{v}_1 \hat{v}_2 & \hat{v}_1 \hat{v}_3 \\ 0 & \hat{v}_1 \hat{v}_2 & \hat{v}_2^2 & \hat{v}_2 \hat{v}_3 \\ 0 & \hat{v}_1 \hat{v}_3 & \hat{v}_2 \hat{v}_3 & \hat{v}_3^2 \end{pmatrix} \quad K_{\hat{v}}^3 = K_{\hat{v}} \quad (1.38)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\theta_v, \hat{v}) &= e^{\theta_v K_{\hat{v}}} = \mathbb{I} + \theta_v K_{\hat{v}} + \frac{\theta_v^2}{2!} K_{\hat{v}}^2 + \frac{\theta_v^3}{3!} K_{\hat{v}}^3 + \dots = \\ &= \mathbb{I} + \sinh \theta_v K_{\hat{v}} - (1 - \cosh \theta_v) K_{\hat{v}}^2 = \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \theta_v & \sinh \theta_v \hat{v}_1 & \sinh \theta_v \hat{v}_2 & \sinh \theta_v \hat{v}_3 \\ \sinh \theta_v \hat{v}_1 & 1 + (\cosh \theta - 1) \hat{v}_1^2 & (\cosh \theta - 1) \hat{v}_1 \hat{v}_2 & (\cosh \theta - 1) \hat{v}_1 \hat{v}_3 \\ \sinh \theta_v \hat{v}_2 & (\cosh \theta - 1) \hat{v}_1 \hat{v}_2 & 1 + (\cosh \theta - 1) \hat{v}_2^2 & (\cosh \theta - 1) \hat{v}_2 \hat{v}_3 \\ (\cosh \theta - 1) \sinh \theta_v \hat{v}_3 & (\cosh \theta - 1) \hat{v}_1 \hat{v}_3 & \hat{v}_2 \hat{v}_3 & 1 + (\cosh \theta - 1) \hat{v}_3^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Esercizio: Dimostrare che

$$\mathcal{B}(\theta_v, \hat{v}) = R^{-1}(\hat{v}) \mathcal{B}(\theta_v, \hat{x}) R(\hat{v}) \quad (1.40)$$

dove $R(\hat{v})$ è una rotazione che manda \hat{x} in \hat{v} :

$$\hat{v} = R(\hat{v}) \hat{x} \quad (1.41)$$

1.4 Trasformazione dell'accelerazione

Consideriamo due sistemi $\{O', x'\}$ e $\{O, x\}$, il secondo sistema in moto con velocità v rispetto al primo lungo l'asse delle x :

$$x' = \mathcal{B}(\theta_v) x \quad (1.42)$$

Si consideri una particella che si muove con velocità v_1 lungo x nel sistema $\{O, x\}$. Dalla precedente (1.31) sappiamo che la particella si muove nel sistema di coordinate $\{O', x'\}$ con velocità v'_1 data da

$$v'_1 = \frac{v_1 + v}{1 + \frac{v_1 v}{c^2}} \quad (1.43)$$

Pertanto:

$$\Delta v'_1 = \frac{\Delta v_1 (1 + \frac{v_1 v}{c^2}) - (v_1 + v) \frac{\Delta v_1 v}{c^2}}{(1 + \frac{v_1 v}{c^2})^2} = \frac{\Delta v_1 (1 - \frac{v^2}{c^2})}{(1 + \frac{v_1 v}{c^2})^2} \quad (1.44)$$

da cui

$$\frac{\Delta v'_1}{\Delta t'} = \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})}{(1 + \frac{v_1 v}{c^2})^2} \frac{\frac{\Delta v_1}{\Delta t}}{\gamma (\frac{v}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t} + 1)} \quad (1.45)$$

ovvero

$$a'_1 = \frac{1}{\gamma^3} \frac{a_1}{(1 + \frac{v_1 v}{c^2})^3} \quad (1.46)$$

1.5 Moto con accelerazione costante

Prendiamo nella (1.46)

$$v_1 = 0 \quad v'_1 = v \quad (1.47)$$

cioè il sistema $\{O, x\}$ è il sistema di riposo della particella, ad ogni istante. Supponiamo anche che ad ogni istante la particella abbia accelerazione costante a_1 nel suo sistema di riposo. Vogliamo derivare la legge oraria del moto della particella nel sistema di laboratorio $\{O', x'\}$.

Sostituendo (1.47) in (1.46) otteniamo

$$\gamma^3 \frac{dv}{dt'} = a_1 \quad (1.48)$$

Pertanto

$$a_1 t' = \int_{v(0)}^{v(t')} \frac{dv}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} = \frac{v}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}} \quad (1.49)$$

assumendo che la particella sia ferma nel sistema del laboratorio al tempo $t' = 0$

$$v(0) = 0 \quad (1.50)$$

Quindi

$$v(t') = \frac{a_1 t'}{\left(1 + \frac{(a_1 t')^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.51)$$

Per t' piccoli

$$v = a_1 t' \left(1 - \frac{1}{2} \frac{(a_1 t')^2}{c^2} + O(t'^4)\right) \quad (1.52)$$

Per t' grandi

$$v = \frac{c}{\left(1 + \frac{c^2}{(a_1 t')^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{c^2}{(a_1 t')^2} + O\left(\frac{1}{t'^4}\right)\right) - 1 \quad (1.53)$$

La legge oraria è

$$x'_1 = \int_0^{t'} dt \frac{(a_1 t)}{\left(1 + \frac{(a_1 t)^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{c^2}{a_1} \left(\left(1 + \frac{(a_1 t')^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right) \quad (1.54)$$

assumendo che la particella si trovi in $x'_1 = 0$ per $t' = 0$. Quindi

$$\left(\frac{x'_1 a_1}{c^2} + 1\right)^2 - \frac{(a_1 t')^2}{c^2} = 1 \quad (1.55)$$

Pertanto nel piano (x'_1, t') delle coordinate del laboratorio, la particella si muove lungo una *iperbole*.

Per t' piccoli

$$x'_1 = \frac{1}{2} a_1 t'^2 + \dots \quad (1.56)$$

Per t' grandi

$$x'_1 = c t' \left[\sqrt{1 + \frac{c^2}{(a_1 t')^2}} - \frac{c}{a_1 t'} \right] = c t' \left(1 - \frac{c}{a_1 t'} + \frac{1}{2} \frac{c^2}{(a_1 t')^2} + \dots\right) \quad (1.57)$$

2 Decadimento di particelle

Denotiamo con P il quadri-momento di una particella di massa M che decade in due particelle di quadri-momenti p_1 e p_2 e masse m_1 e m_2 , rispettivamente.

La conservazione del quadri-impulso si scrive

$$P = p_1 + p_2 \quad (2.58)$$

Prendendo il quadrato di questa relazione otteniamo¹

$$P^2 = M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2 p_1 \cdot p_2 \quad (2.59)$$

da cui

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{M^2 - m_1^2 - m_2^2}{2} \quad (2.60)$$

Introduciamo anche il quadri-vettore

$$k \equiv p_1 - p_2 \quad (2.61)$$

Allora

$$k \cdot P = (p_1 - p_2) \cdot (p_1 + p_2) = m_1^2 - m_2^2 \quad (2.62)$$

e

$$k^2 = m_1^2 + m_2^2 - 2 p_1 \cdot p_2 = 2(m_1^2 + m_2^2) - M^2 \quad (2.63)$$

2.1 Nel sistema del centro di massa

Nel sistema di riposo della particella che decade

$$\begin{aligned} p_1 &= (E_1, \vec{p}_1) & p_2 &= (E_2, \vec{p}_2) & \vec{p}_1 &= -\vec{p}_2 \equiv \vec{p} \\ P &= (M, \vec{0}) \\ k &= (E_1 - E_2, \vec{p}_1 - \vec{p}_2) = (E_1 - E_2, 2\vec{p}) \end{aligned} \quad (2.64)$$

¹Poniamo $c = 1$ in questa sezione e nel seguito.

La conservazione dell'energia si scrive

$$M = E_1 + E_2 \quad (2.65)$$

mentre la (2.62) diventa

$$M(E_1 - E_2) = m_1^2 - m_2^2 \Rightarrow E_1 - E_2 = \frac{m_1^2 - m_2^2}{M} \quad (2.66)$$

Combinando la (2.65) e la (2.66) otteniamo quindi le energie dei prodotti di decadimento:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{M}{2} + \frac{m_1^2 - m_2^2}{2M} \\ E_2 &= \frac{M}{2} - \frac{m_1^2 - m_2^2}{2M} \end{aligned} \quad (2.67)$$

La (2.60) nel sistema di quiete di M diventa

$$E_1 E_2 + \vec{p}^2 = \frac{M^2 - m_1^2 - m_2^2}{2} \quad (2.68)$$

da cui possiamo ricavare il valore dell'impulso

$$\begin{aligned} |\vec{p}|^2 &= -\frac{M^2}{4} + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{4M^2} + \frac{M^2 - m_1^2 - m_2^2}{2} = \\ &= \frac{-2M^2(m_1^2 + m_2^2) + M^4 + (m_1^2 - m_2^2)^2}{4M^2} = \\ &= \frac{(M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - (m_1^2 + m_2^2)^2 + (m_1^2 - m_2^2)^2}{4M^2} = \\ &= \frac{(M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2}{4M^2} \end{aligned} \quad (2.69)$$

ovvero

$$\begin{aligned} |\vec{p}| &= \sqrt{\frac{(M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2}{4M^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{(M^2 - (m_1 + m_2)^2)(M^2 - (m_1 - m_2)^2)}}{2M} \end{aligned} \quad (2.70)$$

La condizione perché il decadimento sia possibile è pertanto

$$(M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 \geq 4m_1^2 m_2^2 \Leftrightarrow M^2 \geq (m_1 + m_2)^2 \Rightarrow M \geq m_1 + m_2 \quad (2.71)$$

Le velocità dei prodotti del decadimento sono

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\sqrt{(M^2 - (m_1 + m_2)^2)(M^2 - (m_1 - m_2)^2)}}{M^2 + m_1^2 - m_2^2} \\ v_2 &= \frac{\sqrt{(M^2 - (m_1 + m_2)^2)(M^2 - (m_1 - m_2)^2)}}{M^2 - m_1^2 + m_2^2} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Consideriamo i casi particolari:

- $m_1 = m_2 = m$. In questo caso

$$\begin{aligned} E_1 = E_2 &= \frac{M}{2} \\ |\vec{p}| &= \sqrt{\frac{M^4 - 4m^2 M^2}{4M^2}} = \frac{M}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \end{aligned} \quad (2.73)$$

- $m_1 = m$ e $m_2 = 0$

$$E_1 = \frac{M}{2} + \frac{m^2}{2M} \quad E_2 = \frac{M}{2} - \frac{m^2}{2M} \quad |\vec{p}| = \frac{M}{2} \left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right) \quad (2.74)$$

Sia (x,z) il piano formato dalle particelle che decadono: sia θ_{cm} l'angolo che la particella 1 forma con l'asse delle x nel sistema del centro di massa:

$$\begin{aligned} p_{1x} &= |\vec{p}| \cos \theta_{cm} & p_{1z} &= |\vec{p}| \sin \theta_{cm} \\ p_{2x} &= -|\vec{p}| \cos \theta_{cm} & p_{2z} &= -|\vec{p}| \sin \theta_{cm} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Esercizio: Un pione π^0 ha massa $M = 135 MeV/c^2$. Può decadere in 2 fotoni o in una coppia elettrone-positrone, due particelle di massa uguale pari a $m_e = m_{\bar{e}} = 0.51 MeV/c^2$. Determinare le energie dei fotoni prodotti nel decadimento di un π^0 nel suo sistema di riposo e le velocità dell'elettrone e del positrone.

2.2 Nel sistema del laboratorio

Supponiamo ora che la particella che decade si muova a velocità V nel sistema del laboratorio nella direzione x : i quadri-momenti della particelle prodotte nel decadimento nel sistema di laboratorio possono essere ottenuti da quelli nel sistema del centro di massa attraverso un boost di Lorentz

$$\begin{aligned}
 E_1^{lab} &= \gamma (E_1 + V p_{1x}) = \gamma (E_1 + V |\vec{p}| \cos \theta_{cm}) = \frac{E}{M} E_1 + \frac{P}{M} |\vec{p}| \cos \theta_{cm} \\
 p_{1x}^{lab} &= \gamma (V E_1 + p_{1x}) = \gamma (V E_1 + |\vec{p}| \cos \theta_{cm}) = \frac{P}{M} E_1 + \frac{E}{M} |\vec{p}| \cos \theta_{cm} \\
 E_2^{lab} &= \gamma (E_2 + V p_{2x}) = \gamma (E_2 - V |\vec{p}| \cos \theta_{cm}) = \frac{E}{M} E_2 - \frac{P}{M} |\vec{p}| \cos \theta_{cm} \\
 p_{2x}^{lab} &= \gamma (V E_2 + p_{2x}) = \gamma (V E_2 - |\vec{p}| \cos \theta_{cm}) = \frac{P}{M} E_2 - \frac{E}{M} |\vec{p}| \cos \theta_{cm} \\
 p_{1z}^{lab} &= |\vec{p}| \sin \theta_{cm} \quad p_{2z}^{lab} = -|\vec{p}| \sin \theta_{cm}
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

dove

$$P^\mu = (E, \vec{P}) \quad E = \sqrt{P^2 + M^2} \tag{2.77}$$

è il quadri-momento della particella che decade nel sistema del laboratorio, $p_{1,2}$ e $E_{1,2}$ momenti ed energie dei prodotti del decadimento nel sistema del centro di massa, calcolati nella sottosezione precedente, Eqs. (2.67) e (2.70). Pertanto

$$\begin{aligned}
 |\vec{p}_1^{lab}| &= \sqrt{\frac{(V |\vec{p}| \cos \theta_{cm} + E_1)^2 - (1 - V^2) m_1^2}{1 - V^2}} \\
 |\vec{p}_2^{lab}| &= \sqrt{\frac{(-V |\vec{p}| \cos \theta_{cm} + E_2)^2 - (1 - V^2) m_2^2}{1 - V^2}}
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

Denotiamo con θ_1 (rispettivamente θ_2) gli angoli formati nel sistema del laboratorio dagli impulsi \vec{p}_1^{lab} (rispettivamente \vec{p}_2^{lab}) e \vec{P} . Abbiamo

$$\begin{aligned}
\cos \theta_1 &= \frac{p_{1x}^{lab}}{|\vec{p}_1^{lab}|} = \frac{(V E_1 + |\vec{p}| \cos \theta_{cm})}{\sqrt{(V |\vec{p}| \cos \theta_{cm} + E_1)^2 - (1 - V^2) m_1^2}} = \\
&= \frac{(V + v_1 \cos \theta_{cm})}{\sqrt{(V v_1 \cos \theta_{cm} + 1)^2 - (1 - V^2) (1 - v_1^2)}} \\
\cos \theta_2 &= \frac{p_{2x}^{lab}}{|\vec{p}_2^{lab}|} = \frac{(V E_2 - |\vec{p}| \cos \theta_{cm})}{\sqrt{(-V |\vec{p}| \cos \theta_{cm} + E_2)^2 - (1 - V^2) m_2^2}} = \\
&= \frac{(V - v_2 \cos \theta_{cm})}{\sqrt{(-V v_2 \cos \theta_{cm} + 1)^2 - (1 - V^2) (1 - v_2^2)}} \tag{2.79}
\end{aligned}$$

Queste relazioni esprimono θ_{cm} in termini degli angoli θ_1 e θ_2 nel laboratorio. Pertanto esse, insieme alla (2.76) e alle (2.78), determinano le energie e gli impulsi delle particelle prodotte nel decadimento come funzione della energia e dell'impulso della particella che decade e degli angoli θ_1 e θ_2 .

