

Dinamica dell'atmosfera

Una breve introduzione

Federico Cassola
federico.cassola@arpal.liguria.it

ARPAL CFMI-PC

12 marzo 2021

Sommario I

- ① Derivata lagrangiana e derivata euleriana
- ② Sistemi di coordinate
 - Coordinate verticali
 - Coordinate naturali
- ③ Forze
 - Forze apparenti
 - Forze reali
 - Pressione
 - Forza di attrito
- ④ Equazioni del moto
 - Equazione del moto orizzontale
 - Il vento geostrofico
 - Attrito
 - Vento di gradiente
 - Equazione del moto verticale
 - Il vento termico

Sommario II

- Atmosfera barotropica e baroclinica

- 5 Equazione per l'energia termodinamica

- 6 Equazione di continuità

- 7 Equazioni primitive
 - Equazioni primitive su larga scala
 - Equazioni generali

Sistemi di riferimento lagrangiano ed euleriano

Per studiare le proprietà di una particella d'aria sono possibili due approcci:

Approccio lagrangiano

Mi siedo sulla particella e misuro le sue proprietà seguendo il suo moto: *derivata totale d/dt* ;

Approccio euleriano

Rimango fermo in un punto e misuro le proprietà delle particelle che si susseguono in quel punto, *derivata locale $\partial/\partial t$* .

Le leggi fondamentali della fisica sono scritte seguendo l'approccio lagrangiano, tuttavia in atmosfera è molto comodo adottare un approccio euleriano.

Consideriamo una grandezza fisica $\psi = \psi(x, y, p, t)$ nella rappresentazione euleriana. Dopo un tempo infinitesimo dt $\psi = \psi(x + dx, y + dy, p + dp, t + dt)$. Si ha (usando una scomposizione in serie di Taylor):

$$\begin{aligned} d\psi &= \psi(x + dx, y + dy, p + dp, t + dt) - \psi(x, y, p, t) = \\ &= \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\psi}{\partial p} dp + \frac{\partial\psi}{\partial t} dt \end{aligned}$$

dividendo per dt :

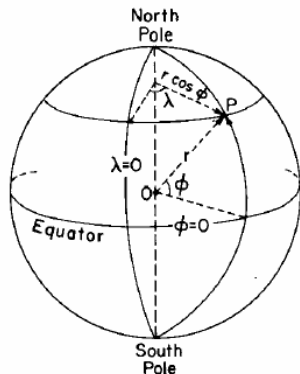
$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

o anche:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\mathbf{V} \cdot \nabla_p \psi - \omega \frac{\partial\psi}{\partial p} + \frac{d\psi}{dt}$$

dove il secondo e il terzo termine a destra sono chiamati *termini avvettivi*.

Sistemi di coordinate



A grande scala: sistema di coordinate sferiche che ruota insieme alla Terra, *latitudine* ϕ e *longitudine* λ .

Si definiscono x e y , rispettivamente la distanza dal Meridiano di Greenwich verso E e dall'equatore verso N tramite le relazioni:

$$dx \equiv r d\lambda \cos \phi \quad e \quad dy \equiv r d\phi$$

Per altezze < 50 km si assume r costante e pari al raggio medio della terra R_E

Coordinate verticali

Altezza di geopotenziale

$$Z \equiv \frac{\phi}{g_0}$$

dove “0” indica il livello del mare. Nel sistema di riferimento x, y, Z le velocità vengono scritte:

$$u \equiv \frac{dx}{dt} \simeq R_E \cos \phi \frac{d\lambda}{dt} \quad \text{componente zonale}$$

$$v \equiv \frac{dy}{dt} \simeq R_E \frac{d\phi}{dt} \quad \text{componente meridionale}$$

$$w \equiv \frac{dZ}{dt} = \frac{dr}{dt} \quad \text{componente verticale}$$

con la velocità orizzontale definita come $\mathbf{V} \equiv u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$

