



Equazioni differenziali

Potreste avere l'impressione di non sapere nulla sulle equazioni differenziali, e di non averne mai incontrata una.

In realtà questa impressione è sbagliata, perché la legge di Newton

$$F = ma$$

si può scrivere nella forma

$$F(x(t), t) = mx''(t)$$

che mostra esplicitamente come si tratti in sostanza di un'equazione differenziale del secondo ordine.

Nel seguito ci riferiremo in modo esplicito alla risoluzione delle equazioni del moto, anche se i metodi illustrati sono di validità generale.



Equazioni differenziali

Equazioni
Differen-
ziali

Serie di
Taylor

Eulero

Runge-
Kutta

Sistemi di
equazioni

Si tratta di equazioni del tipo:

$$x^{(n)}(t) = f(x^{(n-1)}(t), \dots, x(t), t)$$

dove f è nota e $x(t)$ è **incognita**.

In generale, un'equazione differenziale non possiede una singola soluzione (ovvero una singola funzione $x(t)$ che la soddisfi), ma una **famiglia di soluzioni**. La soluzione appropriata per un dato problema è quella che rispetta le condizioni al contorno.

Nel caso si stia studiando una evoluzione temporale, le **condizioni al contorno** sono date dai valori della funzione e delle sue derivate fino alla $(n-1)$ -esima all'istante iniziale (ad esempio per $t=0$).



Sviluppo in serie di Taylor

Equazioni
Differen-
ziali

Serie di
Taylor

Eulero

Runge-
Kutta

Sistemi di
equazioni

Si può dimostrare che se una funzione $f(x)$ e tutte le sue derivate sono continue in un intervallo vale la relazione

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0)(x - x_0)^m$$

dove x e x_0 sono punti generici dell'intervallo.

In altre parole la serie di Taylor ci garantisce che la conoscenza del valore di una funzione e di tutte le sue derivate in un punto x_0 è sufficiente a determinare il valore della funzione in un punto generico x .



Precisione dello sviluppo di Taylor

Equazioni
Differen-
ziali

Serie di
Taylor

Eulero

Runge-
Kutta

Sistemi di
equazioni

Se applichiamo la serie di Taylor al nostro problema di estrapolare il moto di un corpo note la posizione e le sue derivate calcolate al tempo t_0 , possiamo ottenere precisioni differenti troncando la serie in diverse posizioni.

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + \mathcal{O}(h)$$

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + x'(t_0)h + \mathcal{O}(h^2)$$

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + x'(t_0)h + \frac{1}{2}x''(t_0)h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

esatto se:

$$x' = 0$$

$$x'' = 0$$

$$x'' = \text{cost}$$



Equazioni differenziali al prim'ordine

Equazioni
Differen-
ziali

Serie di
Taylor

Eulero

Runge-
Kutta

Sistemi di
equazioni

Consideriamo un' equazione del primo ordine:

$$x'(t) = f(x(t), t)$$

cui è associata la condizione iniziale

$$x(t_0) = x_0.$$



Metodo di Eulero

L'equazione differenziale medesima ci fornisce il valore della derivata prima (la velocità) al tempo t_n :

$$x'(t_n) = f(x(t_n), t_n)$$

Se assumiamo che in un breve intervallo h la velocità resti costante potremo scrivere (sviluppando secondo Taylor al prim'ordine):

$$x(t_n + h) = x(t_n) + x'(t_n)h = x(t_n) + f(x(t_n), t_n)h$$

o semplificando la notazione:

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n, t_n)h + \mathcal{O}(h^2)$$

Questa relazione, nota la posizione iniziale $x(t_0) = x_0$, ci fornisce iterativamente $x(t_n)$ al primo ordine. La precisione è modesta.



Il metodo di Runge-Kutta (I)

Per ottenere precisione maggiore occorre eseguire uno sviluppo al secondo ordine

$$x(t_n + h) = x(t_n) + x'(t_n)h + \frac{1}{2}x''(t_n)h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

Come ricavare x'' ? Sviluppiamo al primo ordine x'

$$x' \left(t_n + \frac{h}{2} \right) = x'(t_n) + x''(t_n) \frac{h}{2}$$

da cui:

$$x''(t_n) = \frac{2}{h} \left[x' \left(t_n + \frac{h}{2} \right) - x'(t_n) \right]$$

Equazioni
Differen-
ziali

Serie di
Taylor

Eulero

Runge-
Kutta

Sistemi di
equazioni



Il metodo di Runge-Kutta (II)

Se sostituiamo nell'espressione al secondo ordine otteniamo:

$$x(t_n + h) = x(t_n) + x' \left(t_n + \frac{2}{h} \right) h + \mathcal{O}(h^3)$$

Il valore della velocità nel punto intermedio $t_n + h/2$ può essere ricavato calcolando la posizione al prim'ordine con il metodo di Eulero ed utilizzando l'equazione differenziale:

$$\begin{aligned} x \left(t_n + \frac{h}{2} \right) &= x(t_n) + x'(t_n) \frac{h}{2} \\ x' \left(t_n + \frac{h}{2} \right) &= f \left(x \left(t_n + \frac{h}{2} \right), t_n + \frac{h}{2} \right) \end{aligned}$$



Il metodo di Runge-Kutta (III)

Riassumendo possiamo dire che il metodo di Runge-Kutta di ordine due consiste nell'eseguire una estrapolazione del primo ordine da $x(t_n)$ a $x(t_n + h/2)$, nel valutare la derivata $x'(t_n + h/2)$ e nell'utilizzarla per ottenere una stima di $x(t_n + h)$ esatta al secondo ordine.

