

Meccanica e Dinamica

- 1) Un aereo in fase di decollo impiega circa 40 s per raggiungere la velocità di decollo di 300 km/h. Quanto valgono l'accelerazione (supposta costante) e lo spazio percorso prima del decollo?

Soluzione:

- **Quanto vale l'accelerazione media (supposta costante)?**

L'accelerazione media è definita come:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t}$$

Questa è una equazione vettoriale.

In questo caso il moto è lungo una retta, quindi l'equazione può essere scritta per la sola componente lungo la direzione del moto

$$a_m = \frac{v_f - v_i}{\Delta t}$$

Dalla definizione si ricava quindi che in questo caso l'accelerazione vale:

$$a_m = \frac{300 \text{ km/h} - 0}{40 \text{ s}} = \frac{300 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}}}{40 \text{ s}} = 2.08 \text{ m/s}^2$$

- **Quanto vale lo spazio percorso prima del decollo?**

Lo spazio percorso è dato dalla distanza fra la posizione finale e quella iniziale.

$$S = x(t) - x(t_o)$$

Per calcolare lo spazio è necessario conoscere la posizione dell'aereo al tempo $t = 40 \text{ s}$. Le equazioni che descrivono la posizione in funzione del tempo sono dette equazioni del moto.

- **Quali sono le equazioni del moto dell'aereo?**

L'aereo sta accelerando. Il testo dice di considerare l'accelerazione costante.

Le equazioni del moto nel caso di un moto uniformemente accelerato sono date da

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_o - \vec{v}_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_o)^2$$

E' una equazione vettoriale.

In questo caso avendo un moto lungo una sola direzione, considero la sola componente lungo la direzione del moto.

$$x(t) = x_o - v_o(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

Lo spazio percorso quindi in questo caso ($v_o = 0$) sarà dato da

$$S = x(t) - x_o = \frac{1}{2}a_m(t - t_o)^2$$

Numericamente

$$S = \frac{1}{2}(2.08 \text{ m/s}^2)(40 \text{ s})^2 = 1670 \text{ m}$$

- 2) L'intervallo di tempo fra la percezione di un segnale di arresto (ad esempio un semaforo rosso) e l'applicazione dei freni è, per un automobilista medio, di 0.7 s . Se l'automobile può decelerare ad un ritmo di 5 m/s^2 , calcolare la distanza totale percorsa prima dell'arresto
- da una velocità iniziale di 36 km/h
 - da una velocità iniziale di 72 km/h

Soluzione:

- a) **Calcolare la distanza totale percorsa prima dell'arresto da una velocità iniziale di 36 km/h**

Come distanza totale si intende la distanza percorsa dal momento in cui si accende il segnale di arresto fino al momento in cui l'auto si ferma completamente.

$$d_{\text{arresto}} = x(t_{\text{arresto}}) - x(t_{\text{segnale}})$$

- **Quanto vale $x(t_{\text{arresto}})$?**

L'automobile che si muove con velocità v_{in} frena con decelerazione costante a partire dal tempo t_{reazione} .

Si muove quindi di moto uniformemente accelerato.

Le equazioni del moto per un moto uniformemente accelerato sono

$$X(t) = X(t_o) + V(t_o)(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

quindi nel momento in cui la macchina si ferma si troverà in

$$x(t_{\text{arresto}}) = x(t_{\text{reazione}}) + v_{in}(t_{\text{arresto}} - t_{\text{reazione}}) + \frac{1}{2}a(t_{\text{arresto}} - t_{\text{reazione}})^2$$

e la distanza di arresto sarà data da:

$$d_{\text{arresto}} = x(t_{\text{reazione}}) - x(t_{\text{segnale}}) + v_{in}(t_{\text{arresto}} - t_{\text{reazione}}) + \frac{1}{2}a(t_{\text{arresto}} - t_{\text{reazione}})^2$$

per calcolare distanza percorsa fino al momento in cui la macchina si ferma devo calcolare $x(t_{\text{reazione}}) - x(t_{\text{segnale}})$ (la distanza percorsa fino al momento in cui comincia a frenare) e $t_{\text{arresto}} - t_{\text{reazione}}$ (il tempo di frenata).

- **Quanto vale $x(t_{\text{reazione}}) - x(t_{\text{segnale}})$?**

Dal momento in cui si accende il segnale (t_{segnale}) al momento in cui si comincia a frenare (t_{reazione}), la macchina continua a muoversi a velocità costante pari a v_{in} .

Le equazioni del moto per un moto rettilineo uniforme sono date da:

$$x(t) = x(t_o) + v(t_o)(t - t_o)$$

quindi in questo caso

$$x(t_{\text{reazione}}) - x(t_{\text{segnale}}) = v_{in}(t_{\text{reazione}} - t_{\text{segnale}})$$

- **Quanto vale $t_{\text{arresto}} - t_{\text{reazione}}$?**

Il tempo di arresto è il momento in cui l'auto si ferma, ossia il valore di t per cui

$$v(t = t_{\text{arresto}}) = 0$$

Mentre la macchina frena (muovendosi di moto uniformemente accelerato) la sua velocità al tempo t sarà data da:

$$v(t) = v_o + a(t - t_o)$$

In questo caso particolare (accelerazione negativa a partire da $t_o = t_{reazione}$) $V(t)$ è data da

$$v(t) = v_{in} - a(t - t_{reazione})$$

Quindi

$$v(t = t_{arresto}) = 0 = v_{in} - a(t_{arresto} - t_{reazione})$$

Da cui si ricava:

$$t_{arresto} - t_{reazione} = \frac{v_{in}}{a}$$

Numericamente:

Sostituendo nell'equazione per $d_{arresto}$

$$d_{arresto} = v_{in}(t_{reazione} - t_{segnale}) + v_{in} \frac{v_{in}}{a} - \frac{1}{2} a \frac{v_{iniziale}^2}{a} = v_{in}(t_{reazione} - t_{segnale}) + \frac{1}{2} \frac{v_{iniziale}^2}{a}$$

Numericamente:

$$\begin{aligned} d_{arresto} &= v_{in}(t_{reazione} - t_{segnale}) + \frac{1}{2} \frac{v_{iniziale}^2}{a} = 36 \text{ km/h} * 0.7, s + \frac{1}{2} \frac{(36 \text{ km/h})^2}{(5 \text{ m/s}^2)} \\ &= \left(36 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}}\right) 0.7 \text{ s} + \frac{1}{2} \frac{\left(36 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}}\right)^2}{(5 \text{ m/s}^2)} = 17 \text{ m} \end{aligned}$$

- b) **Calcolare la distanza totale percorsa prima dell'arresto da una velocità iniziale di 72 km/h**

La seconda domanda è una ripetizione della prima, con una diversa velocità iniziale, quindi posso utilizzare la stessa equazione e trovo

$$d'_{arresto} = 54 \text{ m}$$

A questo punto osservo che raddoppiando la velocità la distanza di arresto è triplicata.

Analizzando le equazioni che forniscono la soluzione, si nota che mentre la distanza percorsa nel tempo di reazione dipende linearmente dalla velocità quella percorsa durante la frenata dipende dal quadrato della velocità.

Al crescere della velocità il termine lineare è sempre meno importante, e con buona approssimazione lo spazio di arresto risulta proporzionale al quadrato della velocità.

- 3) Un corpo puntiforme si muove nel piano (x, y) e all'istante $t = 0$ si trova nel punto P_o di coordinate $(x_o = 3 \text{ cm}, y_o = -2 \text{ cm})$.

La sua velocità in quell'istante vale $\vec{v}_o = (v_{x_o} = -2 \text{ cm/s}, v_{y_o} = 5 \text{ cm/s})$.

Sapendo che esso è sottoposto ad una accelerazione costante le cui componenti valgono $a_x = 6 \text{ cm/s}^2$ e $a_y = 4 \text{ cm/s}^2$, calcolare

- la velocità del corpo all'istante $t = 2 \text{ s}$.
- la distanza dal punto P_o in quell'istante.

Ris.: $v(t = 2 \text{ s}) = 16.4 \text{ cm/s}; d = 19.7 \text{ cm}$

Soluzione:

- Quanto vale la velocità del corpo all'istante $t = 2 \text{ s}$?**

La velocità è una grandezza vettoriale:

$$\vec{v} = (v_x, v_y)$$

Il modulo della velocità è dato da:

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Dalla definizione si ricava che la risposta alla domanda è data da:

$$|v| = \sqrt{v_x(t = 2 \text{ s})^2 + v_y(t = 2 \text{ s})^2}$$

Per rispondere devo quindi calcolare sia v_x che v_y all'istante $t = 2 \text{ s}$.

- Quanto valgono le componenti x e y della velocità?**

La velocità al tempo t in un moto uniformemente accelerato è data da

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_o + \vec{a}(t - t_o)$$

Questa è un'equazione vettoriale, equivalente a:

$$v_x(t) = v_{x_o} + a_x(t - t_o)$$

$$v_y(t) = v_{y_o} + a_y(t - t_o)$$

Numericamente:

$$v_x(t = 2 \text{ s}) = -2 \text{ cm/s} + 6 \text{ cm/s}^2 \cdot 2 \text{ s} = 10 \text{ cm/s}$$

$$v_y(t = 2 \text{ s}) = 5 \text{ cm/s} + 4 \text{ cm/s}^2 \cdot 2 \text{ s} = 13 \text{ cm/s}$$

Il modulo della velocità vale quindi:

$$|v| = 16.4 \text{ cm/s}$$

- Quanto vale la distanza fra P_o e P per $t = 2 \text{ s}$?**

La distanza fra due punti è definita come:

$$d = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}$$

Quindi la distanza da calcolare è data da:

$$d = \sqrt{[x(t = 2 \text{ s}) - x_o]^2 + [y(t = 2 \text{ s}) - y_o]^2}$$

Per calcolarla è necessario conoscere le coordinate x e y del corpo all'istante $t = 2 \text{ s}$

- **Quanto valgono le coordinate x e y ?** Le coordinate del punto in funzione del tempo sono descritte dalle equazioni del moto.

Per un moto uniformemente accelerato le equazioni del moto sono date da:

$$\vec{X} = \vec{x}_o + \vec{v}_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_o)^2$$

Questa è un'equazione vettoriale:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_o + v_{x_o}(t - t_o) + \frac{1}{2}a_x(t - t_o)^2 \\y(t) &= y_o + v_{y_o}(t - t_o) + \frac{1}{2}a_y(t - t_o)^2\end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici trovo

$$\begin{aligned}x(t = 2\text{ s}) &= 3\text{ cm} - 2\text{ cm/s} \cdot 2\text{ s} + \frac{1}{2}6\text{ cm/s}^2(2\text{ s})^2 = 11\text{ cm} \\y(t = 2\text{ s}) &= -2\text{ cm} + 5\text{ cm/s} \cdot 2\text{ s} + \frac{1}{2}4\text{ cm/s}^2(2\text{ s})^2 = 16\text{ cm}\end{aligned}$$

La distanza fra il punto P e P_o vale quindi:

$$d = \sqrt{(11 - 3)^2 + (16 + 2)^2} = 19.7\text{ cm}$$

4) Si costruisca un grafico (su carta quadrettata) della velocità in funzione del tempo per un oggetto che, partendo da fermo dalla posizione $x = 5\text{ m}$, accelera per 10 s con accelerazione pari a $A = 0.2\text{ m/s}^2$ e poi prosegue a velocità costante.

a) Quanto vale la velocità finale dell'oggetto?

b) Quanto spazio avrà percorso dopo 15 s ? Quanto vale la sua coordinata x ?

$$\text{Ris.: } V_{fin} = 2\text{ m/s}; s = 20\text{ m}; X_{fin} = 25\text{ m}$$

Soluzione:

• **Costruire il grafico $V(t)$ dell'oggetto**

Un grafico è uno dei modi possibili per definire una funzione: nel piano cartesiano una funzione $F(x)$ è disegnata come una curva i cui punti $P_i = (x_i, y_i)$ sono legati dalla relazione:

$$y_i = F(x_i)$$

Cioè

$$P_i = [x_i, F(x_i)]$$

Il grafico della velocità in funzione del tempo sarà dato quindi da una curva nel piano cartesiano i cui punti hanno coordinate

$$P_i = [t_i, V(t_i)]$$

Per poter disegnare il grafico è quindi necessario conoscere $V(t)$

– **Quale è l'espressione per $V(t)$?**

Il tipo di moto nei primi dieci secondi è di tipo diverso da quello che si ha in seguito.

* **Quale è l'espressione per $V(t)$ nei primi 10 s ?**

Dal testo ricavo che nei primi 10 s il corpo si muove con accelerazione costante. Nei moti uniformemente accelerati la velocità in funzione del tempo è data da

$$v(t) = v_o + a(t - t_o)$$

Quindi vuol dire che per $t < 10\text{ s}$

$$V(t) = 0.2\text{ m/s}^2 \cdot t \quad [t < 10\text{ s}]$$

* **Quale è l'espressione per $V(t)$ successivamente?**

Dal testo ricavo che dopo $t = 10\text{ s}$ la velocità rimane costante. Tradotto in formule questo vuol dire che

$$V(t) = V(t = 10\text{ s}) \quad [t > 10\text{ s}]$$

cioè il valore della velocità è pari a quella raggiunta per $t = 10\text{ s}$.

• **Quanto vale la velocità per $t = 10\text{ s}$?** Dall'equazione precedente:

$$V(t = 10\text{ s}) = 0.2\text{ m/s}^2 * 10\text{ s} = 2\text{ m/s}$$

$$V(t) = 2\text{ m/s} \quad (t > 10\text{ s})$$

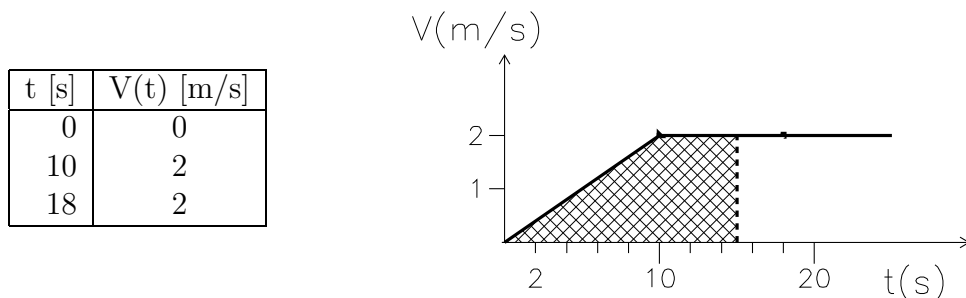
La funzione di cui devo fare il grafico è quindi

$$V(t) = 0.2\text{ m/s}^2 \cdot t \quad (t < 10\text{ s})$$

$$V(t) = 2\text{ m/s} \quad (t > 10\text{ s})$$

Passo ora a disegnare il grafico: dall'espressione di $V(t)$ osservo che si tratta di due spezzoni di retta. Per disegnare ciascuna retta bastano due punti

Costruisco quindi una tabella dei valori e li riporto nel grafico



- a) **Quanto vale la velocità finale?** La velocità finale non può che essere pari al valore (costante) della velocità per $V(t > 10 s) = 2 m/s$
- b) **Quanto spazio avrà percorso dopo 15 s?**

Lo spazio percorso dopo 15 s è dato dalla differenza fra la posizione per $x(t = 15 s)$ e quella iniziale:

$$s = x(t = 15 s) - x(t = 0)$$

Per calcolare lo spazio percorso posso

- scrivere le equazioni del moto che danno la posizione in funzione del tempo
- sfruttare il fatto che lo spazio percorso in un intervallo di tempo è dato dall'integrale della velocità in quello stesso intervallo di tempo.

Entrambi questi metodi sono applicabili, bisogna verificare se siano o meno effettivamente utilizzabili in base ai dati del problema.

- Per calcolare lo spazio percorso a partire dalle equazioni del moto sono innanzitutto necessarie le equazioni del moto.