Pressione

$$\omega = \frac{dp}{dt}$$

Particolarmente utile nel caso di descrizione di fenomeni a grande scala, quando si può applicare l'approssimazione idrostatica. Valori positivi di ω corrispondono a velocità verso il basso. Dall'equazione idrostatica in forma differenziale si ha:

$$\omega \simeq -\rho g_0 \frac{dZ}{dt} = -\rho g_0 w = -w \frac{p}{H}$$

Coordinate σ

$$\sigma = \frac{p}{p_s}$$

p_s è la pressione al suolo (non al livello del mare!). Molto usate perché permettono di non intersecare i rilievi montuosi e quindi semplificano le condizioni al contorno.

Coordinate naturali

Su ogni superficie definita in modo che la terza coordinata (normale) sia costante è possibile definire un insieme di linee di flusso: linee parallele in ogni punto al vettore \mathbf{V} a un certo livello e istante.

In ogni punto della superficie si possono definire le coordinate naturali (s, n) , tali che:

$$V \equiv |\mathbf{V}| = \frac{ds}{dt}$$

e n perpendicolare a s e positiva alla sua sinistra:

$$\frac{dn}{dt} = 0$$

Forze apparenti

La Terra ruota in senso antiorario vista dal Polo Nord con velocità angolare

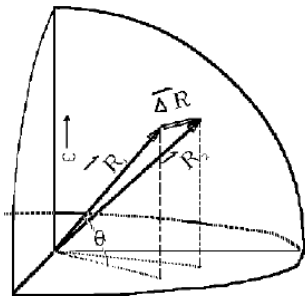
$$\Omega \equiv 2\pi \text{ radianti } g^{-1} = 7.292 \cdot 10^{-5} s^{-1}$$

Si ha per definizione:

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

La velocità vista dallo spazio è semplicemente la velocità vista dalla Terra più la velocità della Terra vista dallo spazio:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt}_{\text{Spazio}} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}_{\text{Terra}} + \Omega \wedge \mathbf{R}$$



Per trovare l'accelerazione possiamo differenziare nuovamente:

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \text{ Spazio} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \text{ Terra} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{R} \right) \text{ Spazio}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \text{ Spazio} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \text{ Terra} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{R} \right) \text{ Terra} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \text{ Terra} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{R} \right)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \text{ Spazio} = \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \text{ Terra} + 2(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}) + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{R}) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \wedge \mathbf{R}$$

$$\mathbf{a}_{\text{Spazio}} = \mathbf{a}_{\text{Terra}} + \mathbf{a}_{\text{Coriolis}} + \mathbf{a}_{\text{Centrifuga}} + \mathbf{a}_{\text{Variazione } \boldsymbol{\Omega}}$$

La componente orizzontale del termine di Coriolis si scrive spesso nella forma:

$$C = -f \mathbf{k} \wedge \mathbf{V}$$

dove f è detto parametro di Coriolis e varia lentamente con la latitudine:

$$f = 2\Omega \sin \phi$$

da cui

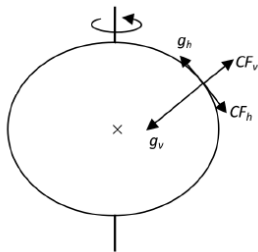
$$C = -f \mathbf{k} \wedge \mathbf{V} = f v \mathbf{i} - f u \mathbf{j} = (2\Omega v \sin \phi, -2\Omega u \sin \phi)$$

In sintesi la forza di Coriolis è:

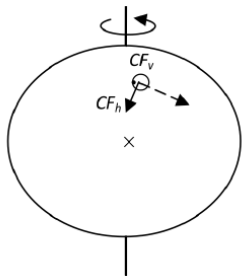
- proporzionale alla velocità e ad essa perpendicolare, verso destra nell'emisfero nord, sinistra nell'emisfero sud;
- proporzionale alla componente verticale locale della rotazione terrestre, massima ai poli, nulla all'equatore.