Vediamo la sequenza di calcolo:

$$k_1 = hf(x(t_n), t_n)$$

derivata nel punto iniziale

$$k_2 = hf\left(x(t_n) + \frac{k_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right)$$

estrapolazione al punto intermedio e derivata

$$x(t_n + h) = x(t_n) + k_2 + \mathcal{O}(h^3)$$

estrapolazione a $t_n + h$



Il metodo di Runge-Kutta (III)

Riassumendo possiamo dire che il metodo di Runge-Kutta di ordine due consiste nell'eseguire una estrapolazione del primo ordine da $x(t_n)$ a $x(t_n + h/2)$, nel valutare la derivata $x'(t_n + h/2)$ e nell'utilizzarla per ottenere una stima di $x(t_n + h)$ esatta al secondo ordine.

Vediamo la sequenza di calcolo:

$$k_1 = hf(x(t_n), t_n)$$

derivata nel punto iniziale

$$k_2 = hf\left(x(t_n) + \frac{k_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right)$$

estrapolazione al punto intermedio e derivata

$$x(t_n + h) = x(t_n) + k_2 + \mathcal{O}(h^3)$$

estrapolazione a $t_n + h$



Il metodo di Runge-Kutta (III)

Riassumendo possiamo dire che il metodo di Runge-Kutta di ordine due consiste nell'eseguire una estrapolazione del primo ordine da $x(t_n)$ a $x(t_n + h/2)$, nel valutare la derivata $x'(t_n + h/2)$ e nell'utilizzarla per ottenere una stima di $x(t_n + h)$ esatta al secondo ordine.

Vediamo la sequenza di calcolo:

$$k_1 = hf(x(t_n), t_n)$$

derivata nel punto iniziale

$$k_2 = hf\left(x(t_n) + \frac{k_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right)$$

estrapolazione al punto intermedio e derivata

$$x(t_n + h) = x(t_n) + k_2 + \mathcal{O}(h^3)$$

estrapolazione a $t_n + h$



Il metodo di Runge-Kutta (III)

Riassumendo possiamo dire che il metodo di Runge-Kutta di ordine due consiste nell'eseguire una estrapolazione del primo ordine da $x(t_n)$ a $x(t_n + h/2)$, nel valutare la derivata $x'(t_n + h/2)$ e nell'utilizzarla per ottenere una stima di $x(t_n + h)$ esatta al secondo ordine.

Vediamo la sequenza di calcolo:

$$k_1 = hf(x(t_n), t_n)$$

derivata nel punto iniziale

$$k_2 = hf\left(x(t_n) + \frac{k_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right)$$

estrapolazione al punto intermedio e derivata

$$x(t_n + h) = x(t_n) + k_2 + \mathcal{O}(h^3)$$

estrapolazione a $t_n + h$



Runge-Kutta di ordine quattro

Esistono metodi di Runge-Kutta ad ordini superiori al secondo. Occorre però raggiungere un compromesso tra precisione e numero di chiamate alla funzione (efficienza di calcolo).

Il metodo di Runge-Kutta al quarto ordine, del quale riportiamo solo la sequenza di calcolo, è in genere il più utilizzato.

$$k_1 = hf(x(t_n), t_n)$$

$$k_2 = hf\left(x(t_n) + \frac{k_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x(t_n) + \frac{k_2}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x(t_n) + k_3, t_n + h)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + \mathcal{O}(h^5)$$

Equazioni
Differen-
ziali

Serie di
Taylor

Eulero

Runge-
Kutta

Sistemi di
equazioni



Metodo di Eulero (interpretazione grafica)

