

Laurea Magistrale in Metodologie per la Conservazione e il Restauro dei Beni Culturali

Paolo Prati

Dipartimento di Fisica, studio S830

Tel. 010-3536439; prati@ge.infn.it

***Fisica e Metodologie Fisiche
per la Conservazione dei Beni Culturali***

A.A. 2021/2022

Testi consigliati

- D. Giancoli., *Fisica con fisica moderna*.
Ambrosiana Editrice
- J. S. Walker., *Fondamenti di fisica*.
Pearson- Addison Wesley ed.
- D. Halliday, R. Resnik, J. Walker.
Fondamenti di fisica. Casa Editrice
Ambrosiana

Programma del Primo Modulo

1. Misura di grandezze fisiche e unità di misura

2. Misure fisiche

- -Cifre significative
- -Errore di una misura
- -Basi della trattazione statistica dei dati

3. Meccanica

- -I vettori in fisica.
- -Le leggi del moto.
- -Lavoro, energia.
- -Potenza.
- -Forze conservative ed energia potenziale.

4. Elettromagnetismo

- -Cariche elettriche, forze e campi.
- -Potenziale ed energia potenziale.
- -Corrente continua e circuiti.
- -Onde elettromagnetiche.

5. Termologia:

- Temperatura e calore.

6. Onde:

- -Ottica geometrica.

Programma del Secondo Modulo

1. **Introduzione alla Diagnostica Fisica dei Beni Culturali**
2. **Stati di aggregazione della materia**
3. **Struttura e morfologia di alcuni materiali del patrimonio culturale**
4. **La luce come sonda**
5. **I raggi X come sonda**
6. **Gli elettroni come sonda**
7. **Gli ioni come sonda**

Cos'è la fisica

La fisica (dal greco *phýsis* = natura) è la scienza che studia i **fenomeni naturali** (a esclusione di quelli che comportano trasformazioni chimiche della materia e i processi biologici...o meglio: *non in modo diretto*), al fine di descriverli misurandone le proprietà (o grandezze) e **stabilendo tra queste relazioni matematiche (leggi)**.

Cos'è la fisica? e di che cosa si occupa?

- Scienza sperimentale che studia i fenomeni naturali suscettibili di sperimentazione e che implicano grandezze misurabili.
- Sono oggetto della Fisica lo studio dei moti, dell'interazione gravitazionale e elettromagnetica, la struttura della materia, etc.

Cos'è la fisica

Per raggiungere questo scopo, la fisica si avvale di un metodo di indagine detto **metodo scientifico (o sperimentale)**, cioè basato sull'esperimento riproducibile (comune ad altre scienze come la chimica e la biologia, dette appunto sperimentali).

Il metodo scientifico, delineato da Galileo Galilei (1564-1642), consente di interpretare le cause dei fenomeni attraverso ipotesi che, se confermate nella loro validità dai risultati degli esperimenti, sono riconosciute come **teorie**. Si fonda sull'osservazione e la sperimentazione e si articola in 4 fasi ben distinte:

I. Osservazione del fenomeno (*fase sperimentale*).

Schematizzazione: individuazione delle cause.

II. Modellizzazione (*fase mentale*).

Scelta delle grandezze fisiche essenziali alla descrizione del fenomeno.

Cos'è la fisica

III. Riproduzione del fenomeno (*fase sperimentale*).

IV. Formulazione quantitativa e derivazione delle leggi fisiche che concorrono alla formulazione di una teoria (*fase mentale*).

Relazione matematica fra le grandezze fisiche.

Nello studio di un fenomeno fisico il passo più importante è senza dubbio rappresentato dalla misura di quantità ben definite che caratterizzano l'evento sotto osservazione (misura di grandezze fisiche) e dalla ricerca delle possibili relazioni quantitative esistenti fra le grandezze fisiche che lo governano e lo caratterizzano (leggi fisiche).

Un corollario cruciale del metodo scientifico è che i risultati ottenuti in una qualunque indagine, sperimentale o teorica, devono essere comunicati in modo che possano essere totalmente ed indipendentemente verificati da altri.

Cos'è la fisica

A che cosa servono le leggi fisiche?

A costruire un insieme consistente di relazioni analitiche (teorie), con le quale spiegare il comportamento della natura nelle sue più differenti manifestazioni (fenomeni meccanici, elettrici, magnetici etc.)

Processi deduttivi: dal modello alla legge fisica.

Processi induttivi: dalla legge fisica alla previsione di nuovi fenomeni.

Carattere predittivo di una teoria, come corpo di leggi in grado di prevedere l'evoluzione dei fenomeni naturali.

Le leggi fisiche possono essere usate per progettare!

Grandezze Fisiche

I **fenomeni fisici** coinvolgono le **grandezze fisiche**.

Grandezza fisica: definizione.

Si intende una proprietà **misurabile** che caratterizza un evento fisico. Per definizione, quindi, una grandezza fisica è un ente caratterizzato da un numero e da una unità di misura

Due tipi di grandezze fisiche: fondamentali e derivate .

Esempio: grandezze fisiche fondamentali di interesse della Meccanica: lunghezza [L], tempo [T], massa [M].

Una **grandezza fisica** è un'entità cui è possibile associare univocamente un numero mediante una determinata **operazione**.

L'**operazione**, da eseguirsi mediante l'uso di opportuni strumenti ed applicando determinate regole, si chiama **misurazione**.

Grandezze Fisiche

Misurazione di una grandezza fisica: Insieme di procedure e di convenzioni che consentono di associare ad una grandezza fisica un valore e una ben definita unità di misura.

Misura di una grandezza fisica è il numero che risulta dal confronto della grandezza da misurare con un'altra grandezza, ad essa omogenea, assunta come riferimento (detta campione di misura o unità di misura).

Grandezze Fisiche Omogenee

Le **grandezze fisiche omogenee** godono delle seguenti proprietà:

- possono essere sommate, ossia si può definire la **somma** di due grandezze omogenee;
- possono essere **confrontate**, ossia si può dire se una è minore, uguale o maggiore di un'altra omogenea con la prima;
- se ne può definire l'**unità di misura**.

Unità di Misura

L'unità di misura è la denominazione esclusiva attribuita alla misura della grandezza assunta come riferimento.

Esempi di unità di misura (del Sistema Internazionale - SI):

- il metro è l'unità di misura della lunghezza;**
- il secondo è l'unità di misura del tempo;**
- il chilogrammo è l'unità di misura della massa.**

→ Abbiamo bisogno di definire dei **campioni di riferimento (o campioni di misura)**

Requisiti dei campioni di Misura

Il campione di misura, cioè il sistema fisico che definisce l'unità di misura, deve soddisfare le seguenti proprietà:

- 1 precisione (deve assicurare la massima precisione possibile);**
- 2 invarianza nel tempo (ripetibilità dei risultati delle misure, effettuate in tempi successivi, della stessa proprietà fisica);**
- 3 riproducibilità (facilmente "clonabile");**
- 4 universalità (accordo generale sulla sua adottabilità).**

Concetto di Misura

La Fisica tratta *grandezze fisiche* che si possono misurare

Operatività di una misura è la possibilità di effettuare operazioni di:

- confronto tra misure (maggiore, uguale o minore)
- confronto relativamente a un campione chiamato *unità*

Sistema Internazionale (S.I.) → 7 Unità fondamentali

Unità fondamentali per:

Grandezza fisica	Simbolo della grandezza	Unità di misura	Simbolo dell'unità
lunghezza	l	metro	m
massa	m	chilogrammo	kg
intervallo di tempo	t	secondo	s
temperatura assoluta	T	kelvin	K
quantità di sostanza	n	mole	mol
intensità luminosa	I	candela	cd
intensità di corrente	i	ampere	A

Grandezze fondamentali...e derivate

Le dimensioni delle grandezze derivate sono ottenute direttamente da quelle delle grandezze fondamentali attraverso le leggi fisiche. La Fisica tratta *grandezze fisiche* che si possono misurare.