In questo caso il moto è uniformemente accelerato per $0 < t < 10 s$ e rettilineo uniforme per $t > 10 s$, ossia:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t=0) + v(t=0) \cdot t + \frac{1}{2}at^2 & (t < 10 s) \\ x(t) &= x(t=10 s) + v(t=10) \cdot (t - 10 s) & (t > 10 s) \end{aligned}$$

dai dati del problema

$$\begin{aligned} x(t) &= 5 m + 0.1m/s^2 \cdot t^2 & (t < 10 s) \\ x(t) &= x(t=10 s) + 2 m/s \cdot (t - 10 s) & (t > 10 s) \end{aligned}$$

Dovendo calcolare $x(t = 15 s)$ devo considerare la seconda di queste formule

$$s = x(t = 15 s) - x(t = 0) = x(t = 10 s) + 2 m/s \cdot (15 - 10 s) - 5 m$$

ma per utilizzarla devo conoscere $x(t = 10 s)$ che non viene fornita dal testo del problema

- **Quanto vale $x(t = 10 s)$**

Posso ricorrere ancora alle equazioni del moto utilizzando stavolta la prima delle due equazioni

$$x(t = 10 s) = 5 m + 0.1m/s^2 \cdot t^2$$

numericamente:

$$x(t = 10 s) = 5 m + 0.1m/s^2 \cdot (10 s)^2 = 15 m$$

Sostituendo si trova quindi:

$$s = x(t = 10 s) + 2 m/s \cdot (15 - 10 s) - 5 m = 15 m + 2 m/s \cdot 5 s - 5 m = 20 m$$

- Per calcolare (graficamente) lo spazio percorso come integrale della velocità devo ricorrere al grafico $V(t)$ (che era stato costruito in precedenza per rispondere alla prima domanda) L'integrale di una curva è dato dall'area sottesa a quella curva.
In questo caso quindi per calcolare lo spazio percorso basta calcolare l'area tratteggiata nel grafico (dividendola magari in triangoli e rettangoli)

$$s = \frac{1}{2}(b \cdot h)_{\text{triangolo}} + (b \cdot h)_{\text{rettangolo}} = \frac{1}{2}(10 \text{ s}) \cdot (2 \text{ m/s}) + (5 \text{ s}) \cdot (2 \text{ m/s}) = 20 \text{ m}$$

In entrambi i casi ho ottenuto lo stesso risultato (come deve essere)

Quanto vale la sua coordinata x per ($t = 15 \text{ s}$)?

Visto che si tratta di un moto lungo un asse, la posizione finale è data da

$$x(t = 15 \text{ s}) = x(t = 0) + s$$

Numericamente:

$$x(t = 15 \text{ s}) = 5 \text{ m} + 20 \text{ m} = 25 \text{ m}$$

5) Una pallina si muove nel piano X-Y con equazioni

$$x(t) = 5 + 0.2t \quad (S.I.) \quad y(t) = -3 + 0.1t^2 \quad (S.I)$$

Disegnare i grafici per $x(t), v_x(t), y(t), v_y(t), v(t)$ per t fra 0 e 10 s.

Calcolare gli angoli iniziali e finali rispetto all'asse x della direzione in cui si muove la pallina.

Ris.: $v_x(t) = 0.2 \text{ m/s}; v_y(t) = 0.2t; \tan(\theta(t)) = \frac{v_y(t)}{v_x(t)}$

Soluzione:

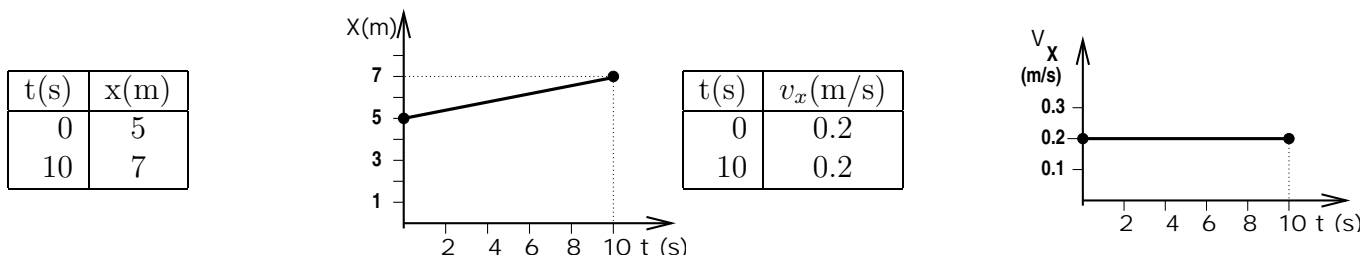
- **Disegnare il grafico per $x(t)$ e $v_x(t)$** Per disegnare un grafico è necessario conoscere il valore di x e di v_x in un numero sufficiente di punti. In questo caso

$$x(t) = 5 + 0.2 \text{ m/s} \cdot t$$

dipende linearmente dal tempo e posso dedurne che

- che la sua rappresentazione grafica è una retta
- che lungo la direzione X l'oggetto si muove a velocità v_x costante e pari a 0.2 m/s, cioè che $v_x(t) = 0.2 \text{ m/s} = \text{cost.}$

Per disegnare una retta sono sufficienti due punti, quindi mi basta calcolare $x(t)$ per $t=0$ e $t=10$ s e riportare i valori in un grafico:



- **Disegnare il grafico per $y(t)$ e $v_y(t)$** Per disegnare un grafico è necessario conoscere il valore di y e di v_y in un numero sufficiente di punti. In questo caso

$$y(t) = -3 \text{ m} + 0.1 \text{ m/s}^2 \cdot t^2$$

ha una dipendenza quadratica dal tempo e posso dedurne che

- che la sua rappresentazione grafica è una parabola
- che lungo la direzione Y l'oggetto si muove con accelerazione costante. Sapendo che per un moto uniformemente accelerato

$$y(t) = y_0 + v_{y0}(t - t_0) + \frac{1}{2} a_y(t - t_0)^2$$

si riconosce facilmente che nel nostro caso l'espressione generale per $y(t)$ coincide con quella particolare se si pone $t_0 = 0; y_0 = -3 \text{ m}, v_{y0} = 0$ e $a_y = 0.2 \text{ m/s}^2$.

- per i moti uniformemente accelerati l'espressione generale per $v_y(t)$ è la seguente

$$v_y(t) = v_{y0} + a_y(t - t_0)$$

che in base ai valori precedentemente ricavati si riconduce in questo caso particolare a

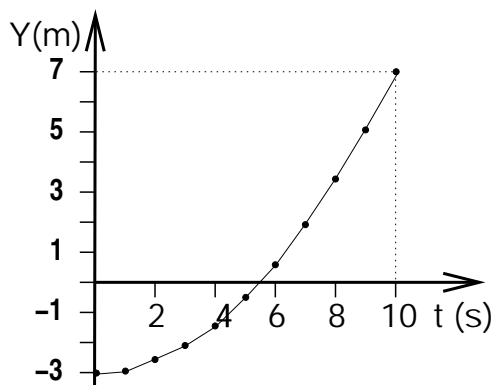
$$v_y(t) = 0.2 \text{ m/s} \cdot t.$$

cioè ad una retta

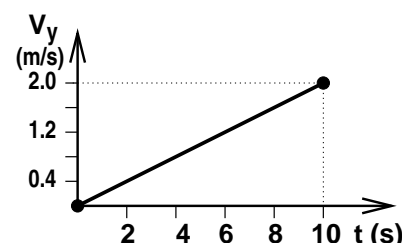
Per fare il grafico di $y(t) = 0.1 m/s^2 \cdot t^2$ devo disegnare una parabola, mentre per disegnare il grafico di $v_y(t) = 0.2 m/s^2 \cdot t^2$ devo disegnare una retta per cui sono sufficienti due punti.

Per disegnare una parabola (o comunque una funzione di cui non si sappia bene l'andamento) è necessario calcolare il valore della funzione in piu' punti, eventualmente "infittendoli" se si vede che la linea spezzata che congiunge i punti assomiglia poco ad una curva continua

t(s)	y(m)
0	-3.0
1	-2.9
2	-2.6
3	-2.1
4	-1.4
5	-0.5
6	0.6
7	1.9
8	3.4
9	5.1
10	7.0



t(s)	$v_y(m/s)$
0	0
10	2



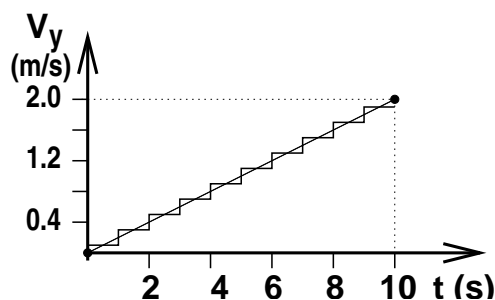
– Soluzione numerica per calcolare i valori di $v_y(t)$

Dalla tabella di valori di $y(t)$ posso calcolare numericamente il valore medio di $v_y(t)$ in ciascun intervallo di tempo come

$$v_y^{medio}(t_1 < t < t_2) = \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1}$$

e ottenere una tabella delle velocità medie che posso riportare nel grafico come una linea spezzata che come si vede consente di riconoscere bene l'andamento lineare della velocità anche senza conoscerne a priori la forma algebrica.

t(s)	$v_y^{medio}(m/s)$
$0 < t < 1$	0.1
$1 < t < 2$	0.3
$2 < t < 3$	0.5
$3 < t < 4$	0.7
$4 < t < 5$	0.9
$5 < t < 6$	1.1
$6 < t < 7$	1.3
$7 < t < 8$	1.5



• Disegnare il grafico per $v(t)$ Per fare il grafico del modulo della velocità devo

– sapere che il modulo di un vettore è definito come

$$|\vec{w}| \equiv \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$$

e che quindi in questo caso devo fare il grafico della funzione

$$|\vec{v}(t)| \equiv \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2}$$

– conoscerne il valore di $v(t)$ in un numero sufficiente di punti, calcolando il valore

* dall'espressione algebrica di $v_x(t)$ e $v_y(t)$

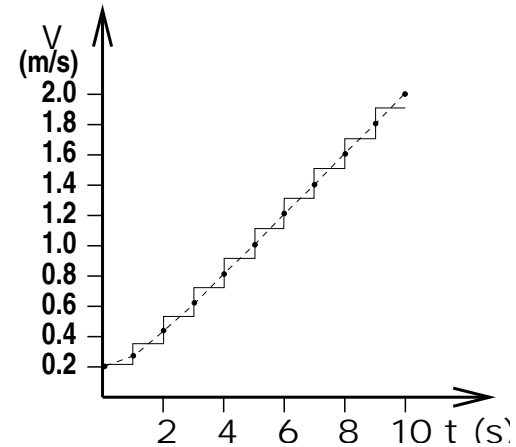
$$|\vec{v}(t)| \equiv \sqrt{(0.2 m/s)^2 + (0.2 m/s)^2 \cdot t^2}$$

* numericamente in ciascun intervallo di tempo usando la tabella di v_y^{medio}

le tabelle ed i grafici che si ottengono nei due casi sono

t(s)	$v(m/s)$
0	0.20
1	0.28
2	0.45
3	0.63
4	0.82
5	1.02
6	1.22
7	1.41
8	1.61
9	1.81
10	2.01

t(s)	$v^{medio}(m/s)$
$0 < t < 1$	0.22
$1 < t < 2$	0.36
$2 < t < 3$	0.54
$3 < t < 4$	0.73
$4 < t < 5$	0.92
$5 < t < 6$	1.12
$6 < t < 7$	1.32
$7 < t < 8$	1.51
$8 < t < 9$	1.71
$9 < t < 10$	1.91



Come si può notare la spezzata consente di apprezzare l'andamento della funzione, anche se per piccoli valori di t non si apprezza molto bene la deviazione dall'andamento lineare.

- 6) Disegnare il grafico della velocità in funzione del tempo ($v(t)$) per un oggetto che si muove lungo l'asse x con velocità iniziale $v_o = 16 \text{ m/s}$, sapendo che ogni secondo la sua velocità viene ridotta del 50%.
 Disegnare il grafico approssimato dell'accelerazione in funzione del tempo
 Disegnare il grafico approssimato dello spazio percorso in funzione del tempo

Soluzione:

- **Disegnare il grafico $v(t)$**

Per disegnare un grafico devo costruire una tabella. In questo caso devo costruire la tabella della velocità per diversi valori del tempo t .

- **Quanto vale la velocità all'istante t_i ?**

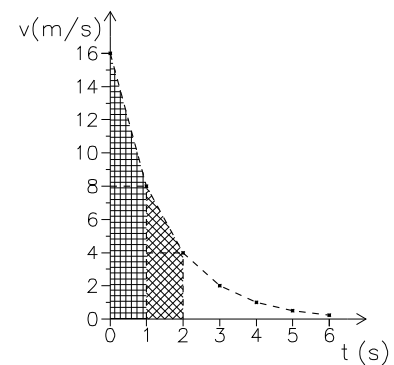
Se ad ogni secondo la velocità diminuisce del 50%, vuol dire che

$$V(t = t_i + 1 \text{ s}) = 0.5V(t_i)$$

Se quindi al tempo $t = 0$ la velocità vale 16 m/s a $t = 0 + 1 \text{ s}$ vale 8 m/s ; se al tempo $t = 1 \text{ s}$ vale 8 m/s al tempo $t = 1 \text{ s} + 1 \text{ s}$ vale $0.5V(t = 1 \text{ s}) = 4 \text{ m/s}$ e così via.

Costruisco la tabella e riporto i valori nel grafico:

t [s]	V(t) [m/s]
0	16
1	8
2	4
3	2
4	1
5	0.5
6	0.25



- **Costruire il grafico APPROSSIMATO dell'accelerazione**

Per ottenere un valore approssimato dell'accelerazione posso per esempio calcolare l'accelerazione media in ogni intervallo di tempo.

- **Quanto vale l'accelerazione media in ciascun intervallo di tempo?**

In ciascun intervallo di tempo

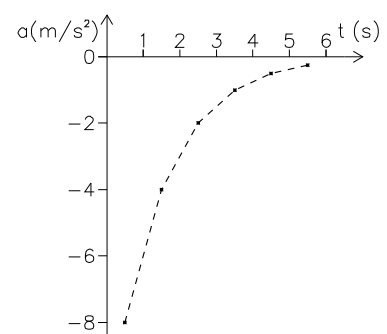
$$a_m = \frac{v_{fin} - v_{in}}{\Delta t}$$

Quindi posso calcolare l'accelerazione media per ciascuno degli intervalli di tempo semplicemente dalla tabella appena costruita come

$$a(t_o + \frac{1}{2}\Delta t) = \frac{v(t_o + \Delta t) - v(t_o)}{\Delta t}$$

A questo punto costruisco la tabella e riporto i valori nel secondo grafico

t [s]	a(t) [m/s^2]
0.5	-8
1.5	-4
2.5	-2
3.5	-1
4.5	-0.5
5.5	-0.25



• **Costruire il grafico (approssimato) dello spazio percorso**

Questo è un moto in cui ne' la velocità ne' l'accelerazione rimangono costanti (sono gli unici "moti semplici" studiati in questo corso)

Per calcolare lo spazio percorso quindi bisogna ricorrere a delle approssimazioni:

- posso considerare la velocità costante in piccoli intervalli di tempo e sommare gli spazi percorsi in ciascun intervallino
- posso approssimare il grafico V(t) con una linea spezzata (equivalente a considerare l'accelerazione costante in ciascun intervallino) e poi calcolare lo spazio percorso come integrale grafico (l'area sottesa al grafico della velocità)

Tutti e due i metodi forniscono una approssimazione; il secondo metodo fornisce una approssimazione migliore.