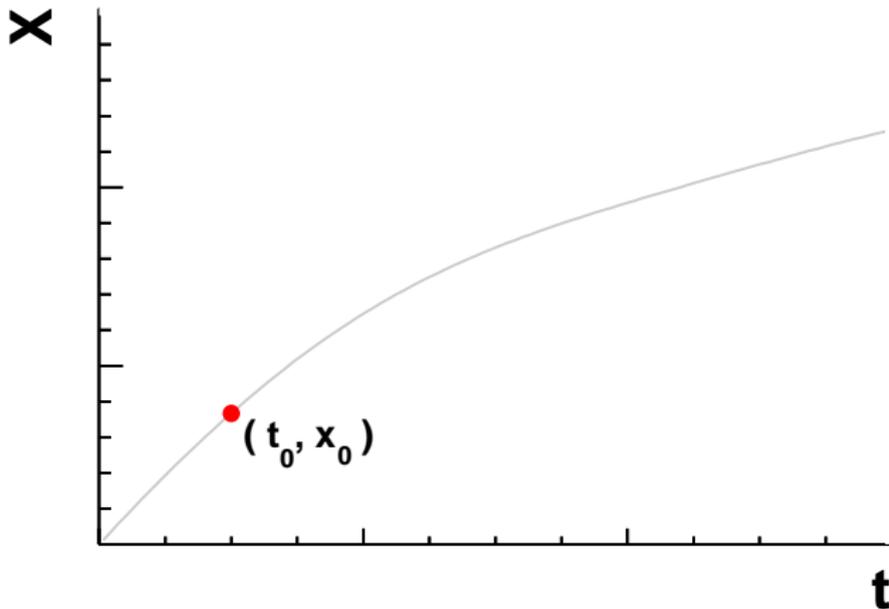
Equazioni
Differen-
ziali

Serie di
Taylor

Eulero

Runge-
Kutta

Sistemi di
equazioni





Metodo di Eulero (interpretazione grafica)

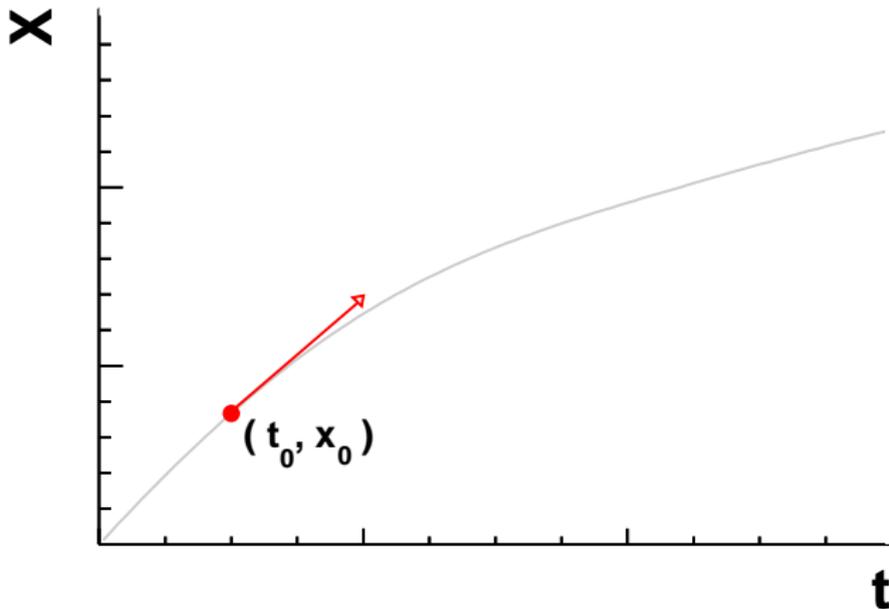
Equazioni
Differen-
ziali

Serie di
Taylor

Eulero

Runge-
Kutta

Sistemi di
equazioni





Metodo di Eulero (interpretazione grafica)