Delle relazioni equivalenti possono alternativamente essere derivate considerando direttamente la conservazione del quadri-momento nel sistema del laboratorio

$$\begin{aligned}
E_1^{lab} + E_2^{lab} &= E = \sqrt{|\vec{P}|^2 + M^2} \\
\vec{p}_1^{lab} + \vec{p}_2^{lab} &= \vec{P} \tag{2.80}
\end{aligned}$$

Sostituendo la seconda delle (2.80) nella prima e quadrando otteniamo

$$\begin{aligned}
(\vec{p}_1^{lab})^2 + m_1^2 + \vec{P}^2 + (\vec{p}_1^{lab})^2 - 2 \vec{P} \cdot \vec{p}_1^{lab} + m_2^2 + 2 E_1^{lab} E_2^{lab} &= \\
= |\vec{P}|^2 + M^2 \tag{2.81}
\end{aligned}$$

ovvero

$$E_1^{lab} E_2^{lab} = \frac{M^2 - m_1^2 - m_2^2}{2} + \vec{P} \cdot \vec{p}_1^{lab} - (\vec{p}_1^{lab})^2 \tag{2.82}$$

Quadrando una seconda volta ricaviamo

$$\begin{aligned}
& (\vec{p}_1^{tab})^4 + (\vec{p}_1^{tab})^2 \vec{P}^2 - 2 (\vec{p}_1^{tab})^2 \vec{P} \cdot \vec{p}_1^{tab} + m_1^2 m_2^2 + \\
& + (\vec{p}_1^{tab})^2 m_2^2 + m_1^2 \vec{P}^2 + m_1^2 (\vec{p}_1^{tab})^2 - 2 m_1^2 \vec{P} \cdot \vec{p}_1^{tab} = \\
& = \frac{(M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2}{4} + (\vec{p}_1^{tab})^4 + (\vec{P} \cdot \vec{p}_1^{tab})^2 + \\
& + (M^2 - m_1^2 - m_2^2) \vec{P} \cdot \vec{p}_1^{tab} - (M^2 - m_1^2 - m_2^2) (\vec{p}_1^{tab})^2 + \\
& - 2 \vec{P} \cdot \vec{p}_1^{tab} (\vec{p}_1^{tab})^2 \tag{2.83}
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
& \frac{(M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4 m_1^2 m_2^2 - 4 m_1^2 |\vec{P}|^2}{4} + \\
& + (M^2 - m_2^2 + m_1^2) \vec{P} \cdot \vec{p}_1^{tab} + (\vec{P} \cdot \vec{p}_1^{tab})^2 - E^2 (\vec{p}_1^{tab})^2 = 0 \tag{2.84}
\end{aligned}$$

Sia

$$\vec{P} \cdot \vec{p}_1^{tab} = |\vec{P}| |\vec{p}_1^{tab}| \cos \theta_1 \tag{2.85}$$

dove θ_1 è l'angolo che la particella 1 forma con la particella che decade. Ponendo

$$x \equiv |\vec{p}_1^{tab}| \tag{2.86}$$

l'equazione (2.84) diventa una equazione quadratica per x^2

$$\begin{aligned}
& x^2 (M^2 + |\vec{P}|^2 \sin^2 \theta_1) - x |\vec{P}| \cos \theta_1 (M^2 - m_2^2 + m_1^2) + \\
& - \frac{(M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4 m_1^2 m_2^2 - 4 m_1^2 |\vec{P}|^2}{4} = 0 \tag{2.88}
\end{aligned}$$

²Come verifica, se $\vec{P} = 0$ cioè nel sistema del centro di massa della particella che decade otteniamo

$$x^2 = \frac{(M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4 m_1^2 m_2^2}{4 M^2} \tag{2.87}$$

in accordo con la (2.70).

o equivalentemente

$$x^2 (M^2 + |\vec{P}|^2 \sin^2 \theta_1) - x |\vec{P}| \cos \theta_1 (M^2 - m_2^2 + m_1^2) + \frac{(M^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4 m_1^2 E^2}{4} = 0 \quad (2.89)$$

La cui soluzione è

$$x = \frac{|\vec{P}| \cos \theta_1 (M^2 - m_2^2 + m_1^2)}{2 (M^2 + |\vec{P}|^2 \sin^2 \theta_1)} + \frac{E \sqrt{(M^2 - m_2^2 + m_1^2)^2 - 4 m_1^2 (M^2 + |\vec{P}|^2 \sin^2 \theta_1)}}{2 (M^2 + |\vec{P}|^2 \sin^2 \theta_1)} \quad (2.90)$$

In definitiva, l'impulso della particella 1 prodotta nel decadimento è³

$$|\vec{p}_1^{lab}| = \frac{|\vec{P}| \cos \theta_1 \pm E \sqrt{1 - \frac{4 m_1^2}{M^2} \frac{(1 + \frac{|\vec{P}|^2}{M^2} \sin^2 \theta_1)}{(1 - \frac{m_2^2 - m_1^2}{M^2})^2}}}{2 \frac{(1 + \frac{|\vec{P}|^2}{M^2} \sin^2 \theta_1)}{1 - \frac{m_2^2 - m_1^2}{M^2}}} \quad (2.91)$$

mentre la sua energia è

$$E_1^{lab} = \frac{E \pm |\vec{P}| \cos \theta_1 \sqrt{1 - \frac{4 m_1^2}{M^2} \frac{(1 + \frac{|\vec{P}|^2}{M^2} \sin^2 \theta_1)}{(1 - \frac{m_2^2 - m_1^2}{M^2})^2}}}{2 \frac{(1 + \frac{|\vec{P}|^2}{M^2} \sin^2 \theta_1)}{1 - \frac{m_2^2 - m_1^2}{M^2}}} \quad (2.92)$$

³Dobbiamo scegliere il segno in modo che $|p_1^{lab}| \geq 0$. Per valori di P tali che

$$|\vec{P}|^2 < \frac{(M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4 m_1^2 m_2^2}{4 m_1^2} \equiv P_{crit}^2$$

le due radici della equazione quadratica (2.89) hanno segni opposti. In questo caso quindi solo una delle due radici è positiva, quella con il segno positivo nella (2.90). Per $P \geq P_{crit}$ esistono invece 2 radici della equazione (2.89) ambedue positive. Questi 2 valori di $|p_1^{lab}|$ corrispondono al fatto che quando $P \geq P_{crit}$ esistono 2 valori diversi di θ_{cm} per lo valore di θ_1 : cioè per $P \geq P_{crit}$ la relazione (2.79) non è iniettiva. In questo regime ci sono due possibili modi in cui l'energia ed il momento della particella che decade si può distribuire tra le particelle 1 e 2, con θ_1 fissato. Nel sistema del centro di massa i due modi corrispondono ad angoli θ_{cm} diversi.

Verifichiamo la relazione corretta tra massa ed energia della particella 1:

$$\begin{aligned}
(E_1^{lab})^2 - |\vec{p}_1^{lab}|^2 &= (E_1^{lab} - |\vec{p}_1^{lab}|) (E_1^{lab} + |\vec{p}_1^{lab}|) = \\
&= \frac{(E - P \cos \theta_1) \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{M^2} \frac{(1 + \frac{|\vec{P}|^2}{M^2} \sin^2 \theta_1)}{(1 - \frac{m_2^2 - m_1^2}{M^2})^2}}\right)}{4 \frac{(1 + \frac{|\vec{P}|^2}{M^2} \sin^2 \theta_1)^2}{(1 - \frac{m_2^2 - m_1^2}{M^2})^2}} \times \\
&\times (E + P \cos \theta_1) \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{M^2} \frac{(1 + \frac{|\vec{P}|^2}{M^2} \sin^2 \theta_1)}{(1 - \frac{m_2^2 - m_1^2}{M^2})^2}}\right) = \\
&= \frac{(E^2 - P^2 \cos^2 \theta_1) \left(\frac{4m_1^2}{M^2} \frac{(1 + \frac{|\vec{P}|^2}{M^2} \sin^2 \theta_1)}{(1 - \frac{m_2^2 - m_1^2}{M^2})^2}\right)}{4 \frac{(1 + \frac{|\vec{P}|^2}{M^2} \sin^2 \theta_1)^2}{(1 - \frac{m_2^2 - m_1^2}{M^2})^2}} = \\
&= \frac{(M^2 + P^2 \sin^2 \theta_1) \left(\frac{m_1^2}{M^2} (1 + \frac{|\vec{P}|^2}{M^2} \sin^2 \theta_1)\right)}{\left(1 + \frac{|\vec{P}|^2}{M^2} \sin^2 \theta_1\right)^2} = m_1^2 \quad (2.93)
\end{aligned}$$

Formule analoghe valgono ovviamente per momento ed energia della particella 2.

Consideriamo queste equazioni in alcuni casi specifici:

- $m_1 = m_2 = 0$: in questo caso l'equazione (2.84) si semplifica

$$x^2 (M^2 + |\vec{P}|^2 \sin^2 \theta_1) - x M^2 |\vec{P}| \cos \theta_1 - \frac{M^4}{4} = 0 \quad (2.94)$$

le cui soluzioni sono

$$x = \frac{|\vec{P}| \cos \theta_1 \pm E}{2 \left(1 + \frac{|\vec{P}|^2}{M^2} \sin^2 \theta_1\right)} \quad (2.95)$$

Poiché $x = |p_1^{lab}| \geq 0$ dobbiamo scegliere la soluzione col segno positivo

della radice

$$\begin{aligned}
|p_{1,2}^{lab}| = E_{1,2}^{lab} &= \frac{E}{2} \frac{1 + \frac{|\vec{P}|}{E} \cos \theta_{1,2}}{\left(1 + \frac{|\vec{P}|^2}{M^2} \sin^2 \theta_{1,2}\right)} = \\
&= \frac{E}{2} (1 - V^2) \frac{1 + V \cos \theta_{1,2}}{(1 - V^2 \cos^2 \theta_{1,2})} = \\
&= \frac{E}{2} \frac{1 - V^2}{(1 - V \cos \theta_{1,2})} = \frac{M}{2} \frac{\sqrt{1 - V^2}}{(1 - V \cos \theta_{1,2})} \quad (2.96)
\end{aligned}$$

Quando $m_1 = m_2 = 0$, gli angoli $\theta_{1,2}$ sono dati da

$$\begin{aligned}
\cos \theta_1 &= \frac{V + \cos \theta_{cm}}{1 + V \cos \theta_{cm}} \\
\cos \theta_2 &= \frac{V - \cos \theta_{cm}}{1 - V \cos \theta_{cm}} \quad (2.97)
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\frac{1 - V^2}{(1 - V \cos \theta_1)} &= \frac{1 - V^2}{1 + V \cos \theta_{cm} - V^2 - V \cos \theta_{cm}} \times \\
&\quad \times (1 + V \cos \theta_{cm}) = \\
&= (1 + V \cos \theta_{cm}) \\
\frac{1 - V^2}{(1 - V \cos \theta_2)} &= \frac{1 - V^2}{1 - V \cos \theta_{cm} - V^2 + V \cos \theta_{cm}} \times \\
&\quad \times (1 - V \cos \theta_{cm}) = \\
&= (1 - V \cos \theta_{cm}) \quad (2.98)
\end{aligned}$$

Quindi

$$E_1^{lab} = \frac{E}{2} (1 + V \cos \theta_{cm}) \quad E_2^{lab} = \frac{E}{2} (1 - V \cos \theta_{cm}) \quad (2.99)$$

consistentemente con le (2.76).

Calcoliamo l'angolo $\Delta\theta$ tra le due particelle prodotte nel decadimento, in funzione di θ_{cm}

$$\begin{aligned}
p_1 \cdot p_2 &= \frac{M^2}{2} = E_1^{lab} E_2^{lab} (1 - \cos \Delta\theta) = \\
&= \frac{E^2}{4} (1 - V^2 \cos^2 \theta_{cm}) (1 - \cos \Delta\theta) \quad (2.100)
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\Delta\theta}{2} &= \frac{(1 - \cos \Delta\theta)}{2} = \frac{M^2}{E^2 (1 - V^2 \cos^2 \theta_{cm})} = \\ &= \frac{1 - V^2}{1 - V^2 \cos^2 \theta_{cm}}\end{aligned}\quad (2.101)$$

- $m_1 = m_2 = m$. In questo caso la formula generale (2.91) diventa

$$|\vec{p}_1^{lab}| = \frac{|\vec{P}| \cos \theta_1 \pm E \sqrt{1 - 4 \frac{m^2}{M^2} (1 + \frac{|\vec{P}|^2}{M^2} \sin^2 \theta_1)}}{2 (1 + \frac{|\vec{P}|^2}{M^2} \sin^2 \theta_1)} \quad (2.102)$$

Per l'energia otteniamo

$$E_1^{lab} = \frac{E \pm |\vec{P}| \cos \theta_1 \sqrt{1 - 4 \frac{m^2}{M^2} (1 + \frac{|\vec{P}|^2}{M^2} \sin^2 \theta_1)}}{2 (1 + \frac{|\vec{P}|^2}{M^2} \sin^2 \theta_1)} \quad (2.103)$$

Per $\theta_1 = 0$

$$|\vec{p}_{1,2}^{lab}| = \frac{|\vec{P}|}{2} \pm \frac{E \sqrt{1 - 4 \frac{m^2}{M^2}}}{2} \quad (2.104)$$

in accordo con la (2.76), che per $\theta_1 = 0 \Rightarrow \theta_{cm} = 0$ danno

$$\begin{aligned}p_{1x}^{lab} &= \gamma (V \frac{M}{2} + |\vec{p}|) = \gamma (V \frac{M}{2} + \frac{M}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}}) \\ p_{2x}^{lab} &= \gamma (V \frac{M}{2} - |\vec{p}|) = \gamma (V \frac{M}{2} - \frac{M}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}})\end{aligned}\quad (2.105)$$

Esercizio: Una particella di massa M ed energia E decade in due particelle di massa uguale m . Per quale valore di θ_{cm} le velocità delle due particelle sono uguali nel sistema del laboratorio? Qual'è l'angolo tra le due particelle nel sistema di laboratorio?

