



# Metodo di Monte Carlo

Metodo di  
Monte  
Carlo

Numeri  
casuali

La dis-  
tribuzione  
binomiale

Esperienza

Generazione  
gaussiana

Integrali

Il termine **metodo di Monte Carlo** si riferisce a qualsiasi metodo numerico che faccia uso di numeri “casuali” (random) per risolvere probabilisticamente un problema.

Metodi di Monte Carlo sono normalmente utilizzati in ambito scientifico per:

- simulare processi stocastici
- simulare la risposta di apparati sperimentali
- calcoli numeri approssimati (integrali, etc..)



# Applicazioni del metodo di Monte Carlo

Metodo di  
Monte  
Carlo

Numeri  
casuali

La dis-  
tribuzione  
binomiale

Esperienza

Generazione  
gaussiana

Integrali

I metodi probabilistici hanno una lunga storia ma solo dopo il 1944 è iniziato un loro studio sistematico che ha portato a notevoli sviluppi.

Metodi Monte Carlo sono utilizzati per costruire simulazioni di natura probabilistica di fenomeni fisici (reattori nucleari, traffico stradale, aerodinamica), di problemi decisionali e finanziari (econometrica, previsione Dow-Jones), informatica (progettazione VLSI, rendering) o come semplice fonte di divertimento (videogiochi).

Il forte legame che esiste tra il gioco e le simulazioni probabilistiche è sottolineato dal fatto che a tali simulazioni viene generalmente dato il nome di metodi Monte Carlo (in onore del famoso casino a Monaco).



## Breve nota storica

Metodo di  
Monte  
Carlo

Numeri  
casuali

La dis-  
tribuzione  
binomiale

Esperienza

Generazione  
gaussiana

Integrali

L'idea di utilizzare in modo sistematico simulazioni di tipo probabilistico per risolvere un problema di natura fisica viene generalmente attribuita al matematico polacco Stanislaw Ulam (1909-1984).

Ulam fu uno dei personaggi chiave nel progetto americano per la costruzione della bomba atomica (Manhattan project) durante la seconda guerra mondiale tra il 1943 ed il 1945 a Los Alamos, New Mexico.

Il progetto Manhattan richiedeva infatti la risoluzione di un enorme numero di problemi incredibilmente complessi (nella sua autobiografia Ulam descrive come l'idea di utilizzare simulazioni casuali per risolvere tali problemi gli sia venuta cercando di calcolare la probabilità di "successo" al solitario).



# Numeri casuali

Metodo di Monte Carlo

Numeri casuali

La distribuzione binomiale

Esperienza

Generazione gaussiana

Integrali

I metodi di MC richiedono la generazione dei valori (numeri casuali) di variabili aleatorie di cui sono note le distribuzioni di probabilità.

Un **sequenza di numeri casuali** è una sequenza di numeri che non hanno alcuna relazione di successione tra di loro (ma che seguono, tutti, una stessa distribuzione di probabilità).

Come “generare” sequenze di numeri casuali ?

Generare buone sequenze di numeri realmente casuali è cosa complicata, si potrebbe pensare di affidarsi a processi fisici intrinsecamente aleatori:

- decadimenti radioattivi
- rumore termico
- sistemi turbolenti (cesto delle palline del lotto)

Inutile dire che questi dispositivi non sono esattamente portatili...



# Numeri casuali

Metodo di Monte Carlo

Numeri casuali

La distribuzione binomiale

Esperienza

Generazione gaussiana

Integrali

I metodi di MC richiedono la generazione dei valori (numeri casuali) di variabili aleatorie di cui sono note le distribuzioni di probabilità.

Un **sequenza di numeri casuali** è una sequenza di numeri che non hanno alcuna relazione di successione tra di loro (ma che seguono, tutti, una stessa distribuzione di probabilità).

Come “generare” sequenze di numeri casuali ?