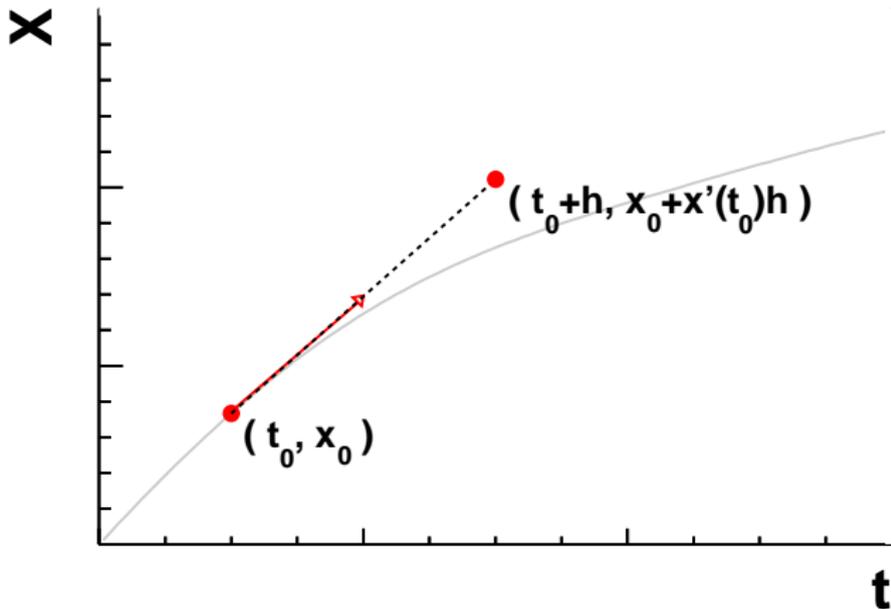
Equazioni
Differen-
ziali

Serie di
Taylor

Eulero

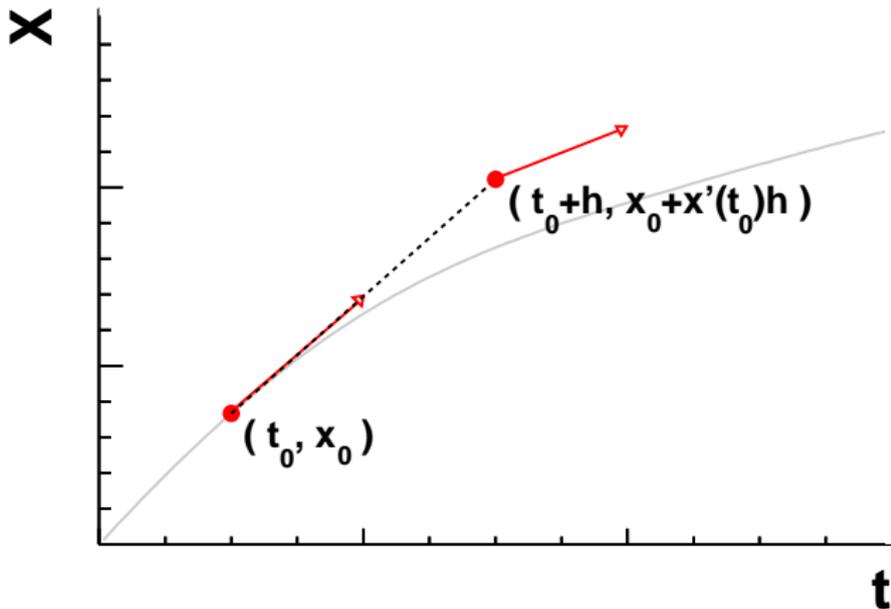
Runge-
Kutta

Sistemi di
equazioni





Metodo di Eulero (interpretazione grafica)



Equazioni
Differen-
ziali

Serie di
Taylor

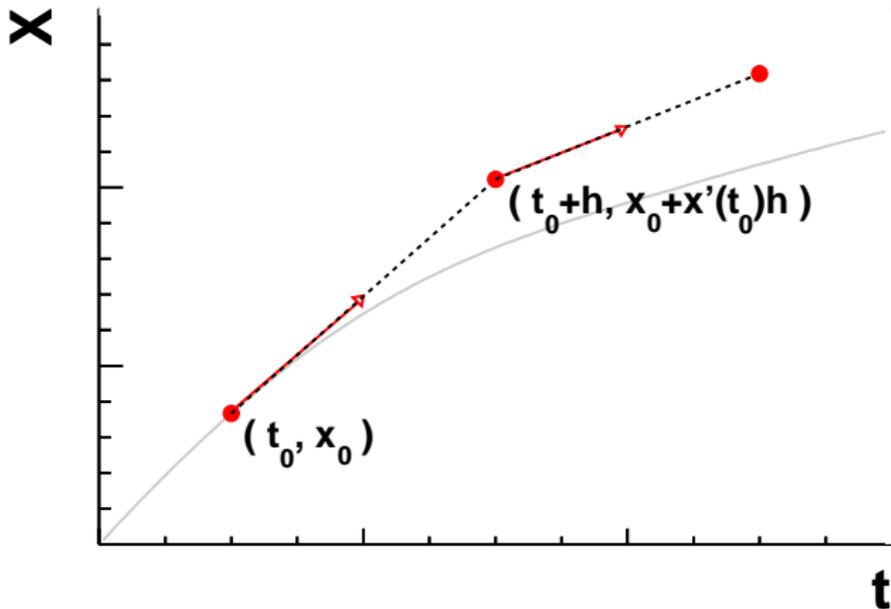
Eulero

Runge-
Kutta

Sistemi di
equazioni



Metodo di Eulero (interpretazione grafica)



Equazioni
Differen-
ziali

Serie di
Taylor

Eulero

Runge-
Kutta

Sistemi di
equazioni



Metodo di Runge-Kutta (interpretazione grafica)

Equazioni
Differen-
ziali

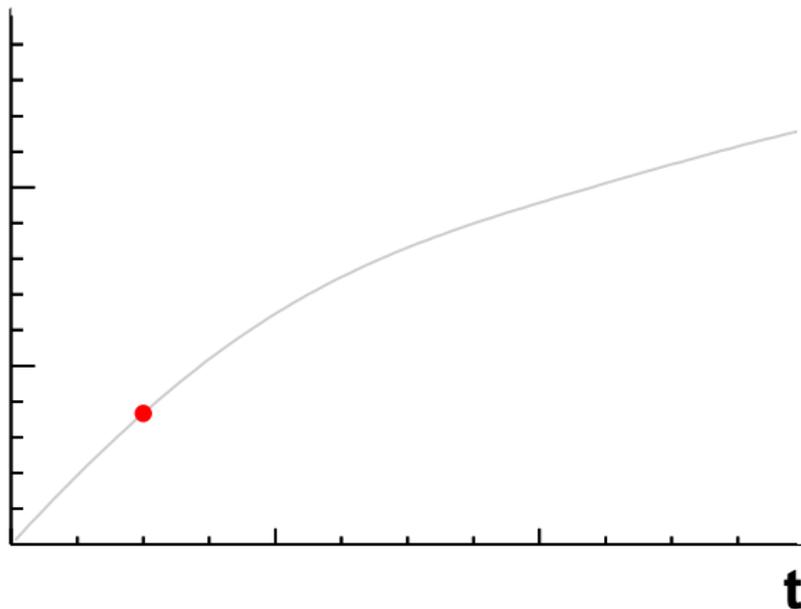
Serie di
Taylor

Eulero

Runge-
Kutta

Sistemi di
equazioni

X





Metodo di Runge-Kutta (interpretazione grafica)