Esempio: la pressione

Nel SI, l'unità di misura derivata è il Pascal

$$Pa = \frac{N}{m^2}$$

Che comprende il
Newton, unità di misura
SI della forza

$$N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

Grandezze derivate, e appartenenti ad altri «sistemi di misura»

Prendiamo ancora ad esempio la pressione: può essere espressa in vari modi partendo dalle unità fondamentali del SI, oppure impiegando altri sistemi (es: imperiale britannico)

PRESSIONE

Pascal [Pa, N/m ²]	<input type="text"/>	Newton a centimetro quadro [N/cm ²]	<input type="text"/>
Chilopascal [kPa]	<input type="text"/>	Atmosfera [atm]	<input type="text"/>
Megapascal [MPa]	<input type="text"/>	Chilogrammo a centimetro quadro [kg/cm ²]	<input type="text"/>
Bar [bar]	<input type="text"/>	Libbra a pollice quadro [psi] pound / inch ²	<input type="text"/>
Metro di colonna d'acqua [mca, mH ₂ O]	<input type="text"/>	Libbra a piede quadro [lb _f /ft ²] pound / foot ²	<input type="text"/>
Millimetro di mercurio [mmHg, torr]	<input type="text"/>	Piede colonna d'acqua [ftH ₂ O] foot of water	<input type="text"/>

Molte altre grandezze fisiche sono espresse in unità di misura diverse...quasi tutte!

Conversione di unità

Se 1 litro (*L*) equivale a 0.264 galloni (*gal*)

Quanti litri sono 20 galloni?

Problema di equivalenza

$$1 L = 0.264 gal$$

Dividiamo tutto per 0.264

$$\frac{1L}{0.264} = \frac{0.264}{0.264} gal = 1gal$$

$$1 gal = (1 / 0.264) L = 3.79 L$$

$$20 gal = 20 \cdot 3.79 L = 75.8 L$$

Nel S.I. la **velocità** si misura in **m/s**

Convertire in **m/s** la velocità **v = 100 km/h**

$$1 \text{ h} = 3600 \text{ s} \quad ; \quad 1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

$$\text{Allora } v = 100 \text{ km/h} = 100 \cdot (1000 \text{ m}) / (3600 \text{ s}) =$$

$$100 * 1000 / 3600 \text{ m/s} = 27.78 \text{ m/s}$$

Convertire in **km/h** la velocità **v = 60 m/s**

$$1 \text{ m} = 1/1000 \text{ km} = 10^{-3} \text{ km} \quad ; \quad 1 \text{ s} = (1/3600) \text{ h} = 2.778 \cdot 10^{-4} \text{ h}$$

$$\text{Allora } v = 60 \text{ m/s} = 60 (1/1000) \text{ km} / [(1/3600) \text{ h}] =$$

$$60 \cdot 3600 / 1000 \text{ km/h} = 216 \text{ km/h}$$

Dimensioni fisiche

In **MECCANICA** si utilizzano come grandezze fondamentali

massa [M] → kg, **lunghezza** [L] → m e **tempo** [T] → s

$$v = s / t$$

$$[v] = [M]^0 [L]^1 [T]^{-1} = \text{m/s}$$

$$A_{\text{quadrato}} = d^2$$

$$[A] = [M]^0 [L]^2 [T]^0 = \text{m}^2$$

$$V_{\text{sfera}} = 4/3 \pi r^3$$

$$[V] = [M]^0 [L]^3 [T]^0 = \text{m}^3$$

g (accelerazione di gravità)

$$[a] = [M]^0 [L]^1 [T]^{-2} = \text{m/s}^2$$

$$E = 1/2 m v^2$$

$$[E] = [M]^1 [L]^2 [T]^{-2} = \text{kg m}^2/\text{s}^2$$

Tutte le grandezze fisiche **meccaniche** possono essere espresse come combinazione di queste tre dimensioni

Proprietà delle grandezze fisiche

Grandezze metrizzabili e grandezze non-metrizzabili:

- metrizzabili o estensive: grandezze per le quali si può definire un'operazione di somma (es.: lunghezza, tempo, massa, forza);
- non-metrizzabili o intensive (dette anche variabili di stato): sono grandezze per le quali non è possibile definire un'operazione di somma (es.: temperatura, densità, durezza).

Grandezze scalari e grandezze vettoriali:

- grandezze scalari definite dalla intensità + unità di misura;
- grandezze vettoriali definite dall'intensità, direzione e verso, oltre che da un'unità di misura. Ci torneremo

Proprietà delle grandezze fisiche

Grandezze fisiche e loro dipendenza dal tempo

- grandezze costanti nel tempo;
- grandezze variabili nel tempo;
- grandezze periodiche nel tempo;
- grandezze impulsive.

Nota Bene: La grandezza fondamentale tempo.

Il tempo nell'accezione comune: sequenza di stati mentali o, anche, successione di istanti (intervalli molti brevi di tempo!)

Il tempo secondo la Fisica è la dimensione dell'universo che consente di ordinare la sequenza degli eventi che si verificano in un dato luogo.

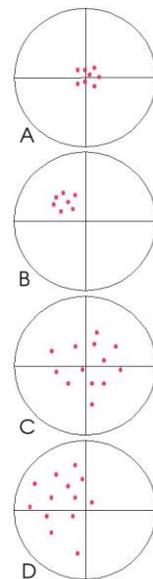
Gli errori di misura

Gli errori sperimentali derivano dall'indeterminazione con cui si associa ad una grandezza fisica il numero che ne rappresenta la misura, espressa in funzione di opportune unità di misura.

Esempi: distanza tra due punti (misura della lunghezza del segmento congiungente i due punti), temperatura di un corpo, la durata temporale di un evento, etc.

Gli errori di misura limitano la precisione con la quale si determina il valore numerico della grandezza fisica che si sta misurando. (Precisione, accuratezza, sensibilità e prontezza)

Una misura è sicuramente significativa quando l'errore ad essa associato è ben minore del valore numerico della misura stessa.



Precisione e cifre significative

Due tipi di errori sperimentali: errori sistematici ed errori accidentali o casuali.

Un modo un po' rozzo ma già efficace di comunicare l'errore di una misura è di dare le cifre significative solo fin tanto che esse non possano essere affette da presumibili errori. Ad esempio, nella misura della distanza l tra due punti con un regolo millimetrato, non ha senso indicare il valore della misura oltre alla cifra dei millimetri.

Per questo motivo in fisica le cifre che compaiono nel risultato numerico di una misura sono importanti; per esempio le seguenti misure della lunghezza ℓ

$$\ell_1 = 4,23\text{m} ; \quad \ell_2 = 4,230\text{m} \quad \text{non sono uguali};$$

la prima informa sulla misura effettuata fino al centimetro, la seconda fino al millimetro.

La convenzione comunemente adottata è quella di considerare l'ultima cifra come affetta da errore e quindi incerta; in altre parole le due misure precedenti dicono che

$$4,22\text{m} < \ell_1 < 4,24\text{m} ;$$

$$4,229\text{m} < \ell_2 < 4,231\text{m};$$

Precisione e cifre significative

Due tipi di errori sperimentali: errori sistematici ed errori accidentali o casuali.

Le cifre esatte e l'incerta, vengono dette cifre significative della misura. Eventuali cifre non significative non vanno espresse. Questo diviene particolarmente importante se un numero rappresenta il risultato di una misura indiretta, cioè se il valore è ottenuto da manipolazioni algebriche di misure ottenute direttamente dalla misura (per questo dette misure dirette).

Si supponga di voler misurare la lunghezza di un tratto di strada costituito da due tratti rettilinei a e b ; e che le misure della lunghezza dei due tratti, effettuate magari con metodi diversi, abbia dato i seguenti risultati:

$$a = 25,3\text{m} ; b = 14,21\text{m}$$

Cioè

$$25,2\text{m} < a < 25,4\text{m}; \quad 14,20\text{m} < b < 14,22\text{m};$$

$$\text{allora la lunghezza del tratto di strada è } 39,40\text{m} < a + b < 39,62\text{m}$$

Precisione e cifre significative

la lunghezza del tratto di strada è $39,40\text{m} < a + b < 39,62\text{m}$:

La prima cifra decimale è incerta \rightarrow è l'ultima cifra significativa.

La seconda cifra decimale non è significativa e non va indicata nel risultato.

La somma delle due grandezze va quindi approssimata all'ultima cifra significativa. Nel caso dell'esempio presente la somma delle due misure

$a + b = 39,51\text{m}$ va quindi esposta nel modo seguente:

$a + b = 39,5\text{m}$:

Tenendo conto di questo esempio, si adotta la seguente regola.