Generare buone sequenze di numeri realmente casuali è cosa complicata, si potrebbe pensare di affidarsi a processi fisici intrinsecamente aleatori:

- decadimenti radioattivi
- rumore termico
- sistemi turbolenti (cesto delle palline del lotto)

Inutile dire che questi dispositivi non sono esattamente portatili...



# Numeri casuali

Metodo di Monte Carlo

Numeri casuali

La distribuzione binomiale

Esperienza

Generazione gaussiana

Integrali

I metodi di MC richiedono la generazione dei valori (numeri casuali) di variabili aleatorie di cui sono note le distribuzioni di probabilità.

Un **sequenza di numeri casuali** è una sequenza di numeri che non hanno alcuna relazione di successione tra di loro (ma che seguono, tutti, una stessa distribuzione di probabilità).

Come “generare” sequenze di numeri casuali ?

Generare buone sequenze di numeri realmente casuali è cosa complicata, si potrebbe pensare di affidarsi a processi fisici intrinsecamente aleatori:

- decadimenti radioattivi
- rumore termico
- sistemi turbolenti (cesto delle palline del lotto)

Inutile dire che questi dispositivi non sono esattamente portatili...



# Numeri pseudo-casuali

Metodo di  
Monte  
Carlo

Numeri  
casuali

La dis-  
tribuzione  
binomiale

Esperienza

Generazione  
gaussiana

Integrali

L'idea stessa di utilizzare un calcolatore (quindi un'oggetto puramente deterministico e di conseguenza prevedibile), per generare un numero casuale, quindi imprevedibile, sembra costituire una sfida impossibile.

Gli algoritmi utilizzati per generare sequenze di numeri pseudo-casuali al calcolatore hanno periodo di ripetizione molto lungo e basso livello di correlazione tra un elemento della sequenza e quello successivo.

**Esempio (Middle Square, Von Neumann, 1946):**

dato un numero intero di 10 cifre (seme della sequenza) lo si eleva al quadrato e si prendono le 10 cifre centrali come numero successivo:

$$44231778342 = 19564502151188931556$$

Provate per esercizio a implementare questo metodo.



# Numeri pseudo-casuali

Metodo di  
Monte  
Carlo

Numeri  
casuali

La dis-  
tribuzione  
binomiale

Esperienza

Generazione  
gaussiana

Integrali

In ambiente C/C++ esiste un generatore di numeri casuali uniformemente distribuiti.

La funzione si chiama:

```
long int random();
```

ed è definita in `stdlib.h`.

Ogni chiamata a `random()` ritorna un intero compreso tra 0 e `RAND_MAX` (che, nelle macchine a 32 bits vale di solito  $2^{31} - 1$ ).

Se si vogliono numeri compresi in  $[0, 1]$  si usa:

```
double rnd = (double)random()/RAND_MAX;
```

Dato un numeri casuali uniformemente distribuiti in  $[0, 1]$  con una semplice trasformazione è possibile ottenere numeri casuali in un intervallo generico  $[x_{min}, x_{max}]$ .





# Inizializzazione della sequenza

Metodo di Monte Carlo

Numeri casuali

La distribuzione binomiale

Esperienza

Generazione gaussiana

Integrali

È utile poter fissare il “seme” della sequenza in modo da poter generare sequenze diverse o esattamente la stessa sequenza (per scopi di debugging): a seme uguale corrisponde sequenza uguale.

```
void srandom(long int);
```

L'inizializzazione va fatta una sola volta per tutte all'inizio del programma.

Se si vuole una sequenza differente ad ogni esecuzione del programma si può usare la funzione

```
long int time(time_t *t);
```

che restituisce il numero di secondi dal 1 Gennaio 1970 (se non si è interessati a riempire la struttura `time_t *t` si può passare il puntatore nullo).



# La distribuzione binomiale

Una interessante applicazione della generazioni di distribuzioni uniformi è la generazione di processi binomiali.

