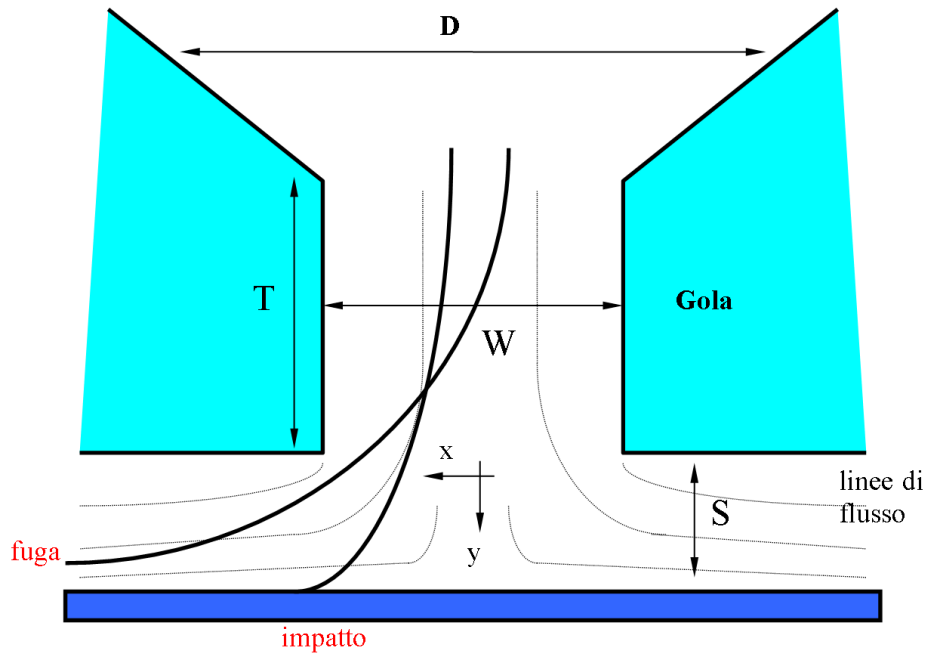


Soluzione delle equazioni del moto di particelle in un fluido



Si ricercano **condizioni stazionarie in cui il flusso d'aria** (viscosità μ [$\text{gcm}^{-1}\text{s}^{-1}$] e velocità media V_0) **è laminare**. Introducendo il **numero di Reynolds**:

$$R_e = \frac{\rho V_0 W}{\mu} = \frac{4\rho\phi}{\mu\pi W} \text{ (circolare)} \quad R_e = \frac{\rho V_0 W}{\mu} = \frac{\rho\phi}{WL} \text{ (rettangolare)}$$

dove flusso e velocità sono legati da: $\Phi_0 = \frac{As}{t} = AV_0 \Rightarrow V_0 = \frac{\Phi_0}{A}$ e qui è la viscosità del fluido.

il **regime laminare** si raggiunge se $500 \leq R_e \leq 1500$. Il regime non varia col tempo e la componente z è costante.

Si calcola il campo di velocità risolvendo le **equazioni di Navier-Stokes**:

$$\rho \left(V'_x \frac{\partial V'_x}{\partial x'} + V'_y \frac{\partial V'_x}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x'} + \mu \left(\frac{\partial^2 V'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V'_x}{\partial y'^2} \right)$$

$$\rho \left(V'_x \frac{\partial V'_y}{\partial x'} + V'_y \frac{\partial V'_y}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y'} + \mu \left(\frac{\partial^2 V'_y}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V'_y}{\partial y'^2} \right)$$

$$\frac{\partial V'_x}{\partial x'} + \frac{\partial V'_y}{\partial y'} = 0 \quad \text{continuità'}$$

per via numerica fissando come condizioni al contorno che: il profilo di ingresso della velocità sia verticale; la velocità sia nulla alle pareti; il flusso sia simmetrico rispetto alla linea di simmetria dell'impattore; all'uscita il flusso sia parallelo al piatto di impatto

Poiché il moto delle particelle in sospensione nel fluido dipenderà, assumendo che V_0 sia elevata ed in assenza di forze esterne specifiche (p.e. campi elettrici), solamente dalla drag

force $F_d = \frac{3\pi\mu D_p}{C_p}(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ (\mathbf{u} e \mathbf{v} sono rispettivamente il vettore velocità del fluido e della

particella) si scrivono le equazioni del moto (vedi Appendice) nel sistema di riferimento in figura, con origine al centro della sezione di uscita dell'ugello, asse x' rivolto a sinistra e asse y' verso il basso,

$$m \frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{3\pi\mu D_p}{C_p} \left(V'_x - \frac{dx'}{dt'} \right) \Rightarrow \frac{S_t}{2} \frac{d^2 x}{dt^2} = V_x - \frac{dx}{dt}$$

$$m \frac{d^2 y'}{dt'^2} = \frac{3\pi\mu D_p}{C_p} \left(V'_y - \frac{dy'}{dt'} \right) \Rightarrow \frac{S_t}{2} \frac{d^2 y}{dt^2} = V_y - \frac{dy}{dt}$$

dove:

m	é la massa della particella
μ	é la viscosità del fluido
D_p	é il diametro geometrico della particella
C_p	é il fattore di " slip correction "
$\frac{dx'}{dt'} \frac{dy'}{dt'}$	sono le componenti della velocità della particella
$\frac{d^2 x'}{dt'^2} \frac{d^2 y'}{dt'^2}$	sono le componenti dell' accelerazione della particella
$V'_x \ V'_y$	sono le componenti della velocità del fluido