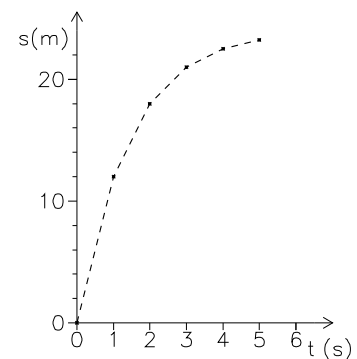
- **Quanto vale lo spazio percorso in ciascun intervallo di tempo?**

Lo spazio percorso in ciascun intervallo di tempo (Δs) sarà dato dall'area del trapezio corrispondente (come evidenziato dalle aree tratteggiate del grafico per $v(t)$):

$$S(t_o + 1 s) - S(t_o) = \frac{1}{2} \Delta V \Delta t + V(t = t_o + 1 s) \Delta t$$

Costruisco così un'altra tabella e ottengo l'ultimo grafico:

t [s]	Δs [m]	s [m]
0	0	0
1	12	12
2	6	18
3	3	21
4	1.5	22.5
5	0.75	23.25



Nota matematica

Dal punto di vista matematico la funzione che in ogni punto diminuisce (o aumenta) proporzionalmente al valore della funzione stessa è la funzione esponenziale:

$$\frac{df}{dx} = -K f$$

Questa è una *equazione differenziale* e la sua soluzione è data da:

$$f(t) = f(t = 0)e^{-Kt} + cost$$

Equazioni simili si trovano spesso in fisica (decadimento delle sostanze radioattive, oscillazioni smorzate) e anche in molti fenomeni biologici (ad esempio assorbimento o smaltimento di nutrienti, farmaci, scorie)

Il problema poteva essere riformulato matematicamente come:

- trovare le funzioni $v(t)$ e $a(t)$ che soddisfano l'equazione

$$\frac{dv(t)}{dt} = -K v(t)$$

o anche

$$a(t) = -K v(t)$$

sapendo che $v(0) = 16 m/s$ e $v(1) = 8 m/s$

- trovare la funzione

$$s(T) = \int_0^T v(t) dt$$

Dal punto di vista matematico la prima delle due equazioni ha soluzione generale:

$$v(t) = v_0 e^{-Kt}$$

Imponendo i valori “noti” si ottengono due relazioni che permettono di ricavare K e v_0 :

$$\begin{aligned} 16 \text{ m/s} &= v_0 e^0 \\ 8 \text{ m/s} &= v_0 e^{-K \cdot 1} \end{aligned}$$

da cui $v_0 = 16 \text{ m/s}$ e $K = \ln 2 = 0.693$
 Matematicamente quindi si otterrebbe:

$$\begin{aligned} V(t) &= 16e^{-t \ln 2} \quad [m/s] \\ a(t) &= -16 \ln 2 e^{-t \ln 2} \quad [m/s^2] \\ s(t) &= \frac{16}{\ln 2} (1 - e^{-t \ln 2}) \end{aligned}$$

Confrontando i risultati esatti con quelli approssimati:

t [s]	V [m/s] approx	V [m/s] esatta
0	16	16
1	8	8
2	4	4
3	2	2
4	1	1
5	0.5	0.5
6	0.25	0.25

t [s]	a [m/s ²] approx	a [m/s ²] esatta
0.5	-8	-7.84
1.5	-4	-3.92
2.5	-2	-1.96
3.5	-1	-0.98
4.5	-0.5	-0.49
5.5	-0.25	-0.25

t [s]	s [m] approx	s [m] esatto
0	0	0
1	12	11.54
2	18	17.31
3	21	20.2
4	22.5	21.64
5	23.25	22.36

si può notare come l'approssimazione fatta sovrastimi l'accelerazione di circa il 2%, e lo spazio percorso di circa il 5%.

La rappresentazione grafica delle funzioni, unitamente al calcolo grafico (ovviamente approssimato) di derivate ed integrali ha permesso di ottenere una soluzione ragionevolmente “vicina” a quella vera anche per problemi matematicamente molto difficili

- 7) Un corpo di massa 2 kg si muove in un piano orizzontale partendo dal punto di coordinate $P_o = (3, -2)\text{ m}$ con velocità iniziale $V_o = (-2, 5)\text{ m/s}$ sotto l'azione di una forza di componenti $F = (5, 2)\text{ N}$
- Di che tipo di moto si tratta?
 - Quanto valgono le componenti x e y dell'accelerazione?
 - Si dica come varia la componente x della velocità nel tempo e se ne costruisca il grafico.
 - Scrivere l'equazione oraria del moto lungo la coordinata x .

$$\text{Ris.: Uniformemente accelerato; } \vec{a} = (2.5, 1, 0)\text{ m/s}^2; v_x(t) = -2\text{ m/s} + 2.5\text{ m/s}^2 \cdot t;$$

$$x(t) = 3\text{ m} - 2\text{ m/s} \cdot t + 1.25\text{ m/s}^2 \cdot t^2$$

Soluzione:

- a) **Stabilire di che tipo di moto di tratta.**

Questo significa stabilire a che tipo di accelerazione è sottoposto (costante o meno). L'accelerazione è legata alla risultante delle forze.

Il corpo si muove sotto l'azione di una forza le cui componenti sono costanti, quindi sotto l'azione di una forza costante (sia in modulo che direzione)

La forza è data da

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

quindi se la forza è costante anche l'accelerazione è costante. Si tratta quindi di un moto uniformemente accelerato.

- b) **Calcolare le componenti dell'accelerazione.**

Dall'equazione appena scritta

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Questa è una equazione vettoriale, equivalente a

$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

$$a_y = \frac{F_y}{m}$$

$$a_z = \frac{F_z}{m}$$

Il testo afferma che il moto si svolge su un piano orizzontale, quindi si può trascurare la componente lungo l'asse z

Le componenti della forza vengono date nel testo: $F_x = 5\text{ N}$, $F_y = 2\text{ N}$, quindi

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{5\text{ N}}{2\text{ kg}} = 2.5\text{ m/s}^2$$

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{2\text{ N}}{2\text{ kg}} = 1\text{ m/s}^2$$

- c) **Scrivere l'equazione per $v_x(t)$ e farne il grafico**

- Scrivere l'equazione** Visto che si tratta di un moto uniformemente accelerato

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_o + \vec{a}(t - t_o)$$

che (essendo una equazione vettoriale) equivale a dire

$$v_x(t) = v_{ox} + a_x(t - t_o)$$

$$v_y(t) = v_{oy} + a_y(t - t_o)$$

Quindi l'espressione per $v_x(t)$ è data da

$$v_x(t) = v_{ox} + a_x(t - t_o)$$

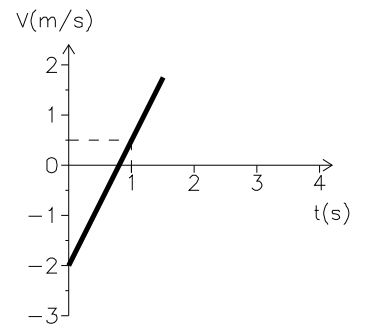
Numericamente

$$v_x(t) = v_{ox} + a_x(t - t_o) = -2\text{ m/s} + 2.5\text{ m/s}^2 \cdot t$$

- Fare il grafico

Per costruire un grafico devo prima costruire una tabella e poi riportare i punti su in grafico. In questo caso devo fare il grafico di una retta, quindi sono sufficienti due punti.

t [s]	V(t) [m/s]
0	-2
1	0.5



d) Scrivere l'equazione oraria del moto lungo la coordinata x , ovvero $x(t)$

Visto che si tratta di un moto uniformemente accelerato le equazioni del moto sono date da

$$\vec{X} = \vec{X}_o + \vec{v}_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_o)^2$$

che è una equazione vettoriale, quindi

$$\begin{aligned} x(t) &= x_o + v_{ox}(t - t_o) + \frac{1}{2}a_x(t - t_o)^2 \\ y(t) &= y_o + v_{oy}(t - t_o) + \frac{1}{2}a_y(t - t_o)^2 \\ z(t) &= z_o + v_{oz}(t - t_o) + \frac{1}{2}a_z(t - t_o)^2 \end{aligned}$$

L'equazione oraria del moto lungo la coordinata x è data da

$$x(t) = x_o + v_{ox}(t - t_o) + \frac{1}{2}a_x(t - t_o)^2$$

Numericamente

$$x(t) = x_o + v_{ox}(t - t_o) + \frac{1}{2}a_x(t - t_o)^2 = 3\text{ m} - 2\text{ m/s} \cdot t + \frac{1}{2}2.5\text{ m/s}^2 \cdot t^2$$

- 8) Un pallone viene lanciato da terra con un angolo di 45° e ricade a terra ad una distanza di 35 m dal punto in cui è stato lanciato.
- Quanto tempo impiega il pallone a tornare a terra?
 - Quanto vale (in modulo) la velocità iniziale?
 - Quale altezza massima raggiunge il pallone?

Soluzione:

- a) **Quanto tempo impiega il pallone a ricadere?**

Il tempo impiegato dal pallone a ricadere al suolo è l'intervallo di tempo fra l'istante in cui si trova nella posizione $(x = x_o, z = z_o)$ e quello in cui si trova nella posizione $(x = x_o + 35\text{ m}, z = z_o)$, ossia so che

$$\begin{aligned}x(t = t_{cad}) &= x_o + 35\text{ m} \\z(t = t_{cad}) &= z_o\end{aligned}$$

Le equazioni che danno $x(t)$ e $z(t)$ sono dette equazioni del moto.

- Quali sono le equazioni del moto per il pallone?**

In questo caso si tratta del moto di caduta di un grave, ossia di un moto uniformemente accelerato in cui l'accelerazione è quella di gravità.

In generale le equazioni di un moto uniformemente accelerato sono:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_o + \vec{v}_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_o)^2$$

equivalenti a

$$\begin{aligned}x(t) &= x_o + v_{xo}(t - t_o) + \frac{1}{2}a_x(t - t_o)^2 \\y(t) &= y_o + v_{yo}(t - t_o) + \frac{1}{2}a_y(t - t_o)^2 \\z(t) &= z_o + v_{zo}(t - t_o) + \frac{1}{2}a_z(t - t_o)^2\end{aligned}$$

nel caso della caduta dei gravi, l'accelerazione ha componenti $\vec{a} = (0, 0, -g)$ quindi le equazioni del moto sono date da

$$\begin{aligned}x(t) &= x_o + v_{xo}(t - t_o) \\y(t) &= y_o + v_{yo}(t - t_o) \\z(t) &= z_o + v_{zo}(t - t_o) - \frac{1}{2}g(t - t_o)^2\end{aligned}$$

Per utilizzare le equazioni del moto bisogna conoscere la velocità iniziale.

- **Quanto vale la velocità iniziale?** La direzione iniziale del moto indica la direzione della velocità iniziale.

Se la direzione della velocità forma un angolo θ nel piano $x - z$, questo vuol dire che le componenti della velocità sono

$$\vec{v} = (|v| \cos \theta, 0, |v| \sin \theta)$$

visto che la velocità iniziale ha un angolo $\theta = 45^\circ$, $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ se ne ricava che

$$\vec{v}_o = \left(\frac{V}{\sqrt{2}}, 0, \frac{V}{\sqrt{2}}\right)$$

Le equazioni del moto diventano quindi

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}Vt \\z(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}Vt - \frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

Imponendo che per $t = t_{cad}$

$$\begin{aligned}x(t = t_{cad}) &= x_o + 35 m \\z(t = t_{cad}) &= z_o\end{aligned}$$

si ottiene un sistema di due equazioni in due incognite (V e t_{cad})

$$\begin{aligned}x_{cad} &= \frac{1}{\sqrt{2}}Vt_{cad} \\0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}Vt_{cad} - \frac{1}{2}gt_{cad}^2\end{aligned}$$

Risolvendo (ad esempio per sostituzione) ottengo:

$$\begin{aligned}t_{cad} &= \sqrt{\frac{2x_{cad}}{g}} \\V &= \sqrt{x_{cad}g}\end{aligned}$$

Numericamente (dalla prima equazione):

$$t_{cad} = \sqrt{\frac{2x_{cad}}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 35 m}{9.8 m/s^2}} = 2.67 s$$

b) **Quanto vale (in modulo) la velocità iniziale?**

Sostituendo nella seconda delle equazioni precedenti:

$$V = \sqrt{x_{cad}g} = \sqrt{35 m * 9.8 m/s^2} = 18.5 m/s$$

c) **Quanto vale l'altezza massima raggiunta?**

L'altezza massima è definita come il valore massimo di $z(t)$ che il pallone raggiunge nel corso del suo moto:

$$z_{max} = \max(z(t))$$

Per trovare z_{max} posso:

- utilizzare la conservazione dell'energia: sul pallone agisce la forza peso (che è una forza conservativa)

In questo caso quindi quando il pallone sale aumenta la sua energia potenziale gravitazionale a spese dell'energia cinetica

$$\Delta E_{cin} + \Delta E_{pot} = 0$$

- trovare analiticamente il valore t per cui la funzione $z(t)$ ha un massimo. in entrambi i casi devo trovare il valore t_{max} tale che

$$z_{max} = z(t = t_{max})$$

e calcolare il valore di z in quell'istante.

- osservare che il momento in cui il pallone raggiunge il punto più alto della sua traiettoria è quello in cui inverte il suo moto lungo la direzione z .

Bisogna ora valutare se e come questi criteri possano essere utilizzati in questo caso particolare

- la conservazione dell'energia implica che

$$\Delta E_{cin} = -\Delta E_{pot}$$

ossia

$$E_{cin}^{alto} - E_{cin}^{in} = -(E_{pot}^{alto} - E_{pot}^{in})$$

L'energia cinetica è definita come

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

L'energia potenziale gravitazionale (rispetto ad un livello h_o) è data da

$$E_{pot} = mg(h - h_o)$$

quindi la conservazione dell'energia può essere riscritta come:

$$\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_z^2) - \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_z^2)_{in} = mg(z_{in} - z_o) - mg(z - z_o)$$

ossia:

$$\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_z^2) + mg(z - z_{in}) = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_z^2)_{in}$$

dove $z - z_{in}$ è l'altezza rispetto al terreno del pallone.

Il valore di massimo di z si avrà in corrispondenza del valore minimo dell'energia cinetica.

Per calcolare z_{max} bisogna determinare $(v_x^2 + v_z^2)_{min}$.

- **Quanto vale $(v_x^2 + v_z^2)_{min}$?**

La forza peso agisce solo lungo la direzione verticale. Non essendoci forze che agiscano lungo la direzione x necessariamente v_x (e quindi v_x^2) rimane costante.

La velocità lungo la direzione z è data da

$$v_z(t) = v_{zin} - gt$$

Il minimo valore possibile per v_z^2 è ovviamente 0.

Quindi

$$(v_x^2 + v_z^2)_{min} = v_{xin}^2$$

Sostituendo nell'espressione per la conservazione dell'energia ($z_o = 0$)

$$mgz_{max} = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_z^2)_{in} - \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_z^2)_{min} = \frac{1}{2}m(v_{zin}^2)$$

Avendo già calcolato in precedenza che

$$v_{zin} = \frac{1}{\sqrt{2}}V = \sqrt{\frac{x_{cad}g}{2}}$$

si ottiene

$$z_{max} = \frac{1}{2} \frac{v_{zin}^2}{g} = \frac{1}{4}x_{cad}$$

- Per trovare analiticamente il valore massimo di $z(t)$ posso imporre che la derivata prima si annulli:

$$\frac{d}{dt}z(t) = 0$$

La derivata della componente $z(t)$ è per definizione la componente z della velocità:

$$\frac{d}{dt}z(t) = v_z(t)$$

Il valore massimo di z si ha cioè quando

$$v_z(t_{max}) = 0$$

- Il momento in cui il pallone inverte il suo moto lungo l'asse verticale è quello in cui la componente z della velocità da positiva diventa negativa. In altre parole quando $z = z_{max}$ la componente v_z della velocità è zero:

$$v_z(t_{max}) = 0$$

In altre parole devo trovare il valore di t che soddisfa la condizione:

$$v_z(t = t_{max}) = 0$$

- **In quale istante la componente z della velocità si annulla?**

Per un moto uniformemente accelerato la componente z della velocità è data da:

$$v_z(t) = v_{zo} + a(t - t_o)$$

in questo caso

$$v_z(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}V - gt$$

La condizione precedentemente scritta quindi implica che

$$v_z(t = t_{max}) = 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}V - gt_{max}$$

da cui

$$t_{max} = \frac{V}{\sqrt{2}g} = \sqrt{\frac{x_{cad}}{2g}} = \frac{1}{2}t_{cad}$$

Il tempo che ci mette ad arrivare in alto è la metà di quello che ci mette a salire e poi ricadere, come ci si doveva aspettare. (Sarebbe stato corretto affermare subito che $t_{max} = \frac{1}{2}t_{cad}$)

L'altezza massima raggiunta vale:

$$z_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}}V \frac{t_{cad}}{2} - \frac{1}{2}g \frac{t_{cad}^2}{4} = \frac{x_{cad}}{2} - \frac{x_{cad}}{4} = \frac{1}{4}x_{cad}$$

Numericamente

$$z_{max} = \frac{1}{4}x_{cad} = 8.75 \text{ m}$$

- 9) Un blocco di massa 0.1 kg , inizialmente fermo, posto su una guida lunga 5 m ed inclinata di 30° rispetto al piano orizzontale, viene trascinato verso l'alto da una forza di intensità pari a 2 N , diretta parallelamente alla guida. Se si trascurano gli attriti
- Quanto vale l'accelerazione del corpo?
 - Quanto tempo impiega il blocco per arrivare in cima alla guida?
 - Quanto vale la sua velocità finale?
 - Se invece la guida non è priva di attriti, ma esercita una forza di attrito costante e pari al 20% del peso del corpo, quanto varranno l'accelerazione, il tempo impiegato a risalire la guida e la velocità finale?

$$\text{Ris.: } a = 15.1\text{ m/s}^2; t = 0.82\text{ s } v_{fin} = 12.3\text{ m/s } a' = 13.4\text{ m/s}^2; t' = 0.87\text{ s}; v'_{fin} = 11.5\text{ m/s}$$

Soluzione:

- a) **Calcolare l'accelerazione del corpo**

La legge di Newton mi dice che l'accelerazione è legata alla risultante delle forze da

$$\vec{F}_R = m\vec{a}$$

Quindi per calcolare l'accelerazione devo calcolare la risultante delle forze sul corpo.