I moduli delle velocità delle due particelle prodotte nel decadimento sono uguali quando i moduli dei loro momenti sono uguali, perché le particelle

hanno la stessa massa. I moduli dei due momenti delle particelle di massa m sono uguali se

$$(p_{1z}^{lab})^2 + (p_{1x}^{lab})^2 = (p_{2z}^{lab})^2 + (|\vec{P}| - p_{1x}^{lab})^2 \quad (2.106)$$

ovvero quando

$$p_{1x}^{lab} = \frac{|\vec{P}|}{2} \quad (2.107)$$

Dalle (2.76) deduciamo che questo avviene quando

$$\cos \theta_{cm} = 0 \Rightarrow \theta_{cm} = \frac{\pi}{2} \quad (2.108)$$

In questo caso quindi

$$\begin{aligned} E_1^{lab} &= E_2^{lab} = \gamma E_1 = \frac{E}{2} \\ p_{1x}^{lab} &= \gamma V \frac{M}{2} = \frac{|\vec{P}|}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{E^2 - M^2} \\ p_{1z}^{lab} &= |\vec{p}| = \sqrt{\frac{M^2}{4} - m^2} \end{aligned} \quad (2.109)$$

La velocità delle due particelle è quindi

$$v_{1,2} = \frac{|\vec{p}_1|}{E_1^{lab}} = \frac{|\vec{p}_2|}{E_2^{lab}} = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{E^2}} \quad (2.110)$$

Denotiamo con θ_1 e θ_2 gli angoli che le due particelle formano con l'asse delle z : abbiamo

$$\begin{aligned} \tan \theta_1 &= \frac{p_{1z}^{lab}}{p_{1x}^{lab}} = \frac{\sqrt{\frac{M^2}{4} - m^2}}{\gamma V \frac{M}{2}} = \frac{1}{\gamma V} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \\ \tan \theta_2 &= -\frac{p_{1z}^{lab}}{P - p_{1x}^{lab}} = -\frac{1}{\gamma V} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \end{aligned} \quad (2.111)$$

L'angolo tra le due particelle è $\theta = \theta_1 - \theta_2 = 2\theta_1$

3 Diffusione elastica di 2 particelle

Denotiamo con p, p' i quadri-momenti di una particella di massa m prima e dopo l'urto e con P e P' i quadri-momenti dell'altra particella di massa M . La conservazione del 4-impulso dà

$$P' = P + p - p' \quad (3.112)$$

Prendendo il quadrato, otteniamo

$$M'^2 = M^2 + m^2 + m^2 - 2p \cdot p' + 2(p - p') \cdot P \quad (3.113)$$

ovvero

$$0 = m^2 - p \cdot p' + (p - p') \cdot P \quad (3.114)$$

3.1 Nel sistema del centro di massa

Nel sistema del centro di massa gli impulsi prima e dopo lo scattering sono

$$p = (\omega_{cm}, \vec{p}_{cm}) \quad P = (\Omega_{cm}, -\vec{p}_{cm}) \quad (3.115)$$

e

$$p' = (\omega'_{cm}, \vec{p}'_{cm}) \quad P' = (\Omega'_{cm}, -\vec{p}'_{cm}) \quad (3.116)$$

dove

$$\begin{aligned} \omega_{cm} &= \sqrt{\vec{p}_{cm}^2 + m^2} & \omega'_{cm} &= \sqrt{(\vec{p}'_{cm})^2 + m^2} \\ \Omega_{cm} &= \sqrt{\vec{p}_{cm}^2 + M^2} & \Omega'_{cm} &= \sqrt{(\vec{p}'_{cm})^2 + M^2} \end{aligned} \quad (3.117)$$

La legge di conservazione del quadri-impulso (3.112) diventa

$$s = \omega'_{cm} + \Omega'_{cm} = \sqrt{(\vec{p}'_{cm})^2 + m^2} + \sqrt{(\vec{p}'_{cm})^2 + M^2} \quad (3.118)$$

dove

$$s = \omega_{cm} + \Omega_{cm} \quad (3.119)$$

è l'energia totale nel centro di massa. Si noti che s è un invariante relativistico

$$s^2 = (p + P)^2 = m^2 + M^2 + 2p \cdot P \quad (3.120)$$

La (3.118) è una equazione per $|\vec{p}'_{cm}|$, ovvero l'angolo di diffusione non è determinato dalla legge di conservazione del quadri-impulso. Da questa otteniamo

$$(s - \omega'_{cm})^2 = s^2 - 2s\omega'_{cm} + (\vec{p}'_{cm})^2 + m^2 = (\vec{p}'_{cm})^2 + M^2 \quad (3.121)$$

ovvero

$$\omega'_{cm} = \frac{s^2 + m^2 - M^2}{2s} \quad (3.122)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \omega'_{cm} &= \frac{\omega_{cm}^2 + \Omega_{cm}^2 + 2\omega_{cm}\Omega_{cm} + m^2 - M^2}{2(\omega_{cm} + \Omega_{cm})} = \\ &= \frac{\omega_{cm}^2 + |\vec{p}_{cm}|^2 + 2\omega_{cm}\Omega_{cm} + m^2}{2(\omega_{cm} + \Omega_{cm})} = \\ &= \frac{2\omega_{cm}^2 + \omega_{cm}\Omega_{cm}}{2(\omega_{cm} + \Omega_{cm})} = \omega_{cm} \end{aligned} \quad (3.123)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} |\vec{p}'_{cm}| &= |\vec{p}_{cm}| = \sqrt{\frac{(s^2 + m^2 - M^2)^2}{4s^2} - m^2} = \\ &= \sqrt{\frac{(s - m + M)(s - m - M)(s + m - M)(s + m + M)}{4s^2}} \end{aligned} \quad (3.124)$$

Concludiamo che la conservazione del 4-impulso impone che i moduli dei 3-impulsi, e quindi le energie delle due particelle, non cambino nell'urto: l'unica cosa che cambia nell'urto nel sistema del centro di massa è la direzione di propagazione delle due particelle.

3.2 Nel sistema del laboratorio

Siano

$$p = (\omega, \vec{p}) \quad P = (M, 0) \quad p' = (\omega', \vec{p}') \quad P' = (\Omega, \vec{P}') \quad (3.125)$$

i quadri-momenti delle particelle nel sistema in cui la particella con massa M è ferma prima dell'urto. Inserendo questi valori in (3.114) otteniamo

$$0 = m^2 - \omega \omega' + \vec{p} \cdot \vec{p}' + M (\omega - \omega') \quad (3.126)$$

ovvero

$$(M + \omega) \sqrt{m^2 + |\vec{p}'|^2} = m^2 + |\vec{p}| |\vec{p}'| \cos \theta + M \omega \quad (3.127)$$

dove θ è l'angolo di diffusione, ovvero l'angolo tra le direzioni di propagazione della particella di massa m prima e dopo l'urto. Otteniamo quindi una equazione quadratica

$$(m^2 + |\vec{p}'|^2) (M + \omega)^2 = (m^2 + M \omega)^2 + 2 (m^2 + M \omega) |\vec{p}| |\vec{p}'| \cos \theta + |\vec{p}|^2 |\vec{p}'|^2 \cos^2 \theta \quad (3.128)$$

da cui

$$|\vec{p}'|^2 ((M + \omega)^2 - |\vec{p}|^2 \cos^2 \theta) - 2 (m^2 + M \omega) |\vec{p}| \cos \theta |\vec{p}'| + |\vec{p}|^2 (M^2 - m^2) = 0 \quad (3.129)$$

Quindi

$$|\vec{p}'| = \frac{(m^2 + M \omega) |\vec{p}| \cos \theta}{(M + \omega)^2 - |\vec{p}|^2 \cos^2 \theta} + \pm \frac{|\vec{p}|}{(M + \omega)^2 - |\vec{p}|^2 \cos^2 \theta} \times \sqrt{(m^2 + M \omega)^2 \cos^2 \theta + (M^2 - m^2) ((M + \omega)^2 - |\vec{p}|^2 \cos^2 \theta)} \quad (3.130)$$

Notiamo che

$$\begin{aligned}
& (m^2 + M \omega)^2 \cos^2 \theta + (M^2 - m^2) ((M + \omega)^2 - |\vec{p}|^2 \cos^2 \theta) = \\
& = ((m^2 + M \omega)^2 + (\omega^2 - m^2) (m^2 - M^2)) \cos^2 \theta + \\
& \quad + (M^2 - m^2) (M + \omega)^2 = \\
& = m^2 (M + \omega)^2 \cos^2 \theta + (M^2 - m^2) (M + \omega)^2 = \\
& = (M + \omega)^2 (m^2 \cos^2 \theta + M^2 - m^2) = (M + \omega)^2 (M^2 - m^2 \sin^2 \theta)
\end{aligned} \tag{3.131}$$

Dunque

$$\frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} = \frac{(m^2 + M \omega) \cos \theta \pm (M + \omega) \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2 \theta}}{(M + \omega)^2 - |\vec{p}|^2 \cos^2 \theta} \tag{3.132}$$

Le soluzioni accettabili sono quelle con $|\vec{p}'| \geq 0$: ma

$$\begin{aligned}
& (m^2 + M \omega)^2 \cos^2 \theta - (M + \omega)^2 (m^2 \cos^2 \theta + M^2 - m^2) = \\
& = ((M^2 - m^2) \omega^2 - (M^2 - m^2) m^2) \cos^2 \theta + \\
& \quad - (M + \omega)^2 (M^2 - m^2) = \\
& = (M^2 - m^2) [(\omega^2 - m^2) \cos^2 \theta - (M + \omega)^2] = \\
& = (M^2 - m^2) [\vec{p}^2 \cos^2 \theta - (M + \omega)^2]
\end{aligned} \tag{3.133}$$

Abbiamo

$$\vec{p}^2 \cos^2 \theta - (M + \omega)^2 < 0 \tag{3.134}$$

Quindi

$$|(m^2 + M \omega) \cos \theta| \leq (M + \omega) \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2 \theta} \Leftrightarrow M > m \tag{3.135}$$

Quindi per $M > m$ l'unica soluzione accettabile è

$$|\vec{p}'| = \frac{(m^2 + M \omega) |\vec{p}| \cos \theta + (M + \omega) |\vec{p}| \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2 \theta}}{(M + \omega)^2 - |\vec{p}|^2 \cos^2 \theta} \tag{3.136}$$

Calcoliamo l'energia della particella diffusa ω' facendo uso della (3.127)

$$\begin{aligned}
\omega' &= \frac{m^2 + M\omega + |\vec{p}| |\vec{p}'| \cos \theta}{M + \omega} = \\
&= \frac{m^2 + M\omega + |\vec{p}|^2 \cos \theta \frac{(m^2 + M\omega) \cos \theta + (M + \omega) \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2 \theta}}{(M + \omega)^2 - |\vec{p}|^2 \cos^2 \theta}}{M + \omega} = \\
&= \frac{(m^2 + M\omega) ((M + \omega)^2 - |\vec{p}|^2 \cos^2 \theta) + |\vec{p}|^2 \cos^2 \theta (m^2 + M\omega)}{(M + \omega) ((M + \omega)^2 - |\vec{p}|^2 \cos^2 \theta)} + \\
&+ \frac{(M + \omega) |\vec{p}|^2 \cos \theta \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2 \theta}}{(M + \omega) ((M + \omega)^2 - |\vec{p}|^2 \cos^2 \theta)} = \\
&= \frac{(m^2 + M\omega) (M + \omega)}{((M + \omega)^2 - |\vec{p}|^2 \cos^2 \theta)} + \frac{|\vec{p}|^2 \cos \theta \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2 \theta}}{((M + \omega)^2 - |\vec{p}|^2 \cos^2 \theta)} = \\
&= \frac{(m^2 + M\omega) (M + \omega) + |\vec{p}|^2 \cos \theta \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2 \theta}}{(M + \omega)^2 - |\vec{p}|^2 \cos^2 \theta} \quad (3.137)
\end{aligned}$$

Nel caso in cui l'angolo di diffusione è $\theta = \pi$, cioè per diffusione all'indietro,

$$\begin{aligned}
|\vec{p}'| &= \frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2 + 2\omega M} |\vec{p}| \\
\omega' &= \frac{\omega (M^2 + m^2) + 2m^2 M}{M^2 + m^2 + 2\omega M} \quad \theta = \pi \quad (3.138)
\end{aligned}$$

Nel caso ultra-relativistico in cui $m = 0$ la formula (3.136) si semplifica

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{M (\omega \cos \theta + M + \omega)}{(M + \omega - \omega \cos \theta) (M + \omega + \omega \cos \theta)} = \frac{M}{M + \omega - \omega \cos \theta} \quad (3.139)$$

ovvero

$$\begin{aligned}
(\omega - \omega') M &= \omega' \omega (1 - \cos \theta) \Leftrightarrow \\
\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} &= \frac{1}{M} (1 - \cos \theta) \quad (3.140)
\end{aligned}$$

che è la famosa formula di *Compton*.

Esercizio: Si consideri la diffusione di un elettrone con $\omega = 10m$, dove $m = 0.511 \text{ MeV}/c^2$ è la massa dell'elettrone, su di un protone fermo. Si calcoli l'energia dell'elettrone diffuso all'indietro (con $\theta = \pi$)

Soluzione: In questo caso l'elettrone è ultra-relativistico

$$|\vec{p}'| = \sqrt{\omega^2 - m^2} = \sqrt{100 m^2 - m^2} \approx \omega \quad (3.141)$$

Possiamo inoltre trascurare la massa dell'elettrone rispetto alla massa del protone, poiché $M = 1836.15 m$. In definitiva, nel caso in esame, si può usare la formula di Compton

$$\omega' \approx |\vec{p}'| \approx \frac{M}{M + 2\omega} \omega = \frac{1836.15}{1836.15 + 2 \cdot 10} 10 m = 9.89 m \quad (3.142)$$

4 Equazioni di Maxwell e relatività

Le equazioni di Maxwell si scrivono in forma relativisticamente covariante come

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} &= 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= j^\nu \end{aligned} \quad (4.143)$$

Consideriamo le 4 equazioni omogenee: queste si scrivono, in notazione tridimensionale

$$\begin{aligned} \epsilon^{0ijk} \partial_i F_{jk} &= 0 \\ \epsilon^{i0jk} \partial_0 F_{jk} + 2 \epsilon^{ij0k} \partial_j F_{0k} &= 0 = \\ &= -\epsilon^{0ijk} \partial_0 F_{jk} + 2 \epsilon^{0ijk} \partial_j F_{0k} \end{aligned} \quad (4.144)$$

Poniamo

$$\epsilon^{0123} = 1 = -\epsilon_{0123} \Rightarrow \epsilon^{0ijk} = \epsilon^{ijk} \quad (4.145)$$

Dunque

$$\begin{aligned} \partial_i (\epsilon^{ijk} F_{jk}) &= 0 \\ -\partial_0 \left(\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk} \right) + \epsilon^{ijk} \partial_j F_{0k} &= 0 \end{aligned} \quad (4.146)$$

Confrontando con la forma tradizionale delle equazioni di Maxwell

$$\begin{aligned}\partial_i B_i &= 0 \\ \partial_0 B_i + \epsilon^{ijk} \partial_j E_k &= 0\end{aligned}\quad (4.147)$$

otteniamo le identificazioni

$$\begin{aligned}B_i &= -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk} F_{jk} \Leftrightarrow F_{jk} = F^{jk} = -\epsilon^{jki} B_i \\ F_{0k} &= -F^{0k} = E_k\end{aligned}\quad (4.148)$$

Le equazioni non-omogenee implicano

$$\partial_\mu j^\mu = 0\quad (4.149)$$

che è equivalente l'equazione di continuità

$$\partial_0 \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0\quad (4.150)$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\partial_i F^{i0} &= \partial_i E_i = j^0 \\ \partial_0 F^{0i} - \partial_j F^{ij} &= j^i \Rightarrow -\partial_0 E_i + \epsilon_{ijk} \partial_j B_k = j^i\end{aligned}\quad (4.151)$$

Confrontando con le stesse equazioni scritte in forma tradizionale, otteniamo le identificazioni

$$j^\mu = (\rho, \vec{J})\quad (4.152)$$

La soluzione delle equazioni omogenee si scrive

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\quad (4.153)$$

da cui

$$\begin{aligned}F_{0i} &= E_i = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 \\ F_{ij} &= \partial_i A_j - \partial_j A_i\end{aligned}\quad (4.154)$$

In termini dei potenziali ϕ e \vec{A} tradizionali, abbiamo pertanto le identificazioni

$$A_\mu = (\phi, -\vec{A}) \Rightarrow A^\mu = (\phi, \vec{A}) \quad (4.155)$$

In particolare il gauge di Lorentz è

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \Leftrightarrow \partial_0 \phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (4.156)$$

In questo gauge le equazioni di Maxwell si scrivono

$$\partial^2 A^\nu = j^\nu \quad (4.157)$$

4.1 Le trasformazioni relativistiche dei campi elettromagnetici

4.1.1 Caso generale

Siano \vec{E} e \vec{B} i campi elettromagnetici nel sistema di riferimento $\{O, x\}$. Il sistema di riferimento $\{O, x\}$ si muove con velocità v rispetto ad un sistema (di “laboratorio”) $\{O', x'\}$ lungo l’asse delle x . Vogliamo calcolare i campi elettromagnetici nel sistema di riferimento $\{O', x'\}$.