In modo più intuitivo

La forza di Coriolis può essere descritta come l'effetto del cambiamento del vettore CF_h in ampiezza e/o di direzione, dovuto al movimento di un oggetto e al conseguente impatto sulla forza centrifuga.



- In figura è rappresentato l'equilibrio delle forze nel caso di un oggetto in quiete;
- per un movimento da Ovest verso Est: incremento della forza centrifuga: CF_h aumenta – deviazione verso Sud;
- per un movimento da Est verso Ovest: decremento della forza centrifuga: CF_h diminuisce – deviazione verso Nord;



- per un movimento da Nord verso Sud: la direzione della forza centrifuga cambia in modo da rimanere perpendicolare al moto nel sistema di riferimento inerziale: CF_h devia leggermente “fuori” perpendicolarmente al piano – deviazione verso Ovest;
- per un movimento da Sud verso Nord: la direzione della forza centrifuga cambia in modo da rimanere perpendicolare al moto nel sistema di riferimento inerziale: CF_h devia leggermente “dentro” perpendicolarmente al piano – deviazione verso Est;

Per approfondire:

<http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:489867/FULLTEXT02.png>

Forza del gradiente di pressione

In un volume elementare di gas di dimensioni dx , dy , e dz se consideriamo le forze di pressione su due facce opposte si ha per la faccia a x_0 una forza verso l'interno pari a $F_0 = p(x_0)dydz$. Sulla faccia opposta (a $x_1 = x_0 + dx$) si ha una forza $F_1 = -p(x_1)dydz$. Con uno sviluppo in serie di Taylor si ha:

$$p(x_1) = p(x_0) + \left(\frac{dp}{dx} \right)_{x_0} dx$$

da cui si ha:

$$F_x = F_0 + F_1 = - \left(\frac{dp}{dx} \right)_{x_0} dx dy dz$$

Dividendo per $\rho dx dy dz$ si ottiene la forza per unità di massa:

$$\mathbf{P} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \mathbf{i} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} \mathbf{j} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} \mathbf{k} \equiv -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

Per la sola componente orizzontale:

$$\mathbf{P}_h = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \mathbf{i} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} \mathbf{j} \equiv -\frac{1}{\rho} \nabla_{z,p}$$

Se invece di utilizzare le coordinate (x, y, z) usiamo le coordinate (x, y, p) è necessario scrivere la forza di gradiente di pressione in funzione di $z(x, y, p)$

Chiamiamo in due modi diversi la stessa variabile φ in due sistemi di riferimento diversi

$$\varphi_z(x, y, z) = \varphi_p(x, y, p(x, y, z))$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \right)_{y,z} = \left(\frac{\partial \varphi_p}{\partial x} \right)_{y,p} + \frac{\partial \varphi_p}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{y,z}$$

Estendendo sul piano orizzontale:

$$\nabla_z \varphi_z = \nabla_p \varphi_p + \frac{\partial \varphi_p}{\partial p} \nabla_{z,p}$$

Se usiamo come variabile $\varphi_p = \varphi_z \equiv z$ si ha:

$$\nabla_z z = \nabla_p z + \frac{\partial z}{\partial p} \nabla_z p$$

essendo $\nabla_z z = 0$ si ottiene:

$$\nabla_p z = -\frac{\partial z}{\partial p} \nabla_z p$$

usando l'*equazione idrostatica* $\partial p = -\rho g \partial z$:

$$\nabla_p z = \frac{1}{g\rho} \nabla_z p$$

da cui

$$\mathbf{P}_h = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \mathbf{i} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} \mathbf{j} \equiv -\frac{1}{\rho} \nabla_z p = -g \nabla_p z = -\nabla_p \Phi = -g_0 \nabla_p Z$$

Forza di attrito

Tiene conto di tutti gli scambi di quantità di moto fra la particella e l'ambiente circostante, su scale più piccole della particella stessa. Il contributo più importante è rappresentato dagli scambi verticali di quantità di moto orizzontale. Questi a loro volta sono maggiori:

- quanto maggiore è il gradiente verticale della velocità orizzontale $\partial \mathbf{V} / \partial z$ (*vertical wind shear*);
- in presenza di forti moti convettivi;
- in prossimità di un terreno con alta rugosità.