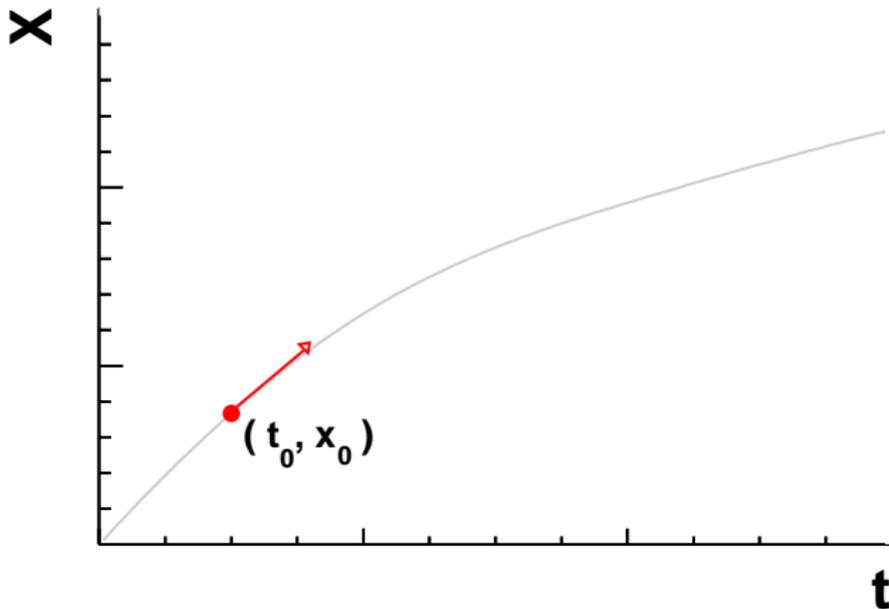
Equazioni
Differen-
ziali

Serie di
Taylor

Eulero

Runge-
Kutta

Sistemi di
equazioni





Metodo di Runge-Kutta (interpretazione grafica)

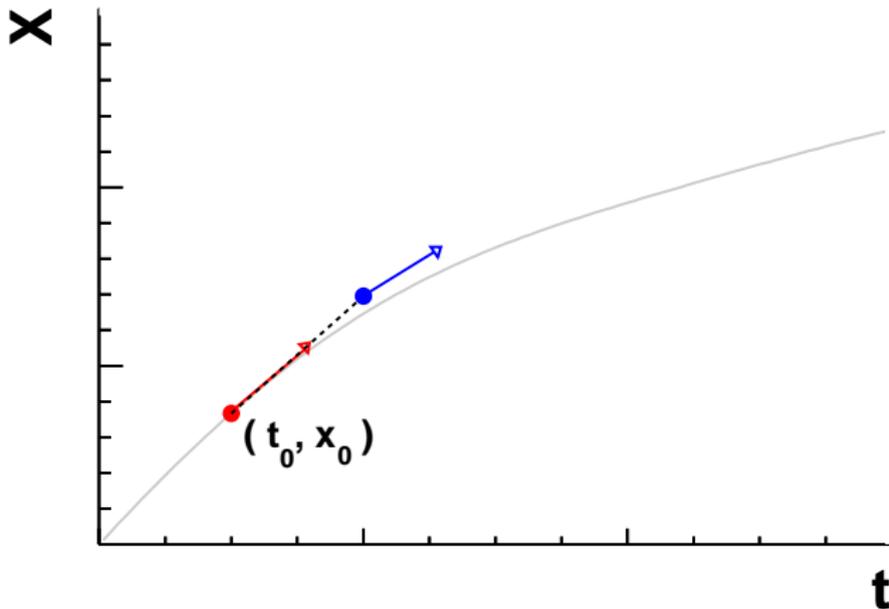
Equazioni
Differen-
ziali

Serie di
Taylor

Eulero

Runge-
Kutta

Sistemi di
equazioni





Metodo di Runge-Kutta (interpretazione grafica)

Equazioni
Differen-
ziali

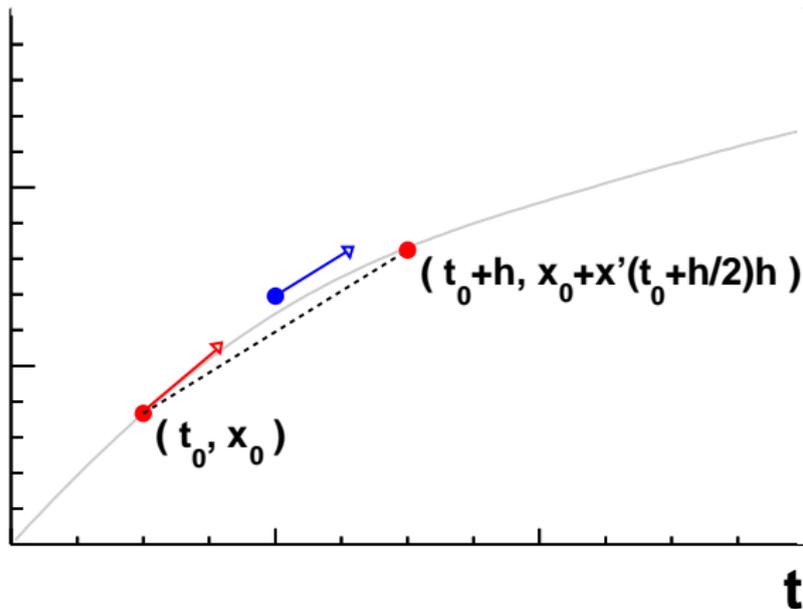
Serie di
Taylor

Eulero

Runge-
Kutta

Sistemi di
equazioni

X





Metodo di Runge-Kutta (interpretazione grafica)