Soluzione: Sia

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \Lambda^\mu_\nu x^\nu \\ \Lambda &= \begin{pmatrix} \cosh \theta_v & \sinh \theta_v & 0 & 0 \\ \sinh \theta_v & \cosh \theta_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \frac{v}{c} &= \tanh \theta_v \end{aligned} \quad (4.158)$$

Dunque

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma} \quad (4.159)$$

da cui

$$\begin{aligned}
F'^{01} &= -E'_1 = \Lambda^0_\rho \Lambda^1_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^0_0 \Lambda^1_\sigma F^{0\sigma} + \Lambda^0_1 \Lambda^1_\sigma F^{1\sigma} = \\
&= \Lambda^0_0 \Lambda^1_1 F^{01} + \Lambda^0_1 \Lambda^1_0 F^{10} = F^{01} = -E_1 \\
F'^{0a} &= \Lambda^0_\rho \Lambda^a_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^0_0 F^{0a} + \Lambda^0_1 F^{1a} \quad \text{con } a = 2, 3 \quad (4.160)
\end{aligned}$$

Pertanto

$$E'_1 = E_1 \quad E'_a = \cosh \theta_v E_a + \sinh \theta_v \epsilon_{ab} B_b \quad a = 2, 3 \quad (4.161)$$

Possiamo scrivere queste relazioni in maniera equivalente

$$\begin{aligned}
\vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel} \\
\vec{E}'_{\perp} &= \gamma (\vec{E}_{\perp} - \vec{v} \times \vec{B}) \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad (4.162)
\end{aligned}$$

dove \vec{E}_{\parallel} e \vec{E}_{\perp} sono, rispettivamente le componenti parallele e ortogonali di \vec{E} rispetto alla velocità \vec{v} con cui il sistema non primato si muove rispetto al sistema primato.

Analogamente

$$\begin{aligned}
F'^{23} &= \Lambda^2_\rho \Lambda^3_\sigma F^{\rho\sigma} = F^{23} \\
F'^{1a} &= \Lambda^1_\rho \Lambda^a_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^1_\rho F^{\rho a} = \\
&= \Lambda^1_0 F^{0a} + \Lambda^1_1 F^{1a} = \\
&= -\sinh \theta_v E_a - \cosh \theta_v \epsilon_{ab} B_b \quad (4.163)
\end{aligned}$$

Quindi

$$B'_1 = B_1 \quad B'_a = \cosh \theta_v B_a - \sinh \theta_v \epsilon_{ab} E_b \quad a = 2, 3 \quad (4.164)$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
\vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel} \\
\vec{B}'_{\perp} &= \gamma (\vec{B}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{E}) \quad (4.165)
\end{aligned}$$

4.1.2 Campo elettrico (magnetico) nullo in un sistema di riferimento

Si determini la relazione tra \vec{E} e \vec{B} nel sistema del “laboratorio” $\{O', x'\}$ se il campo magnetico (elettrico) si annulla nel sistema $\{O, x\}$.

Soluzione: Nel caso in cui $\vec{B} = 0$ nel sistema $\{O, x\}$:

$$\begin{aligned}
 E'_1 &= E_1 & B'_1 &= 0 \\
 E'_a &= \cosh \theta_v E_a \\
 B'_a &= -\sinh \theta_v \epsilon_{ab} E_b = -\tanh \theta_v \epsilon_{ab} E'_b \\
 \Rightarrow \vec{B}' &= \vec{v} \times \vec{E}'
 \end{aligned} \tag{4.166}$$

Nel caso in cui $\vec{E} = 0$ nel sistema $\{O, x\}$:

$$\begin{aligned}
 E'_1 &= 0 & B'_1 &= B_1 \\
 B'_a &= \cosh \theta_v B_a \\
 E'_a &= \sinh \theta_v \epsilon_{ab} B_b = \tanh \theta_v \epsilon_{ab} B'_b \\
 \Rightarrow \vec{E}' &= -\vec{v} \times \vec{B}'
 \end{aligned} \tag{4.167}$$

4.1.3 Gli invarianti relativistici del campo elettro-magnetico

Le grandezze

$$I_1 = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad I_2 = -\frac{1}{8} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \tag{4.168}$$

sono invarianti relativistici. Abbiamo

$$I_1 = \vec{B}^2 - \vec{E}^2 \quad I_2 = \vec{E} \cdot \vec{B} \tag{4.169}$$

Poiché questi sono invarianti per trasformazioni di Lorentz, configurazioni dei campi relativisticamente equivalenti hanno gli stessi valori per I_1 ed I_2 . Vale anche il viceversa, perché I_1 ed I_2 sono gli *unici* invarianti: pertanto due configurazioni con gli stessi invarianti sono necessariamente collegate da una trasformazione di Lorentz.

Da qui deduciamo che se $|\vec{E}| = |\vec{B}|$ o se $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ in un qualche sistema di riferimento, allora questo rimane vero in tutti i sistemi di riferimento.

Da queste equazione deduciamo anche che se $\vec{E} = 0$ (o $\vec{B} = 0$) in un dato sistema di riferimento, allora \vec{E} e \vec{B} sono perpendicolari in qualunque sistema di riferimento (perché $I_2 = 0$), come derivato esplicitamente dall'esercizio precedente. Viceversa se $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ (ovvero $I_2 = 0$) in un dato sistema di riferimento, sarà possibile trovare un sistema di riferimento in cui $\vec{E} = 0$ o $\vec{B} = 0$ a seconda che $I_1 > 0$ o $I_1 < 0$.

4.1.4 Campi elettrico e magnetico paralleli

Siano I_1 e I_2 ambedue non nulli. Si determini un sistema di riferimento in cui \vec{E} e \vec{B} sono paralleli.

Soluzione: Denotiamo con $\{O, x\}$ il sistema di riferimento nel quale i campi sono paralleli e con $\{O', x'\}$ quello in cui non lo sono. Possiamo supporre che nel sistema $\{O', x'\}$ i campi elettrici e magnetici si trovino nel piano (x'_2, x'_3) e che il sistema $\{O', x'\}$ si muova rispetto al sistema $\{O, x\}$ lungo l'asse delle x . Secondo le (4.161) e (4.164) anche nel sistema $\{O, x\}$ i campi si trovano nel piano (x_2, x_3) . Consideriamo

$$\begin{aligned}
(\vec{E}' \times \vec{B}')_1 &= E'_2 B'_3 - E'_3 B'_2 = \epsilon_{ab} E'_a B'_b = \\
&= \epsilon_{ac} (\cosh \theta_v E_a + \sinh \theta_v \epsilon_{ab} B_b) (\cosh \theta_v B_c - \sinh \theta_v \epsilon_{cd} E_d) \\
&= \cosh^2 \theta_v \epsilon_{ac} E_a B_c - \sinh^2 \theta_v \epsilon_{ac} \epsilon_{ab} \epsilon_{cd} B_b E_d + \\
&+ \sinh \theta_v \cosh \theta_v (\epsilon_{ac} \epsilon_{ab} B_b B_c - \epsilon_{ac} E_a \epsilon_{cd} E_d) = \\
&= \cosh^2 \theta_v \epsilon_{ac} E_a B_c - \sinh^2 \theta_v \epsilon_{bd} B_b E_d + \\
&+ \sinh \theta_v \cosh \theta_v (B_b B_b + E_a E_a) = \\
&= (\cosh^2 \theta_v + \sinh^2 \theta_v) \epsilon_{ac} E_a B_c + \\
&+ \sinh \theta_v \cosh \theta_v (B_b B_b + E_a E_a) = \\
&= \sinh \theta_v \cosh \theta_v (B_b B_b + E_a E_a)
\end{aligned} \tag{4.170}$$

perché per ipotesi nel sistema $\{O, x\}$ i campi sono paralleli. Inoltre

$$\begin{aligned}
E'_a E'_a + B'_b B'_b &= (\cosh \theta_v E_a + \sinh \theta_v \epsilon_{ab} B_b) \times \\
&\quad \times (\cosh \theta_v E_a + \sinh \theta_v \epsilon_{ac} B_c) + \\
&\quad + (\cosh \theta_v B_a - \sinh \theta_v \epsilon_{ab} E_b) \times \\
&\quad \times (\cosh \theta_v B_a - \sinh \theta_v \epsilon_{ac} E_c) = \\
&= \cosh^2 \theta_v E_a^2 + \sinh^2 \theta_v B_b^2 + \\
&\quad + \cosh^2 \theta_v B_a^2 + \sinh^2 \theta_v E_b^2 = \\
&= (\cosh^2 \theta_v + \sinh^2 \theta_v) (E_a^2 + B_b^2)
\end{aligned} \tag{4.171}$$

dove abbiamo di nuovo usato il fatto che $\epsilon_{ab} E_a B_b = 0$. In definitiva

$$\frac{\epsilon_{ab} E'_a B'_b}{\vec{E}'^2 + \vec{B}'^2} = \frac{\sinh \theta_v \cosh \theta_v}{\cosh^2 \theta_v + \sinh^2 \theta_v} = \frac{v}{1 + v^2} \tag{4.172}$$

che è l'equazione che determina v in funzione dei campi nel sistema $\{O', x'\}$.

4.1.5 Le trasformazioni di Lorentz per un filo carico

Si consideri un filo infinito rettilineo, uniformemente carico, disposto lungo l'asse delle x che nel sistema $\{O, x\}$ è a riposo, in presenza di una carica q anche essa a riposo nel sistema $\{O, x\}$. Si confronti la forza elettromagnetica esercitata sulla carica q nel sistema $\{O, x\}$ con quella misurata nel sistema di "laboratorio" $\{O', x'\}$: si verifichi la covarianza relativistica della forza di Lorentz

Soluzione: Sia r la distanza dal filo della carica q . Sia (x, z) il piano che passa per la carica e per il filo. Nel sistema $\{O, x\}$ la forza sulla carica è puramente elettrica e diretta lungo z

$$F_z = \frac{q \lambda}{2 \pi \epsilon_0} \frac{1}{r} \tag{4.173}$$

Nel sistema del laboratorio lungo il filo scorre una corrente

$$I = \lambda' v \tag{4.174}$$

Quindi c'è un campo magnetico che nel punto in cui si trova la carica è

$$\vec{B}' = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \hat{y} = -\frac{\lambda' v}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \hat{y} \quad (4.175)$$

Quindi la forza di Lorentz che si esercita su q è nel sistema del laboratorio diretta lungo z e vale

$$F'_z = \frac{q\lambda'}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} - qv \frac{\lambda' v}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} = \frac{q\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (4.176)$$

Poiché l'accelerazione è invariante per trasformazioni Galileiane, l'invarianza per queste trasformazioni dell'equazione della dinamica classica richiederebbe $F'_z = F_z$. Questo esempio dimostra quindi che la forza di Lorentz e/o le equazioni di Maxwell non sono compatibili con le trasformazioni Galileiane. Mostriamo invece la consistenza delle equazioni (4.173) e (4.176) con le trasformazioni di Lorentz.

Se Δx è un elemento di lunghezza del filo nel suo sistema di quiete, cioè nel sistema $\{O, x\}$, lo stesso elemento di lunghezza nel sistema del laboratorio risulta essere

$$\Delta x' = \frac{1}{\gamma} \Delta x \quad (4.177)$$

Pertanto

$$\lambda' = \frac{\Delta Q}{\Delta x'} = \gamma \lambda \quad (4.178)$$

In conclusione, la relazione tra le forze cui la particella è soggetta nei due sistemi di riferimento è

$$F'_z = \frac{1}{\gamma} F_z \quad (4.179)$$

Assumiamo che valga la legge della dinamica nella forma

$$F'_z = \frac{dp'_z}{dt'} \quad (4.180)$$

nel sistema di laboratorio. Poiché

$$p'_z = p_z \quad (4.181)$$

abbiamo

$$F'_z = \frac{dp_z}{dt'} = \frac{dp_z}{dt} \frac{dt}{dt'} \quad (4.182)$$

dove dt è l'elemento temporale nel sistema di riposo della particella: quindi

$$dt' = \gamma dt \quad (4.183)$$

In definitiva

$$F'_z = \frac{dp'_z}{dt'} = \frac{dp_z}{dt} \frac{1}{\gamma} \quad (4.184)$$

Confrontando con la (4.179) deduciamo che

$$F_z = \frac{dp_z}{dt} \quad (4.185)$$

ovvero la legge della dinamica vale nella stessa forma nel sistema $\{O, x\}$.

4.2 Le equazioni del moto di una carica in notazione relativistica

In effetti le equazioni della dinamica per una particella carica sottoposta ad un campo elettromagnetico si scrivono in forma manifestamente invariante nella forma

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = q F^{\mu\nu} u_\nu = \frac{q}{m} F^{\mu\nu} p_\nu \quad (4.186)$$

dove τ è il tempo proprio della particella e

$$u^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} = (u^0, \vec{u}) = (\gamma, \gamma \vec{v}) = \frac{p^\mu}{m} \quad (4.187)$$

la quadri-velocità, con $u^\mu u_\mu = 1$. Quindi

$$\begin{aligned}\frac{dp^i}{d\tau} &= \gamma \frac{dp^i}{dt} = q F^{i\nu} u_\nu = q F^{i0} u_0 + q F^{ij} u_j = \\ &= q E_i \gamma + q \gamma \epsilon^{ijk} B_k v_j\end{aligned}\quad (4.188)$$

ovvero

$$\frac{dp^i}{dt} = q E_i + q \epsilon^{ijk} v_j B_k \quad (4.189)$$

che è l'espressione usuale per la forza di Lorentz. La componente temporale delle equazioni (4.186) è

$$\frac{d\omega}{d\tau} = q F^{0i} u_i = q \gamma \vec{E} \cdot \vec{v} \quad (4.190)$$

dove $\omega = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ è l'energia della particella. Questa equazione è equivalente alla

$$\frac{d\omega}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{v} \quad (4.191)$$

che esprime la variazione di energia della particella in termini del lavoro fatto su di essa dal campo elettrico.