Nella somma e nella differenza di due misure l'ultima cifra significativa è l'ultima cifra significativa della misura meno precisa.

Notazione scientifica e ordine di grandezza

Con lo scopo di rendere immediatamente evidenti quali siano le cifre significative di una misura, è utile utilizzare la notazione scientifica;

questa prevede di indicare un numero mediante un coefficiente compreso fra 1 e 10 moltiplicato per una potenza di 10. Si considerino i seguenti esempi:

$$12 = 1,2 \cdot 10^1$$

$$2146,3 = 2,1463 \cdot 10^3$$

$$0,032 = 3,2 \cdot 10^{-2}$$

$$12446000000 = 1,2446 \cdot 10^{10}$$

$$0,00000000212 = 2,12 \cdot 10^{-9}$$

L'esponente di dieci che meglio approssima un numero viene detto ordine di grandezza del numero.

10^n	prefisso	simbolo
10^{12}	tera	<i>T</i>
10^9	giga	<i>G</i>
10^6	mega	<i>M</i>
10^3	chilo	<i>k</i>
10^2	etto	<i>h</i>
10^1	deca	<i>da</i>
10^{-1}	deci	<i>d</i>
10^{-2}	centi	<i>c</i>
10^{-3}	milli	<i>m</i>
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	<i>n</i>
10^{-12}	pico	<i>p</i>

Esprimere correttamente una grandezza

Riassumendo, come vanno indicate le grandezze fisiche (fisiche e non solo)?

Ad esempio, per una massa M :

$$M = 2,34 \pm 0,02 \text{ kg}$$

Valore della misura col giusto numero di cifre significative

Errore della misura

Unità di misura

Ma l'errore sulla misura come lo stimiamo? Ci sono alcune possibilità:

- 1) Leghiamo l'errore massimo sulla misura alla sensibilità dello strumento, cioè al valore minimo che lo strumento riesce ad apprezzare (es: un righello ha sensibilità = 1 mm).*
- 2) Impieghiamo una trattazione statistica dei dati, che tenga conto anche degli errori sperimentali legati non solo allo strumento ma anche all'operatore e a fattori casuali.*

Una opzione «intermedia»

- 1) *Leghiamo l'errore massimo sulla misura alla sensibilità dello strumento, cioè al valore minimo che lo strumento riesce ad apprezzare (es: un righello ha sensibilità = 1 mm).*
- 2) *Impieghiamo una trattazione statistica dei dati, che tenga conto anche degli errori sperimentali legati non solo allo strumento ma anche all'operatore e a fattori casuali.*

Abbiamo visto che l'opzione «2», se percorribile, è la migliore, perché tiene conto degli effetti probabilistici legati alla fluttuazione degli errori casuali, fornendoci il valore della deviazione standard (rms). Questo parametro ci dice quanto è larga la gaussiana, cioè quanto sono dispersi i valori delle misure → Minore è la dispersione, minore è l'incertezza associata alla misura.

L'opzione 1 è molto semplicistica, perché tiene conto solo della sensibilità caratteristica dello strumento e non dei fattori casuali. Non tiene conto minimamente della riproducibilità della misura.

Quale può essere una terza opzione? Effettuare un numero discreto di misure (ad esempio 10) e valutare così le **incertezze assoluta** e **relativa** della misura

L'incertezza assoluta

Se la misura ripetuta più volte fornisce **risultati diversi**, allora si assumono: 1) come valore della grandezza incognita la media **X_m** tra i valori trovati e

2) come incertezza assoluta **dx** la metà della differenza tra il valore massimo e il valore minimo, tra quelli misurati, che è detta **semidispersione massima o scarto medio**.

Esempio: misuriamo 10 volte la lunghezza della navata di una chiesa:

n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Lunghezza (m)	15,2	15,0	15,1	15,2	15,3	15,0	15,2	15,4	15,5	15,1

Media aritmetica:

$$m = (15,2 + 15,0 + 15,1 + 15,2 + 15,3 + 15,0 + 15,2 + 15,4 + 15,5 + 15,1) m : 10 = 15,2 m$$

Per trovare l'**incertezza assoluta** dobbiamo fare la differenza tra il valore *massimo* e quello *minimo* e dividere per 2: il valore ottenuto (che prende il nome di **scarto medio** o **semi-dispersione massima**) corrisponderà all'incertezza assoluta **se sarà maggiore della sensibilità** dello strumento.

L'errore assoluto

Se così è, stiamo quantomeno valutando approssimativamente il contributo degli errori casuali.

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$$

(15,5 - 15,0) m : 2 = 0,25 m

La lunghezza del corridoio risulta essere $l = (15,2 \pm 0,25) \text{ m}$

Generalizziam

o:

$$X = (a \pm \Delta a) [u. d. m.]$$

Quindi, 3 casi, dal meno affidabile al più affidabile:

- 1) **Errore della misura determinato dalla sensibilità dello strumento**
- 2) **Errore assoluto valutato come semi-dispersione massima**
- 3) **Deviazione standard ottenuta dallo studio statistico della distribuzione dei valori (è l'equivalente dell'errore assoluto del caso due per N grande)**

L'errore relativo

L'errore assoluto ci fornisce un'indicazione dell'intervallo in cui si troverà probabilmente il valore vero della grandezza da misurare ma, di per se, non ci dà informazioni sulla «bontà» della misura.

Esempio: se un errore assoluto di un centimetro sulla misura della distanza di 10 km indicherebbe una misura molto precisa, lo stesso errore assoluto su una lunghezza di 10 centimetri indicherebbe una misurazione molto approssimativa.

Per stabilire se l'errore è «accettabile», è necessario calcolare l'errore relativo η :

$$\eta = \frac{\Delta x}{\bar{x}}$$

Con Δx errore assoluto e \bar{x} la media aritmetica dei valori misurati. Il valore relativo è un numero adimensionale, perché ottenuto dividendo due valori che hanno la stessa unità di misura.

L'errore relativo

L'errore relativo viene molto spesso fornito in percentuale, cioè moltiplicandolo per %. **Tipicamente si considera una misura accettabile se affetta da un'incertezza relativa massima del 5%.**

Completando l'analogia con la distribuzione normale vista in precedenza, anche nel caso di uno studio statistico della distribuzione dei valori misurati è possibile calcolare un parametro simile: il coefficiente di variazione (CV).

Questo parametro, indice della precisione di una serie di misure, si ottiene dividendo la deviazione standard per il valore medio:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

Il coefficiente di variazione permette di valutare la dispersione dei valori attorno alla media, indipendentemente dall'unità di misura.

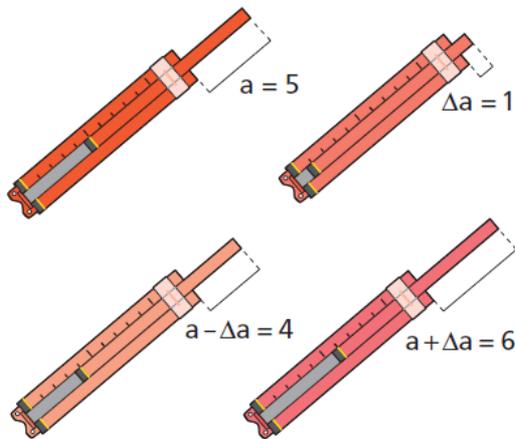
Cenni alla teoria della propagazione degli errori

Finora abbiamo trattato come si stima l'incertezza associata a una «singola misura» (intesa come tante misure di una singola grandezza). Ma cosa succede se dobbiamo, ad esempio, sommare due grandezze entrambe affette da un proprio errore?