Tale distribuzione si base su eventi (**prove**) caratterizzati da due soli risultati possibili  $a$  o  $\bar{a}$ :

$$\begin{aligned}p(a) &= p \\p(\bar{a}) &= q = 1 - p\end{aligned}$$

Questo tipo di evento è facile da generare ! Estraggo  $x \in [0, 1]$  se  $x < p$  allora il risultato è  $a$  altrimenti  $\bar{a}$ .

Consideriamo un esperimento che consista nella ripetizione di  $n$  prove ciascuna con probabilità  $p$ . Si dimostra (Laboratorio di Fisica) che la probabilità di ottenere  $k$  volte  $a$  vale:

$$p(k, n, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Media e varianza della distribuzione binomiale sono date da:

$$\bar{k} = np \qquad \sigma^2 = np(1 - p)$$



# La distribuzione binomiale

Metodo di  
Monte  
Carlo

Numeri  
casuali

La dis-  
tribuzione  
binomiale

Esperienza

Generazione  
gaussiana

Integrali

Una interessante applicazione della generazioni di distribuzioni uniformi è la generazione di processi binomiali.

Tale distribuzione si base su eventi (**prove**) caratterizzati da due soli risultati possibili  $a$  o  $\bar{a}$ :

$$\begin{aligned}p(a) &= p \\p(\bar{a}) &= q = 1 - p\end{aligned}$$

Questo tipo di evento è facile da generare ! Estraggo  $x \in [0, 1]$  se  $x < p$  allora il risultato è  $a$  altrimenti  $\bar{a}$ .

Consideriamo un esperimento che consista nella ripetizione di  $n$  prove ciascuna con probabilità  $p$ . Si dimostra (Laboratorio di Fisica) che la probabilità di ottenere  $k$  volte  $a$  vale:

$$p(k, n, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Media e varianza della distribuzione binomiale sono date da:

$$\bar{k} = np \qquad \sigma^2 = np(1 - p)$$



# La distribuzione binomiale

Una interessante applicazione della generazioni di distribuzioni uniformi è la generazione di processi binomiali.

Tale distribuzione si base su eventi (**prove**) caratterizzati da due soli risultati possibili  $a$  o  $\bar{a}$ :

$$\begin{aligned}p(a) &= p \\p(\bar{a}) &= q = 1 - p\end{aligned}$$

Questo tipo di evento è facile da generare ! Estraggo  $x \in [0, 1]$  se  $x < p$  allora il risultato è  $a$  altrimenti  $\bar{a}$ .

Consideriamo un **esperimento che consista nella ripetizione di  $n$  prove ciascuna con probabilità  $p$** . Si dimostra (Laboratorio di Fisica) che la probabilità di ottenere  $k$  volte  $a$  vale:

$$p(k, n, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Media e varianza della distribuzione binomiale sono date da:

$$\bar{k} = np \qquad \sigma^2 = np(1 - p)$$



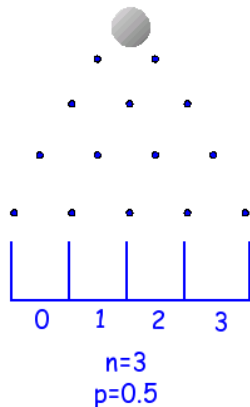
# La distribuzione binomiale

Esempio classico:  $n$  lanci di una moneta.

Altra visualizzazione della binomiale è il **tavolo binario**. Si tratta di un piano inclinato con una serie di chiodi piantati in modo da formare un reticolo regolare. Una biglia, urtando un chiodo, può passare a destra o a sinistra con uguale probabilità ( $p = 0.5$ ).

$n$  numero di righe di chiodi;

$k$  posizione di arrivo (oppure numero di successi dell'evento "passaggio a destra").