4.2.1 Moto in campo elettrico uniforme e costante ($I_1 > 0$, $I_2 = 0$)

In questo caso

$$\begin{aligned}\frac{dp^i}{d\tau} &= \frac{q}{m} F^{i0} p^0 = \frac{q}{m} E_i p^0 \\ \frac{dp^0}{d\tau} &= \frac{q}{m} F^{0i} p_i = \frac{q}{m} E_i p^i\end{aligned}\quad (4.192)$$

da cui

$$\frac{d^2 p^i}{d\tau^2} = \frac{q^2}{m^2} E_i E_j p^j \quad (4.193)$$

Prendendo per asse delle x quella del campo elettrico, abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{d^2 p^1}{d\tau^2} &= \frac{q^2 E^2}{m^2} p^1 \\ \frac{d^2 \vec{p}_\perp}{d\tau^2} &= 0\end{aligned}\quad (4.194)$$

dove \vec{p}_\perp sono le componenti dell'impulso trasverse a \vec{E} . Prendendo

$$p^1(0) = 0 \quad \left. \frac{dp^1}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \frac{q}{m} E p^0(0) \quad (4.195)$$

dove $p^0(0) = \sqrt{p_\perp^2(0) + m^2}$ è l'energia all'istante $\tau = 0$, otteniamo

$$\begin{aligned}p^1(\tau) &= p^0(0) \sinh \frac{q E \tau}{m} \\ \vec{p}_\perp(\tau) &= \vec{p}_\perp(0) \\ p^0(\tau) &= p^0(0) \cosh \frac{q E \tau}{m}\end{aligned}\quad (4.196)$$

Integrando $p^1(\tau) = m \frac{dx(\tau)}{d\tau}$, otteniamo

$$x(\tau) = \frac{p^0(0)}{q E} \left(\cosh \frac{q E \tau}{m} - 1 \right) \quad (4.197)$$

avendo scelto $x(0) = 0$. Il moto in direzione ortogonale può essere preso lungo y , e $p^0(0) = \sqrt{p_y^2(0) + m^2}$

$$y(\tau) = \frac{p_y(0) \tau}{m} \quad (4.198)$$

La traiettoria nel piano (x, y) è pertanto

$$x = \frac{p^0(0)}{q E} \left(\cosh \frac{q E y}{p_y(0)} - 1 \right) \quad (4.199)$$

che è l'equazione di una catenaria. La velocità della particella è invece

$$\begin{aligned}v_x(\tau) &= \frac{p^1(\tau)}{p^0(\tau)} = \tanh \frac{q E \tau}{m} \\ v_y(\tau) &= \frac{p_y(0)}{p^0(\tau)} = \frac{p_y(0)}{p^0(0) \cosh \frac{q E \tau}{m}}\end{aligned}\quad (4.200)$$

Per

$$\frac{q E \tau}{m} \ll 1 \quad (4.201)$$

il moto è non-relativistico e la traiettoria diventa

$$x = \frac{q E m y^2}{2 p_y(0)} + \dots \quad (4.202)$$

cioè una parabola. La relazione tra tempo proprio e tempo nel laboratorio è

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{p^0(\tau)}{m} = \frac{p^0(0)}{m} \cosh \frac{q E \tau}{m} \quad (4.203)$$

da cui

$$t = \frac{p^0(0)}{q E} \sinh \frac{q E \tau}{m} \quad (4.204)$$

4.2.2 Moto in campo magnetico uniforme e costante ($I_1 < 0$, $I_2 = 0$)

Prendiamo il campo magnetico lungo l'asse delle z . In questo caso

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{d\tau} &= -\frac{q}{m} F^{12} p_y = \frac{q}{m} B p_y \\ \frac{dp_y}{d\tau} &= -\frac{q}{m} F^{21} p_x = -\frac{q}{m} B p_x \\ \frac{dp_z}{d\tau} &= 0 \end{aligned} \quad (4.205)$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p_x}{d\tau^2} &= -\frac{q^2 B^2}{m^2} p_x \\ \frac{d^2 p_y}{d\tau^2} &= -\frac{q^2 B^2}{m^2} p_y \end{aligned} \quad (4.206)$$

La soluzione con le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} p_x(0) &= p_{\perp}(0) & p_y(0) &= 0 \\ \left. \frac{dp_x}{d\tau} \right|_{\tau=0} &= 0 & \left. \frac{dp_y}{d\tau} \right|_{\tau=0} &= -\frac{q B}{m} p(0) \\ p_z(0) &= p_{\parallel}(0) \end{aligned} \quad (4.207)$$

è

$$\begin{aligned} p_x(\tau) &= p_{\perp}(0) \cos \frac{qB\tau}{m} & p_y(\tau) &= -p_{\perp}(0) \sin \frac{qB\tau}{m} \\ p_z(\tau) &= p_{\parallel}(0) \end{aligned} \quad (4.208)$$

Integrando otteniamo

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \frac{p_{\perp}(0)}{qB} \sin \frac{qB\tau}{m} + x(0) \\ y(\tau) &= \frac{p_{\perp}(0)}{qB} \cos \frac{qB\tau}{m} + y(0) \\ z(\tau) &= \frac{p_{\parallel}(0)}{m} \tau + z_0 \end{aligned} \quad (4.209)$$

La traiettoria è pertanto una elica con asse lungo z e la cui proiezione sul piano (x, y) è cerchio di centro $(x(0), y(0))$ e raggio r

$$r = \frac{p_{\perp}(0)}{qB} \quad (4.210)$$

4.2.3 Moto in campi elettrici e magnetici ortogonali tra loro e di uguale intensità ($I_1 = I_2 = 0$)

Scegliamo \vec{B} lungo z e \vec{E} lungo y . Le equazioni del moto diventano

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{d\tau} &= -\frac{q}{m} F^{12} p_y = \frac{qB}{m} p_y \\ \frac{dp_y}{d\tau} &= \frac{q}{m} F^{20} p^0 - \frac{q}{m} F^{21} p_x = \frac{qE}{m} p^0 - \frac{qB}{m} p_x \\ \frac{dp_z}{d\tau} &= 0 \\ \frac{dp^0}{d\tau} &= -\frac{q}{m} F^{02} p_y = \frac{qE}{m} p_y \end{aligned} \quad (4.211)$$

Ponendo $E = B$

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_x}{d\tau} &= \frac{q E}{m} p_y \\
 \frac{dp_y}{d\tau} &= \frac{q E}{m} (p^0 - p_x) \\
 \frac{dp_z}{d\tau} &= 0 \\
 \frac{dp^0}{d\tau} &= \frac{q E}{m} p_y
 \end{aligned} \tag{4.212}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 p^0(\tau) &= p_x(\tau) + p^0(0) - p_x(0) \\
 p_y(\tau) &= \frac{q E}{m} (p^0(0) - p_x(0)) \tau + p_y(0) \\
 p_z(\tau) &= p_z(0)
 \end{aligned} \tag{4.213}$$

Pertanto

$$\frac{dp_x}{d\tau} = \frac{q E}{m} \left(\frac{q E}{m} (p^0(0) - p_x(0)) \tau + p_y(0) \right) \tag{4.214}$$

Integrando

$$\begin{aligned}
 p_x(\tau) &= \frac{q^2 E^2}{2 m^2} (p^0(0) - p_x(0)) \tau^2 + \frac{q E p_y(0)}{m} \tau + p_x(0) \\
 p^0(\tau) &= \frac{q^2 E^2}{2 m^2} (p^0(0) - p_x(0)) \tau^2 + \frac{q E p_y(0)}{m} \tau + p^0(0)
 \end{aligned} \tag{4.215}$$

Integrando di nuovo, otteniamo per la traiettoria in forma parametrica

$$\begin{aligned}
 x(\tau) &= \frac{q^2 E^2}{6 m^3} (p^0(0) - p_x(0)) \tau^3 + \frac{q E p_y(0)}{2 m^2} \tau^2 + \frac{p_x(0)}{m} \tau \\
 y(\tau) &= \frac{q E}{2 m^2} (p^0(0) - p_x(0)) \tau^2 + \frac{p_y(0)}{m} \tau \\
 z(\tau) &= \frac{p_z(0)}{m} \tau
 \end{aligned} \tag{4.216}$$

Le velocità sono date dalle relazioni

$$\begin{aligned}
 v_x(\tau) &= \frac{p_x(\tau)}{p^0(\tau)} = \frac{\frac{q^2 E^2}{2m^2} (p^0(0) - p_x(0)) \tau^2 + \frac{q E p_y(0)}{m} \tau + p_x(0)}{\frac{q^2 E^2}{2m^2} (p^0(0) - p_x(0)) \tau^2 + \frac{q E p_y(0)}{m} \tau + p^0(0)} \\
 v_y(\tau) &= \frac{p_y(\tau)}{p^0(\tau)} = \frac{\frac{q E}{m} (p^0(0) - p_x(0)) \tau + p_y(0)}{\frac{q^2 E^2}{2m^2} (p^0(0) - p_x(0)) \tau^2 + \frac{q E p_y(0)}{m} \tau + p^0(0)} \\
 v_z(\tau) &= \frac{p_z(0)}{p^0(\tau)} = \frac{p_z(0)}{\frac{q^2 E^2}{2m^2} (p^0(0) - p_x(0)) \tau^2 + \frac{q E p_y(0)}{m} \tau + p^0(0)} \quad (4.217)
 \end{aligned}$$

Per τ grandi, la velocità nella direzione trasversa ai campi cresce $v_x \rightarrow 1$ mentre le velocità nel piano dei campi tendono a zero.

5 Onde nei metalli

5.1 Un modello macroscopico

Consideriamo le equazioni di Maxwell con

$$\rho = 0 \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (5.218)$$

Derivando rispetto al tempo l'equazione di Maxwell-Ampère⁴

$$\partial_t \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\vec{J}}{\epsilon_0} \quad (5.219)$$

otteniamo l'equazione d'onda

$$[\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2] \vec{E} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \partial_t \vec{E} = 0 \quad (5.220)$$

Inserendo l'ansatz di una onda piana

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i k_\mu x^\mu} \quad (5.221)$$

con

$$k^\mu = (\omega, \vec{k}) \quad (5.222)$$

⁴Poniamo $c = 1$.

otteniamo la relazione di dispersione

$$\omega^2 - \vec{k}^2 + i \frac{\sigma}{\epsilon_0} \omega = 0 \quad (5.223)$$

La velocità di fase dell'onda è pertanto un numero complesso

$$v_{fase} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{i\sigma}{\epsilon_0\omega}}} \quad (5.224)$$

come pure l'indice di rifrazione

$$n = \frac{1}{v_{fase}} = \sqrt{1 - \frac{i\sigma}{\epsilon_0\omega}} \quad (5.225)$$

da cui

$$n^2 = 1 - \frac{i\sigma}{\epsilon_0\omega} \quad (5.226)$$

5.2 Un modello microscopico

Le cariche nel conduttore sono soggette alla forza dovuta al campo elettrico ed ad una resistenza viscosa, proporzionale alla velocità, dovuta agli urti con il reticolo cristallino:

$$m \ddot{x} = -m \frac{\dot{x}}{\tau} + q E \quad (5.227)$$

La costante di tempo τ rappresenta il tempo medio tra gli urti. Assumendo una dipendenza temporale armonica del campo elettrico di frequenza ω

$$E = E_0 e^{i\omega t} \quad (5.228)$$

otteniamo una soluzione armonica

$$x(t) = x_\omega e^{i\omega t} \quad (5.229)$$

dove

$$-\omega^2 x_\omega = -i \frac{\omega}{\tau} x_\omega + \frac{q}{m} E_\omega \quad (5.230)$$

ovvero

$$x_\omega = \frac{q E_\omega}{m} \frac{1}{-\omega^2 + i \frac{\omega}{\tau}} \quad (5.231)$$

Se ρ è la densità delle cariche, la densità di dipolo indotta dal campo elettrico è quindi

$$P = q \rho x_\omega = \frac{q^2 \rho E_\omega}{m} \frac{1}{-\omega^2 + i \frac{\omega}{\tau}} \quad (5.232)$$

Poiché

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (5.233)$$

è la definizione di suscettibilità elettrica

$$\chi = \frac{q^2 \rho}{m \epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + i \frac{\omega}{\tau}} \quad (5.234)$$

La suscettibilità è legata all'indice di rifrazione da

$$n^2 = 1 + \chi = 1 + \frac{q^2 \rho}{m \epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + i \frac{\omega}{\tau}} \quad (5.235)$$

Collegiamo il parametro τ con la conducibilità σ : in condizioni stazionarie l'equazione (5.227) diventa

$$v_{drift} = \frac{q E \tau}{m} \quad (5.236)$$

Quindi la densità corrente stazionaria indotta dal campo elettrico è

$$J = q \rho v_{drift} = \frac{q^2 \rho E \tau}{m} \quad (5.237)$$

Per definizione

$$J = \sigma E \quad (5.238)$$

Pertanto possiamo identificare

$$\sigma = \frac{q^2 \rho \tau}{m} \quad (5.239)$$

In definitiva

$$\begin{aligned} n^2 &= 1 + \frac{q^2 \rho}{m \epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + i \frac{q^2 \rho \omega}{m \sigma}} = 1 - i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \frac{1}{1 + i \frac{m \sigma \omega}{q^2 \rho}} = \\ &= 1 - i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \frac{1}{1 + i \tau \omega} \end{aligned} \quad (5.240)$$

Quando le frequenze dell'onda sono piccole rispetto a $\frac{1}{\tau}$

$$\omega \ll \frac{1}{\tau} \quad (5.241)$$

otteniamo il modello macroscopico per i conduttori della sottosezione precedente

$$n^2 = 1 - i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \quad (5.242)$$

5.2.1 Buoni conduttori

I buoni conduttori sono quelli per cui

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} \gg \omega \quad (5.243)$$

Per un buon conduttore

$$n^2 = -i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \quad |n|^2 \gg 1 \quad (5.244)$$

per cui

$$\begin{aligned} n &= \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}} = n_R - i n_I \\ n_R &= n_I = \sqrt{\frac{\sigma}{2 \epsilon_0 \omega}} \end{aligned} \quad (5.245)$$

con n_R ed n_I reali.