- **Calcolare la risultante delle forze**

La risultante delle forze è definita come la somma vettoriale delle forze agenti sul corpo

$$\vec{F}_R = \sum \vec{f}_i$$

Per calcolarla devo quindi identificare le forze agenti sul corpo (in modulo direzione e verso)

Il testo del problema mi dice che c'è una forza (F_T) che trascina il corpo lungo la guida.

Sicuramente agisce anche la forza di gravità (F_P), che è diretta verso il basso.

Ci sarà poi una reazione vincolare data dalla guida (F_V), che "impedisce" al corpo di "cadere dentro" la guida.

La reazione vincolare è sicuramente perpendicolare alla guida e deve essere tale da annullare la risultante delle forze nella direzione perpendicolare alla guida. Disegnando il grafico delle forze applicate al corpo, osservo che il sistema di coordinate più comodo per esprimere le componenti delle forze è quello con l'asse x parallelo alla guida e l'asse y perpendicolare ad essa.

Scrivendo le componenti delle forze in questo sistema di coordinate, posso calcolare la risultante

$$F_{Rx} = F_{Px} + F_{Tx} + F_{Vx}$$

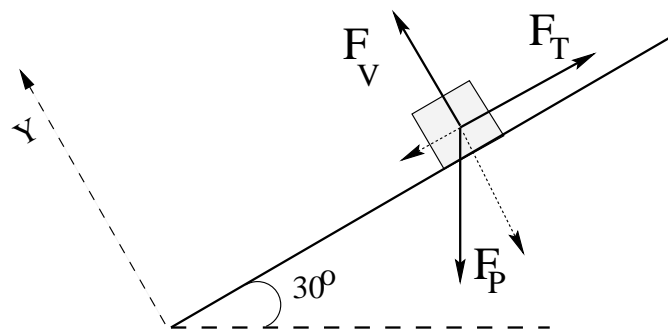
$$F_{Ry} = F_{Py} + F_{Ty} + F_{Vy}$$

Cioè

$$F_{Rx} = -mg \sin \theta + F_T$$

$$0 = -mg \cos \theta + F_V$$

(La reazione vincolare deve bilanciare esattamente la componente della forza peso perpendicolare alla guida)



A questo punto ho ottenuto la soluzione

$$a = \frac{F_T - mg \sin \theta}{m}$$

Numericamente

$$a = \frac{2 \text{ N} - 0.1 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot \sin 30}{0.1 \text{ kg}} = 15.1 \text{ m/s}^2$$

b) **Calcolare il tempo che impiega ad arrivare in cima**

Mi chiede quindi di calcolare il valore di t_{sal} per cui

$$x(t_{sal}) = L$$

dove L è la lunghezza della guida.

Avendo formulato la domanda in questo modo, è abbastanza chiaro che per calcolare t_{sal} posso ricorrere alle equazioni del moto, che in questo caso è uniformemente accelerato:

$$x(t) = x_o + v_o(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

usando i dati del problema ($x_o = 0$ e $v_o = 0$),

$$L = \frac{1}{2}at_{sal}^2$$

cioè

$$t_{sal} = \sqrt{\frac{2L}{a}}$$

Numericamente:

$$t_{sal} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \text{ m}}{15 \text{ m/s}^2}} = 0.82 \text{ s}$$

c) **Calcolare la velocità finale**

La velocità finale è la velocità che raggiunge quando arriva in cima, ossia la velocità che il corpo ha quando $t = t_{sal}$.

Per calcolare la velocità finale posso usare l'equazione (valida nel caso di un moto uniformemente accelerato)

$$v(t) = v_o + a(t - t_o)$$

calcolandola per $t = t_{sal}$, cioè

$$v_{fin} = at_{sal} = \sqrt{2aL}$$

Numericamente

$$v_{fin} = \sqrt{2 \cdot 15.1 \text{ m/s}^2 \cdot 1 \text{ m}} = 12.3 \text{ m/s}$$

d) **Considerare la presenza di attrito**

L'ultima domanda mi chiede di rifare tutti questi conti nell'ipotesi che la guida eserciti una forza di attrito costante.

Questo significa che devo tener conto di una ulteriore forza nel calcolo della risultante (usata per calcolare l'accelerazione).

$$\begin{aligned} F'_{Rx} &= F_{Px} + F_{Tx} + F_{Vx} + F_{Ax} \\ F'_{Ry} &= F_{Py} + F_{Ty} + F_{Vy} + F_{Ay} \end{aligned}$$

Per inserire la forza di attrito nel calcolo della risultante devo conoscerne il modulo, la direzione ed il verso.

- **Quali sono le componenti della forza di attrito?**

Una forza di attrito è una forza che si oppone al moto e che è sempre parallela alla direzione del moto, ma ha verso opposto. Questo mi dice subito che se il corpo si muove parallelamente alla guida verso l'alto, la forza di attrito sarà diretta sempre parallela alla guida ma verso il basso.

Nel sistema di coordinate che abbiamo utilizzato $F_{Ax} = -|F_A|$, $F_{Ay} = 0$

Mi rimane da calcolarne il modulo. Il testo del problema mi dice che la forza di attrito (F_A) è pari al 20% del peso del corpo.

Questa affermazione si traduce in una equazione:

$$|F_A| = \frac{20}{100}|F_P|$$

cioè

$$|F_A| = 0.2mg \quad \vec{F}_A = (-0.2mg; 0)$$

La risultante delle forze F'_R sarà data da

$$\begin{aligned} F'_{Rx} &= -mg \sin \theta + F_T - 0.2mg = F_T - mg(\sin \theta + 0.2) \\ 0 &= -mg \cos \theta + F_{Vy} \end{aligned}$$

Da cui si ricava immediatamente

$$a' = \frac{F'_R}{m} = \frac{F_T - mg(\sin \theta + 0.2)}{m}$$

Numericamente

$$a' = \frac{2 \text{ N} - 0.1 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2(0.5 + 0.2)}{0.1 \text{ kg}} = 13.4 \text{ m/s}^2$$

Il nuovo valore del tempo di salita e della velocità finale si trovano semplicemente sostituendo a con a' nelle rispettive formule. Numericamente

$$t'_{sal} = 0.87 \text{ s} \quad v'_{fin} = 11.5 \text{ m/s}$$

- 10) Un uomo di massa 70 kg salta da un'altezza di 1 m con velocità iniziale nulla. Se cade senza piegare le gambe si ferma in 0.1 s , mentre piegando le gambe si arresta in 0.5 s . Calcolare l'accelerazione media e la forza media nei due casi.

Soluzione:

- a) **Calcolare l'accelerazione media e la forza media esercitata durante l'impatto col terreno**

L'accelerazione media che mi si chiede di calcolare è definita come

$$a_m = \frac{v_f - v_i}{\Delta t}$$

Nel caso specifico (la velocità finale è zero), la velocità "iniziale" è quella che ha prima di toccare terra

$$a_m = -\frac{v_{terra}}{\Delta t}$$

Per rispondere devo calcolare la velocità con cui arriva a terra (e non quella dal momento in cui salta da fermo al momento in cui arriva a terra e si ferma, perché in quel caso l'accelerazione media è zero!)

- **Calcolare la velocità con cui arriva a terra**

La velocità con cui arriva a terra è quella acquistata dopo una caduta dall'altezza di 1 m . Si tratta di un moto di caduta libera di un grave, quindi posso utilizzare le equazioni del moto uniformemente accelerato con accelerazione pari a g

$$v(t) = v_o + a(t - t_o)$$

Nel caso specifico (considero l'asse delle coordinate verso il basso)

$$v(t) = gt$$

La velocità con cui arriva a terra è quella raggiunta all'istante t_{cad} (tempo impiegato a cadere)

$$v_{terra} = gt_{cad}$$

- **Quanto vale il tempo di caduta?**

Per calcolare il tempo di caduta l'unico dato che ho è che

$$z_f = z(t_{cad}) = z_o + h = z_o + 1\text{ m}$$

Posso scrivere l'equazione del moto $z(t)$

$$z(t) = z_o + v_{oz} + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

Nel nostro caso, con i dati del problema (e con la nostra scelta del sistema di coordinate)

$$z(t) = z_o + \frac{1}{2}gt^2$$

Quindi si ricava

$$t_{cad} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Sostituendo nell'equazione della velocità ottengo

$$v_{terra} = \sqrt{2gh}$$

Avrei potuto ottenere più rapidamente lo stesso risultato osservando che durante il salto l'energia si conserva

$$E_{pot\ g}^{in} + E_{cin}^{in} = E_{pot\ g}^{fin} + E_{cin}^{fin}$$

da cui

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{terra}^2$$

L'accelerazione media nell'impatto col terreno vale quindi:

$$a_m = -\frac{\sqrt{2gh}}{\Delta t} = -\frac{\sqrt{2 \cdot 1\ m \cdot 9.8\ m/s^2}}{0.1\ s} = -44.3\ m/s^2$$

(il segno meno indica che l'accelerazione è diretta verso l'alto)

Mi si chiede inoltre di calcolare la forza media.

La forza è legata all'accelerazione da

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Quindi

$$F_m = ma_m$$

Numericamente

$$F_m = 70\ kg \cdot (-44.3\ m/s^2) = -3100\ N$$

- b) **Calcolare le stesse grandezze nel caso in cui, piegando le gambe durante l'impatto col terreno, il tempo di impatto si allunghi fino a 0.5 s.**

Dato che la velocità con cui si arriva a terra è la stessa, si tratta di calcolare a_m e F_m usando un diverso valore per Δt Numericamente ottengo:

$$a'_m = -8.85\ m/s^2 \quad F'_m = -620\ N$$

Allungando il tempo di impatto di un fattore 5, sia l'accelerazione media che la forza media esercitate durante l'impatto si sono ridotte proporzionalmente

- 11) Calcolare la velocità periferica di un corpo di massa $m = 0.5 \text{ kg}$ che si muove con velocità angolare $\omega = 0.6 \text{ rad/s}$ lungo una circonferenza di raggio $r = 1 \text{ m}$. Quanto valgono l'accelerazione e la forza centripeta?

Soluzione:

- **Quanto vale la velocità periferica?**

La velocità periferica in un moto circolare uniforme è data da

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$$

Numericamente:

$$v = \omega r = 0.6 \text{ rad/s} \cdot 1 \text{ m} = 0.6 \text{ m/s}$$

- **Quanto vale l'accelerazione centripeta?**

L'accelerazione in un moto circolare uniforme è sempre diretta verso il centro e costante in modulo:

$$\vec{a}_c = -\omega^2 \vec{r}$$

Numericamente quindi:

$$|a_c| = \omega^2 r = (0.6 \text{ rad/s})^2 \cdot 1 \text{ m} = 0.36 \text{ m/s}^2$$

- **Quanto vale la forza centripeta?**

La risultante delle forze che agiscono sul corpo è data da:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Nel caso di un moto circolare uniforme quindi

$$\vec{F} = m\vec{a}_c$$

è costante in modulo e sempre diretta verso il centro (centripeta) In questo caso quindi

$$|F| = m|a_c| = 0.5 \text{ kg} \cdot 0.36 \text{ m/s}^2 = 0.18 \text{ N}$$

12) La luna ruota con un periodo di 28 giorni attorno alla terra su una traiettoria approssimativamente circolare.

- a) Quanto vale la velocità angolare della luna?
- b) Quanto vale il raggio medio dell'orbita lunare?
- c) Quanto vale la velocità della luna?

($M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $G = 6.7 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$)

Ris.: $\omega = 2.6 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$; $R_L = 3.9 \cdot 10^8 \text{ m}$; $v_L = 10^3 \text{ m/s}$

Soluzione:

a) **Quanto vale la velocità angolare della luna**

La velocità angolare è definita come

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Un moto circolare uniforme ha per definizione velocità angolare costante

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \text{cost} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

Quindi la velocità angolare della luna vale

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Numericamente

$$\omega = \frac{2\pi}{28 \text{ giorni}} = \frac{2\pi}{28 (24 \cdot 3600 \text{ s})} = 2.6 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$$

b) **Quanto vale il raggio medio dell'orbita lunare?**

In un moto circolare uniforme il raggio dell'orbita è legato all'accelerazione centripeta (conseguenza alla forza centripeta) dalla relazione:

$$\vec{a}_c = -\omega^2 \vec{r}$$

nonchè alla velocità periferica dalla relazione:

$$v = \omega r$$

Il problema non fornisce il valore di tali quantità per cui è necessario analizzare se è possibile o meno calcolarle

• **Quanto vale l'accelerazione centripeta?**

L'accelerazione centripeta è legata alla forza centripeta

$$F_c = M_L a_c$$

– **Quanto vale la forza centripeta?** La forza centripeta non può che essere data dalla forza di attrazione gravitazionale terra-luna.

La forza di attrazione gravitazionale terra-luna è data dalla legge di gravitazione universale

$$F = G \frac{M_T M_L}{R^2}$$

quindi l'accelerazione centripeta della luna vale:

$$a_c = G \frac{M_T}{R^2}$$

dall'espressione per l'accelerazione centripeta in termini di velocità angolare si ricava che

$$G \frac{M_T}{R^2} = \omega^2 R$$

da cui

$$R = \sqrt[3]{G \frac{M_T}{\omega^2}}$$

Numericamente

$$R = \sqrt[3]{G \frac{M_T}{\omega^2}} = \sqrt[3]{6.7 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{kg}^2 \frac{6 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(2.6 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s})^2}} = 3.9 \cdot 10^8 \text{ m}$$

c) **Quanto vale la velocità della luna**

La velocità in un moto circolare uniforme è data da:

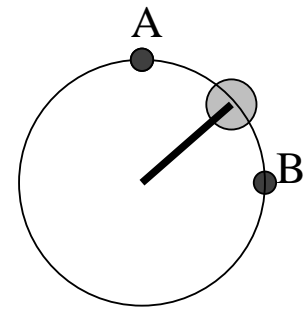
$$v = \omega r$$

Quindi

$$v = \omega R = 2.6 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s} \cdot 3.9 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 10^3 \text{ m/s}$$

13) Una massa $M = 100\text{ g}$ è collegata all'asse di un motore tramite un'asta rigida di lunghezza $L = 60\text{ cm}$ e ruota su un piano verticale con velocità di 2 m/s .

- a) Quanto valgono il periodo del moto e l'accelerazione centripeta?
- b) Cosa si può dire della risultante delle forze lungo la traiettoria?
- c) Spiegare a quali forze (indicandone modulo direzione e verso) è soggetta la massa M durante la rotazione, e calcolare il valore della risultante e della forza esercitata dall'asta nei punti A e B della traiettoria.



Ris.: $T = 1.88\text{ s}$; $a_c = 6.67\text{ m/s}^2$; $\vec{F}_R = -m\omega^2\vec{r}$; $\vec{F}_{asta}(A) = (0, 0, 0.31)\text{ N}$;
 $\vec{F}_{asta}(B) = (0, -0.67, 0.98)\text{ N}$

Soluzione:

a) **Quanto valgono il periodo del moto e l'accelerazione centripeta?**

• **Quanto vale il periodo del moto?**

Il periodo del moto (si tratta di un moto circolare uniforme) è definito come il tempo impiegato per compiere un giro. Dato che il modulo della velocità in un moto circolare uniforme è costante, questo significa che

$$vT = 2\pi r$$

quindi

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Numericamente:

$$T = \frac{2\pi 60\text{ cm}}{2\text{ m/s}} = \frac{2\pi 60(0.01\text{ m})}{2\text{ m/s}} = 1.88\text{ s}$$

• **Quanto vale l'accelerazione centripeta?**

– L'accelerazione è definita come

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

– L'accelerazione centripeta in un moto circolare uniforme è data da

$$\vec{a}_c = -\omega^2\vec{r}$$

ed è sempre parallela al raggio, diretta verso il centro. Per calcolarla devo conoscere ω .