Le forze di attrito sono trascurabili in gran parte dell'atmosfera, non lo sono nello *Strato Limite Planetario*. In forma semplificata:

$$\mathbf{F} = -a\mathbf{V}$$

dove a è positivo con modulo dipendente dalla velocità del vento, la rugosità del terreno, la stabilità ...

Equazione del moto orizzontale

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{P}_h + \mathbf{C} + \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla\Phi - f\mathbf{k} \wedge \mathbf{V} - a\mathbf{V}$$

Analisi di scala: il vento geostrofico

Grandezze in gioco per i moti a grande scala:

- $\mathbf{V} \sim 20 \text{ ms}^{-1}$
- $t \sim 10^5 \text{ s}$
- $f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
- \mathbf{F} trascurabile al di sopra dello strato limite
- scala spaziale caratteristica $\sim 10^6 \text{ m}$

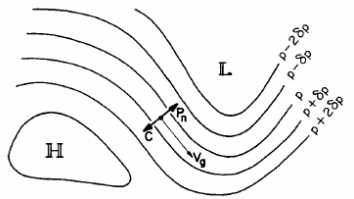
$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \quad -\nabla\Phi \quad -f\mathbf{k} \wedge \mathbf{V} \quad -a\mathbf{V}$$

$$10^{-4} \quad 10^{-3} \quad 2 \cdot 10^{-3} \quad \text{trascurabile}$$

Con un errore dell'ordine del 15% si ha:

$$f \mathbf{k} \wedge \mathbf{V} \simeq -\nabla_p \Phi$$

La predominanza del termine di Coriolis è legata ai tempi caratteristici di variazione della velocità. Applicando $\mathbf{k} \wedge$ ad entrambi i membri:



$$f \mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{V}) \simeq -\mathbf{k} \wedge \nabla_p \Phi$$

da cui:

$$\mathbf{V} \simeq \frac{1}{f} \mathbf{k} \wedge \nabla_p \Phi = \frac{g_0}{f} \mathbf{k} \wedge \nabla_p Z = \frac{1}{\rho f} \mathbf{k} \wedge \nabla_z p$$

Per una qualsiasi distribuzione orizzontale della pressione è possibile definire un campo \mathbf{V}_g che rispetti questa relazione. \mathbf{V}_g è detto *vento geostrofico*;

- Il campo reale di vento può essere scomposto in due componenti, quella *geostrofica* e quella *ageostrofica*;
- Il vento geostrofico è parallelo alle isolinee di pressione (o alle isolinee di altezza geopotenziale su una superficie a pressione costante);
- Ruota nello stesso senso della Terra attorno alle basse pressioni (flusso *ciclonico*);
- Il vento geostrofico è una soluzione stazionaria dell'equazione del moto: non tiene conto del transiente;
- La forza di Coriolis **non compie lavoro**;
- Nel caso del vento geostrofico nemmeno la forza del gradiente di pressione compie lavoro;
- L'approssimazione di vento geostrofico non vale ai tropici (\mathbf{V}_g tende a infinito a causa della dipendenza da f).