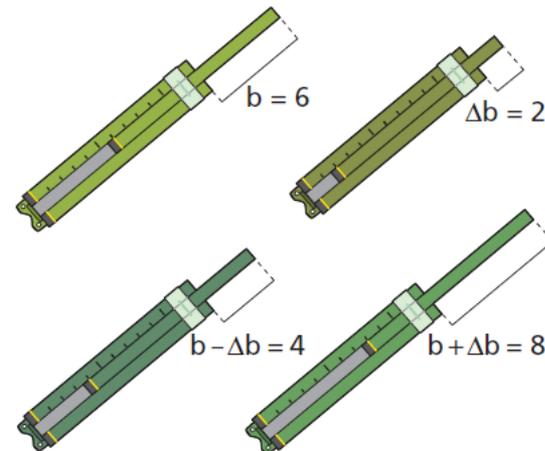
Ricaviamo l'errore sulla somma:

Indichiamo con \bar{a} e \bar{b} i valori misurati per le grandezze a e b . Tenendo conto degli errori Δa e Δb ,

► il valore sperimentale della grandezza a può variare tra $\bar{a} - \Delta a$ e $\bar{a} + \Delta a$,



► mentre quello di b è compreso tra $\bar{b} - \Delta b$ e $\bar{b} + \Delta b$.



Cenni alla teoria della propagazione degli errori

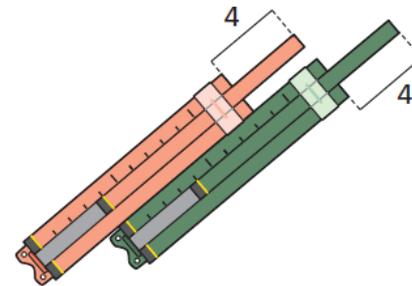
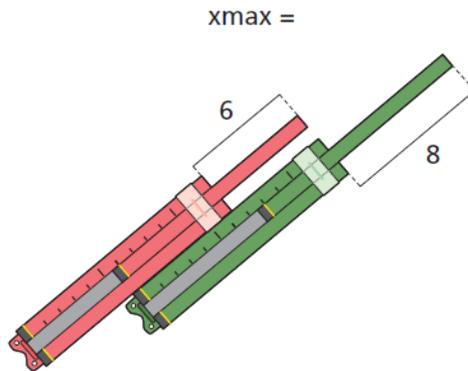
Consideriamo ora la grandezza x , somma di a e di b : $x = a + b$.

► Il massimo valore di x , x_{\max} , si ottiene prendendo i valori più grandi di a e di b , cioè $\bar{a} + \Delta a$ e $\bar{b} + \Delta b$:

$$x_{\max} = \bar{a} + \Delta a + \bar{b} + \Delta b.$$

► Il minimo valore di x , x_{\min} , si ha scegliendo i valori più piccoli di a e di b , cioè $\bar{a} - \Delta a$ e $\bar{b} - \Delta b$:

$$x_{\min} = \bar{a} - \Delta a + \bar{b} - \Delta b.$$



L'errore di x allora è dato dalla formula per il calcolo dell'errore massimo:

$$\begin{aligned}\Delta(a + b) &= \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} = \frac{\bar{a} + \Delta a + \bar{b} + \Delta b - (\bar{a} - \Delta a + \bar{b} - \Delta b)}{2} = \\ &= \frac{\bar{a} + \bar{b} - \bar{a} - \bar{b} + \Delta a + \Delta b + \Delta a + \Delta b}{2} = \frac{2\Delta a + 2\Delta b}{2} = \Delta a + \Delta b.\end{aligned}$$

Cenni alla teoria della propagazione degli errori

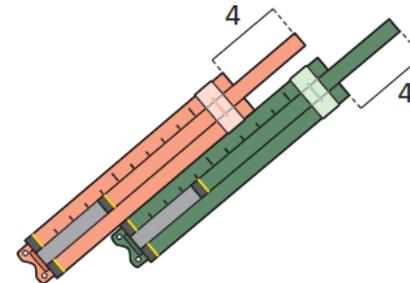
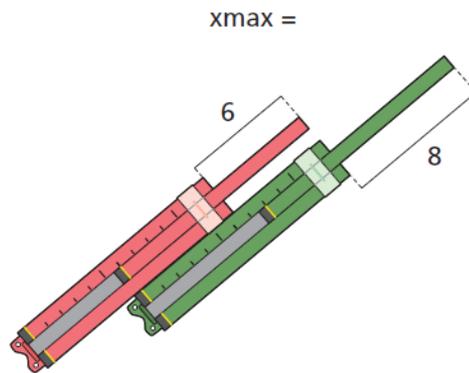
Consideriamo ora la grandezza x , somma di a e di b : $x = a + b$.

► Il massimo valore di x , x_{\max} , si ottiene prendendo i valori più grandi di a e di b , cioè $\bar{a} + \Delta a$ e $\bar{b} + \Delta b$:

$$x_{\max} = \bar{a} + \Delta a + \bar{b} + \Delta b.$$

► Il minimo valore di x , x_{\min} , si ha scegliendo i valori più piccoli di a e di b , cioè $\bar{a} - \Delta a$ e $\bar{b} - \Delta b$:

$$x_{\min} = \bar{a} - \Delta a + \bar{b} - \Delta b.$$



L'errore di x allora è dato dalla formula per il calcolo dell'errore massimo:

$$\begin{aligned}\Delta(a + b) &= \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} = \frac{\bar{a} + \Delta a + \bar{b} + \Delta b - (\bar{a} - \Delta a + \bar{b} - \Delta b)}{2} = \\ &= \frac{\bar{a} + \bar{b} - \bar{a} - \bar{b} + \Delta a + \Delta b + \Delta a + \Delta b}{2} = \frac{2\Delta a + 2\Delta b}{2} = \Delta a + \Delta b.\end{aligned}$$

Quindi: $\Delta(a + b) = \Delta a + \Delta b.$

Con un procedimento analogo possiamo dimostrare anche l'errore sulla differenza

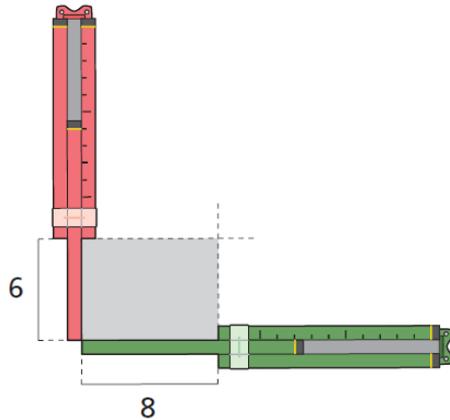
Cenni alla teoria della propagazione degli errori

Ricaviamo l'errore sul prodotto:

Consideriamo ora la grandezza x , **prodotto** di a e di b : $x = a \cdot b$.

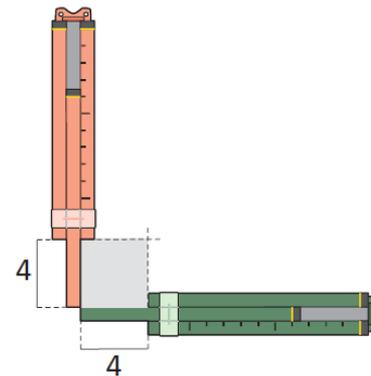
► Il massimo valore di x , x_{\max} , si ottiene prendendo i valori più grandi di a e di b , cioè $\bar{a} + \Delta a$ e $\bar{b} + \Delta b$:

$$x_{\max} = (\bar{a} + \Delta a) \cdot (\bar{b} + \Delta b).$$



► Il minimo valore di x , x_{\min} , si ha scegliendo i valori più piccoli di a e di b , cioè $\bar{a} - \Delta a$ e $\bar{b} - \Delta b$:

$$x_{\min} = (\bar{a} - \Delta a) \cdot (\bar{b} - \Delta b).$$



$$\begin{aligned} x_{\max} &= (\bar{a} + \Delta a) \cdot (\bar{b} + \Delta b) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \Delta b + \bar{b} \cdot \Delta a + \Delta a \cdot \Delta b \cong \\ &\cong \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \Delta b + \bar{b} \cdot \Delta a. \end{aligned}$$

Con un procedimento analogo si ricava la formula per

$$x_{\min} \cong \bar{a} \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot \Delta b - \bar{b} \cdot \Delta a.$$

Cenni alla teoria della propagazione degli errori

A questo punto calcoliamo l'errore sul prodotto:

$$\begin{aligned}\Delta(a \cdot b) &= \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} = \\ &= \frac{\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \Delta b + \bar{b} \cdot \Delta a - (\bar{a} \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot \Delta b - \bar{b} \cdot \Delta a)}{2} = \\ &= \frac{\bar{a} \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \Delta b + \bar{b} \cdot \Delta a + \bar{a} \cdot \Delta b + \bar{b} \cdot \Delta a}{2} = \\ &= \frac{2\bar{a} \cdot \Delta b + 2\bar{b} \cdot \Delta a}{2} = \bar{a} \cdot \Delta b + \bar{b} \cdot \Delta a.\end{aligned}$$