* La velocità angolare è definita come

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

. In un moto circolare uniforme la velocità angolare è costante. In un periodo $\Delta\theta = 2\pi$ e $\Delta t = T$, quindi ricavo subito

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r}$$

Quindi

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Numericamente:

$$a_c = \frac{(2\text{ m/s})^2}{60\text{ cm}} = \frac{(2\text{ m/s})^2}{60(0.01\text{ m})} = 6.67\text{ m/s}^2$$

b) Quanto vale la risultante delle forze?

- La risultante delle forze è definita come la somma vettoriale di tutte le forze agenti sul corpo

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i$$

- La risultante delle forze in un moto qualsiasi è legata all'accelerazione dalla legge di Newton, che è

$$\vec{F}_R = m\vec{a}$$

quindi nel caso specifico del moto circolare uniforme:

$$\vec{F}_R = m\vec{a}_c = -m\omega^2\vec{r}$$

la risultante delle forze ha modulo costante pari a $m\omega^2r$, mentre la sua direzione è parallela al raggio della circonferenza e diretta verso il centro.

Numericamente

$$|F_R| = ma_c = 100 \text{ g} \cdot 6.67 \text{ m/s}^2 = 0.1 \text{ kg} \cdot 6.67 \text{ m/s}^2 = 0.67 \text{ N}$$

- c) **A quali forze è soggetta la massa M durante la rotazione ?** Le forze che agiscono sono la forza peso (\vec{F}_P) e la reazione vincolare dell'asta (\vec{F}_V)
- d) **Modulo direzione e verso delle forze ?** Il fatto che l'oggetto si muova di moto circolare uniforme mi permette di conoscere in ogni posizione la risultante delle due forze:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_P + \vec{F}_V = -m\omega^2\vec{r}$$

- **Modulo direzione e verso della forza peso?** La forza peso è sempre diretta verso il basso e ha modulo pari a Mg
- **Modulo direzione e verso della reazione vincolare?** La reazione vincolare non è nota direttamente.

E' noto solo il valore della sua risultante con la forza peso:

$$\vec{F}_P + \vec{F}_V = -m\omega^2\vec{r}$$

quindi

$$\vec{F}_V = -m\omega^2\vec{r} - \vec{F}_P$$

Quanto vale la reazione vincolare in A e in B ? Punto per punto

$$\vec{F}_V = -m\omega^2\vec{r} - \vec{F}_P$$

Dato che è una equazione vettoriale mi rappresenta in realtà una equazione per ciascuna componente:

$$\begin{aligned} F_{Vx} &= -F_{Px} - m\omega^2r_x \\ F_{Vy} &= -F_{Py} - m\omega^2r_y \\ F_{Vz} &= -F_{Pz} - m\omega^2r_z \end{aligned}$$

per calcolare la reazione vincolare devo quindi scrivere le componenti di \vec{F}_P e \vec{r} in A e B .

- **Quali sono le componenti di \vec{F}_P e \vec{r} ?**

Per scrivere le componenti di un vettore devo fissare un sistema di riferimento.

In questo caso per esempio x perpendicolare al foglio, y orizzontale e z verticale.

In questo sistema di riferimento $\vec{F}_P = (0, 0, -mg)$ mentre $\vec{r} = (0, r \cos \theta, r \sin \theta)$ dove θ è l'angolo formato dal raggio con l'asse orizzontale.

Nel punto A $\vec{r}(A) = (0, 0, r)$, nel punto B $\vec{r}(B) = (0, r, 0)$. Quindi

$$\begin{aligned}F_{Vx}(A) &= -F_{Px} - m\omega^2 r_x = 0 \\F_{Vy}(A) &= -F_{Py} - m\omega^2 r_y = 0 \\F_{Vz}(A) &= -F_{Pz} - m\omega^2 r_z = mg - m\omega^2 r\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}F_{Vx}(B) &= -F_{Px} - m\omega^2 r_x = 0 \\F_{Vy}(B) &= -F_{Py} - m\omega^2 r_y = -m\omega^2 r \\F_{Vz}(B) &= -F_{Pz} - m\omega^2 r_z = mg\end{aligned}$$

Numericamente

$$\begin{aligned}\vec{F}_V(A) &= (0, 0, mg - m\omega^2 r) = (0, 0, 0.31) N & |F_V(A)| &= 0.31 N \\ \vec{F}_V(B) &= (0, -m\omega^2 r, mg) = (0, -0.67, 0.98) N & |F_V(B)| &= 1.41 N\end{aligned}$$

- 14) Un corpo di massa $M = 50\text{ g}$ ruota su un piano orizzontale, vincolato tramite una molla, lunga 80 cm , ad un centro di rotazione C . Sapendo che la frequenza di rotazione è pari a 0.5 s^{-1} , si calcolino:
- Velocità angolare, velocità periferica e accelerazione centripeta
 - Il valore della forza esercitata dalla molla su M
 - Se la lunghezza a riposo della molla vale 60 cm , quanto vale la sua costante elastica?
 - Sapreste indicare il nuovo valore che il raggio di rotazione assumerebbe se la frequenza di rotazione dimezzasse?

Ris.: a) $\omega = 3.14\text{ rad/s}$, $v = 2.5\text{ m/s}$, $a_c = 7.9\text{ m/s}^2$; b) $F = 0.4\text{ N}$; c) $k = 1.98\text{ N/m}$; d) $r = 64\text{ cm}$

Soluzione:

- a) **Calcolare la velocità angolare, velocità periferica e accelerazione centripeta**

- **velocità angolare** La velocità angolare è definita

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

ed è quindi collegata al periodo (e quindi alla frequenza definita come $f = T^{-1}$, dalla relazione

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Numericamente quindi

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3.14\text{ rad} \cdot 0.5\text{ s}^{-1} = 3.14\text{ rad/s}$$

- **velocità periferica** è definita come

$$V_p = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

ed è quindi collegata al periodo, frequenza e velocità angolare dalle relazioni

$$V_p = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R f = \omega R$$

Numericamente quindi

$$V_p = \omega R = 3.14\text{ rad/s} \cdot 0.8\text{ m} = 2.5\text{ m/s}$$

- **accelerazione centripeta** Per un oggetto che si muova di moto circolare uniforme, la risultante delle forze deve essere tale che

$$\vec{F}_R = -m\omega^2 \vec{R}$$

dunque l'accelerazione deve valere

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_R}{m} = -\omega^2 \vec{R}$$

ed essere sempre diretta verso il centro di rotazione Numericamente

$$|\vec{a}| = \omega^2 |\vec{R}| = (3.14\text{ rad/s})^2 (0.8\text{ m}) = 7.9\text{ m/s}^2$$

- b) **Calcolare la forza esercitata dalla molla** L'accelerazione consente di calcolare la risultante delle forze

$$\vec{F}_R = m\vec{a}$$

In questo caso l'unica forza agente nel piano orizzontale è quella della molla (nel piano verticale c'è ovviamente la forza peso, ma essa è bilanciata dalla reazione vincolare che mantiene la pallina sul piano orizzontale)

Quindi

$$\vec{F}_R = \text{somma forze} = \vec{F}_M$$

La forza esercitata dalla molla è costante in modulo ed è sempre diretta verso il centro di rotazione

Numericamente:

$$|\vec{F}_M| = |m\vec{a}| = 0.05 \text{ kg} \cdot 7.9 \text{ m/s}^2 = 0.4 \text{ N}$$

- c) **Calcolare la forza esercitata dalla molla** La forza elastica esercitata da una molla è data da

$$\vec{F}_M = -K(\vec{L} - \vec{L}_0)$$

Quindi in questo caso

$$\vec{F}_M = -K(\vec{R} - \vec{R}_0) = -m\omega^2\vec{R}$$

ossia

$$K = \frac{m\omega^2 R}{R - R_0}$$

Numericamente

$$K = \frac{m\omega^2 R}{R - R_0} = \frac{0.05 \text{ kg} \cdot (3.14 \text{ rad/s})^2 0.8 \text{ m}}{0.2 \text{ m}} = 1.97 \text{ N/m}$$

- d) **Calcolare il raggio di rotazione se la frequenza dimezza**

Ovviamente la costante elastica della molla rimane la stessa

$$\frac{m\omega^2 R}{R - R_0} = \frac{m\omega'^2 R'}{R' - R_0}$$

da cui si ottiene la relazione

$$R' = \frac{R_0}{1 - \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left(1 - \frac{R_0}{R}\right)}$$

Numericamente

$$R' = \frac{0.6 \text{ m}}{1 - (0.5)^2 \left(1 - \frac{0.6 \text{ m}}{0.8}\right)} = 0.64 \text{ m}$$

- 15) Un'automobile di massa 1200 kg , partendo da ferma, raggiunge la velocità di 100 km/h in 12 s .
- Quanto valgono l'accelerazione e lo spazio percorso (supponendo che il moto sia uniformemente accelerato)?
 - Quanto vale la variazione di energia cinetica? Quanto vale il lavoro compiuto sull'auto?
 - Quanto varrebbe la potenza media sviluppata dal motore (trascurando l'attrito)?

$$\text{Ris.: } a_m = 2.3\text{ m/s}^2, \quad s = 165\text{ m}; \quad \Delta E_{cin} = 460\text{ kJ} = L; \quad P = 38\text{ kW}$$

Soluzione:

- a) **Quanto vale l'accelerazione media?**

L'accelerazione media è definita come

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_{fin} - \vec{v}_{in}}{\Delta t}$$

Numericamente

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_{fin} - \vec{v}_{in}}{\Delta t} = \frac{100\text{ km/h} - 0\text{ km/h}}{12\text{ s}} = \frac{100 \frac{1000\text{ m}}{3600\text{ s}}}{12\text{ s}} = 2.3\text{ m/s}^2$$

Quanto vale lo spazio percorso?

Lo spazio percorso è definito come

$$S = x(t = 12\text{ s}) - x(t = 0)$$

La posizione di un corpo ad un certo istante è data dalle equazioni del moto.

- **Quali sono le equazioni del moto?** In questo caso il moto è da considerarsi uniformemente accelerato, quindi le equazioni del moto sono date da

$$x(t) = x_o + v_o(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

In questo caso la velocità iniziale era nulla quindi

$$S = x(t) - x_o = v_o(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2 = \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

Numericamente

$$S = \frac{1}{2}a_m(t - t_o)^2 = \frac{1}{2}2.3\text{ m/s}^2(12\text{ s})^2 = 165\text{ m}$$

- b) **Quanto vale la variazione di energia cinetica?**

La variazione di energia cinetica è definita come

$$\Delta E_{cin} = E_{cin}^{fin} - E_{cin}^{in}$$

L'energia cinetica di un corpo è definita come

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2$$

quindi

$$\Delta E_{cin} = E_{cin}^{fin} - E_{cin}^{in} = \frac{1}{2}mv_{fin}^2 - \frac{1}{2}mv_{in}^2$$

Numericamente

$$\Delta E_{cin} = \frac{1}{2}mv_{fin}^2 - \frac{1}{2}mv_{in}^2 = \frac{1}{2}1200\text{ kg} \cdot (100\text{ km/h})^2 = \frac{1}{2}1200\text{ kg} \cdot \left(100 \frac{1000\text{ m}}{3600\text{ s}}\right)^2 = 460\text{ kJ}$$

Quanto vale il lavoro compiuto sull'automobile?

- Il lavoro compiuto sull'automobile è definito come

$$L = \int_{x_{in}}^{x_{fin}} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

- Il teorema delle forze vive afferma che il lavoro è legato alla variazione di energia cinetica

$$L = \Delta E_{cin}$$

Entrambe sono applicabili al caso in questione.

Visto che in questo caso la variazione di energia cinetica è stata appena calcolata:

$$L = \Delta E_{cin} = 460 \text{ kJ}$$

- c) **Quanto vale la potenza media del motore (trascurando gli attriti?)**

La potenza è definita come

$$P = \frac{L_{mot}}{\Delta t}$$

Per calcolare la potenza sviluppata dal motore devo conoscere il lavoro compiuto dal motore. Nell'ipotesi di poter trascurare gli attriti, il lavoro compiuto dalle forze di attrito è nullo, quindi il lavoro compiuto sull'automobile è uguale a quello compiuto dal motore. Quindi la potenza media sarà data da

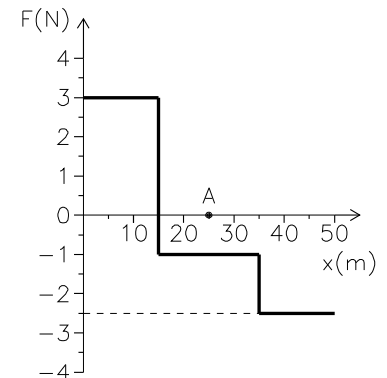
$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{460 \text{ kJ}}{12 \text{ s}} = 38 \text{ kW}$$

(ovviamente nella realtà sarà maggiore...!)

- 16) Il grafico in figura mostra l'andamento della forza in funzione della posizione per una forza conservativa parallela all'asse x .

Un oggetto di massa $M = 300\text{ g}$ viene posto con velocità iniziale nulla nel punto di coordinate $x = 0$

- Quanto lavoro compie la forza F quando l'oggetto si sposta dal punto $x = 0$ al punto $x = A$ indicato in figura?
- Quanto vale la velocità dell'oggetto in $x = A$?
- Quale dei due punti ha energia potenziale maggiore?
- Per quale valore di x la velocità dell'oggetto è massima?
- Costruire per punti il grafico dell'energia potenziale in funzione di x .



Ris.: $L = 35\text{ J}$; $v_A = 15\text{ m/s}$; $x_{v_{max}} = 15\text{ m}$

Soluzione:

- a) **Quanto vale il lavoro da $x = 0$ ad $x = A$?**

Il lavoro compiuto da una forza è definito come

$$L = \int_{x_{in}}^{x_{fin}} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Per calcolare il lavoro devo quindi calcolare l'integrale della forza.

In questo caso mi viene fornito il grafico di $F(x)$ quindi posso calcolare l'integrale graficamente. Per calcolare graficamente l'integrale devo calcolare l'area sottesa dalla curva $F(x)$ fra i due estremi di integrazione (in questo caso $x = 0$ e $x = A$)

$$L_{0 \rightarrow A} = 3\text{ N} \cdot (15\text{ m} - 0) - 1\text{ N} \cdot (25\text{ m} - 15\text{ m}) = 35\text{ J}$$

- b) **Quanto vale la velocità per $x = A$?**

- La velocità è definita come

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

- Per un oggetto che si muove sotto l'azione di una forza costante

$$\vec{V}(t) = \vec{V}(t_0) + \frac{\vec{F}}{m}(t - t_0)$$

in questo caso la forza è costante e pari a $F_1 = 3\text{ N}$ per $0\text{ m} < x < 15\text{ m}$ ed è ancora costante ma pari a $F_2 = -1\text{ N}$ per $15\text{ m} < x < 35\text{ m}$ quindi

$$V(t_A) = V(t_{15}) + \frac{F_2}{m}(t - t_{15})$$

in cui $V(t_{15})$ è il valore della velocità che ha all'istante in cui passa per $x = 15\text{ m}$ e il valore t_A per cui $x(t_A) = A$.