Attrito

Nel caso l'attrito non sia trascurabile, in particolare in prossimità del suolo, è ancora possibile trovare una soluzione stazionaria:

$$\mathbf{P}_h + \mathbf{C} + \mathbf{F} = 0$$

Proiettando nella direzione del moto e perpendicolarmente si ha:

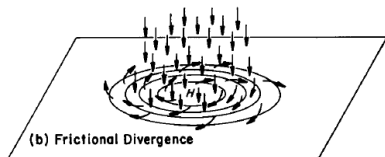
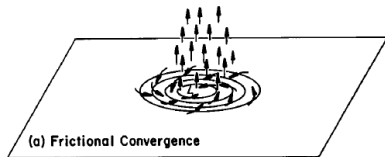
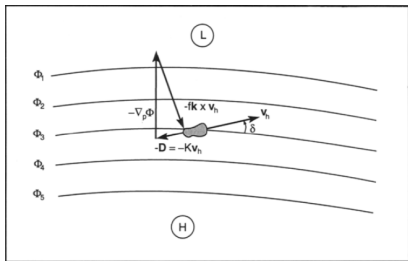
$$P_h \sin \delta = F = aV$$

$$P_h \cos \delta = C = fV$$

Moltiplicando la prima per f e la seconda per a e sottraendo si ottiene $P_h(f \sin \delta - a \cos \delta) = 0$, cioè $\tan \delta = a/f$. Tipicamente la forza d'attrito è circa un quarto della forza di Coriolis, per cui $\delta \simeq 15^\circ$.

Elevando al quadrato entrambe le relazioni si ha:

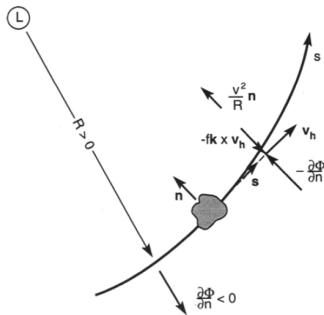
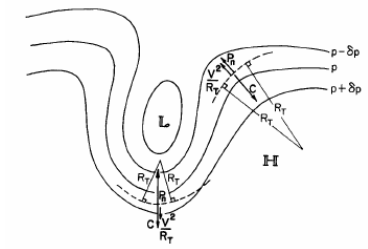
$$P_h^2(\sin^2 \delta + \cos^2 \delta) = (a^2 + f^2)V^2 \text{ e quindi } V = P_h/\sqrt{a^2 + f^2}$$



L'attrito devia il vento geostrofico verso le basse pressioni: convergenza e moti verticali, sviluppo di nubi e precipitazioni.

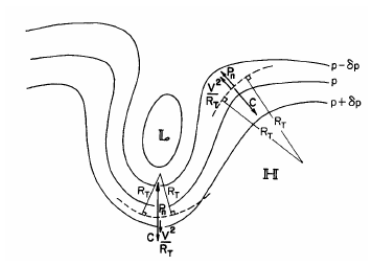
Ai tropici deviazione maggiore (f piccolo), approssimazione geostrofica non valida e moti verticali favoriti (circolazioni di origine termica).

Moto curvilineo



Coordinate naturali: raggio di curvatura definito positivo per moto antiorario (ciclonico nel nostro emisfero).

Vento di gradiente



Invece di trascurare completamente il termine di accelerazione possiamo solamente considerare la variazione di direzione della velocità, con modulo V^2/R_T dove R_T è il raggio di curvatura istantaneo della traiettoria (accelerazione centripeta).

A seconda che il moto sia attorno a un minimo o un massimo di pressione si hanno rispettivamente le due relazioni:

$$\frac{V^2}{R_T} + fV = P_h \quad fV = \frac{V^2}{R_T} + P_h$$

Circolazione attorno a un minimo

$$V = -\frac{fR_T}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{fR_T}{2}\right)^2 + P_h R_T}$$

Entrambe le soluzioni sono possibili, ma quella negativa porta ad una circolazione anticiclonica ed è detta *anomala*. Il transiente porta alla soluzione positiva!