Riassumendo:

$$\Delta(a \cdot b) = \bar{a} \cdot \Delta b + \bar{b} \cdot \Delta a$$

Dividendo i due membri per $\bar{a} \cdot \bar{b}$ otteniamo la formula che fornisce l'errore relativo:

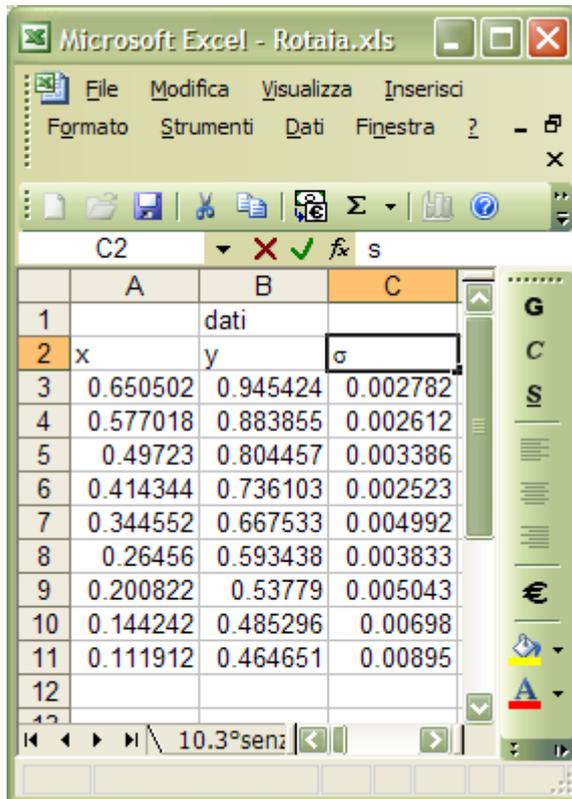
$$\frac{\Delta(a \cdot b)}{\bar{a} \cdot \bar{b}} = \frac{\bar{a} \cdot \Delta b + \bar{b} \cdot \Delta a}{\bar{a} \cdot \bar{b}} = \frac{\bar{a} \cdot \Delta b}{\bar{a} \cdot \bar{b}} + \frac{\bar{b} \cdot \Delta a}{\bar{a} \cdot \bar{b}} = \frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}}.$$

In modo simile si dimostra anche la formula per il quoziente

Cenni su: regressione lineare e fit di dati sperimentali

Ipotizziamo di avere una serie di N dati (x,y) . Sia σ l'errore sulle y . Guardando l'andamento dei punti è ragionevole supporre che y sia una funzione lineare di x , cioè

$$y = mx + q$$



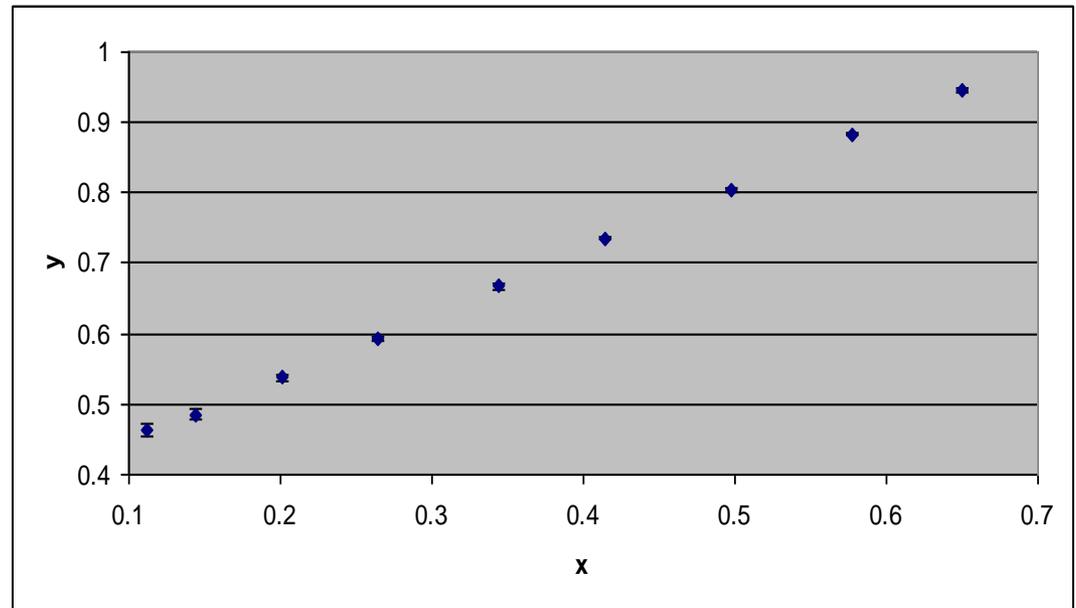
Microsoft Excel - Rotaia.xls

File Modifica Visualizza Inserisci
Formato Strumenti Dati Finestra ?

C2 X ✓ ✗ f x s

	A	B	C
1		dati	
2	x	y	σ
3	0.650502	0.945424	0.002782
4	0.577018	0.883855	0.002612
5	0.49723	0.804457	0.003386
6	0.414344	0.736103	0.002523
7	0.344552	0.667533	0.004992
8	0.26456	0.593438	0.003833
9	0.200822	0.53779	0.005043
10	0.144242	0.485296	0.00698
11	0.111912	0.464651	0.00895
12			
13			

10.3°senz



Metodo dei minimi quadrati (1)

Studio della dipendenza di y da un'altra grandezza x (verifica di una legge fisica, misura dei parametri di un sistema, etc.)

La dipendenza viene studiata per punti misurando n coppie (x_i, y_i) delle due variabili

Supponiamo che:

- **Le misure delle grandezze x_i ed y_i siano affette da errori indipendenti tra loro**
- **L'errore sulla variabile x sia trascurabile**
- **la variabile y e` distribuita con errore casuale gaussiano σ_y uguale in tutti i punti.**

Metodo dei minimi quadrati (2)

La dipendenza di y da x è in generale definita da un certo numero di parametri.

Ad esempio per una dipendenza lineare si hanno 2 parametri a e b

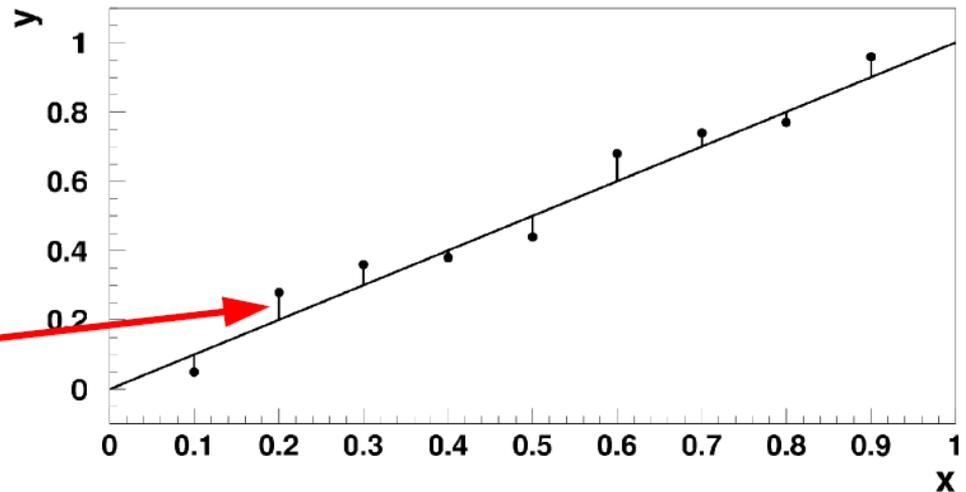
$$y=a+bx$$

Es. Moto rettilineo uniforme in cui y è la posizione ed x il tempo:
 a è la posizione al tempo $t=0$ e b la velocità nel moto