- Quanto vale la velocità in $x = 15\text{ m}$?**

$$V(t_{15}) = V(0) + \frac{F_1}{m}t_{15}$$

visto che $V(0) = 0$

$$V(t_{15}) = \frac{F_1}{m}t_{15}$$

per calcolarla però bisogna conoscere il valore di t_{15} per cui l'oggetto passa per la posizione $x = 15\text{ m}$

* **Quanto vale t_{15} ?** t_{15} è definito come l'istante per cui

$$X(t_{15}) = X_{15}$$

Visto che in questo caso la forza è costante l'equazione del moto è quella di un moto uniformemente accelerato:

$$X(t) = X(0) + V(0)t + \frac{1}{2} \frac{F_1}{m} t^2$$

in questo caso $V(0) = 0$ e $X(0) = 0$ quindi:

$$X(t_{15}) = \frac{1}{2} \frac{F_1}{m} t_{15}^2$$

per cui

$$X_{15} = \frac{1}{2} \frac{F_1}{m} t_{15}^2$$

ossia

$$t_{15} = \sqrt{\frac{2 m X_{15}}{F_1}}$$

Numericamente:

$$t_{15} = \sqrt{\frac{2 m X_{15}}{F_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 300 \text{ g} \cdot 15 \text{ m}}{3 \text{ N}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.3 \text{ kg} \cdot 15 \text{ m}}{3 \text{ N}}} = 1.73 \text{ s}$$

si può quindi calcolare $V(t_{15})$

$$V(t_{15}) = \frac{F_1}{m} t_{15} = \frac{F_1}{m} \sqrt{\frac{2 m X_{15}}{F_1}} = \sqrt{\frac{2 F_1 X_{15}}{m}}$$

Numericamente:

$$V(t_{15}) = \sqrt{\frac{2 F_1 X_{15}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3 \text{ N} \cdot 15 \text{ m}}{0.3 \text{ kg}}} = 17.32 \text{ m/s}$$

– **Quanto vale $t_A - t_{15}$?** t_A è definito come l'istante per cui

$$X(t_A) = X_A$$

Visto che in questo caso la forza è costante l'equazione del moto è quella di un moto uniformemente accelerato a partire dall'istante t_{15} con posizione iniziale $X(t_{15})$ e velocità iniziale $V(t_{15})$

$$X(t) = X(t_{15}) + V(t_{15})(t - t_{15}) + \frac{1}{2} \frac{F_2}{m} (t - t_{15})^2$$

Si può anche scrivere in termini di $\Delta X = X_A - X_{15}$ e $\Delta t = t_A - t_{15}$:

$$\Delta X = V(t_{15})\Delta t + \frac{1}{2} \frac{F_2}{m} \Delta t^2$$

la cui soluzione è

$$\Delta t = -\frac{V_{15}m}{F_2} \pm \sqrt{\left(\frac{V_{15}m}{F_2}\right)^2 + \frac{2m\Delta x}{F_2}}$$

Ho due possibili soluzioni, entrambe positive (che corrispondono a due possibili successivi passaggi per lo stesso punto)

Devo quindi prendere il primo dei due, cioè la soluzione:

$$\Delta t = -\frac{V_{15}m}{F_2} - \sqrt{\frac{V_{15}m^2}{F_2} + \frac{2m\Delta X}{F_2}}$$

Numericamente:

$$\Delta t = -\frac{17.32 \text{ m/s} \cdot 0.3 \text{ kg}}{-1 \text{ N}} - \sqrt{\left(\frac{17.32 \cdot 0.3 \text{ kg}}{-1 \text{ N}}\right)^2 + \frac{2 \cdot 0.3 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m}}{-1 \text{ N}}} = 0.62 \text{ s}$$

a questo punto la velocità in A è data da:

$$V(t_A) = V(t_{15}) + \frac{F_2}{m} \Delta t = 17.32 \text{ m/s} - \frac{1 \text{ N}}{0.3 \text{ kg}} \cdot 0.62 \text{ s} = 15.3 \text{ m/s}$$

- In base al teorema dell'energia cinetica

$$L = \Delta E_{cin} = \frac{1}{2} m v_{fin}^2 = \frac{1}{2} m v_{in}^2$$

in questo caso la velocità iniziale è zero:

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = L$$

Quindi:

$$v_A = \sqrt{\frac{2L}{m}}$$

Numericamente

$$v_{fin} = \sqrt{\frac{2L}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 35 \text{ J}}{300 \text{ g}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 35 \text{ J}}{0.3 \text{ kg}}} = 15.3 \text{ m/s}$$

Utilizzando il teorema dell'energia cinetica il calcolo è molto più rapido e lineare.

- c) **In quale dei due punti l'energia potenziale è maggiore?**

La differenza di energia potenziale è definita come

$$E_2^{pot} - E_1^{pot} = -L_{1 \rightarrow 2}$$

in questo caso

$$E_A^{pot} - E_0^{pot} = -L_{0 \rightarrow A} = -35 \text{ J}$$

quindi l'energia potenziale è maggiore in $x = 0$

- d) **Per quale valore di x la velocità dell'oggetto è massima?**

In base al teorema delle forze vive

$$\Delta E_{cin} = L$$

l'energia cinetica (e quindi la velocità) continuano ad aumentare fintanto che il lavoro compiuto dalla forza per uno spostamento Δx è positivo. Dal grafico si vede subito che il lavoro è positivo fino a $x = 15 \text{ m}$, quindi la velocità massima si avrà per $x = 15 \text{ m}$

- e) **Costruire un grafico dell'energia potenziale in funzione di x**

Per costruire un grafico è necessario costruire una tabella dell'energia potenziale per un sufficiente numero di punti della variabile x

L'energia potenziale è definita come

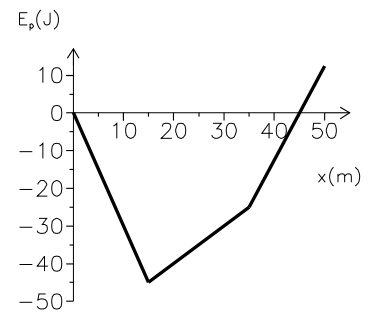
$$E(x)^{pot} - E_0^{pot} = -L_{0 \rightarrow x}$$

il valore della costante E_0^{pot} è arbitrario e può essere considerato ad esempio uguale a 0.

Il lavoro $L_{0 \rightarrow x}$ può essere calcolato graficamente.

Dal grafico della forza osservo che nei tratti in cui la forza è costante il lavoro sarà rappresentato da una retta che può essere disegnata con due punti

x [m]	$-L_{0 \rightarrow x}$ [J]
0	0
15	-45
35	-25
45	0



17) Una pallina di massa 150 g viene lasciata cadere da un'altezza di 120 cm.

a) Quanto vale la sua velocità un istante prima di toccare terra?

Ad ogni rimbalzo la pallina perde il 20% della sua energia.

b) Quale altezza raggiunge dopo il primo rimbalzo?

c) E dopo il secondo?

Ris.: $v = 4.85 \text{ m/s}$; $h' = 0.96 \text{ m}$; $h'' = 0.77 \text{ m}$

Soluzione:

a) **Quanto vale la sua velocità un istante prima di toccare terra?** Devo calcolare la velocità con cui la pallina cade a terra partendo (con velocità iniziale nulla) da un'altezza h , cioè

$$v_{H=0}$$

La forza che agisce sulla pallina è la forza peso.

- La forza peso è una forza costante $F_p = mg$.
- L'accelerazione di gravità è costante (e uguale per tutti i corpi).
- La forza peso è una forza conservativa la cui energia potenziale è data da $E_{pot}^{gr} = mgh$
- Visto che l'accelerazione di gravità è costante, posso scrivere le equazioni della pallina come quelle di un corpo che si muove di moto uniformemente accelerato (lungo la direzione z)
La velocità (in funzione del tempo) per un moto uniformemente accelerato è data da:

$$v(t) = v_o + a(t - t_o)$$

In questo caso l'accelerazione è $-g$ (diretta verso il basso) e la velocità iniziale è nulla:

$$v(t) = -g(t - t_o)$$

Per calcolare la velocità un attimo prima di toccare terra, devo calcolare l'intervallo di tempo ($t_{H=0} - t_{H=h}$) necessario perchè la pallina arrivi a terra partendo da una quota h

In altre parole dobbiamo trovare il valore di $t_{H=0} - t_{H=h}$ tale che

$$z(t_{H=0}) = 0$$

- **Per quale valore di $t_{H=0} - t_{H=h}$ si ha che $z(t_{H=0}) = 0$?** Visto che si tratta di un moto uniformemente accelerato, l'equazione del moto è data da:

$$z(t) = z_o + v_o(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

quindi

$$z(t) - z_o = v_o(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

in questo caso $z_o = h$ e $z(t_{H=0}) = 0$ quindi si ottiene

$$h = \frac{1}{2}g(t_{terra} - t_o)^2$$

da cui si ricava che

$$t_{H=0} - t_{H=h} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Quindi la velocità quando tocca terra vale:

$$v_{H=0} = -g(t_{H=0} - t_{H=h}) = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$$

- La velocità è legata all'energia cinetica

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2$$

da cui

$$v = \sqrt{\frac{2E_{cin}}{m}}$$

Visto che la massa è nota, calcolare la velocità finale è equivalente a calcolare l'energia cinetica finale

- **Quanto vale l'energia cinetica poco prima di toccare terra?** Posso considerare il teorema dell'energia cinetica:

$$\Delta E_{cin} = L$$

Quindi l'energia cinetica per $H = 0$ è legata all'energia cinetica alla quota $H = h$ dalla relazione:

$$E_{cin}^{H=0} = L + E_{cin}^{H=h} = L_{h \rightarrow 0}$$

In questo caso l'energia cinetica iniziale è nulla (perchè la pallina parte da ferma) quindi per calcolare l'energia cinetica finale basta calcolare il lavoro compiuto sulla pallina.

- * **Quanto vale il lavoro compiuto sulla pallina?**

- Il lavoro è definito come:

$$L_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}(x) \cdot d\vec{x}$$

In questo caso la forza è la forza peso ($F_p = mg$) costante e parallela allo spostamento della pallina, quindi

$$L_{h \rightarrow 0} = \vec{F}_p s$$

Lo spostamento è uguale all'altezza h quindi

$$L = mgh$$

- Per una forza conservativa il lavoro è legato alla variazione di energia potenziale

$$L_{A \rightarrow B} = -\Delta E_{pot} = E_{pot}^A - E_{pot}^B$$

Visto che la pallina cade sotto l'azione della forza peso, che è una forza conservativa la cui energia potenziale $E_{pot}^{gr} = mg(h - h_o)$

$$L_{h \rightarrow 0} = mg(h - h_o) - mg(0 - h_o) = mgh$$

Il lavoro compiuto sulla pallina vale:

$$L = mgh$$

L'energia cinetica finale della pallina vale:

$$E_{cin}^{H=0} = mgh$$

La velocità sarà quindi data da:

$$v_{H=0} = \sqrt{\frac{2E_{cin}}{m}} = \sqrt{\frac{2mgh}{m}} = \sqrt{2gh}$$

- Posso considerare la conservazione dell'energia:

$$E_{tot}^{H=h} = E_{tot}^{H=0}$$

- **Quale è l'espressione dell'energia totale?** L'energia totale meccanica è data dalla somma dell'energia cinetica e delle (varie) energie potenziali.

In questo caso l'unica forza che agisce è la forza peso quindi devo considerare solo la sua energia potenziale. L'energia totale in questo caso quindi è data da

$$E_{tot} = E_{cin} + E_{pot}^{gr} = \frac{1}{2}mv^2 + mg(h - h_o)$$

La conservazione dell'energia

$$E_{tot}^{H=h} = E_{tot}^{H=0}$$

può essere riscritta

$$\frac{1}{2}mv_{H=h}^2 + mg(h - h_o) = \frac{1}{2}mv_{H=0}^2 + mg(0 - h_o)$$

Visto che $v_{H=h} = 0$

$$\frac{1}{2}mv_{H=0}^2 = mgh$$

da cui

$$v_{H=0} = \sqrt{2gh}$$

Numericamente

$$v_{H=0} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 120 \text{ cm}} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 1.2 \text{ m}} = 4.85 \text{ m/s}$$

- b) **Quale altezza raggiunge dopo il primo rimbalzo?**

Devo calcolare l'altezza raggiunta se rimbalza dopo aver perso il 20% della sua energia.

- **Quanto vale l'energia dopo il primo rimbalzo?** L'energia della pallina sarà

$$E' = E - \Delta E$$

Il testo dice che ΔE è il 20% di E ossia

$$\Delta E = \frac{20}{100}E$$

quindi

$$E' = E - \frac{20}{100}E = 0.8E$$

L'energia viene persa solo nel momento in cui tocca terra, mentre risale invece l'energia è conservata.

- Posso considerare la conservazione dell'energia

$$E_{tot}^{H=h'} = E'$$

l'espressione dell'energia totale è

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 + mg(h - h_o)$$

Visto che nel punto più' alto $v = 0$

$$mgh_{max} = E_{tot}$$

da cui

$$h' = \frac{E'}{mg} = 0.8 \frac{E}{mg} = 0.8h$$

- Subito dopo il rimbalzo la pallina ha solo energia cinetica: posso calcolare la sua velocità e usare le equazioni del moto uniformemente accelerato per calcolare l'altezza massima
- Posso usare il teorema dell'energia cinetica per calcolare il lavoro che deve compiere la forza peso per fermare la pallina (e da lì risalire allo spazio che deve percorrere in verticale)
- Il lavoro della forza peso può anche essere calcolato usando la variazione della sua energia potenziale.

Il risultato è

$$h' = 0.8h$$

Numericamente:

$$h' = 0.8 \cdot 120 \text{ cm} = 96 \text{ cm}$$

c) **Quale altezza raggiunge dopo il secondo rimbalzo?**

Dopo il secondo rimbalzo la pallina avrà perso il 20% dell'energia che gli era rimasta dopo il primo rimbalzo:

$$E'' = 0.8E'$$

di conseguenza

$$h'' = 0.8h' = (0.8)^2h$$

Numericamente:

$$h'' = (0.8)^2h = 0.64 \cdot 120 \text{ cm} = 77 \text{ cm}$$

- 18) Una gru solleva un carico di 5000 kg alla velocità costante di 0.1 m/s
- Supponendo di poter trascurare gli attriti, quanto lavoro compie il motore in un secondo?
 - Quanto varrebbe in questo caso la potenza sviluppata dal motore?
 - Quanto vale la forza di attrito, sapendo che nella realtà il motore sviluppa una potenza di 10 kW ?

Soluzione:

- a) **Quanto vale il lavoro compiuto dalla gru in un secondo?**

- Il lavoro compiuto da una forza è definito come

$$L = \int_{x_{in}}^{x_{fin}} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

per calcolare il lavoro del motore devo conoscere la forza esercitata dal motore in modulo e direzione.

D'altra parte so che il carico si muove a velocità costante in direzione verticale. Si tratta quindi di un moto rettilineo uniforme, in cui la risultante delle forze è nulla.

Le forze che agiscono sono la forza peso e quella esercitata dal motore. Se la loro risultante è zero vuol dire che

$$\vec{F}_R = \vec{F}_P + \vec{F}_M$$

quindi la forza esercitata dalla gru ha modulo mg ed è diretta verso l'alto, parallela allo spostamento:

$$L = F_M \cdot \Delta z = mg\Delta z$$

- Il lavoro compiuto è legato alla variazione di energia cinetica (teorema delle forze vive):

$$L = \Delta E_{cin}$$

La variazione di energia cinetica del carico è pari al lavoro compiuto su di esso. In questo caso (se non c'è attrito) le forze che compiono lavoro sono la forza di gravità e quella del motore:

$$\Delta E_{cin} = L_{grav} + L_M$$

Visto che il carico viene sollevato con velocità costante

$$\Delta E_{cin} = L_{grav} + L_M = 0$$

Cioè il motore compie un lavoro di segno opposto a quello della forza di gravità.

$$L_M = -L_{grav}$$

Il lavoro compiuto dalla forza di gravità definisce la differenza di energia potenziale gravitazionale:

$$-L_{grav} = \Delta E_{pot} = mg\Delta z$$

Quindi

$$L_M = \Delta E_{pot} = mg\Delta z$$

- Di quanto si solleva il carico in 1 s ?**

Il carico viene sollevato con velocità costante, cioè

$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \text{cost}$$

Quindi

$$\Delta z = v\Delta t$$

$$L = mg \cdot \Delta z = mgv\Delta t$$

Numericamente:

$$L = mgv\Delta t = 5000 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 0.1 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ s} = 4.9 \cdot 10^3 \text{ J}$$

- b) **Quanto varrebbe la potenza sviluppata dal motore (se si potessero trascurare le forze di attrito)?**

La potenza è definita come

$$P = \frac{L}{\Delta t}$$

quindi in questo caso

$$P_M = \frac{L_M}{\Delta t} = \frac{mgv\Delta t}{\Delta t} = mgv$$

Numericamente

$$P_M = mgv = 5000 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 0.1 \text{ m/s} = 4.9 \text{ kW}$$

- c) **Quanto vale la forza di attrito?**

Per ricavare la forza di attrito posso

- aggiungere la forza di attrito nel calcolo della risultante delle forze

$$\vec{F}_R = \vec{F}_P + \vec{F}_M + \vec{F}_A$$

Tenendo presente che la forza di gravità è diretta verso il basso e quella motrice verso l'alto la componente z della forza di attrito vale:

$$F_A = mg - F_M$$

- **Quanto vale la forza esercitata dal motore?**

Visto che il carico si muove a velocità costante le forze di attrito e la forza esercitata dal motore saranno costanti.