In Laboratorio di Calcolo dovrete:

- 1 simulare  $N$  esperimenti composto ciascuno di  $n$  prove binomiali di probabilità  $p$  costruendo l'istogramma rappresentante la frequenza del numero di successo  $k$ . Per ogni prova si estrae un numero  $x$  compreso tra 0 e 1, se  $x < p$  si aumenta di uno il numero di successi.
- 2 confrontare (sovrapponendoli) l'istogramma simulato con la distribuzione binomiale con parametri  $n$  e  $p$ ;
- 3 confrontare (sovrapponendoli) l'istogramma simulato con la distribuzione gaussiana avente come **media e deviazione standard** quelle della **distribuzione simulata**.



# Esperienza in Laboratorio

L'esperienza continuerà nel Laboratorio di Fisica dove quantificherete l'accordo tra istogramma simulato e distribuzione teorica calcolando il  $\chi^2$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{nbin} \frac{(N_i^{sim} - N_i^{teo})^2}{N_i^{teo}}$$

e valutandone la probabilità.

L'operazione andrà ripetuta per:

- 1 confronto binomiale simulata - binomiale teorica
- 2 confronto binomiale simulata - gaussiana teorica

Il primo accordo migliora per  $N \rightarrow \infty$  (diminuzione fluttuazione statistiche) e il secondo  $N \rightarrow \infty$  e  $n \rightarrow \infty$  (teorema del limite centrale).

Metodo di Monte Carlo

Numeri casuali

La distribuzione binomiale

Esperienza

Generazione gaussiana

Integrali



# Esperienza in Laboratorio: implementazione

```
int BinomialEvent(int p, int n);
```

simula  $n$  ripetizioni di eventi binari con probabilità  $p$  e ritorna il numero di successi  $k$

```
double Binomial(int p, int n, int k);
```

calcola la probabilità binomiale

```
int/double BinomialCoeff(int n, int k);
```

calcola il coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Si deve fare attenzione al modo in cui il calcolo viene eseguito, perché altrimenti si perde facilmente precisione o si eccedono i limiti delle variabili intere. Potete utilizzare variabili con range più elevato e/o sfruttare semplificazioni tra numeratore e denominatore e la simmetria tra  $k$  e  $n - k$

Metodo di Monte Carlo

Numeri casuali

La distribuzione binomiale

Esperienza

Generazione gaussiana

Integrali



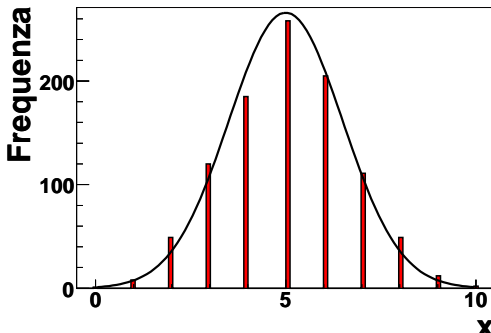


# Esperienza in Laboratorio: implementazione

Confronto istogramma simulato/binomiale/gaussiana.

Fate attenzione al confronto distribuzione continua (gaussiana) - distribuzione discreta (binomiale).

Come integrare la gaussiana per ottenere i bin dell'istogramma teorico? Scelta ragionevole: bin di larghezza 1 centrati su numeri interi.



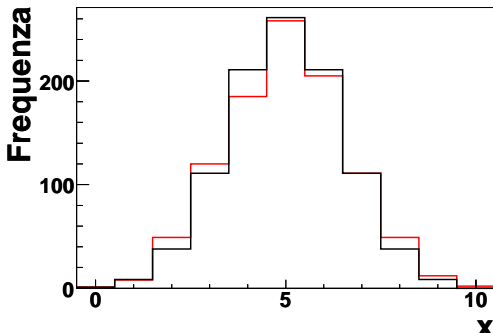


# Esperienza in Laboratorio: implementazione

Confronto istogramma simulato/binomiale/gaussiana.

Fate attenzione al confronto distribuzione continua (gaussiana) - distribuzione discreta (binomiale).