Si definiscono gli scarti δy_i
tra valore misurato di y_i e
valore atteso da x_i :

$$\delta y_i = y_i - (a + bx_i)$$

I δy_i sono rappresentati dai
segmentini verticali in figura



Metodo dei minimi quadrati (3)

Si introduce la somma quadratica Q degli scarti δy_i di tutte le misure y_i dal valore predetto dalla dipendenza teorica da x_i

$$Q = \sum (\delta y_i)^2$$

Nel metodo dei minimi quadrati si determinano i parametri che governano la dipendenza **imponendo che essi rendano minima Q**

Ad esempio nel caso lineare
 $y = a + bx$

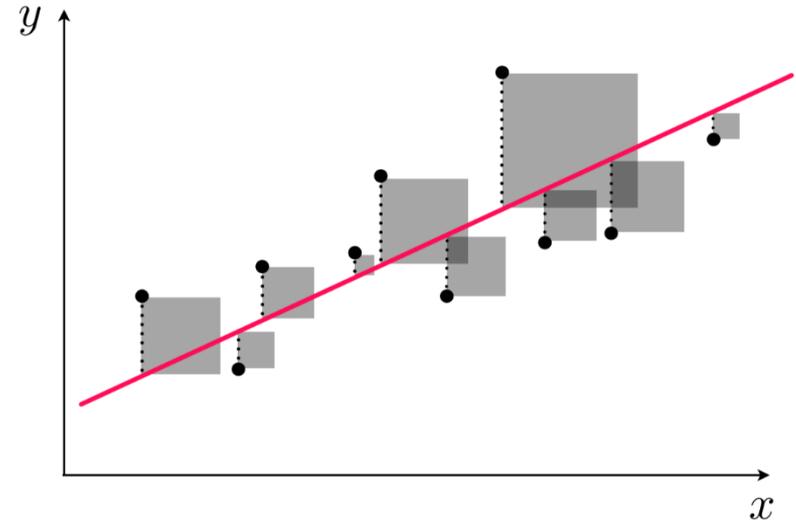
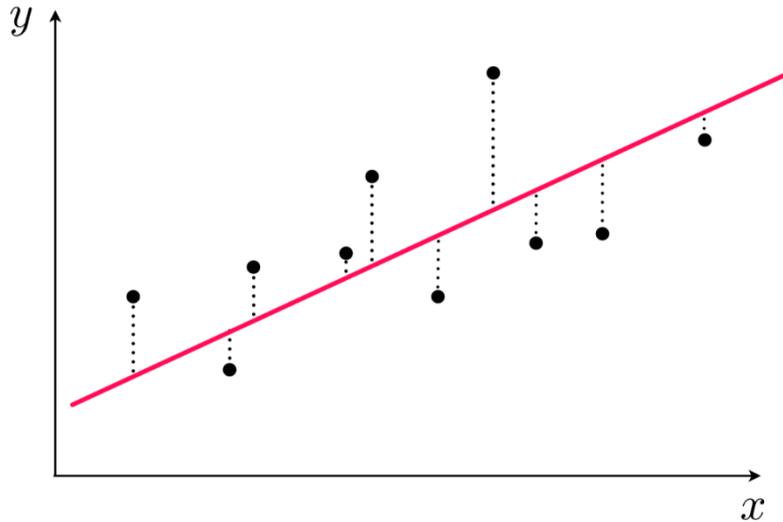
$$\Rightarrow Q = \sum_{i=1}^n (\delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2$$

Imponendo Q minima si ottiene 

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}$$

Perché «minimi quadrati»?



Il metodo consiste proprio nel minimizzare la somma delle aree dei quadrati (Q)!

$$Q = \sum_{i=1}^n (\delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2$$

Minore sarà il valore di Q, e migliore sarà il “fit” dei dati → La retta approssimerà al meglio possibile la relazione tra i due parametri.

Il coefficiente di determinazione

In statistica, il coefficiente di determinazione, (più comunemente R^2), è una proporzione tra la variabilità dei dati e la correttezza del modello statistico utilizzato. Esso misura la frazione della varianza della variabile dipendente espressa dalla regressione. Non esiste una definizione concordata di R^2 . Nelle regressioni lineari semplici esso è semplicemente il quadrato del coefficiente di correlazione:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

$$ESS = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

È la devianza spiegata dal modello (Explained Sum of Squares);

$$TSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

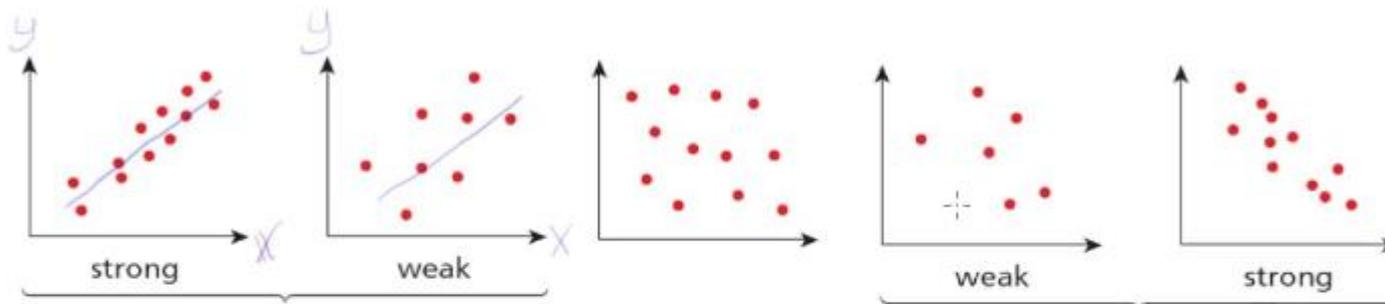
È la devianza totale (Total Sum of Squares);

$$RSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

È la devianza residua (Residual Sum of Squares);

- y_i sono i dati osservati;
- \bar{y} è la loro media;
- \hat{y}_i sono i dati stimati dal modello ottenuto dalla regressione.

R^2 varia tra 0 ed 1: quando è 0 il modello utilizzato non spiega per nulla i dati; quando è 1 il modello spiega perfettamente i dati.

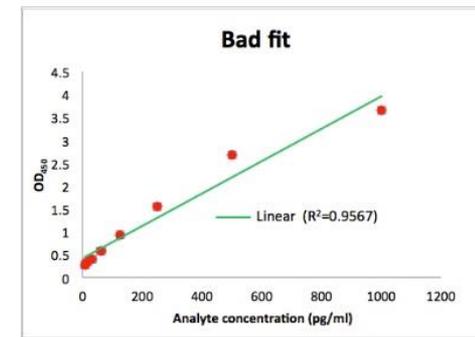
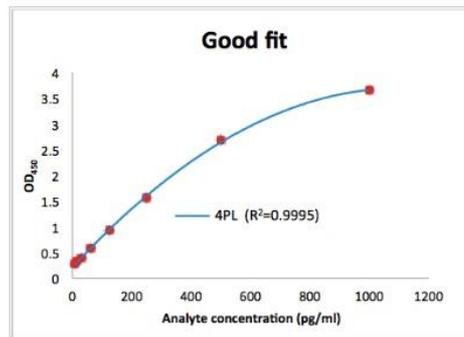
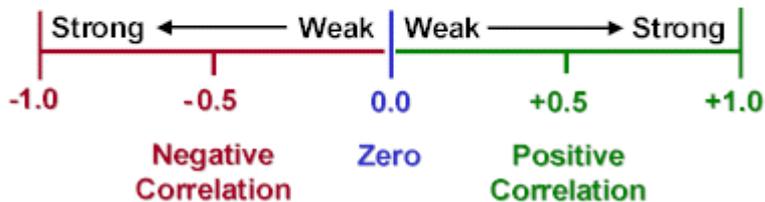


Positive correlation: both data sets increase together.

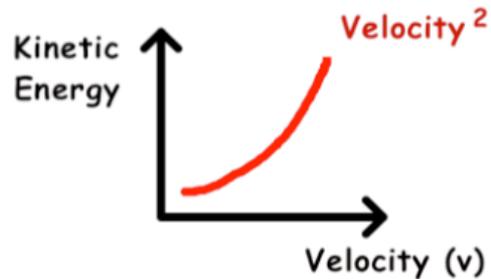
No correlation: changes in one data set do not affect the other data set.