Equazioni
Differen-
ziali

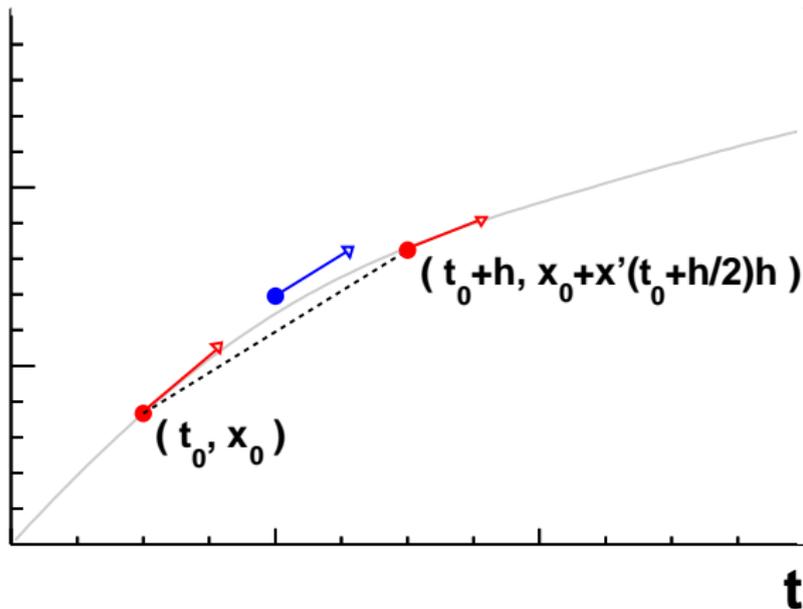
Serie di
Taylor

Eulero

Runge-
Kutta

Sistemi di
equazioni

X





Metodo di Runge-Kutta (interpretazione grafica)

Equazioni
Differen-
ziali

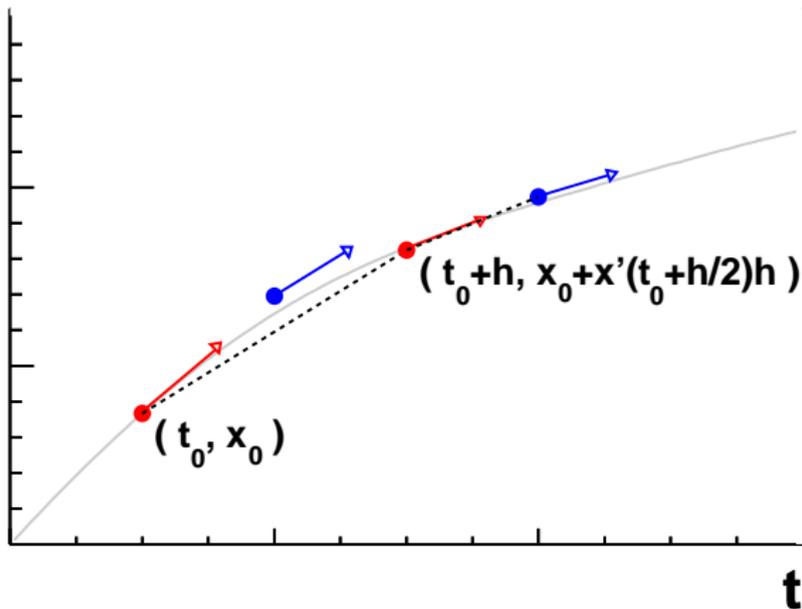
Serie di
Taylor

Eulero

Runge-
Kutta

Sistemi di
equazioni

X





Metodo di Runge-Kutta (interpretazione grafica)