Come integrare la gaussiana per ottenere i bin dell'istogramma teorico? Scelta ragionevole: bin di larghezza 1 centrati su numeri interi.





# Esperienza in Laboratorio: implementazione

Confronto istogramma simulato/binomiale/gaussiana.

Fate attenzione al confronto distribuzione continua (gaussiana) - distribuzione discreta (binomiale).

Come integrare la gaussiana per ottenere i bin dell'istogramma teorico ? Scelta ragionevole: bin di larghezza 1 centrati su numeri interi.

Il seguito in Laboratorio di Fisica :

- calcolo della funzione  $\chi^2$  e della sua probabilità (utilizzate il metodo di TMath  
`double TMath::Prob(double chi2, int ndof)`  
ndof è il numero di gradi di libertà.
- nel calcolo del  $\chi^2$  (vedi Lab. Fisica) dovete fare in modo che  $N_i^{teo} \geq 5$ , sarà quindi necessario “raggruppare” i bin dell'istogramma teorico (e di conseguenza di quello simulato) con meno di 5 entries.

Metodo di Monte Carlo

Numeri casuali

La distribuzione binomiale

Esperienza

Generazione gaussiana

Integrali



Metodo di Monte Carlo

Numeri casuali

La distribuzione binomiale

Esperienza

Generazione gaussiana

Integrali

Traccia:

- Provare il generatore di **numeri casuali uniformemente distribuiti** realizzando un istogramma (che deve risultare piatto). Provate a variare il numero di eventi nell'istogramma.
- **Simulare un processo binomiale** (scegliendo  $N$ ,  $n$  e  $p$ ) e confrontate l'istogramma simulato con la distribuzione **binomiale teorica** e la distribuzione **gaussiana teorica** avente stessa media e deviazione standard.

Facoltativamente potete impostare il calcolo del  $\chi^2$  che vi servirà a laboratorio di Fisica.



# Generazione gaussiana / Teorema limite centrale

Un metodo (poco efficiente) per generare una sequenza di numeri casuali distribuiti secondo una gaussiana consiste nell'utilizzare il teorema del limite centrale (può anche essere visto come una verifica del teorema):

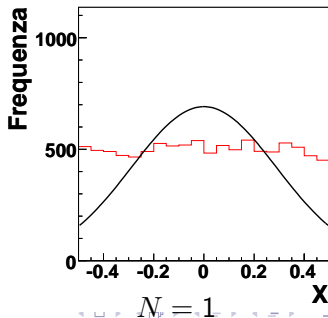
“La distribuzione della somma di  $N$  variabili aleatorie comunque distribuite tende, per  $N \rightarrow \infty$ , ad una distribuzione gaussiana.”

Consideriamo una variabile  $x$  uniformemente distribuita tra  $[-0.5, 0.5]$

$$\bar{x} = \int_{-0.5}^{0.5} dx = 0$$

$$\sigma^2 = \int_{-0.5}^{0.5} x^2 dx = \frac{1}{12}$$

e definiamo  $X = \sum_{i=1}^N x_i$





# Generazione gaussiana / Teorema limite centrale

Un metodo (poco efficiente) per generare una sequenza di numeri casuali distribuiti secondo una gaussiana consiste nell'utilizzare il teorema del limite centrale (può anche essere visto come una verifica del teorema):

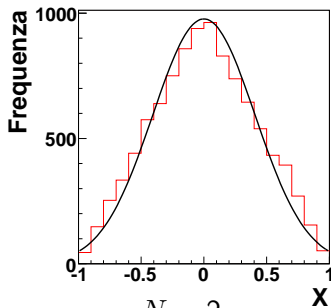
“La distribuzione della somma di  $N$  variabili aleatorie comunque distribuite tende, per  $N \rightarrow \infty$ , ad una distribuzione gaussiana.”