Circolazione attorno a un massimo

$$V = \frac{fR_T}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{fR_T}{2}\right)^2 - P_h R_T}$$

$R_T > 4P_h/f^2$ e quindi $P_h < f^2 R_T/4$

Per avere soluzione il gradiente di pressione ha un valore massimo: limite all'amplificazione degli anticicloni al contrario dei cicloni

Circolazione attorno a un massimo

$$V = \frac{fR_T}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{fR_T}{2}\right)^2 - P_h R_T}$$

$R_T > 4P_h/f^2$ e quindi $P_h < f^2 R_T/4$

Per $R_T \rightarrow 0$ anche $P_h \rightarrow 0$: vicino al centro degli anticicloni pressione livellata e venti deboli o assenti. Nel caso anticiclonico la forza centripeta ha segno opposto al gradiente di pressione, nel caso ciclonico si sommano.

Due soluzioni reali, quella positiva è *anomala* perché porterebbe venti troppo forti per un campo anticiclonico. Il vento aumenterebbe al diminuire del gradiente di pressione, irrealistico.

Equilibrio ciclostrofico

Nel caso ciclonico (bassa pressione), per R_T piccoli si ha che i termini contenenti f possono essere trascurati (contenendo R_T^2 rispetto al termine di pressione). Analogamente in caso di f piccolo (tropici).

La soluzione diventa:

$$V = \pm \sqrt{P_h R_T}$$

Entrambe le direzioni sono teoricamente possibili

- Cicloni sinottici
- Cicloni alla mesoscala
- Tornado
- Mulinelli

Dall'equazione del vento di gradiente, inserendo $V_g = -\frac{1}{f}P_h$ e dividendo per fV :

$$\frac{V_g}{V} = 1 + \frac{V}{fR_T}$$

Per flusso ciclonico ($fR_T > 0$): $V_g > V$

Per flusso anticiclonico ($fR_T < 0$): $V_g < V$

Il vento geostrofico sovrastima il vento di gradiente in un flusso ciclonico, lo sottostima in un flusso anticiclonico.

Curvatura ciclonica: il vento reale è *sub-geostrofico*.

Curvatura anticiclonica: il vento reale è *super-geostrofico*.

Si generano così convergenza e divergenza in quota che per l'equazione di continuità si traducono in moti verticali.

Equazione del moto verticale

In coordinate (x, y, z) :

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g - C_z - F_z$$

Per moti a grande scala si possono trascurare il termine di accelerazione, quello di Coriolis e quello di attrito. Ne segue l'equazione idrostatica, non più *prognostica* ma *diagnostica*. Sapendo che $\rho = p/RT$ e che $gdz = d\Phi$ si ottiene l'equazione idrostatica in coordinate di pressione:

$$\frac{d\Phi}{dp} = -\frac{RT}{p}$$

L'approssimazione idrostatica non vale per scale inferiori a $\sim 6 \text{ km}$, quando i fenomeni convettivi diventano importanti.

Il vento termico

Considerando l'equazione ipsometrica

$$Z(p_2) - Z(p_1) = \frac{R\bar{T}}{g_0} \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \bar{H} \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

e sottraendo fra loro le due equazioni del vento geostrofico ai livelli p_1 e p_2

$$\mathbf{V}_g(p_1) = \frac{g_0}{f} \mathbf{k} \wedge \nabla_p Z(p_1)$$

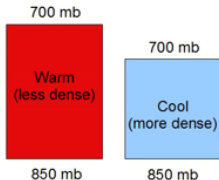
$$\mathbf{V}_g(p_2) = \frac{g_0}{f} \mathbf{k} \wedge \nabla_p Z(p_2)$$

si ha:

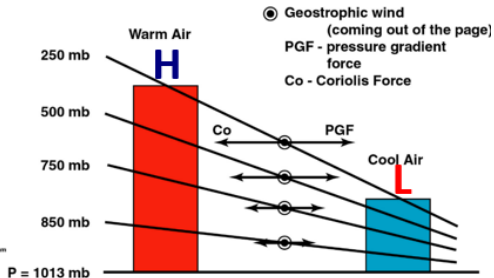
$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{V}_g &= \mathbf{V}_g(p_2) - \mathbf{V}_g(p_1) = \frac{g_0}{f} \mathbf{k} \wedge \nabla_p [Z(p_2) - Z(p_1)] = \\ &= \frac{R}{f} \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) (\mathbf{k} \wedge \nabla_p \bar{T}) \end{aligned}$$

Come il vento geostrofico è proporzionale al gradiente di altezza geopotenziale su una superficie a pressione costante, il vento termico è proporzionale al gradiente di spessore tra due superfici bariche, ossia al gradiente di temperatura.