La **variabile adimensionale** S_t é detta **numero di Stokes** ed é legata al diametro aerodinamico della particella, al flusso ed alle dimensioni dell'ugello dalle relazioni:

$$D_{ae} = \sqrt{\frac{9S_t \mu \pi W^3}{4\Phi}} \text{ (circolare)}$$

$$D_{ae} = \sqrt{\frac{9S_t \mu L W^2}{\Phi}} \text{ (rettangolare)}$$

Analoghe equazioni si ottengono in coordinate circolari r e z per il caso di fenditura cilindrica.

Appendice

Su particelle aerodisperse agiscono tre forze:

$$F_g = \frac{\pi}{6} D_p^3 \rho_p g \quad F_A = \frac{\pi}{6} D_p^3 \rho_{air} g \quad \mathbf{F}_d = \frac{3\pi\mu D_p}{C_p} (\mathbf{u} - \mathbf{v})$$

La drag force si compone della pressione esercitata dal fluido normalmente alla superficie della particella e dall'attrito viscoso esercitato tangenzialmente alla superficie della particella. \mathbf{u} e \mathbf{v} sono rispettivamente il vettore velocità del fluido e della particella.

Nel sistema di riferimento della figura, assumendo che V_0 sia elevata ossia che siano trascurabili sia F_A che F_g , le equazioni del moto sono:

$$m \frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{3\pi\mu D_p}{C_p} \left(V'_x - \frac{dx'}{dt} \right)$$

$$m \frac{d^2 y'}{dt'^2} = \frac{3\pi\mu D_p}{C_p} \left(V'_y - \frac{dy'}{dt'} \right)$$

con i simboli già definiti nel testo:

Detta V_0 la velocità media del fluido nella gola della fenditura introduciamo le variabili adimensionali :

$$x = \frac{x'}{W}, \quad y = \frac{y'}{W}, \quad V_x = \frac{V'_x}{V_0}, \quad V_y = \frac{V'_y}{V_0}, \quad t = \frac{t' V_0}{W}$$

Ne risultano le seguenti trasformazioni:

$$dx = \frac{dx'}{W}; \quad dt = \frac{V_0}{W} dt' \rightarrow \frac{dx'}{dt'} = V_0 \frac{dx}{dt} \quad ; \quad \frac{d}{dt'} \left(\frac{dx'}{dt'} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx'}{dt'} \right) \frac{dt}{dt'} = \frac{V_0 d}{dt} \left(\frac{dx'}{dt'} \right) \frac{V_0}{W} \rightarrow \frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{V_0^2}{W} \frac{d^2 x}{dt^2}$$

che sono del tutto analoghe per la variabile y . L'equazione può essere riscritta in forma adimensionale:

$$\frac{m C_p V_0}{3\mu\pi D_p W} \frac{d^2 x}{dt} = V_x - \frac{dx}{dt} \quad \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D_p}{2} \right)^3 \frac{\rho_p C_p V_0}{3\mu\pi D_p W} \frac{d^2 x}{dt} = V_x - \frac{dx}{dt} \quad \frac{S_t}{2} \frac{d^2 x}{dt^2} = V_x - \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{m C_p V_0}{3\mu\pi D_p W} \frac{d^2 y}{dt^2} = V_y - \frac{dy}{dt} \quad \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D_p}{2} \right)^3 \frac{\rho_p C_p V_0}{3\mu\pi D_p W} \frac{d^2 y}{dt^2} = V_y - \frac{dy}{dt} \quad \frac{S_t}{2} \frac{d^2 y}{dt^2} = V_y - \frac{dy}{dt}$$

La variabile adimensionale S_t é detta **numero di Stokes** ed é legata al diametro aerodinamico della particella.

$$S_t = \frac{\rho_p C_p V_0 D_p^2}{9\mu W} \quad \sqrt{S_t} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{V_0}{\mu W}} D_{ae}$$

Introducendo il **flusso** Φ si ottiene:

$$V_0 = \frac{\Phi}{\pi W^2/4} \rightarrow D_{ae} = \sqrt{\frac{9S_t \mu \pi W^3}{4\Phi}} \quad (\text{circolare})$$

$$V_0 = \frac{\Phi}{LW} \rightarrow D_{ae} = \sqrt{\frac{9S_t \mu L W^2}{\Phi}} \quad (\text{rettangolare})$$