Consideriamo una variabile  $x$  uniformemente distribuita tra  $[-0.5, 0.5]$

$$\bar{x} = \int_{-0.5}^{0.5} dx = 0$$

$$\sigma^2 = \int_{-0.5}^{0.5} x^2 dx = \frac{1}{12}$$

e definiamo  $X = \sum_{i=1}^N x_i$





# Generazione gaussiana / Teorema limite centrale

Un metodo (poco efficiente) per generare una sequenza di numeri casuali distribuiti secondo una gaussiana consiste nell'utilizzare il teorema del limite centrale (può anche essere visto come una verifica del teorema):

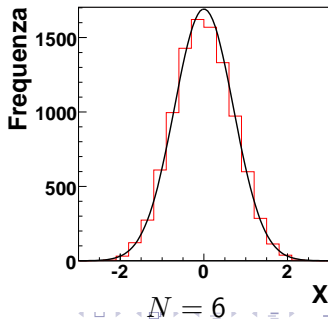
“La distribuzione della somma di  $N$  variabili aleatorie comunque distribuite tende, per  $N \rightarrow \infty$ , ad una distribuzione gaussiana.”

Consideriamo una variabile  $x$  uniformemente distribuita tra  $[-0.5, 0.5]$

$$\bar{x} = \int_{-0.5}^{0.5} dx = 0$$

$$\sigma^2 = \int_{-0.5}^{0.5} x^2 dx = \frac{1}{12}$$

e definiamo  $X = \sum_{i=1}^N x_i$





# Generazione gaussiana / Teorema limite centrale

Un metodo (poco efficiente) per generare una sequenza di numeri casuali distribuiti secondo una gaussiana consiste nell'utilizzare il teorema del limite centrale (può anche essere visto come una verifica del teorema):

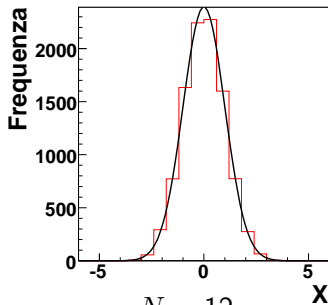
**“La distribuzione della somma di  $N$  variabili aleatorie comunque distribuite tende, per  $N \rightarrow \infty$ , ad una distribuzione gaussiana.”**

Consideriamo una variabile  $x$  uniformemente distribuita tra  $[-0.5, 0.5]$

$$\bar{x} = \int_{-0.5}^{0.5} dx = 0$$

$$\sigma^2 = \int_{-0.5}^{0.5} x^2 dx = \frac{1}{12}$$

e definiamo  $X = \sum_{i=1}^N x_i$







# Calcolo di Integrali

Supponiamo di dover calcolare l'integrale di una funzione in un intervallo limitato  $[x_{min}, x_{max}]$ , e di conoscere il massimo ed il minimo della funzione in tale intervallo.

Se generiamo  $n$  punti uniformemente distribuiti nel rettangolo

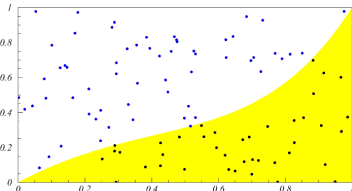
$$[x_{min}, x_{max}] \times [f_{min}, f_{max}]$$

avremo che la frazione  $p$  di punti che cadono sotto la funzione è pari al rapporto tra l'integrale e l'area del rettangolo  $A$ .

La distribuzione di successi è binomiale e si ha:

$$I = \int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x) dx = Ap = A \frac{N_{fav}}{N_{tot}}$$

$$\sigma(I) = A \sqrt{\frac{p(1-p)}{N_{tot}}}$$





# Calcolo di Integrali

Supponiamo di dover calcolare l'integrale di una funzione in un intervallo limitato  $[x_{min}, x_{max}]$ , e di conoscere il massimo ed il minimo della funzione in tale intervallo.