Il testo fornisce la potenza sviluppata dal motore

- * **Che relazione c'è fra potenza sviluppata e forza esercitata dal motore?**

La potenza sviluppata dal motore è data da

$$P_M = \frac{L_M}{\Delta t}$$

Visto che il carico si muove a velocità costante il lavoro compiuto dal motore è dato da:

$$L_M = F_M v \Delta t$$

quindi

$$P_M = \frac{L_M}{\Delta t} = \frac{F_M v \Delta t}{\Delta t} = F_M v$$

quindi

$$F_M = \frac{P_M}{v}$$

da cui si ricava

$$F_A = mg - \frac{P_M}{v}$$

- includere il lavoro delle forze di attrito nel teorema delle forze vive:

$$\Delta E_{cin} = L_{grav} + L_M + L_A$$

da cui si ricava che il lavoro delle forze di attrito vale

$$L_A = -L_{grav} - L_M$$

- **Quanto vale il lavoro delle forze di attrito?** Se il carico si muove a velocità costante anche la forza di attrito sarà costante

$$L_A = F_A v \Delta t$$

- **Quanto vale il lavoro compiuto dalla forza di gravità?** Il lavoro compiuto dalla forza di gravità è dato da

$$L_{grav} = -\Delta E_{pot}^{grav} = -mg\Delta z = -mgv\Delta t$$

- **Quanto vale il lavoro compiuto dal motore ?** Il lavoro compiuto dal motore è legato alla potenza sviluppata dalla relazione quindi conoscendo il lavoro compiuto dal motore (

$$L_M = P_M \Delta t$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$L_A = F_A v \Delta t = mgv\Delta t - P_M \Delta t$$

da cui si ricava che

quello compiuto dalla forza di gravità ($-\Delta E_{pot}$) si ricava che:

$$F_A = mg - \frac{P}{v}$$

Numericamente:

$$F_A = mg - \frac{P_M}{v} = 5000 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 - \frac{10 \text{ kW}}{0.1 \text{ m/s}} = -5.1 \cdot 10^4 \text{ N}$$

La forza di attrito risulta quindi diretta verso il basso

- 19) Una pallina di massa 2 kg , scivola partendo da ferma lungo un piano inclinato e dopo 3 s raggiunge la velocità di 4 m/s
- Quanto vale l'accelerazione ?
 - Quanto vale la variazione di energia cinetica della pallina?
 - Di quanto è variata la sua energia potenziale gravitazionale?
 - Quanto vale il dislivello Δh fra i due estremi del piano inclinato?

Soluzione:

- a) **Quanto vale l'accelerazione media?**

L'accelerazione media è definita come

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Se l'accelerazione è costante accelerazione istantanea e accelerazione media hanno lo stesso valore. In un piano inclinato (privo di attriti) l'accelerazione è costante. Quindi

$$\vec{a} = \frac{v_{fin} - v_{in}}{\Delta t}$$

Numericamente

$$\vec{a} = \frac{v_{fin} - v_{in}}{\Delta t} = \frac{4\text{ m/s} - 0}{3\text{ s}} = 1.3\text{ m/s}^2$$

- b) **Quanto vale la variazione di energia cinetica?**

La variazione di energia cinetica è definita come

$$\Delta E^{cin} = E_{fin}^{cin} - E_{in}^{cin}$$

L'energia cinetica è definita come

$$E^{cin} = \frac{1}{2}mv^2$$

quindi la variazione di energia cinetica sarà data da

$$\Delta E^{cin} = \frac{1}{2}mv_{fin}^2 - \frac{1}{2}mv_{in}^2$$

Numericamente:

$$\Delta E^{cin} = \frac{1}{2}2\text{ kg}(4\text{ m/s})^2 - 0 = 16\text{ J}$$

- c) **Quanto vale la sua variazione di energia potenziale gravitazionale?** La variazione di energia potenziale è definita come:

$$\Delta E_{pot} = E_{pot}^{fin} - E_{pot}^{in}$$

- L'energia potenziale della forza peso è data da

$$E_{pot}^{gr} = mg(h - h_o)$$

quindi

$$\Delta E_{pot} = E_{pot}^{fin} - E_{pot}^{in} = mg(h_{fin} - h_o) - mg(h_{in} - h_o) = mg(h_{fin} - h_{in}) = -mg\Delta h$$

ma per calcolarla è necessario conoscere il dislivello fra i due estremi del piano inclinato.

- In base al principio di conservazione dell'energia

$$E_{tot}^{in} = E_{tot}^{fin}$$

l'energia totale è data da

$$E_{tot} = E_{cin} + E_{pot}$$

quindi

$$E_{cin}^{in} + E_{pot}^{in} = E_{cin}^{fin} + E_{pot}^{fin}$$

da cui si ricava che

$$\Delta E_{pot} = E_{pot}^{fin} - E_{pot}^{in} = E_{cin}^{in} - E_{cin}^{fin} = -\Delta E_{cin}$$

Numericamente quindi:

$$\Delta E_{pot} = -\Delta E_{cin} = -16 J$$

d) **Quanto vale il dislivello Δh fra i due estremi del piano inclinato?** Come già visto:

$$\Delta E_{pot}^{grav} = -mg\Delta h$$

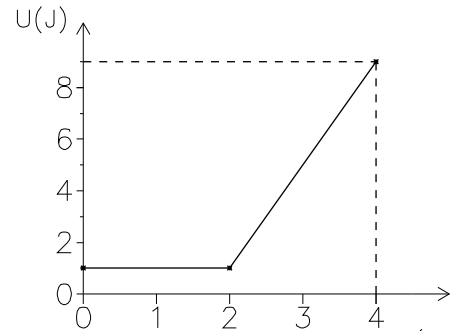
quindi

$$\Delta h = -\frac{\Delta E_{pot}}{mg} = \frac{-16 J}{2 kg 9.8 m/s^2} = 0.82 m$$

- 20) Il grafico in figura rappresenta l'andamento dell'energia potenziale gravitazionale U di un corpo P di massa $M = 0.5 \text{ kg}$, che si muove su una pista priva di attrito costituita da un tratto orizzontale $A - B$ seguito da un tratto inclinato avente pendenza costante. Nella figura l'asse x rappresenta la coordinata orizzontale del punto P .

Il corpo viene lanciato da A verso B con una velocità iniziale $v_o = 4 \text{ m/s}$.

- Quanto valgono l'energia potenziale e cinetica di P in A e in $x = 2.5 \text{ m}$?
- Si calcoli la coordinata \bar{x} del punto in cui P inverte il suo moto.
- Si tracci sullo stesso grafico di U , il grafico dell'andamento di T (energia cinetica) in funzione di x .



Ris.: $U_0 = 1 \text{ J}$, $E_0 = 4 \text{ J}$, $U_A = 3 \text{ J}$, $E_A = 2 \text{ J}$; $x = 3 \text{ m}$

Soluzione:

- a) Quanto valgono l'energia potenziale e cinetica in A ($x = 0$) e $x = 2,5 \text{ m}$?

• Quanto vale l'energia potenziale?

Visto che mi viene fornito il grafico di $U(x)$, per rispondere bisogna ricavare i valori dal grafico.

- Quanto vale $U(x = 0)$? Il valore $U(x = 0)$ si può leggere direttamente e vale 1 J .
- Quanto vale $U(x = 2.5 \text{ m})$?

Per ricavare il valore a $U(x = 2,5 \text{ m})$ posso usare un righello (ottendo $U(x = 2.5 \text{ m}) \sim 3 \text{ J}$ oppure (visto che la scala non è molto chiara) osservare che per $x > 2 \text{ m}$ $U(x)$ è una retta, cioè

$$U(x > 2 \text{ m}) = U_o + k(x - x_o)$$

e per calcolare k basta fare

$$k = \frac{\Delta U}{\Delta x}$$

quindi, leggendo dal grafico che $U(x = 2 \text{ m}) = 1 \text{ J}$ e $U(x = 4 \text{ m}) = 9 \text{ J}$

$$k = \frac{9 \text{ J} - 1 \text{ J}}{4 \text{ m} - 2 \text{ m}} = 4 \text{ J/m}$$

quindi l'equazione $U(x > x_o)$ è data da

$$U(x > x_o) = U_o + k(x - x_o) \quad \text{dove} \quad \begin{aligned} U_o &= 1 \text{ J} \\ k &= 4 \text{ J/m} \\ x_o &= 2 \text{ m} \end{aligned}$$

Posso quindi calcolare $U(x = 2.5 \text{ m})$ come

$$U(x = 2,5 \text{ m}) = 1 \text{ J} + 4 \text{ J/m}(2.5 \text{ m} - 2 \text{ m}) = 3 \text{ J}$$

• Quanto vale l'energia cinetica?

L'energia cinetica (spesso indicata anche come T è data da:

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2$$

- Quanto vale $T(x = 0)$? Dato che conosco la velocità iniziale posso calcolare

$$T(x = 0) = \frac{1}{2}0.5 \text{ kg}(4 \text{ ms})^2 = 4 \text{ J}$$

- **Quanto vale $T(x = 2.5 m)$** Non conosco la velocità in $x = 2.5 m$, quindi devo cercare un'altra relazione.

Se l'energia meccanica è conservata, la somma delle energie cinetica e potenziale è costante. E' applicabile in questo caso perchè il testo del problema parla esplicitamente di guida priva di attriti. Quindi

$$U(x = 0) + T(x = 0) = U(x = 2.5 m) + T(x = 2.5 m) = E_{tot}$$

da cui

$$T(x = 2.5 m) = E_{tot} - U(x = 2.5 m) = U(x = 0) + T(x = 0) - U(x = 2.5 m)$$

Numericamente

$$T(x = 2.5 m) = 1 J + 4 J - 3 J = 2 J$$

b) **Per quale valore di x il moto si inverte?**

Il moto si inverte quando la velocità cambia segno, quindi la coordinata del punto di inversione è quella per cui la velocità si annulla.

Se la velocità è nulla anche l'energia cinetica sarà nulla.

- **Per quale valore di x l'energia cinetica è nulla?**

Dato che in questo problema l'energia meccanica del corpo si conserva

$$U(x) + T(x) = E_{tot}$$

Il punto \bar{x} cercato è quello in cui l'energia cinetica $T(\bar{x} = 0)$ per cui cioè:

$$U(\bar{x}) = E_{tot} = 5 J$$

- **Quale è il valore di x per cui l'energia potenziale è uguale all'energia totale?**

Per calcolare il valore \bar{x} devo conoscere la relazione $U(x)$.

Il grafico $U(x)$ mi viene dato, quindi se le scale sul grafico fossero abbastanza chiare potrei leggere direttamente il valore di x per cui $U(x) = 5 J$ (con un righello si ottiene $\bar{x} = 3$).

In alternativa posso ricorrere all'espressione algebrica per $U(x)$ (già ricavata precedentemente)

$$U(x) = U_o + k(x - x_o)$$

quindi

$$U_o + k(\bar{x} - x_o) = E_{tot}$$

da cui si ottiene:

$$\bar{x} = \frac{E_{tot} - U_o}{k} + x_o$$

Numericamente

$$\bar{x} = \frac{5 J - 1 J}{4 J/m} + 2 m = 3 m$$

c) **Costruire il grafico di $T(x)$** Per fare il grafico di $T(x)$ devo avere una tabella del suo valore in un certo numero (significativo) di punti.

Può essere utile cercare una espressione algebrica per $T(x)$.

In questo caso, visto che l'energia si conserva

$$T(x) + U(x) = T(x_o) + U(x_o)$$

Questo mi dice subito che

$$T(x) = T(x_o) - [U(x) - U(x_o)]$$

Dal grafico di $U(x)$ si vede subito che fino a $x = 2 m$ $U(x) = U(x_0)$, quindi $T(x) = T(x_0)$ (è costante)

$$T(x) = \text{cost} = T(x = 0) = 4 J \quad [x < 2 m]$$

Mentre per $x > 2 m$, visto che

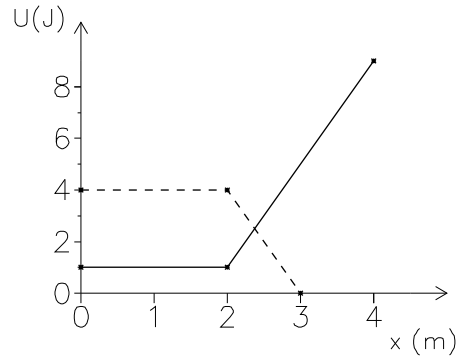
$$U(x) = U_0 + 4 J/m(x - 2 m) \quad [x > 2 m]$$

avrò

$$T(x) = T_0 - 4 J/m(x - 2 m) \quad [x > 2 m]$$

Per disegnare il grafico quindi costruisco la tabella

x [m]	T [J]
0	4
2	4
3	0



21) Un peso di 12 kg è appeso ad una fune lunga 8 m. Il peso viene spostato lateralmente fino a quando la fune forma un angolo di 30° con la verticale.

- a) Di quanto è aumentata l'energia potenziale gravitazionale del sasso?
- b) Se il peso viene abbandonato a se stesso e comincia a pendolare avanti e indietro, con quale velocità transita per il punto più basso della traiettoria?

Nei punti attorno al punto più basso della traiettoria il peso si muove con velocità praticamente costante e quindi il suo moto si può approssimare ad un moto circolare uniforme.

- c) Quale forza (si indichi direzione intensità e verso) deve applicare la fune al peso in quel punto?

Soluzione:

- a) **Calcolare la variazione di energia potenziale gravitazionale del sasso**

$$\Delta E^{pot\ grav} = E_{alto}^{pot\ grav} - E_{basso}^{pot\ grav}$$

L'energia potenziale gravitazionale (rispetto ad una quota di riferimento) è data da

$$E^{pot\ grav} = mgh + cost$$

Quindi la differenza di energia potenziale vale

$$\Delta E^{pot\ grav} = E_{alto}^{pot\ grav} - E_{basso}^{pot\ grav} = mg\Delta h$$

Per rispondere devo calcolare la differenza di quota del sasso.

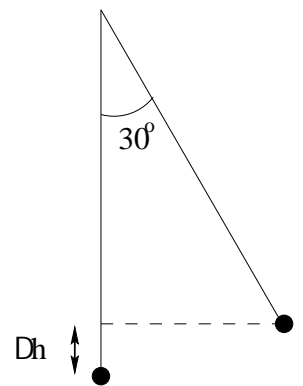
- **Calcolare la differenza di quota**

Usando un pò di trigonometria dalla figura si ricava che

$$\Delta h = L - L \cos \theta$$

Quindi la differenza di energia potenziale fra la quota del sasso quando è sollevato e la quota più bassa è data da:

$$\Delta E^{pot\ grav} = mg\Delta h = mgL(1 - \cos \theta) = 12\ kg \cdot 9.8\ m/s^2 \cdot 8\ m(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 126\ J$$



- b) **Calcolare la velocità con cui transita per il punto più basso della traiettoria quando viene lasciato libero**

Per rispondere devo trovare una relazione fra la velocità e qualcuna delle grandezze note del problema.

Ad esempio la velocità è legata all'energia cinetica, che a sua volta se non ci sono attriti è legata alla variazione di energia potenziale appena calcolata.

$$E_{basso}^{cin} + E_{basso}^{pot} = E_{alto}^{cin} + E_{alto}^{pot}$$

quindi

$$E_{basso}^{cin} = E_{alto}^{cin} + E_{alto}^{pot} - E_{basso}^{pot}$$

Visto che il sasso viene lasciato cadere con velocità iniziale nulla

$$E_{basso}^{cin} = \frac{1}{2}mv_{basso}^2 = E_{alto}^{pot} - E_{basso}^{pot} = mg\Delta h$$

Quindi la velocità del sasso vale

$$v = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta)}$$

Numericamente

$$v = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta)} = \sqrt{2 \cdot 9.8\ m/s^2 \cdot 8\ m(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})} = 4.6\ m/s^2$$

c) **Calcolare la forza che applica la fune al peso nel punto piú basso della traiettoria.**

La forza applicata dalla fune è solo una delle forze in gioco (c'è anche la forza di gravità).
La risultante delle forze agenti sul sasso sarà quindi

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{fune} + \vec{F}_{peso}$$

pertanto per calcolare la forza esercitata dalla fune in quel punto bisogna conoscere la risultante delle forze in quel punto

$$\vec{F}_{fune} = \vec{F}_R - \vec{F}_{peso}$$

questa è una equazione vettoriale che corrisponde a

$$F_{fune\ x} = F_{Rx} - F_{Px}$$

$$F_{fune\ y} = F_{Ry} - F_{Py}$$

$$F_{fune\ z} = F_{Rz} - F_{Pz}$$

Le componenti della forza peso (nel sistema di coordinate del disegno) valgono

$$\vec{F}_{peso} = (0, 0, -mg)$$

Bisogna quindi calcolare le componenti della risultante delle forze.