Equazioni
Differen-
ziali

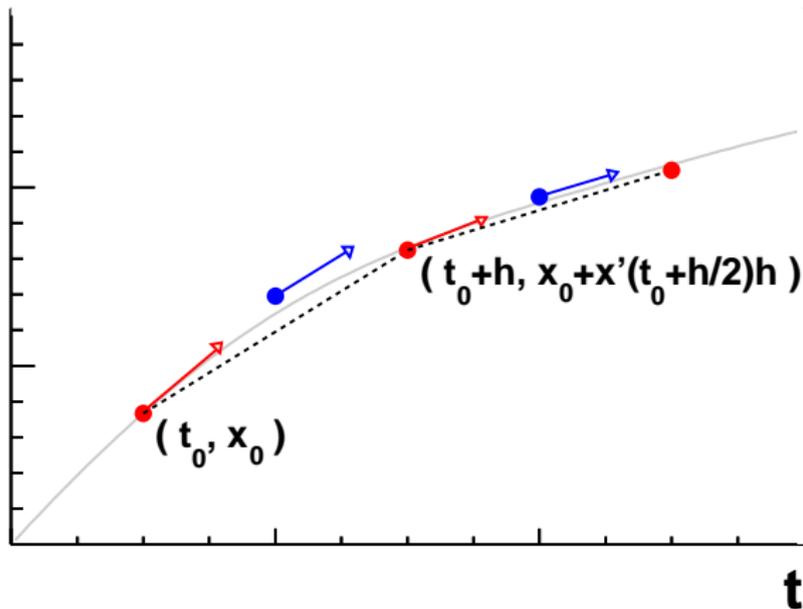
Serie di
Taylor

Eulero

Runge-
Kutta

Sistemi di
equazioni

×





Equazioni del secondo ordine

$F = ma$ è al secondo ordine !

Una generica equazione differenziale del secondo ordine è del tipo

$$x''(t) = f(x'(t), x(t), t)$$

Si può trasformare in un sistema di due equazioni del primo ordine ponendo

$$x'(t) = v(t)$$

si ottiene

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = f(v(t), x(t), t) \end{cases}$$

che è un sistema del primo ordine nelle variabili $x(t)$ e $v(t)$.

Naturalmente, siccome ci sono due equazioni saranno necessarie due condizioni iniziali: $x(t_0)$ e $v(t_0)$.

Ovviamente lo stesso "trucco" funziona per tutti gli ordini.

Equazioni
Differen-
ziali

Serie di
Taylor

Eulero

Runge-
Kutta

Sistemi di
equazioni



Equazioni del secondo ordine

$F = ma$ è al secondo ordine !

Una generica equazione differenziale del secondo ordine è del tipo

$$x''(t) = f(x'(t), x(t), t)$$

Si può trasformare in un sistema di due equazioni del primo ordine ponendo

$$x'(t) = v(t)$$

si ottiene

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = f(v(t), x(t), t) \end{cases}$$

che è un sistema del primo ordine nelle variabili $x(t)$ e $v(t)$.

Naturalmente, siccome ci sono due equazioni saranno necessarie due condizioni iniziali: $x(t_0)$ e $v(t_0)$.

Ovviamente lo stesso “trucco” funziona per tutti gli ordini.

Equazioni
Differen-
ziali

Serie di
Taylor

Eulero

Runge-
Kutta

Sistemi di
equazioni



Sistemi di equazioni differenziali

Nel caso si sia interessati alla soluzione dell'interazione di n corpi (si ricordi che non c'è soluzione analitica al sistema a tre corpi) il problema da risolvere è

$$\vec{x}_i''(t) = \frac{\vec{F}_i}{m_i}(\vec{x}_1', \dots, \vec{x}_N', \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)$$

che deve essere riscritta come

$$\begin{cases} \vec{x}_i'(t) = \vec{v}_i(t) \\ \vec{v}_i'(t) = \frac{\vec{F}_i}{m_i}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) \end{cases}$$

Se abbiamo N corpi ($i = 1, \dots, N$) e risolviamo il problema in tre dimensioni si tratta di un sistema di $2 \times 3 \times N$ equazioni di primo grado.

Dobbiamo osservare che la quasi totalità dell'interdipendenza tra le equazioni del sistema risiede nel termine di forza.

Equazioni
Differen-
ziali

Serie di
Taylor

Eulero

Runge-
Kutta

Sistemi di
equazioni



Soluzioni di sistemi

Nota la soluzione di una singola equazione differenziale la soluzione di un sistema non presenta particolari problemi.

Lo sviluppo riportato di seguito (per RK al secondo ordine) richiede che le operazioni siano rigidamente sequenziali: si deve quindi fare attenzione ad eseguire ogni passo del calcolo su tutte le equazioni prima di passare al passo successivo.

$$\begin{aligned} \text{I} & \begin{cases} \vec{k}_{1i} = h\vec{v}_i(t_n) \\ \vec{w}_{1i} = h\vec{f}_i(\vec{v}_1(t_n), \dots, \vec{x}_1(t_n), \dots, t_n) \end{cases} \\ \text{II} & \begin{cases} \vec{k}_{2i} = h(\vec{v}_i(t_n) + \frac{\vec{w}_{1i}}{2}) \\ \vec{w}_{2i} = h\vec{f}_i(\vec{v}_1(t_n) + \frac{\vec{w}_{11}}{2}, \dots, \vec{x}_1(t_n) + \frac{\vec{k}_{11}}{2}, \dots, t_n + \frac{h}{2}) \end{cases} \\ \text{III} & \begin{cases} \vec{x}_i(t_n + h) = \vec{x}_i(t_n) + \vec{w}_{2i} + \mathcal{O}(h^3) \\ \vec{v}_i(t_n + h) = \vec{v}_i(t_n) + \vec{w}_{2i} + \mathcal{O}(h^3) \end{cases} \end{aligned}$$



Soluzioni di sistemi

Nota la soluzione di una singola equazione differenziale la soluzione di un sistema non presenta particolari problemi.