La dipendenza spaziale di un'onda in un conduttore in questo regime è

$$|E| \propto e^{-x \frac{n_I \omega}{c}} \quad (5.246)$$

La lunghezza di penetrazione è pertanto

$$d = \frac{\lambda_0}{2\pi} \frac{1}{n_I} = \frac{\lambda_0}{2\pi} \sqrt{\frac{2\epsilon_0\omega}{\sigma}} \quad (5.247)$$

dove λ_0 è la lunghezza d'onda nel vuoto. Poiché $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \gg \omega$, la lunghezza di penetrazione è una frazione piccola della lunghezza d'onda nel vuoto: l'onda elettromagnetica non penetra significativamente all'interno del conduttore. Questo fenomeno va sotto il nome di *effetto pelle* nei conduttori.

Esercizio: Si calcoli la profondità di penetrazione nel rame di un'onda elettro-magnetica con frequenza $\omega = 10^{10} \text{ sec}^{-1}$.

Per il rame⁵

$$\sigma = 5.76 \cdot 10^7 \text{ (ohm} \cdot \text{metri)}^{-1} \Rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 6.51 \cdot 10^{18} \text{ sec}^{-1} \quad (5.248)$$

Per un'onda con $\omega = 10^{10} \text{ sec}^{-1}$ la profondità di penetrazione sarà

$$d = \frac{c}{\omega n_I} = \sqrt{\frac{2\epsilon_0 c^2}{\sigma \omega}} = 1.66 \cdot 10^{-4} \text{ cm} \quad (5.249)$$

5.2.2 Cattivi conduttori

Per un cattivo conduttore vale invece la condizione opposta

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} \ll \omega \quad (5.250)$$

In questo regime

$$n = 1 - i \frac{\sigma}{2\epsilon_0\omega} \Rightarrow n_I = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\omega} \ll 1 \quad (5.251)$$

La profondità di penetrazione è pertanto

$$d = \frac{\lambda_0}{2\pi} \frac{1}{n_I} = \frac{\lambda_0}{2\pi} \frac{2\epsilon_0\omega}{\sigma} = \frac{2\epsilon_0 c}{\sigma} \quad (5.252)$$

molto maggiore della lunghezza d'onda nel vuoto, ed è indipendente dalla frequenza.

⁵ $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.0 \cdot 10^9 \frac{\text{volt} \cdot \text{metri}}{\text{coulomb}}$.

Esercizio Si calcoli la lunghezza della radiazione elettromagnetica con frequenza $\omega = 10^{10} \text{ sec}^{-1}$ attraverso acqua pura, $\epsilon_r = 80.1$, $\sigma = 5 \cdot 10^{-6} (\text{ohm} \times \text{metro})^{-1}$.

Usiamo una formula leggermente modificata rispetto alla (5.242) per tenere conto della costante dielettrica dell'acqua

$$n^2 = \epsilon_r - i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \quad (5.253)$$

Nel caso dell'acqua

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = 4 \pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ sec}^{-1} = 5.65 \times 10^5 \text{ sec}^{-1} \quad (5.254)$$

Quindi

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} = 5.65 \cdot 10^{-5} \ll 1 \quad (5.255)$$

e

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \left(1 - i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r \omega}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \sqrt{\epsilon_r} \left(1 - i \frac{\sigma}{2 \epsilon_0 \epsilon_r \omega}\right) \quad (5.256)$$

Dunque

$$n_I = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0 \sqrt{\epsilon_r} \omega} \quad (5.257)$$

e la lunghezza di penetrazione è

$$\begin{aligned} d &= \frac{c}{\omega n_I} = \frac{c}{\frac{\sigma}{2 \epsilon_0 \sqrt{\epsilon_r}}} = 2 \sqrt{\epsilon_r} \frac{c}{\frac{\sigma}{\epsilon_0}} = \\ &= \sqrt{80.1} \frac{6}{5.65} 10^3 \text{ metri} = 9.5 \text{ km} \end{aligned} \quad (5.258)$$

5.2.3 Alte frequenze

Riprendiamo la formula (5.240) nel caso di alte frequenze

$$\omega \gg \frac{1}{\tau} \quad (5.259)$$

In questo limite

$$\begin{aligned} n^2 &= 1 - i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \frac{1}{1 + i \tau \omega} \approx 1 - \frac{\sigma}{\epsilon_0 \tau \omega^2} = 1 - \frac{q^2 \rho}{m \epsilon_0 \omega^2} = \\ &= 1 - \frac{\omega_{plasma}^2}{\omega^2} \end{aligned} \quad (5.260)$$

La frequenza

$$\omega_{plasma}^2 = \frac{q^2 \rho}{m \epsilon_0} \quad (5.261)$$

viene detta la frequenza di plasma del mezzo. In questo limite ω_{plasma} funge da frequenza critica: per frequenze superiori a ω_{plasma} , $n^2 > 0$ e quindi n è reale: il metallo è trasparente. Per frequenza $\omega < \omega_{plasma}$ n è puramente immaginario e la radiazione viene assorbita: il metallo è opaco. Per esempio per il rame assumiamo che ci sia un elettrone di conduzione per atomo: questo significa che il numero di elettroni di conduzione per unità di volume, ovvero ρ , è uguale al numero di atomi per unità di volume. Il peso di un atomo di rame è

$$m_{Cu} = \frac{Peso\ Atomico\ Cu}{N_{Avogadro}} = \frac{63.5 \cdot 10^{-3}}{6^{23}} kg = 1.06 \cdot 10^{-25} kg \quad (5.262)$$

La densità del rame è $\rho_m = 8.9 \cdot 10^3 kg/m^3$, per cui il numero di atomi per unità di volume è

$$\rho = \frac{8.9 \cdot 10^3}{1.06 \cdot 10^{-25}} metri^{-3} = 8.4 \cdot 10^{28} metri^{-3} \quad (5.263)$$

In definitiva

$$\begin{aligned} \omega_{plasma}^2 &= \frac{(1.6 \cdot 10^{-19})^2 (8.4 \cdot 10^{28}) 4 \pi 9 \cdot 10^9}{9.1 \cdot 10^{-31}} sec^{-2} = 2.7 \cdot 10^{32} sec^{-2} \\ \omega_{plasma} &= 1.6 \cdot 10^{16} sec^{-1} \end{aligned} \quad (5.264)$$

6 Radiazione

I potenziali ritardati sono dati da⁶

$$A_\mu(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{j_\mu(\vec{x}', t - R)}{R} \quad (6.265)$$

dove

$$R = |\vec{x} - \vec{x}'| \quad (6.266)$$

6.1 Potenziali ritardati

6.1.1 $I(t) = \theta(t) I_0$

Si calcoli il campo elettromagnetico prodotto da un filo infinito, lungo l'asse delle z , percorso da corrente da una corrente $I(t) = \theta(t) I_0$.

Per $t > \frac{x}{c} > 0$, $\vec{A} = A_z(x, t) \hat{z}$, con

$$\begin{aligned} A_z(x, t) &= \frac{I_0}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz' \theta\left(t - \frac{\sqrt{x^2 + (z')^2}}{c}\right)}{\sqrt{(z')^2 + x^2}} = \\ &= \frac{I_0}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{-\sqrt{c^2 t^2 - x^2}}^{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}} \frac{dz'}{\sqrt{(z')^2 + x^2}} = \\ &= \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 c^2} \log\left(\sqrt{(z')^2 + x^2} + z'\right) \Big|_0^{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}} = \\ &= \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 c^2} \log \frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - x^2}}{x} \end{aligned} \quad (6.267)$$

Quindi per $t > \frac{x}{c}$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\partial_t A_z \hat{z} = -\frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{c}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}} \hat{z} \\ \vec{B} &= -\partial_x A_z \hat{y} = \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 c^2 x} \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}} \hat{y} \end{aligned} \quad (6.268)$$

⁶ $c = 1$.

$$6.1.2 \quad I(t) = (\theta(t) - \theta(t - t_0)) I_0$$

Dal risultato del problema precedente, per la linearità delle equazioni di Maxwell

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{c\theta(ct-x)}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}} - \frac{c\theta(c(t-t_0)-x)}{\sqrt{c^2(t-t_0)^2 - x^2}} \right] \hat{z} \\ \vec{B} &= \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 c^2 x} \left[\frac{ct\theta(ct-x)}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}} - \frac{c(t-t_0)\theta(c(t-t_0)-x)}{\sqrt{c^2(t-t_0)^2 - x^2}} \right] \hat{y} \end{aligned} \quad (6.269)$$

$$6.1.3 \quad I(t) = \delta(t) q$$

$$\begin{aligned} A_z(x, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz' \delta\left(t - \frac{\sqrt{x^2 + (z')^2}}{c}\right)}{\sqrt{(z')^2 + x^2}} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{c^2 t}{z'} \right| \frac{d z' (\delta(z' - \sqrt{c^2 t^2 - x^2}) + \delta(z' + \sqrt{c^2 t^2 - x^2}))}{\sqrt{(z')^2 + x^2}} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{c^2 t}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}} \frac{2}{c t} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{c}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}} \end{aligned} \quad (6.270)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\partial_t A_z \hat{z} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{c^3 t}{(c^2 t^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} \\ \vec{B} &= -\partial_x A_z \hat{y} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{c x}{(c^2 t^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{y} \end{aligned} \quad (6.271)$$

Questo risultato può essere anche derivato prendendo il limite del risultato della sezione precedente per $t_0 \rightarrow 0$ con $I_0 t_0 \rightarrow q$:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{I_0 t_0}{2\pi\epsilon_0 c^2} \partial_t \left[\frac{c}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}} \right] \hat{z} \\ \vec{B} &= \frac{I_0 t_0}{2\pi\epsilon_0 c^2 x} \partial_t \left[\frac{c t}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}} \right] \hat{y} \end{aligned} \quad (6.272)$$

6.2 Potenziali di Liénard-Wiechert

I potenziali di Lienard-Wiechert sono

$$A^\mu = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{u^\mu}{R_\nu u^\nu} \quad (6.273)$$

dove

$$R_\nu R^\nu = (x - x')^2 = 0 \quad (6.274)$$

In notazione 3-dimensionale

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(t') - \frac{\vec{R}(t') \cdot \vec{v}(t')}{c}} \\ \vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{v}(t')}{R(t') - \frac{\vec{R}(t') \cdot \vec{v}(t')}{c}} \end{aligned} \quad (6.275)$$

dove il tempo ritardato t' è definito da

$$t' = t - \frac{R(t')}{c} \quad \vec{R}(t') = \vec{x} - \vec{x}'(t') \quad (6.276)$$

dove $\vec{x}'(t)$ è la traiettoria della particella che genera il campo.

6.2.1 Carica che si muove con velocità costante

La particella si muove sulla traiettoria

$$\vec{x}(t) = \vec{v}t \quad (6.277)$$

Dunque⁷

$$t' = t - |\vec{x} - \vec{v}t'| \quad (6.278)$$

ovvero⁸

$$\begin{aligned} t'^2 + t^2 - 2tt' &= \vec{x}^2 + \vec{v}^2 (t')^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{v}t' \Rightarrow \\ (1 - v^2)t'^2 - 2(t - \vec{x} \cdot \vec{v})t' + t^2 - \vec{x}^2 &= 0 \Rightarrow \\ t' &= \frac{1}{1 - v^2} (t - \vec{x} \cdot \vec{v} - \sqrt{(t - \vec{x} \cdot \vec{v})^2 - (1 - v^2)(t^2 - \vec{x}^2)}) \end{aligned} \quad (6.279)$$

⁷ $c = 1$

⁸Abbiamo scelto il segno che dà $t' = t - |\vec{x}|$ per $\vec{v} = 0$.

Dunque

$$\begin{aligned}
|\vec{R}(t')| &= (t - t') = \frac{1}{1 - v^2} [\vec{x} \cdot \vec{v} - v^2 t + \\
&\quad + \sqrt{(t - \vec{x} \cdot \vec{v})^2 - (1 - v^2)(t^2 - \vec{x}^2)}] \\
\vec{R}(t') \cdot \vec{v} &= (\vec{x} - \vec{v}t') \cdot \vec{v} = \vec{x} \cdot \vec{v} - v^2 t' = \\
&= \frac{1}{1 - v^2} [\vec{x} \cdot \vec{v} (1 - v^2) - v^2 t + \\
&\quad + v^2 \vec{x} \cdot \vec{v} + v^2 \sqrt{(t - \vec{x} \cdot \vec{v})^2 - (1 - v^2)(t^2 - \vec{x}^2)}] = \\
&= \frac{1}{1 - v^2} [\vec{x} \cdot \vec{v} - v^2 t + \\
&\quad + v^2 \sqrt{(t - \vec{x} \cdot \vec{v})^2 - (1 - v^2)(t^2 - \vec{x}^2)}] \tag{6.280}
\end{aligned}$$

Da qui deduciamo

$$\begin{aligned}
R(t') - \vec{R}(t') \cdot \vec{v} &= \frac{1}{1 - v^2} [\vec{x} \cdot \vec{v} - v^2 t + \\
&\quad + \sqrt{(t - \vec{x} \cdot \vec{v})^2 - (1 - v^2)(t^2 - \vec{x}^2)} + \\
&\quad - \vec{x} \cdot \vec{v} + v^2 t + \\
&\quad - v^2 \sqrt{(t - \vec{x} \cdot \vec{v})^2 - (1 - v^2)(t^2 - \vec{x}^2)}] = \\
&= \sqrt{(t - \vec{x} \cdot \vec{v})^2 - (1 - v^2)(t^2 - \vec{x}^2)} \tag{6.281}
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(t - \vec{x} \cdot \vec{v})^2 - (1 - v^2)(t^2 - \vec{x}^2)}} \\
\vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{v}}{\sqrt{(t - \vec{x} \cdot \vec{v})^2 - (1 - v^2)(t^2 - \vec{x}^2)}} \tag{6.282}
\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}
(t - \vec{x} \cdot \vec{v})^2 - (1 - v^2)(t^2 - \vec{x}^2) &= t^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{v}t + (\vec{x} \cdot \vec{v})^2 + \\
&\quad - t^2 + \vec{x}^2 + v^2 t^2 - v^2 \vec{x}^2 = \\
&= \vec{x}^2 + v^2 t^2 + (\vec{x} \cdot \vec{v})^2 - v^2 \vec{x}^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{v}t = \\
&= (\vec{x} - \vec{v}t)^2 - v^2 \vec{x}^2 + (\vec{x} \cdot \vec{v})^2 = \\
&= \vec{R}(t)^2 - v^2 \vec{x}^2 + (\vec{x} \cdot \vec{v})^2 \tag{6.283}
\end{aligned}$$

dove

$$\vec{R}(t) = \vec{x} - \vec{v}t$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} ((\vec{x} - \vec{v}t) \cdot \vec{v})^2 - v^2 (\vec{x} - \vec{v}t)^2 &= (\vec{x} \cdot \vec{v})^2 - v^2 x^2 = \\ &= -\sin^2 \theta(\vec{v}, \vec{x}) v^2 x^2 = -\sin^2 \theta(\vec{v}, \vec{R}) v^2 (\vec{x} - \vec{v}t)^2 \end{aligned} \quad (6.284)$$

dove $\theta(\vec{v}, \vec{x})$ è l'angolo tra la direzione di \vec{v} e quella di \vec{x} . In definitiva

$$\begin{aligned} (t - \vec{x} \cdot \vec{v})^2 - (1 - v^2) (t^2 - \vec{x}^2) &= \\ &= R(t)^2 (1 - v^2 \sin^2 \theta(\vec{v}, \vec{R}(t))) \end{aligned} \quad (6.285)$$

e

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R(t)} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 \sin^2 \theta(\vec{v}, \vec{R}(t))}} \\ \vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q\vec{v}}{R(t)} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 \sin^2 \theta(\vec{v}, \vec{R}(t))}} \end{aligned} \quad (6.286)$$