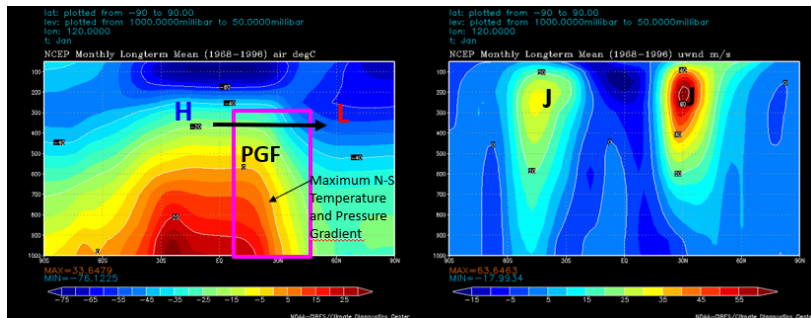
Relationship Between Temperature, Density, and Pressure Height



©The COWET Program



Vento termico e jet stream



Alle medie latitudini il gradiente di temperatura è massimo quindi anche il vento termico (variazione del vento geostrofico con la quota) è massimo: ciò determina la posizione e la variazione con la quota delle correnti a getto.

Atmosfera barotropica e baroclina

Il vento termico rappresenta la variazione del vento geostrofico passando dalla quota p_1 alla quota p_2 .

Il vento termico è diverso da 0 se il campo di temperatura varia orizzontalmente in modo diverso dalla pressione. Due possibili configurazioni:

Atmosfera barotropica

Le superfici isoterme coincidono con le superfici isobariche. La distanza fra diverse superfici isobariche non cambia (equazione ipsometrica).

Atmosfera baroclina

La temperatura varia lungo le superfici isobariche. Il vento geostrofico incrocia le superfici isoterme: avvezione geostrofica di temperatura.

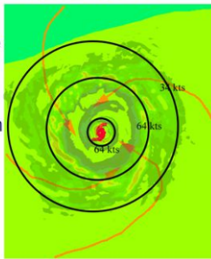
Introduction to tropical and extra-tropical cyclones



Tropical Cyclone

No temperature contrast at surface

Energy from latent heat



Warm core

Strongest winds near surface



Scale of 100s km

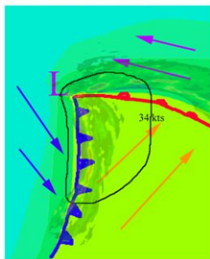
Extra-tropical cyclone

Baroclinic

Energy from horizontal temperature contrast

colours = SST
 blue = 15°C,
 blue/green = 20°C,
 green = 25°C

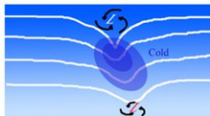
solid lines = wind speed



Cold core

Strongest winds near tropopause

Contours = pressure surfaces



Scale of 1000s km

Primo principio della termodinamica

$$dq = \dot{H}dt = c_p dT - \alpha dp$$

dove \dot{H} è il rateo di riscaldamento (*heating rate* - $[Jkg^{-1}s^{-1}]$) e rappresenta l'apporto di calore nell'unità di tempo e unità di massa complessivo (radiativo, latente, chimico).

$$c_p \frac{dT}{dt} = \alpha \frac{dp}{dt} + \dot{H}$$

Essendo $\alpha = RT/p$, $\kappa = R/c_p$ e $\omega = dp/dt$ si ottiene:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\kappa T}{p} \omega + \frac{\dot{H}}{c_p}$$

che definisce la variazione di temperatura lungo la traiettoria dovuta al rateo di riscaldamento per compressione adiabatica e per scambio di calore con l'ambiente.