Lo sviluppo riportato di seguito (per RK al secondo ordine) richiede che le operazioni siano rigidamente sequenziali: si deve quindi fare attenzione ad eseguire ogni passo del calcolo su tutte le equazioni prima di passare al passo successivo.

$$\begin{aligned} \text{I} & \begin{cases} \vec{k}_{1i} = h\vec{v}_i(t_n) \\ \vec{w}_{1i} = h\vec{f}_i(\vec{v}_1(t_n), \dots, \vec{x}_1(t_n), \dots, t_n) \end{cases} \\ \text{II} & \begin{cases} \vec{k}_{2i} = h\left(\vec{v}_i(t_n) + \frac{\vec{w}_{1i}}{2}\right) \\ \vec{w}_{2i} = h\vec{f}_i\left(\vec{v}_1(t_n) + \frac{\vec{w}_{11}}{2}, \dots, \vec{x}_1(t_n) + \frac{\vec{k}_{11}}{2}, \dots, t_n + \frac{h}{2}\right) \end{cases} \\ \text{III} & \begin{cases} \vec{x}_i(t_n + h) = \vec{x}_i(t_n) + \vec{k}_{2i} + \mathcal{O}(h^3) \\ \vec{v}_i(t_n + h) = \vec{v}_i(t_n) + \vec{w}_{2i} + \mathcal{O}(h^3) \end{cases} \end{aligned}$$

I: calcolo di $\vec{x}_i'(t_n)$ (banale: $\vec{x}_i'(t_n) = \vec{v}(t_n)$)

calcolo di $\vec{v}_i'(t_n)$ usando l'equazione differenziale



Soluzioni di sistemi

Nota la soluzione di una singola equazione differenziale la soluzione di un sistema non presenta particolari problemi.

Lo sviluppo riportato di seguito (per RK al secondo ordine) richiede che le operazioni siano rigidamente sequenziali: si deve quindi fare attenzione ad eseguire ogni passo del calcolo su tutte le equazioni prima di passare al passo successivo.

$$\begin{aligned} & \text{I} \begin{cases} \vec{k}_{1i} = h\vec{v}_i(t_n) \\ \vec{w}_{1i} = h\vec{f}_i(\vec{v}_1(t_n), \dots, \vec{x}_1(t_n), \dots, t_n) \end{cases} \\ & \text{II} \begin{cases} \vec{k}_{2i} = h(\vec{v}_i(t_n) + \frac{\vec{w}_{1i}}{2}) \\ \vec{w}_{2i} = h\vec{f}_i(\vec{v}_1(t_n) + \frac{\vec{w}_{11}}{2}, \dots, \vec{x}_1(t_n) + \frac{\vec{k}_{11}}{2}, \dots, t_n + \frac{h}{2}) \end{cases} \\ & \text{III} \begin{cases} \vec{x}_i(t_n + h) = \vec{x}_i(t_n) + \vec{k}_{2i} + \mathcal{O}(h^3) \\ \vec{v}_i(t_n + h) = \vec{v}_i(t_n) + \vec{w}_{2i} + \mathcal{O}(h^3) \end{cases} \end{aligned}$$

II: si estrapolano \vec{x}_i e \vec{v}_i al primo ordine a $t_n + h/2$
e si calcolano $\vec{x}'_i(t_n + h/2)$ e $\vec{v}'_i(t_n + h/2)$.



Soluzioni di sistemi

Nota la soluzione di una singola equazione differenziale la soluzione di un sistema non presenta particolari problemi.

Lo sviluppo riportato di seguito (per RK al secondo ordine) richiede che le operazioni siano rigidamente sequenziali: si deve quindi fare attenzione ad eseguire ogni passo del calcolo su tutte le equazioni prima di passare al passo successivo.

$$\begin{aligned} \text{I} & \begin{cases} \vec{k}_{1i} = h\vec{f}_i(t_n) \\ \vec{w}_{1i} = h\vec{f}_i(\vec{v}_1(t_n), \dots, \vec{x}_1(t_n), \dots, t_n) \end{cases} \\ \text{II} & \begin{cases} \vec{k}_{2i} = h(\vec{v}_i(t_n) + \frac{\vec{w}_{1i}}{2}) \\ \vec{w}_{2i} = h\vec{f}_i(\vec{v}_1(t_n) + \frac{\vec{w}_{11}}{2}, \dots, \vec{x}_1(t_n) + \frac{\vec{k}_{11}}{2}, \dots, t_n + \frac{h}{2}) \end{cases} \\ \text{III} & \begin{cases} \vec{x}_i(t_n + h) = \vec{x}_i(t_n) + \vec{k}_{2i} + \mathcal{O}(h^3) \\ \vec{v}_i(t_n + h) = \vec{v}_i(t_n) + \vec{w}_{2i} + \mathcal{O}(h^3) \end{cases} \end{aligned}$$

III: si calcolano $\vec{x}_i(t_n + h)$ e $\vec{v}_i(t_n + h)$

Equazioni
Differen-
ziali

Serie di
Taylor

Eulero

Runge-
Kutta

Sistemi di
equazioni