Calcoliamo il campo elettrico:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \phi = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-\vec{v}(t - \vec{x} \cdot \vec{v}) + \vec{x}(1 - v^2)}{((t - \vec{x} \cdot \vec{v})^2 - (1 - v^2)(t^2 - \vec{x}^2))^{\frac{3}{2}}} + \\ &+ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{v}((t - \vec{x} \cdot \vec{v}) - (1 - v^2)t)}{((t - \vec{x} \cdot \vec{v})^2 - (1 - v^2)(t^2 - \vec{x}^2))^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{q(1 - v^2)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{v}t}{((t - \vec{x} \cdot \vec{v})^2 - (1 - v^2)(t^2 - \vec{x}^2))^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{q(1 - v^2)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}(t)}{R(t)^3 (1 - v^2 \sin^2 \theta(\vec{v}, \vec{R}(t)))^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (6.287)$$

Inoltre poiché

$$\vec{A} = \vec{v} \phi \quad (6.288)$$

il campo magnetico è

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \phi \times \vec{v} = \vec{v} \times (\vec{E} + \partial_t \vec{A}) = \\ &= \vec{v} \times \vec{E}\end{aligned}\quad (6.289)$$

6.2.2 Campi di Liénard-Wiechert di una carica in moto arbitrario

Scriviamo il campo elettromagnetico per una carica q in moto arbitrario

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial_{[\mu} u_{\nu]}}{R \cdot u} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{u_{[\mu} \partial_{\nu]} (R \cdot u)}{(R \cdot u)^2} \quad (6.290)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}\partial_\mu u_\nu &= \dot{u}_\nu \partial_\mu \tau \\ \partial_\mu (R \cdot u) &= R \cdot \dot{u} \partial_\mu \tau + u_\mu - u^\nu u_\nu \partial_\mu \tau = \\ &= R \cdot \dot{u} \partial_\mu \tau + u_\mu - \partial_\mu \tau\end{aligned}\quad (6.291)$$

Abbiamo denotato con $\dot{u}_\mu = \frac{du_\mu}{d\tau}$, τ il tempo proprio e la funzione $\tau(x)$ quella definita da

$$0 = R^2 = (x^\mu - \tilde{x}^\mu(\tau))(x_\mu - \tilde{x}_\mu(\tau)) \quad (6.292)$$

dove $\tilde{x}^\mu(\tau)$ è la traiettoria della particella in funzione del tempo proprio. Pertanto

$$0 = R_\mu - u^\nu R_\nu \partial_\mu \tau \Rightarrow \partial_\mu \tau = \frac{R_\mu}{u \cdot R} \quad (6.293)$$

Sostituendo nelle (6.291) otteniamo

$$\begin{aligned}\partial_\mu u_\nu &= \frac{R_\mu \dot{u}_\nu}{u \cdot R} \\ \partial_\mu (R \cdot u) &= u_\mu - \frac{R_\mu}{u \cdot R} + \frac{\dot{u} \cdot R}{u \cdot R} R_\mu\end{aligned}\quad (6.294)$$

Quindi

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_{[\mu} \dot{u}_{\nu]}}{(R \cdot u)^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{u_{[\mu} (u_{\nu]} - \frac{R_{\nu]}{u \cdot R} + \frac{\dot{u} \cdot R}{u \cdot R} R_{\nu]})}{(R \cdot u)^2} = \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{u_{[\mu} R_{\nu]}}{(R \cdot u)^3} + \frac{u_{[\mu} R_{\nu]} \dot{u} \cdot R}{(R \cdot u)^3} + \frac{R_{[\mu} \dot{u}_{\nu]}}{(R \cdot u)^2} \right] = \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{u_{[\mu} R_{\nu]}}{(R \cdot u)^3} + \\
&+ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R \cdot u)^3} [u_{[\mu} R_{\nu]} \dot{u} \cdot R + R_{[\mu} \dot{u}_{\nu]} R \cdot u] \equiv \\
&= F_{\mu\nu}^{(v)} + F_{\mu\nu}^{(rad)} \tag{6.295}
\end{aligned}$$

Il primo termine in questa espressione dipende soltanto dalla velocità, ed è il termine che sopravvive nel caso di moto di velocità costante: è chiamato quindi il campo delle velocità, e, a grande distanze decade come $1/R^2$.

$$F_{\mu\nu}^{(v)} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{u_{[\mu} R_{\nu]}}{(R \cdot u)^3} \tag{6.296}$$

Notiamo che

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\nu\rho}^{(v)} R_{\sigma} = 0 \tag{6.297}$$

in quanto

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} u_{\nu} R_{\rho} R_{\sigma} = 0 \tag{6.298}$$

Eq. (6.297) è equivalente alle equazioni

$$\begin{aligned}
\epsilon^{ijk} F_{ij}^{(v)} R_k &= 0 \Leftrightarrow \vec{B} \cdot \vec{R} = 0 \\
0 &= 2\epsilon^{i0jk} F_{0j}^{(v)} R_k + \epsilon^{ikj0} F_{kj}^{(v)} R_0 \Leftrightarrow \vec{B} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} \times \vec{E} \tag{6.299}
\end{aligned}$$

Quindi il campo magnetico è ortogonale a \vec{E} e \vec{B} . Inoltre notiamo che

$$\begin{aligned}
u \cdot R &= \gamma (|\vec{R}| - \vec{v} \cdot \vec{R}) \\
-u_0 R_i + u_i R_0 &= \gamma (\vec{R} - \vec{v} |\vec{R}|)_i \tag{6.300}
\end{aligned}$$

per cui

$$\vec{E}^{(v)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\gamma^2} \frac{\vec{R} - \vec{v}|\vec{R}|}{(|\vec{R}| - \vec{v} \cdot \vec{R})^3} \quad (6.301)$$

in accordo col risultato ottenuto nella sottosezione precedente.

Il secondo termine nella (6.295) è il termine di radiazione: a grandi distanze dalla carica questo termine decade come $\frac{1}{R}$, ed è quindi quello dominante. Osserviamo che

$$\begin{aligned} u_{[\mu} R_{\nu]} \dot{u} \cdot R + R_{[\mu} \dot{u}_{\nu]} R \cdot u &= u_{[\mu} R_{\nu]} \dot{u} \cdot R + R_{[\mu} \dot{u}_{\nu]} R \cdot u - u_{\mu} \dot{u}_{\nu} R^2 = \\ &= \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\rho} \epsilon^{\tau\omega\lambda\sigma} R_{\tau} u_{\omega} \dot{u}_{\lambda} \end{aligned} \quad (6.302)$$

Quindi il termine di radiazione si scrive anche come

$$F_{\mu\nu}^{(rad)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R \cdot u)^3} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\rho} \epsilon^{\tau\omega\lambda\sigma} R_{\tau} u_{\omega} \dot{u}_{\lambda} \quad (6.303)$$

Notiamo che anche per il termine di radiazione vale

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\nu\rho}^{(rad)} R_{\sigma} = 0 \quad (6.304)$$

e quindi anche per il campo di radiazione valgono le relazioni (6.299). Inoltre

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{(rad)} R^{\mu} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R \cdot u)^3} [R^{\mu} (u_{\mu} R_{\nu} - u_{\nu} R_{\mu}) \dot{u} \cdot R + \\ &+ R^{\mu} (R_{\mu} \dot{u}_{\nu} - R_{\nu} \dot{u}_{\mu}) R \cdot u] = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R \cdot u)^3} [R \cdot u R_{\nu} \dot{u} \cdot R - R_{\nu} R \cdot \dot{u} R \cdot u] = 0 \end{aligned} \quad (6.305)$$

dove abbiamo usato $R^2 = 0$. Quindi per il campo di radiazione valgono, oltre alle (6.299) anche le relazioni

$$\begin{aligned} F_{0i}^{(rad)} R^i &= \vec{E}^{(rad)} \cdot \vec{R} = 0 \\ F_{0i}^{(rad)} R^0 + F_{ji}^{(rad)} R^j &= 0 \Rightarrow E_i = \epsilon_{jil} B_l \frac{R^j}{|\vec{R}|} \Rightarrow \\ \vec{E} &= -\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} \times \vec{B} \end{aligned} \quad (6.306)$$

Dunque il campo elettrico di radiazione è ortogonale al campo magnetico e al vettore \vec{R} , ed ha modulo uguale. Si tratta quindi di una onda.

Otteniamo il campo elettrico di radiazione nella notazione non-covariante:

$$\begin{aligned} E_i^{(rad)} &= F_{0i}^{(rad)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R \cdot u)^3} \epsilon_{0ijk} R^j W^k = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R \cdot u)^3} (\vec{R} \times \vec{W})_i \end{aligned} \quad (6.307)$$

dove abbiamo introdotto il 3-vettore proporzionale all'accelerazione

$$\begin{aligned} W^k &= \epsilon^{\tau\omega\lambda k} R_\tau u_\omega \dot{u}_\lambda = \epsilon^{0ijk} R_0 u_i \dot{u}_j + \epsilon^{i0jk} R_i u_0 \dot{u}_k + \\ &+ \epsilon^{ij0k} R_i u_j \dot{u}_0 = \\ &= \epsilon^{0ijk} (-u_0 R_i + R_0 u_i) \dot{u}_j + \epsilon^{i0jk} R_i u_j \dot{u}_0 = \\ &= \gamma (\vec{R} - \vec{v} |\vec{R}|) \times \frac{d(\gamma \vec{v})}{d\tau} - \gamma (\vec{R} \times \vec{v})_k \dot{\gamma} = \\ &= \gamma^2 (\vec{R} - \vec{v} |\vec{R}|) \times \frac{d\vec{v}}{d\tau} \end{aligned} \quad (6.308)$$

In definitiva

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(rad)} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma^2 \frac{1}{(R \cdot u)^3} (\vec{R} \times ((\vec{R} - \vec{v} |\vec{R}|) \times \frac{d\vec{v}}{d\tau})) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R - \vec{v} \cdot \vec{R})^3} (\vec{R} \times ((\vec{R} - \vec{v} |\vec{R}|) \times \frac{d\vec{v}}{dt})) \end{aligned} \quad (6.309)$$

dove abbiamo tenuto conto che $\gamma d\tau = dt$.

6.2.3 Campo di una carica uniformemente accelerata

Si tratta per esempio del moto di una carica sottoposta ad un campo elettrico uniforme. Supponendo il moto lungo l'asse delle x , dai risultati della sezione (4.2.1), abbiamo per la traiettoria

$$x(\tau) = \frac{1}{a} \cosh a \tau \quad x^0(\tau) = t(\tau) = \frac{1}{a} \sinh a \tau \quad (6.310)$$

dove τ è il tempo proprio, a l'accelerazione. La traiettoria in funzione del tempo del laboratorio è

$$x(t) = \frac{1}{a} \sqrt{1 + a^2 t^2} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + t^2} \quad (6.311)$$

Il quadri-vettore velocità è

$$u^\mu = (\cosh a \tau, \sinh a \tau, 0, 0) \quad (6.312)$$

e la velocità in funzione del tempo del laboratorio è

$$v = \tanh a \tau = \frac{a t}{\sqrt{1 + t^2 a^2}} \quad (6.313)$$

Il quadri-vettore delle accelerazioni è

$$\dot{u}^\mu = (a \sinh a \tau, a \cosh a \tau, 0, 0) = a^2 x^\mu(\tau) \quad (6.314)$$

Sia

$$R^\mu = (t - \frac{1}{a} \sinh a \tau, x - \frac{1}{a} \cosh a \tau, y, z) \quad (6.315)$$

il 4-vettore posizione da un punto di osservazione (ct, x, y, z) alla carica.

Dunque

$$\begin{aligned} u \cdot R &= (\cosh a \tau) (t - \frac{1}{a} \sinh a \tau) - \sinh a \tau (x - \frac{1}{a} \cosh a \tau) = \\ &= (t \cosh a \tau - x \sinh a \tau) \end{aligned} \quad (6.316)$$

Il tempo proprio ritardato è definito da

$$\begin{aligned} R^2 = 0 &= (t - \frac{1}{a} \sinh a \tau)^2 - (x - \frac{1}{a} \cosh a \tau)^2 - y^2 - z^2 \Rightarrow \\ (t \sinh a \tau - x \cosh a \tau) &= a \frac{a^2 t^2 - a^2 x^2 - 1}{2} \end{aligned} \quad (6.317)$$

Restringiamoci ora al caso un cui il punto di osservazione è sull'asse delle x , ovvero $y = z = 0$. In questo caso le formule per i campi elettromagnetici di Lienard-Wiechert si semplificano. Poiché \vec{R} , \vec{v} e $\vec{\dot{v}}$ sono allineati, il campo

di radiazione si annulla, ed il campo elettrico si riduce pertanto al campo delle velocità lungo la direzione \hat{x} . Posto

$$\vec{R} = R \hat{x} \quad \vec{v} = v \hat{x} \quad (6.318)$$

abbiamo

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\gamma^2} \hat{x} \frac{R - v|R|}{(|R| - Rv)^3} = \frac{q \hat{x}}{4\pi\epsilon_0 |R|^2} \times \begin{cases} \frac{1+v}{1-v} & R > 0 \\ -\frac{1-v}{1+v} & R < 0 \end{cases} \quad (6.319)$$

Inoltre il tempo ritardato è dato da

$$t - t_{ret} = |R| = \begin{cases} x - \sqrt{\frac{1}{a^2} + t_{ret}^2} & R > 0 \\ \sqrt{\frac{1}{a^2} + t_{ret}^2} - x & R < 0 \end{cases} \quad (6.320)$$

ovvero

$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + t_{ret}^2} = \begin{cases} x - t + t_{ret} & R > 0 \Leftrightarrow t_{ret} < t \\ x + t - t_{ret} & R < 0 \Leftrightarrow t_{ret} < t \end{cases} \quad (6.321)$$

Nel caso $R > 0$ esiste una soluzione $t_{ret} \leq t$ quando $x \geq t$, altrimenti la retta $x - t + t_{ret}$ non interseca l'iperbole $\sqrt{\frac{1}{a^2} + t_{ret}^2}$. t_{ret} è minore di t (e quindi la soluzione è effettivamente una soluzione ritardata e non anticipata) quando $x > \sqrt{t^2 + \frac{1}{a^2}}$. In definitiva Da cui

$$t_{ret} = \frac{\frac{1}{a^2} - (x-t)^2}{2(x-t)} \quad x > \sqrt{t^2 + \frac{1}{a^2}} \quad (6.322)$$