Se consideriamo un approccio euleriano:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\mathbf{V} \cdot \nabla T + \omega \left(\frac{\kappa T}{p} - \frac{\partial T}{\partial p} \right) + \frac{\dot{H}}{c_p}$$

- Se il profilo verticale di temperatura è adiabatico si ha $\partial T / \partial p = \kappa T / p$: il secondo termine si annulla;
- Nel caso di una atmosfera stabile il gradiente reale è minore di quello adiabatico, per cui il secondo termine è positivo: moti discendenti $\omega > 0$ determinano un riscaldamento locale dell'aria;
- Nonostante la velocità verticale sia, *a grande scala*, almeno di un ordine di grandezza inferiore rispetto a quella orizzontale, ricopre un ruolo molto importante nell'ambito termodinamico.

Equazione di Continuità

Consideriamo una particella d'aria con densità ρ e volume infinitesimo con lati δx , δy e δz , la sua massa è:

$$\delta M = \rho \delta x \delta y \delta z$$

Se assumiamo valida l'approssimazione idrostatica¹ si ha che $\delta z = -\delta p / \rho g$ e quindi:

$$\delta M = -\frac{\delta x \delta y \delta p}{g}$$

La particella è soggetta a deformazioni ma la sua massa deve conservarsi (in senso lagrangiano):

$$-\frac{d}{dt} \delta M = \frac{d}{dt} (\delta x \delta y \delta p) = 0$$

¹Questo equivale a filtrare le variazioni ad alta frequenza della pressione e in particolare le onde sonore

Riscrivendo si ha:

$$-\frac{d}{dt}\delta M = \frac{d}{dt}(\delta x \delta y \delta p) = 0$$

$$\delta y \delta p \frac{d}{dt}\delta x + \delta x \delta p \frac{d}{dt}\delta y + \delta x \delta y \frac{d}{dt}\delta p = 0$$

$$\delta y \delta p \delta \left(\frac{dx}{dt} \right) + \delta x \delta p \delta \left(\frac{dy}{dt} \right) + \delta x \delta y \delta \left(\frac{dp}{dt} \right) = 0$$

$$\delta y \delta p \delta u + \delta x \delta p \delta v + \delta x \delta y \delta \omega = 0$$

$$\delta y \delta p \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \delta x \delta p \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \delta x \delta y \frac{\partial \omega}{\partial p} \delta p = 0$$

e quindi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \omega}{\partial p}$$

La divergenza del vento orizzontale è legata al moto verticale, fondamentale per determinare il tempo meteorologico.

Siccome la divergenza del vento geostrofico è nulla, è la divergenza del vento ageostrofico che determina la distribuzione dei moti verticali in atmosfera e quindi la distribuzione di cicloni, anticicloni, nubi e precipitazioni.

Nonostante l'atmosfera alle medie latitudini si trovi prevalentemente in bilancio geostrofico, tutto il "tempo meteorologico" discende dalla piccola porzione di vento detta vento ageostrofico.

Equazioni primitive su larga scala

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - \omega \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + fv + F_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - fu + F_y$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u \frac{\partial T}{\partial x} - v \frac{\partial T}{\partial y} + \omega \left(\frac{\kappa T}{p} - \frac{\partial T}{\partial p} \right) + \frac{\dot{H}}{c_p}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Più in generale

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\alpha\nabla p - \nabla\Phi - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{F} \quad \text{Eq. moto}$$

$$\dot{q} = c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} \quad \text{Primo principio}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad \text{Eq. continuità}$$

$$p\alpha = RT \quad \text{Eq. gas}$$

$$\frac{d}{dt} m_w = E - C \quad \text{Conservazione } H_2O$$