

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Supponiamo di voler determinare gli estremi relativi di una funzione $f(x, y)$ soggetta ad un vincolo di uguaglianza $F(x, y) = 0$, ossia risolvere il problema

$$\begin{array}{ll} \min(\max) & f(x, y) \\ \text{tale che} & F(x, y) = 0. \end{array} \quad (1)$$

Lagrange ha dimostrato questo risultato generale sui punti di massimo o minimo vincolato.

Teorema 1 (di Lagrange) *Siano $f(x, y)$ e $F(x, y)$ derivabili con derivate prime continue, definiamo la **funzione Lagrangiana***

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda F(x, y).$$

Se il punto (\bar{x}, \bar{y}) è un punto di massimo o di minimo locale vincolato di f , e se $\nabla F(x, y) \neq 0$, allora esiste un $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) = 0$. Lo scalare $\bar{\lambda}$ prende il nome di moltiplicatore di Lagrange.

Osservazione: La funzione Laplaciana una funzione dipendente da tre parametri $(x, y$ e $\lambda)$, dunque il suo gradiente sar formato da tre componenti. Richiedere, dunque, che valga $\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0$ equivale a richiedere che sia verificato il sistema di equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \mathcal{L}_x(x, y, \lambda) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \mathcal{L}_y(x, y, \lambda) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) = -F(x, y) = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

In base al Teorema possiamo dunque affermare che affinché un punto sia di massimo o minimo vincolato, sso deve essere un punto stazionario della funzione Lagrangiana. Come procedere?

ESEMPIO: Si trovino punti di massimo e di minimo della funzione $f(x, y) = x + y$ sottoposta al vincolo $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Per prima cosa esplicitiamo la forma della funzione Lagrangiana, che sarà

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda F(x, y) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Calcoliamo dunque il gradiente della Laplaciana e cerchiamo i punti stazionari della Lagrangiana ponendo

$$\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\lambda x - 1 = 0, \\ 2\lambda y - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{array} \right.$$

Eseguendo i dovuti calcoli si può verificare che i punti stazionari della Lagrangiana sono: $(x, y, \lambda) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(x, y, \lambda) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. In corrispondenza di questi due punti la funzione f assumerà rispettivamente i valori $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$ (che risulterà essere il massimo della funzione sul vincolo) e $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$ (che risulterà essere il minimo della funzione sul vincolo).