In questo caso

$$\begin{aligned} |R| = t - t_{ret} &= \frac{2t(x-t) - \frac{1}{a^2} + (x-t)^2}{2(x-t)} = \frac{x^2 - t^2 - \frac{1}{a^2}}{2(x-t)} \\ v(t_{ret}) &= \frac{t_{ret}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + t_{ret}^2}} = \frac{\frac{\frac{1}{a^2} - (x-t)^2}{2(x-t)}}{x - t + \frac{\frac{1}{a^2} - (x-t)^2}{2(x-t)}} = \\ &= \frac{1 - a^2(x-t)^2}{1 + a^2(x-t)^2} \quad x > \sqrt{t^2 + \frac{1}{a^2}} \end{aligned} \quad (6.323)$$

Il campo elettrico è pertanto

$$\begin{aligned}
E_x(x, t) &= \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 \left(\frac{x^2 - t^2 - \frac{1}{a^2}}{2(x-t)} \right)^2} \frac{1 + \frac{\frac{1}{a^2} - (x-t)^2}{\frac{1}{a^2} + (x-t)^2}}{1 - \frac{\frac{1}{a^2} - (x-t)^2}{\frac{1}{a^2} + (x-t)^2}} = \\
&= \frac{q}{\pi \epsilon_0 a^2 \left(x^2 - t^2 - \frac{1}{a^2} \right)^2} \quad x > \sqrt{t^2 + \frac{1}{a^2}} \quad (6.324)
\end{aligned}$$

Se invece $R < 0$ esiste una soluzione $t_{ret} \leq t$ quando $x > -t$, altrimenti la retta $x + t - t_{ret}$ non interseca l'iperbole $\sqrt{\frac{1}{a^2} + t_{ret}^2}$. t_{ret} è minore di t (e quindi la soluzione è effettivamente una soluzione ritardata e non anticipata) quando $x < \sqrt{t^2 + \frac{1}{a^2}}$. In definitiva

$$t_{ret} = \frac{(x+t)^2 - \frac{1}{a^2}}{2(x+t)} \quad -t < x < \sqrt{t^2 + \frac{1}{a^2}} \quad (6.325)$$

In questo caso

$$\begin{aligned}
|R| = t - t_{ret} &= \frac{2t(x+t) + \frac{1}{a^2} - (x+t)^2}{2(x+t)} = \frac{t^2 + \frac{1}{a^2} - x^2}{2(x+t)} \\
v(t_{ret}) &= \frac{t_{ret}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + t_{ret}^2}} = \frac{\frac{-\frac{1}{a^2} + (x+t)^2}{2(x+t)}}{x+t - \frac{-\frac{1}{a^2} + (x+t)^2}{2(x+t)}} = \\
&= \frac{a^2(x+t)^2 - 1}{a^2(x+t)^2 + 1} \quad -t < x < \sqrt{t^2 + \frac{1}{a^2}} \quad (6.326)
\end{aligned}$$

Il campo elettrico è pertanto

$$\begin{aligned}
E_x(x, t) &= -\frac{q}{4 \pi \epsilon_0 \left(\frac{-x^2 + t^2 + \frac{1}{a^2}}{2(x+t)} \right)^2} \frac{1 - \frac{(x+t)^2 - \frac{1}{a^2}}{(x+t)^2 + \frac{1}{a^2}}}{1 + \frac{(x+t)^2 - \frac{1}{a^2}}{(x+t)^2 + \frac{1}{a^2}}} = \\
&= -\frac{q}{\pi \epsilon_0 a^2 \left(t^2 + \frac{1}{a^2} - x^2 \right)^2} \quad -t < x < \sqrt{t^2 + \frac{1}{a^2}} \quad (6.327)
\end{aligned}$$

In sintesi il campo elettrico vale

$$E_x(x, t) = \frac{q \operatorname{sign}(x^2 - t^2 - \frac{1}{a^2}) \theta(t+x)}{\pi \epsilon_0 a^2 \left(t^2 - x^2 + \frac{1}{a^2} \right)^2} \quad (6.328)$$

Il campo magnetico ha lo stesso modulo ed è ortogonale al campo elettrico.

6.2.4 Carica ruotante

Una carica q si muove con velocità angolare costante ω su un cerchio di raggio a nel piano (x, y) con centro in 0 , al tempo $t = 0$ trovandosi in $(a, 0, 0)$. Si vogliono calcolare i potenziali sul l'asse delle z

$$\begin{aligned}\phi(0, 0, z, t) &= \frac{q}{R_{t'} - \frac{\vec{R}_{t'} \cdot \vec{v}}{c}} \\ \vec{A}(0, 0, z, t) &= \frac{q \vec{v}(t')}{R_{t'} - \frac{\vec{R}_{t'} \cdot \vec{v}}{c}}\end{aligned}\quad (6.329)$$

dove

$$\begin{aligned}\vec{R}_{t'} &= z \hat{z} - a \cos \omega t' \hat{x} - a \sin \omega t' \hat{y} \\ \vec{v}(t') &= -a \omega \sin \omega t' \hat{x} + a \omega \cos \omega t' \hat{y} \\ \vec{v} \cdot \vec{R}_{t'} &= 0 \\ R_{t'} &= \sqrt{z^2 + a^2} \\ t - t' &= \frac{R_{t'}}{c} = \sqrt{z^2 + a^2}/c\end{aligned}\quad (6.330)$$

Quindi

$$\begin{aligned}\phi(0, 0, z, t) &= \frac{q}{\sqrt{z^2 + a^2}} \\ \vec{A}(0, 0, z, t) &= \frac{q \vec{v}(t')}{\sqrt{z^2 + a^2}}\end{aligned}\quad (6.331)$$

6.3 Radiazione in approssimazione di dipolo

Consideriamo un sistema di cariche, complessivamente neutro, a grandi distanze. Assumiamo che le velocità delle cariche siano piccole rispetto alla velocità della luce. In questa approssimazione l'espressione

$$A_\mu(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{j_\mu(\vec{x}', t - R)}{R}\quad (6.332)$$

diventa

$$\begin{aligned}
\vec{A}(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_0} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}', t - R_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_0} \sum_i q_i \vec{v}_i|_{t-R_0} = \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_0} \dot{\vec{d}}|_{t-R_0} \\
\phi(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_0} \int d^3x' \rho(\vec{x}', t - R_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_0} \sum_q q = 0 \quad (6.333)
\end{aligned}$$

dove

$$\vec{d} = \sum_i q_i \vec{x}_i \quad (6.334)$$

è il momento di dipolo del sistema, calcolato al tempo ritardato $t - R_0$. Il campo elettrico nella stessa approssimazione, otteniamo direttamente dalla (6.309)

$$\vec{E} = \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \ddot{\vec{d}})}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0} \quad (6.335)$$

ed il campo magnetico

$$\vec{B} = -\frac{\vec{n} \times \ddot{\vec{d}}}{4\pi\epsilon_0 c^3 R_0} \quad (6.336)$$

Il flusso di energia irradiata è dato dal vettore di Poynting

$$\vec{S} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\vec{n}}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 R_0^2} \sin^2 \theta \ddot{\vec{d}}^2 \quad (6.337)$$

dove θ è l'angolo tra $\ddot{\vec{d}}$ e \vec{n} . L'intensità di radiazione emessa nell'unità di angolo solido è quindi

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\ddot{\vec{d}}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \theta \quad (6.338)$$

La potenza istantanea totale emessa è pertanto

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^\pi 2\pi d\theta \sin\theta \frac{dI}{d\Omega} = \frac{\ddot{\vec{d}}^2}{8\pi\epsilon_0 c^3} \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta = \\
&= \frac{\ddot{\vec{d}}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (6.339)
\end{aligned}$$

Per una singola particella, otteniamo la formula di Larmor

$$P = \frac{q^2 \ddot{a}^2}{6 \pi \epsilon_0 c^3} \quad (6.340)$$

dove \vec{a} è l'accelerazione.

Esercizio: Un elettrone non-relativistico viene decelerato con accelerazione costante da una velocità iniziale v_0 a zero, in uno spazio Δs . Si calcoli la frazione dell'energia cinetica iniziale che viene irraggiata. (*Risposta:* $\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4 \pi \epsilon_0 \Delta s} \frac{v_0}{c} \frac{1}{m c^2}$)

Esercizio: Un oscillatore armonico di carica q e frequenza ω posto ad una altezza h dal suolo viene spostato dalla sua posizione di equilibrio di una quantità $d \ll h$, e, una volta rilasciato, oscilla in direzione ortogonale al suolo. Si calcoli il flusso della radiazione emessa che colpisce il suolo ad una distanza R dal punto al suolo che si trova immediatamente sotto l'oscillatore, e si determini R per cui questo è massimo. (*Risposta:* $\vec{S} \cdot \hat{n} = \frac{q^2 d^2 \omega^4}{32 \pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{R^2 h}{(R^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}}$).

Esercizio: Si calcoli potenza emessa per radiazione di dipolo magnetico dovuta alla rotazione del momento di dipolo magnetico della terra \vec{M} intorno all'asse di rotazione terrestre, sapendo che $\vec{M} \cdot \vec{\omega} = M \omega \cos \psi$, dove ω è il vettore di rotazione dell'asse terrestre, e $\psi = 11^\circ$ è l'angolo tra \vec{M} e $\vec{\omega}$. (*Risposta:* $P = \frac{M^2 \sin^2 \psi \omega^4}{12 \pi \epsilon_0 c^4}$)

6.3.1 Tempo di decadimento dell'atomo classico

Un elettrone classico che ruota su una orbita circolare intorno ad un protone (modello di Rutherford per l'atomo di idrogeno) ha una accelerazione

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 m r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 m r} \quad (6.341)$$

La sua energia E è

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8 \pi \epsilon_0 r} \quad (6.342)$$

La potenza irraggiata dall'elettrone accelerato è pertanto

$$P = \frac{e^2 a^2}{6 \pi \epsilon_0 c^3} = \frac{e^2}{6 \pi \epsilon_0 c^3} \frac{e^4}{16 \pi^2 \epsilon_0^2 m^2 r^4} \quad (6.343)$$

Per la conservazione dell'energia

$$P = -\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} \dot{r} \quad (6.344)$$

Pertanto

$$\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 r^4} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} \dot{r} \quad (6.345)$$

ovvero

$$\dot{r} = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 m^2} \frac{1}{r^2} \quad (6.346)$$

Integrando otteniamo per il tempo T nel quale l'elettrone precipita sul protone l'equazione

$$\int_{r_0}^0 dr r^2 = -\frac{r_0^3}{3} = -T \frac{e^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 c^3} \quad (6.347)$$

ovvero

$$T = 4r_0^3 \frac{\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 c^3}{e^4} = \frac{1}{4} \frac{r_0}{c} \left(\frac{m c^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \right)^2 \quad (6.348)$$

Inserendo come r_0 il valore tipico per un atomo $r_0 = 10^{-10} m$

$$m c^2 = 0.51 \cdot 10^6 eV \quad \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} = 14.4 eV \quad (6.349)$$

si ottiene per il tempo di collasso dell'elettrone sul nucleo il valore

$$T = \frac{1}{4} \frac{1.0 \cdot 10^{-10}}{3.0 \cdot 10^8} \left(\frac{0.51 \cdot 10^6}{14.4} \right)^2 sec = 1.0 \cdot 10^{-10} sec \quad (6.350)$$

6.4 Irraggiamento da particelle relativistiche

Consideriamo una carica che si muove con velocità v non piccola rispetto a quella della luce. Nel suo sistema di quiete sappiamo che la potenza irraggiata è quale e opposta alla perdita di energia per unità di tempo

$$dE = -\frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{a}^2 dt \quad (6.351)$$

Il flusso di impulso irraggiato è parimenti uguale alla variazione di impulso per unità di tempo: poiché per radiazione di dipolo il primo è nullo, abbiamo

$$d\vec{P} = 0 = 0 \times d\vec{x} \quad (6.352)$$

In un sistema di coordinate arbitrario, la variazione del quadri-momento della particella

$$dP^\mu \equiv (dE, d\vec{P}) \quad (6.353)$$

deve trasformarsi come un quadri-vettore. Il quadrivettore

$$\begin{aligned} dP^\mu &= -\frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{du^\nu}{d\tau} \frac{du_\nu}{d\tau} dx^\mu \Rightarrow \\ \frac{dP^\mu}{d\tau} &= -\frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{du^\nu}{d\tau} \frac{du_\nu}{d\tau} u^\mu \end{aligned} \quad (6.354)$$

si riduce a (6.351) e (6.352) per $\vec{v} = 0$. Infatti

$$\begin{aligned} u^\nu &= (\gamma, \gamma \vec{v}) \\ \dot{u}^\nu &= (\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \vec{v} + \gamma \dot{\vec{v}}) \end{aligned} \quad (6.355)$$

dove il punto indica la derivazione rispetto al tempo proprio τ . Quindi

$$\begin{aligned} \dot{u}^\nu \dot{u}_\nu &= \dot{\gamma}^2 - \dot{\gamma}^2 \vec{v}^2 - \gamma^2 \dot{\vec{v}}^2 - 2\gamma \dot{\gamma} \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} = \\ &= \frac{\dot{\gamma}^2}{\gamma^2} - \gamma^2 \dot{\vec{v}}^2 - 2\gamma \dot{\gamma} \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} \end{aligned} \quad (6.356)$$

Poiché

$$\dot{\gamma} = \gamma^3 v \dot{v} \quad (6.357)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \dot{u}^\nu \dot{u}_\nu &= \gamma^4 v^2 \dot{v}^2 - \gamma^2 \dot{\vec{v}}^2 - 2\gamma^4 v \dot{v} \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} = \\ &= -\gamma^2 \dot{\vec{v}}^2 - \gamma^4 v^2 \dot{v}^2 = -\gamma^4 ((\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}})^2 + (1 - v^2) \dot{\vec{v}}^2) = \\ &= \gamma^4 (-(\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}})^2 + v^2 \dot{\vec{v}}^2) - \gamma^4 \dot{\vec{v}}^2 = \\ &= \gamma^4 [(\vec{v} \times \dot{\vec{v}})^2 - \dot{\vec{v}}^2] \end{aligned} \quad (6.358)$$

Quindi per $v = 0$ abbiamo

$$\frac{du^\nu}{d\tau} \frac{du_\nu}{d\tau} = -a^2 \quad (6.359)$$

Pertanto per $v = 0$ l'espressione covariante (6.354) si riduce effettivamente alle espressioni (6.352) e (6.351).

In definitiva

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\tau} &= -\frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^5 [(\vec{v} \times \dot{\vec{v}})^2 - \dot{v}^2] \\ \frac{d\vec{P}}{d\tau} &= -\frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^5 [(\vec{v} \times \dot{\vec{v}})^2 - \dot{v}^2] \vec{v} \end{aligned} \quad (6.360)$$

ovvero la perdita per unità di tempo di energia e di momento della particella per irraggiamento è

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^6 [(\vec{v} \times \dot{\vec{v}})^2 - \dot{v}^2] \\ \frac{d\vec{P}}{dt} &= -\frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^6 [(\vec{v} \times \dot{\vec{v}})^2 - \dot{v}^2] \vec{v} \end{aligned} \quad (6.361)$$

che rappresentano la generalizzazione relativistica della formula di Larmor.