- **Calcolare la risultante delle forze**

La risultante delle forze è legata all'accelerazione del sasso in quel punto

$$\vec{F}_R = m\vec{a}$$

Il problema quindi si riconduce al calcolo dell'accelerazione del sasso in quel punto.

Il testo afferma che nei punti attorno al punto piú basso della traiettoria si può considerare che il sasso si muova di moto circolare uniforme.

In un moto circolare uniforme l'accelerazione è data da

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r} = -\left(\frac{v}{r}\right)^2 \vec{r}$$

ed è sempre diretta verso il centro.

In questo caso quindi l'accelerazione sarà diretta verso l'alto e avrà componenti

$$\vec{a} = (0, 0, \frac{v^2}{L})$$

Di conseguenza la risultante delle forze avrà componenti

$$\vec{F}_R = (0, 0, m\frac{v^2}{L})$$

Le componenti della forza esercitata dalla fune sono quindi:

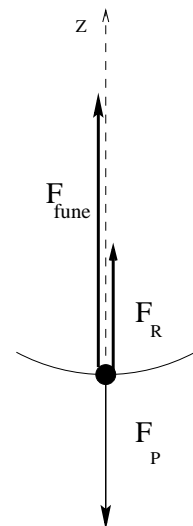
$$F_{fune\ x} = F_{Rx} - F_{Px} = 0$$

$$F_{fune\ y} = F_{Ry} - F_{Py} = 0$$

$$F_{fune\ z} = F_{Rz} - F_{Pz} = m\frac{v^2}{L} + mg$$

Numericamente

$$F_{fune\ z} = m\frac{v^2}{L} + mg = 12\text{ kg}\left(\frac{(4.6\text{ m/s})^2}{8\text{ m}} + 9.8\text{ m/s}^2\right) = 150\text{ N}$$



22) Si considerino valide le equazioni della meccanica classica. Un elettrone ($q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}C$, $m_e = 9 \cdot 10^{-31}kg$) è in moto circolare uniforme ad una distanza $r = 0.5 \cdot 10^{-8}cm$ attorno ad un nucleo di carica $Z = 2$.

- Quanto vale l'energia potenziale elettrica dell'elettrone?
- Quanto vale l'energia cinetica dell'elettrone?
- Quanto vale la sua energia totale?

Successivamente l'elettrone viene portato su un'orbita di raggio doppio della precedente.

- Di quanto sono variata l'energia potenziale e l'energia cinetica dell'elettrone?
- Quanto lavoro è stato necessario compiere sull'elettrone per portarlo sull'orbita più esterna?

Soluzione:

- Quanto vale l'energia potenziale elettrica dell'elettrone?**

L'energia potenziale può essere definita solo per forze conservative.

L'energia potenziale (di un punto A rispetto ad un punto O) è definita come

$$E_{pot}(A) - E_{pot}(O) = -L_{O \rightarrow A}$$

dove $L_{O \rightarrow A}$ è il lavoro compiuto dalla forza conservativa quando il corpo si muove da O ad A

- Quanto vale $L_{O \rightarrow A}$**

Il lavoro è definito come

$$L_{O \rightarrow A} = \int_0^A \vec{F}(x) \cdot d\vec{x}$$

La forza elettrica (o coulombiana fra due cariche è data da

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2}$$

diretta sempre lungo la congiungente le due cariche in questo caso quindi

$$L = \int_0^A F(r) \cdot dr = \int_{r_0}^{r_A} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qQ \frac{dr}{r^2}$$

Nel caso della forza elettrica (o coulombiana) è convenzione scegliere il punto r_0 come il punto in cui le cariche si trovano a distanza infinita (a cui viene attribuita energia potenziale elettrica nulla):

$$L_{\infty \rightarrow r} = \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qQ \frac{dr}{r^2}$$

questo integrale può essere calcolato e vale

$$L_{\infty \rightarrow r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}$$

(se le cariche sono di segno uguale il campo elettrico compie un lavoro negativo per avvicinarle)

L'energia potenziale elettrostatica dell'elettrone (che si trova a distanza R dal nucleo) vale quindi in questo caso:

$$E_{pot}(R) = -L_{\infty \rightarrow R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e Q_n}{R}$$

Per calcolarla bisogna conoscere la carica del nucleo

- Quanto vale la carica del nucleo?** La carica del nucleo è Z volte la carica elementare:

$$Q_n = Zq_{el} = 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}C$$

Numericamente quindi l'energia potenziale vale:

$$\begin{aligned} E_{pot}(R) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R} = 9 \cdot 10^9 N m^2/C^2 \frac{(-1.6 \cdot 10^{-19}C)(3.2 \cdot 10^{-19}C)}{0.5 \cdot 10^{-8}cm} \\ &= 9 \cdot 10^9 N m^2/C^2 \frac{(-1.6 \cdot 10^{-19}C)(3.2 \cdot 10^{-19}C)}{0.5 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-2}m} = -9.22 \cdot 10^{-18} J \end{aligned}$$

(è negativa perchè bisogna compiere del lavoro dall'esterno per allontanare l'elettrone dal nucleo)

b) **Quanto vale l'energia cinetica dell'elettrone?** L'energia cinetica è definita come

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

- **Quanto vale la velocità dell'elettrone?** L'elettrone sta ruotando (di moto circolare uniforme) intorno al nucleo.

– La velocità è legata alla velocità angolare

$$v = \omega r$$

r è noto ma ω no

– la velocità è legata al periodo il periodo non è noto

$$V = \frac{2\pi r}{T}$$

– la velocità è legata all'accelerazione centripeta

$$a_c = -\frac{v^2}{r}$$

e quindi alla forza centripeta

$$F_c = -m\frac{v^2}{r}$$

La forza centripeta non può che essere dovuta all'attrazione elettrica fra elettrone e nucleo e quindi in qualche modo può' essere ricavata:

* **Quanto vale la forza coulombiana fra l'elettrone ed il nucleo?**

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2}$$

quindi

$$v^2 = \frac{-F_c r}{m} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m} \frac{qQ}{r}$$

Il prodotto della cariche qQ è negativo, quindi il quadrato della velocità è (come deve) positivo...

L'energia cinetica quindi vale:

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m} \frac{qQ}{r}\right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}$$

(l'energia cinetica è positiva perchè qQ è negativo) Numericamente:

$$E_{cin} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r} = -\frac{1}{2} 9 \cdot 10^9 N/C^2 m^2 \frac{(-1.6 \cdot 10^{-19}C)(3.2 \cdot 10^{-19}C)}{0.5 \cdot 10^{-8}cm} = 4.61 \cdot 10^{-18} J$$

Si può notare che l'energia cinetica ha una espressione molto simile all'energia potenziale:

$$E_{cin} = -\frac{1}{2}E_{pot}$$

e questo è vero qualsiasi sia il valore di R

c) **Quanto vale l'energia totale dell'elettrone?**

L'energia totale è data dalla somma di energia cinetica e potenziale:

$$E_{tot} = E_{cin} + E_{pot}$$

grazie all'osservazione precedente (o anche usando i valori numerici)

$$E_{tot} = -4.61 \cdot 10^{-19} J$$

d) **Di quanto variano l'energia potenziale e quella cinetica se il raggio raddoppia?** La variazione di energia cinetica e potenziale sono date da:

$$\Delta E_{pot} = E'_{pot} - E_{pot}$$

$$\Delta E_{cin} = E'_{cin} - E_{cin}$$

• **Quanto valgono l'energia cinetica e potenziale se il raggio raddoppia?**

$$E'_{pot} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r'}$$

$$E'_{cin} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r'}$$

visto che $r' = 2r$

$$E'_{pot} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{2r} = \frac{1}{2} E_{pot}$$

$$E'_{cin} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{2r} = \frac{1}{2} E_{cin}$$

sia l'energia cinetica che quella potenziale sono dimezzate

quindi

$$\Delta E_{pot} = E'_{pot} - E_{pot} = \frac{1}{2} E_{pot} - E_{pot} = -\frac{1}{2} E_{pot}$$

$$\Delta E_{cin} = E'_{cin} - E_{cin} = \frac{1}{2} E_{cin} - E_{cin} = -\frac{1}{2} E_{cin}$$

Numericamente:

$$\Delta E_{pot} = -\frac{1}{2} E_{pot} = 4.61 \cdot 10^{-19} J$$

$$\Delta E_{cin} = -\frac{1}{2} E_{cin} = -2.31 \cdot 10^{-19} J$$

L'energia potenziale è aumentata (le cariche di segno opposto si sono allontanate) mentre quella cinetica è diminuita (visto che sono più lontane la forza coulombiana è minore e quindi è minore anche la velocità di rotazione)

e) **Quanto lavoro è stato necessario compiere per portare l'elettrone sull'orbita più esterna?**

Il principio di conservazione dell'energia afferma che

$$\Delta E_{tot} = L$$

in questo caso la variazione di energia totale è la somma delle variazioni di energia cinetica e potenziale:

$$\Delta E_{tot} = \Delta E_{pot} + \Delta E_{cin}$$

Numericamente:

$$L = 4.6 \cdot 10^{-19} J - 2.3 \cdot 10^{-19} J = 2.3 \cdot 10^{-19} J$$

come era ovvio aspettarsi è necessario compiere del lavoro positivo per allontanare l'elettrone su un'orbita più esterna.

23) Un fascetto di elettroni ($q_e = -1.6 \cdot 10^{-19} C$, $m_e = 9 \cdot 10^{-31} kg$) ha energia cinetica iniziale pari a $2 eV$. Gli elettroni attraversano una zona (lunga $0.5 m$) in cui è presente un campo elettrico costante, antiparallelo alla direzione di volo degli elettroni, di intensità pari a $E = 80 kV/m$.

- Quanto lavoro compie la forza elettrica su ciascun elettrone?
- Quanto vale la differenza di potenziale elettrico fra i due estremi della regione attraversata dagli elettroni?
- Quanto vale l'energia cinetica finale degli elettroni?

$$Ris.: L = 6.4 \cdot 10^{-15} J; \quad \Delta V = -40 kV; \quad E_{fin} = 40 keV = 6.4 \cdot 10^{-15} J$$

Soluzione:

a) **Quanto lavoro compie la forza elettrica su ciascun elettrone?**

- Il lavoro è definito come

$$L_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Per poter calcolare il lavoro bisogna scrivere le componenti della forza e dello spostamento.

– **Quanto vale la forza che agisce sull'elettrone?**

- La forza è legata all'accelerazione da

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

- La forza è legata al campo elettrico dalla relazione

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

(definizione di campo elettrico) il campo elettrico in questo caso è costante e antiparallelo alla direzione degli elettroni

$$\vec{E} = (-E, 0, 0)$$

Le componenti della forza sono date quindi da:

$$\vec{F} = q_e \vec{E}$$

visto che q_e è negativa, la forza elettrica è costante e parallela alla direzione di volo degli elettroni che quindi si muovono lungo una linea retta.

– **Quanto vale lo spazio percorso?** Lo spazio percorso è pari alla lunghezza della zona in cui è presente il campo elettrico

$$\Delta x = 0.5 m$$

$$L_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{x} = F_x \Delta x = q_e E_x \Delta x$$

- Il lavoro è legato alla variazione di energia cinetica dalla relazione

$$L = \Delta E_{cin}$$

per calcolarla dovrei conoscere la velocità finale ed iniziale (quindi questa relazione anche se valida non è utilizzabile)

- Il lavoro di una forza conservativa è legato alla variazione di energia potenziale:

$$L_{1 \rightarrow 2} = -\Delta E_{pot} = -(E_{pot2} - E_{pot1}) = E_{pot1} - E_{pot2}$$

– **Quanto vale la differenza di energia potenziale?**

Ricordando che l'energia potenziale è legata alla differenza di potenziale elettrico da:

$$\Delta E_{pot} = q\Delta V$$

e che nel caso di un campo elettrico costante

$$\Delta V = E\Delta x$$

ossia

$$V_2 - V_1 = -E(x_2 - x_1)$$

quindi:

$$E_{pot1} - E_{pot2} = q(V_1 - V_2) = qE(x_2 - x_1)$$

conoscendo quindi l'energia potenziale si ottiene

$$L_{1 \rightarrow 2} = E_{pot1} - E_{pot2} = q_e E_x \Delta x$$

Numericamente:

$$L = q_e E_x \Delta x = (-1.6 \cdot 10^{-19} C)(-80 kV/m)0.5 m = 6.4 \cdot 10^{-15} J$$

- b) **Quanto vale la differenza di potenziale elettrico?** La differenza di potenziale elettrico è definita come

$$\Delta V = \frac{\Delta E_{pot}}{q} = -\frac{L_{1 \rightarrow 2}}{q} = \frac{L_{2 \rightarrow 1}}{q}$$

Avendo già calcolato il lavoro si ottiene:

$$V_1 - V_2 = \frac{L_{1 \rightarrow 2}}{q}$$

Numericamente:

$$V_1 - V_2 = \frac{L_{1 \rightarrow 2}}{q} = \frac{6.4 \cdot 10^{-15} J}{-1.6 \cdot 10^{-19} C} = -40 kV$$

- c) **Quanto vale l'energia cinetica finale degli elettroni?**

- L'energia cinetica è definita come

$$\frac{1}{2}mv^2$$

quindi

$$\Delta E_{cin} = E_{cin2} - E_{cin1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

ma per calcolarla dovrei conoscere velocità iniziali e finali

- il teorema dell'energia cinetica afferma che

$$\Delta E_{cin} = L$$

Avendo in precedenza calcolato il lavoro posso quindi ottenere

$$E_{cin2} = E_{cin1} + L$$

Numericamente quindi:

$$\begin{aligned} E_{cin2} = E_{cin1} + L &= 2 eV + 6.4 \cdot 10^{-15} J = 2 \cdot (1.6 \cdot 10^{-19} J) + 6.4 \cdot 10^{-15} J \\ &= 6.4 \cdot 10^{-15} J = 6.4 \cdot 10^{-15} \left(\frac{1}{1.6 \cdot 10^{-19}} eV \right) = 40 keV \end{aligned}$$

Ricordando la definizione di eV , (energia acquistata da un elettrone attraverso una differenza di potenziale pari a $1V$) posso anche dire subito che se l'elettrone attraversa una $\Delta V = 40 kV$ la sua energia cinetica aumenta di $40 keV$

- 24) Per spostare $3.1 \cdot 10^{15}$ elettroni ($q_e = -1.6 \cdot 10^{-19} C$) da un punto A ad un punto B è necessario compiere un lavoro (positivo) di $200 J$.
- Quanto vale la carica totale degli elettroni?
 - Quanto vale la differenza di energia potenziale elettrostatica delle cariche fra A e B ?
 - Quanto vale la differenza di potenziale elettrico fra A e B ?

$$\text{Ris.: a) } Q = -5 \cdot 10^{-3} C; \quad \text{b) } \Delta E_{pot} = 200 J; \quad \text{c) } \Delta V = -40 kV$$

Soluzione:

- a) **Quanto vale la carica totale degli elettroni?**

La carica totale è definita come la somma delle singole cariche (in questo caso elettroni) quindi

$$Q_{tot} = N_{elettroni} q_e$$

Numericamente:

$$Q_{tot} = N_{elettroni} q_e = 3.1 \cdot 10^{15} \cdot (-1.6 \cdot 10^{-19} C) = -5 \cdot 10^{-3} C$$

- b) **Quanto vale la differenza di energia potenziale elettrostatica delle cariche fra A e B ?**

La differenza di energia potenziale elettrostatica è definita come

$$\Delta E_{pot}^{el} = E_{pot}^{el}(B) - E_{pot}^{el}(A) = -L_{A \rightarrow B}$$

quindi

$$\Delta E_{pot}^{el} = -L_{A \rightarrow B}$$

dove $L_{A \rightarrow B}$ è il lavoro *che compiono le forze del campo*. Il lavoro compiuto dalle forze del campo è l'opposto di quello che si compie (dall'esterno) contro di esse:

$$L_{A \rightarrow B} = -\mathcal{L}_{A \rightarrow B}^{est}$$

Numericamente quindi

$$\Delta E_{pot}^{el} = -L_{A \rightarrow B} = \mathcal{L}_{A \rightarrow B}^{est} = 200 J$$

- c) **Quanto vale la differenza di potenziale elettrico fra A e B ?**

La differenza di potenziale elettrico è definita come la differenza di energia potenziale elettrostatica per unità di carica:

$$\Delta V = \frac{\Delta E_{pot}^{el}}{Q}$$

Numericamente:

$$\Delta V = \frac{\Delta E_{pot}^{el}}{Q} = \frac{200 J}{-5 \cdot 10^{-3} C} = -40 kV$$