Negative correlation: as one data set increases, the other decreases.

Correlation Coefficient
Shows Strength & Direction of Correlation

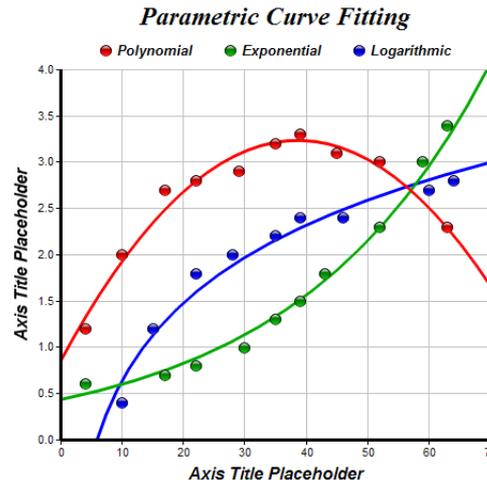


Ma attenzione: in natura le grandezze legate da una proporzione lineare sono poche!



Ad esempio l'energia cinetica di un corpo varia col quadrato della sua velocità

Nei casi in cui la legge non è di tipo lineare, è inutile tentare di «fittare» i dati con una equazione del tipo $y=a+bx$!



Grandezze scalari e vettoriali

Le grandezze fisiche si dividono in due categorie principali:

Grandezze **SCALARI**

Grandezze **VETTORIALI**

Gli scalari sono grandezze fisiche descrivibili con un solo valore numerico:

Temperatura, pressione, lunghezza, energia, etc.

I vettori sono grandezze fisiche che non possono essere completamente descritte con un solo valore numerico e che richiedono quindi una informazione ed una descrizione più complessa:

Posizione, velocità, accelerazione, forza, etc.

Vettori

I **vettori** sono un'entità matematica astratta che hanno proprietà condivise dalla categoria delle **grandezze fisiche vettoriali**.

Grandezze fisiche vettoriali : forza, velocità, accelerazione, campo elettrico e magnetico, ecc., ecc...

Un **vettore** è assegnato attraverso il **modulo** (chiamato anche **intensità**), la **direzione** ed il **verso**.

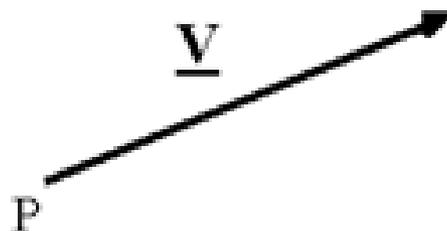
Un vettore sarà indicato con un carattere sottolineato \underline{V} mentre il suo modulo verrà indicato con V oppure con $|\underline{V}|$. Quindi avremo

$$V = |\underline{V}|$$

Vettori – rappresentazione grafica

Un **vettore** può essere rappresentato graficamente con una freccia.

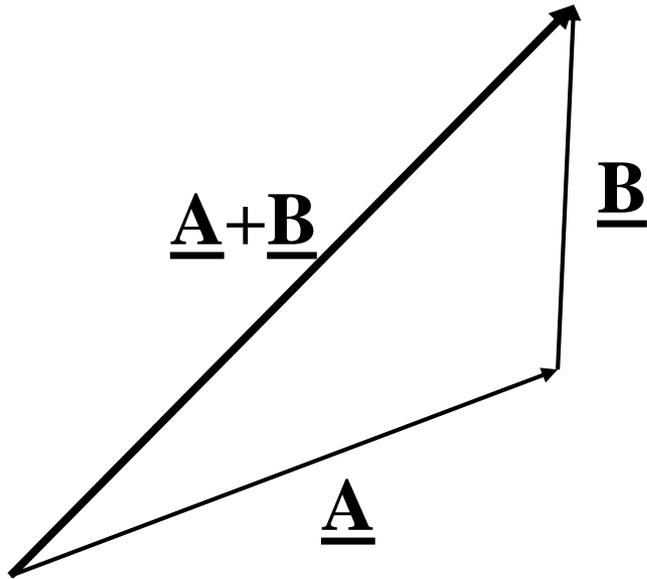
Questo modo di operare è utile nelle situazioni bidimensionali (**2D**), quando cioè si può lavorare in un piano (**piano di figura**).



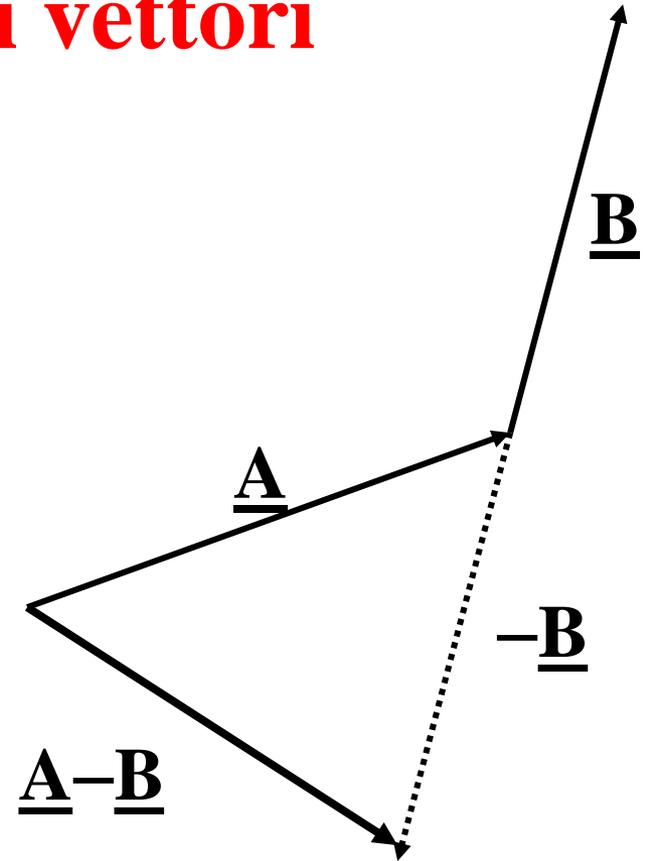
In determinate situazioni si parla di **vettori applicati**. Nella figura il vettore \underline{V} è applicato al punto P.

Nelle situazioni 2D si possono agevolmente **sommare** o **sottrarre** vettori in **modalità grafica**.

Operazioni sui vettori



Somma di due vettori



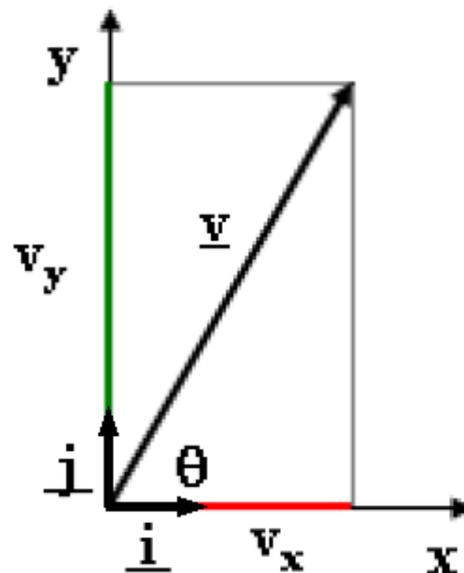
Differenza tra due vettori

Vettori in 2D

con \underline{i} e \underline{j} si indicano i versori degli assi x e y

$$|\underline{i}| = |\underline{j}| = 1$$

$$\underline{v} = v_x \underline{i} + v_y \underline{j}$$



$$v_x = v \cos \theta$$

$$v_y = v \sin \theta$$

v_x e v_y sono le componenti di \underline{v}

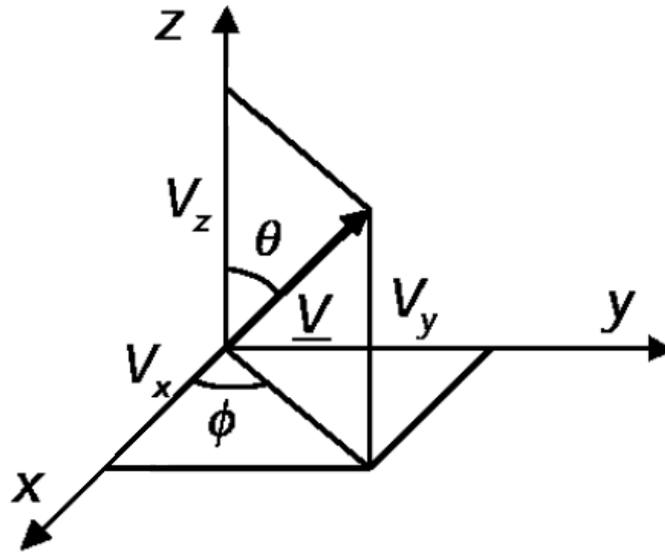
$$\tan \theta = v_y / v_x$$

Modulo di \underline{v}

$$\theta = \text{atan}(v_y / v_x) + \frac{1 - \text{sign}(v_x)}{2} \pi$$

$$|\underline{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Vettori in 3D



Nello spazio tridimensionale (3D) un vettore \underline{V} è individuato da 3 quantità che, come mostrato in figura, possono essere o

intensità V e i due angoli θ e ϕ che individuano direzione e verso di \underline{V} oppure

le 3 componenti cartesiane V_x , V_y , V_z (rappresentazione cartesiana)