Se generiamo  $n$  punti uniformemente distribuiti nel rettangolo

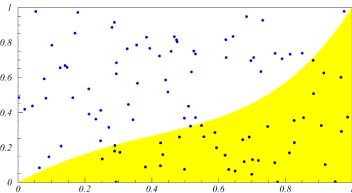
$$[x_{min}, x_{max}] \times [f_{min}, f_{max}]$$

avremo che la frazione  $p$  di punti che cadono sotto la funzione è pari al rapporto tra l'integrale e l'area del rettangolo  $A$ .

La distribuzione di successi è binomiale e si ha:

$$I = \int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x) dx = Ap = A \frac{N_{fav}}{N_{tot}}$$

$$\sigma(I) = A \sqrt{\frac{p(1-p)}{N_{tot}}}$$





# Calcolo di $\pi$

Metodo di Monte Carlo

Numeri casuali

La distribuzione binomiale

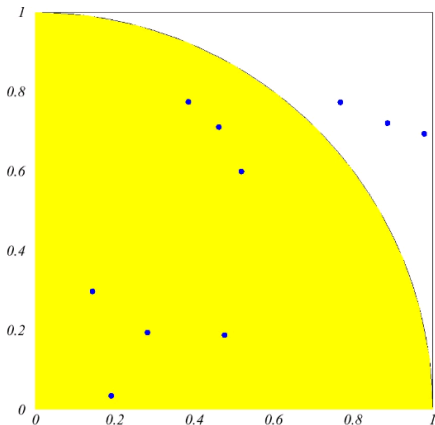
Esperienza

Generazione gaussiana

Integrali

Se in particolare si sceglie come funzione l'equazione del cerchio nell'intervallo  $[0, 1] \times [0, 1]$  si può determinare il valore di  $\pi$

$$\pi = 4I = 4 \frac{N_{fav}}{N_{tot}}$$

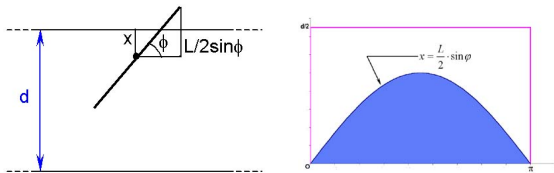




# Calcolo di $\pi$

Prima applicazione del metodo di Monte Carlo (Buffon 1777). Consideriamo una vasta area in cui siano tracciate linee rette parallele a distanza  $d$  gettiamo quindi a caso su di essa un sottile ago di lunghezza  $L < d$ .

Qual era la probabilità che l'ago intersechi una linea ?



$$P(\text{intersezione}) = P(x < L/2 \sin \phi)$$

Se gli aghi sono lanciati a caso  $x \in [0, d/2]$ ,  $\phi \in [0, \pi]$ , quindi

$$P(\text{intersezione}) = \frac{N_{fav}}{N_{tot}} = \frac{L/2 \int_0^\pi \sin \phi d\phi}{\pi d/2} = \frac{2L}{\pi d}$$

Poco efficiente...



# Calcolo di Integrali

Metodo di Monte Carlo

Numeri casuali

La distribuzione binomiale

Esperienza

Generazione gaussiana

Integrali

Quando diventa conveniente valutare un integrale con il metodo Monte Carlo ?

Ricordiamo che ogni estrazione implica il calcolo della funzione integranda (per stabilire se  $y < f(x)$  cioè se il punto è contenuto nell'area).

Consideriamo una funzione a  $m$  dimensioni e chiamiamo  $N$  il numero di valutazioni della funzione integrale:

**Simpson:** fissato a  $n$  il numero di campionamenti per dimensione  $N$  vale  $n^m$

**Monte Carlo:** la precisione migliora come  $1/\sqrt{N}$

Quando a parità di tempo di esecuzione i due metodi danno precisioni simili con stesso tempo di esecuzione ? La risposta non è semplice perché dipende da come è fatta la funzione.

In generale però per  $m > 4$  il metodo Monte Carlo comincia a diventare competitivo.