Vettori in rappresentazione cartesiana

Nella rappresentazione cartesiana si assegna un vettore \underline{V} mediante le sue componenti cartesiane

$$\underline{V} = V_x \underline{i} + V_y \underline{j} + V_z \underline{k}$$

dove \underline{i} , \underline{j} e \underline{k} sono rispettivamente i versori degli assi x, y e z.

Si scrive anche

$$\underline{V} \equiv (V_x, V_y, V_z)$$

e il modulo di \underline{V} è dato da

$$V = \frac{|\underline{V}|}{1} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

Vettori in rappresentazione cartesiana

Somma e differenza

Dati i vettori $\underline{\mathbf{A}} \equiv (A_x, A_y, A_z)$ e $\underline{\mathbf{B}} \equiv (B_x, B_y, B_z)$

la loro somma $\underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{B}}$

è data da

$$\underline{\mathbf{C}} \equiv (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$$

e la loro differenza

$$\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{A}} - \underline{\mathbf{B}}$$

è data da

$$\underline{\mathbf{D}} \equiv (A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z)$$

Prodotto di vettore con scalare

Dati il vettore \underline{V} e lo scalare a , si indica con $a \underline{V}$ il prodotto di a con \underline{V} . Questa operazione dà come risultato il seguente nuovo vettore

$$a \underline{V} \equiv (aV_x, aV_y, aV_z)$$

ottenuto moltiplicando tutte le componenti di \underline{V} per lo scalare a

Prodotto scalare (1)

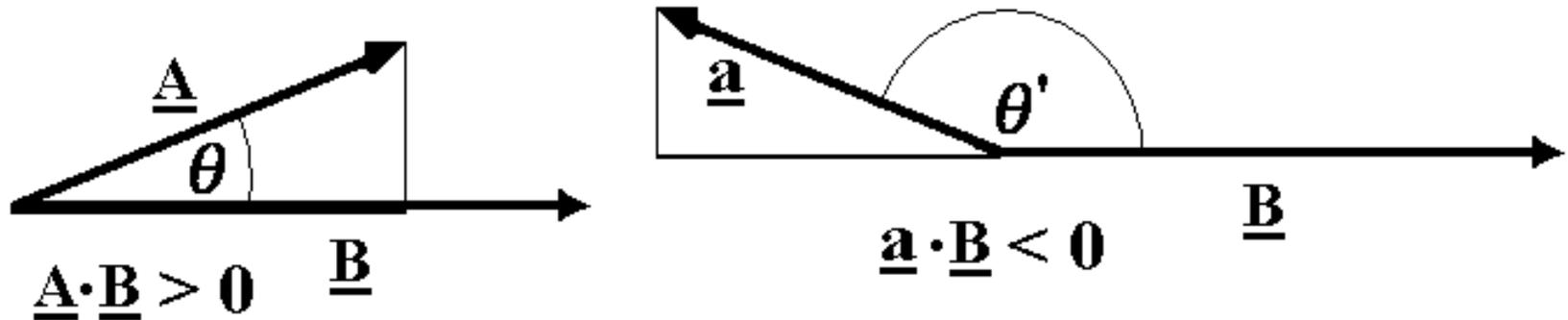
Il prodotto scalare eseguito sulla coppia di vettori $\underline{\mathbf{A}}$ e $\underline{\mathbf{B}}$ viene indicato con $\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{B}}$ e dà uno scalare che può essere espresso in termini delle componenti cartesiane dei due vettori come segue

$$\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{B}} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

ossia come somma dei prodotti delle componenti corrispondenti.

Esiste un altro modo per calcolare $\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{B}}$.

Prodotto scalare (2)



Lo stesso prodotto scalare può essere espresso come

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A B \cos \theta$$

dove A e B sono i moduli dei due vettori e θ è l'angolo compreso (vedi figura). Il segno di $\underline{A} \cdot \underline{B}$ è determinato dal segno di $\cos \theta$.

La formula può essere anche interpretata come prodotto di B (modulo di \underline{B}) per la proiezione di \underline{A} sulla direzione di \underline{B} .

Prodotto vettoriale (1)

Tra A e B può essere effettuato un altro tipo di prodotto, il **prodotto vettoriale** (o **esterno**) il quale genera un vettore. Si indica come

$$\underline{C} = \underline{A} \times \underline{B}$$

dove C è un vettore ortogonale al piano individuato da A e B. Il modulo di C è dato da

$$C = A B \sin \theta$$

dove **A** e **B** sono i moduli dei due vettori e **θ** è il minimo angolo che sovrappone A su B. Il prodotto vettoriale è antisimmetrico poiché vale

$$\underline{C} = \underline{A} \times \underline{B} = - \underline{B} \times \underline{A}$$

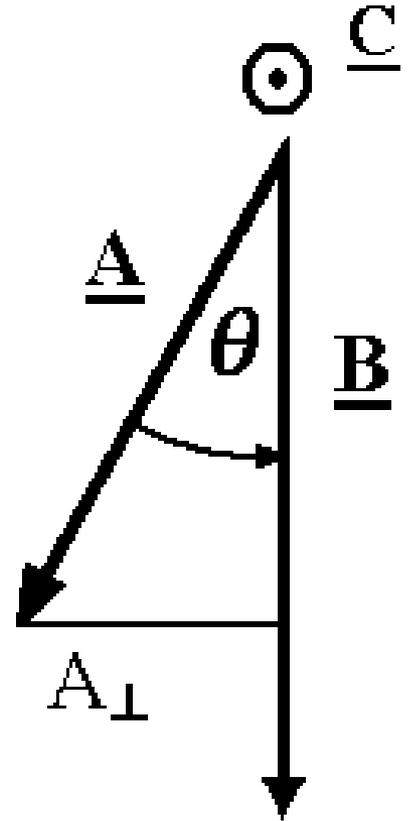
Prodotto vettoriale (2)

Essendo l'angolo θ compreso tra 0 e π , si ha $C \geq 0$ (come deve essere per un modulo!). Il verso di C è uscente dal piano di figura se la rotazione che porta \underline{A} su \underline{B} è antioraria ed entrante se è oraria.

Si può anche scrivere

$$C = A B \sin \theta = A_{\perp} B$$

dove A_{\perp} è la componente di \underline{A} perpendicolare a \underline{B}



Riassunto sui prodotti con vettori

Con

Scalari: k, p

Vettori : $\underline{A} = (A_x, A_y, A_z)$; $\underline{B} = (B_x, B_y, B_z)$; $\underline{C} = (C_x, C_y, C_z)$

Tipo di operazione	Tipo di risultato	Rappresentazione cartesiana	Rappresentazione sintetica
Moltiplicazione per uno scalare k	Vettore	(kA_x, kA_y, kA_z)	$k\underline{A}$
Prodotto scalare $p = \underline{A} \cdot \underline{B}$	Scalare	$p = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$	$p = A \cdot B \cos \theta$
Prodotto vettoriale $\underline{C} = \underline{A} \times \underline{B}$	Vettore	$\underline{C} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$	$\underline{C} \perp \underline{A}$ e $\underline{C} \perp \underline{B}$ $C = A \cdot B \sin \theta$