

Lezioni sui processi relativistici e il Modello Standard

Carlo Becchi* e Giovanni Ridolfi†

*Dipartimento di Fisica dell'Università di Genova
e INFN, Sezione di Genova,
Via Dodecaneso 33, I-16146, Genova, Italy*

*E-mail: carlomaria.becchi@ge.infn.it

†E-mail: giovanni.ridolfi@ge.infn.it

Indice

1	Introduzione	4
2	La teoria dei campi relativistici e lo scattering in approssimazione semiclassica	6
2.1	Il campo scalare e la sua azione	6
2.2	L'approssimazione semiclassica e le condizioni asintotiche	10
2.3	La sezione d'urto	13
2.4	La soluzione dell'equazione del campo	17
2.5	Il calcolo dell'ampiezza di transizione	19
2.6	Il metodo dei diagrammi di Feynman	23
2.7	L'urto elastico	25
2.8	L'ampiezza invariante	26
2.9	Le regole di Feynman del modello scalare	27
2.10	Le simmetrie in teoria dei campi	29
2.11	Campi carichi e antiparticelle	31
2.12	I campi spinoriali	32
2.13	Termini di massa per i campi spinoriali e accoppiamenti con gli scalari	37
3	I modelli delle interazioni fondamentali	41
3.1	L'elettrodinamica spinoriale	41
3.2	Un esempio: lo scattering Compton	47
3.3	L'elettrodinamica scalare	48
3.4	Il modello di Higgs abeliano	49
3.5	Il contenuto fisico del modello di Higgs abeliano	52
3.6	Il criterio di rinormalizzabilità	55
3.7	Correnti e cariche non commutative	56
3.8	La teoria di Yang-Mills	57
3.9	Le teorie di gauge non abeliane e modello di Higgs della teoria elettrodebole	60
3.10	Gli spinori della teoria elettrodebole	67
A	Evoluzione del campo libero a grandi tempi	74
B	La diffusione da parte di una densità esterna	76
C	Le matrici di Dirac	78

D Gradi di libertà non fisici nei campi vettoriali

80

E Nota bibliografica

83

Capitolo 1

Introduzione

Queste lezioni sono dedicate a un'introduzione quantitativa del Modello Standard inquadrato nella teoria generale dei processi quanto-relativistici.

La fisica dei processi relativistici è basata sullo studio dei fenomeni d'urto alle alte energie (cioè alle energie molto grandi rispetto all'energia propria $E = Mc^2$ del protone), regime in cui tendono a essere prodotte grandi quantità di nuove particelle con grandi impulsi e quindi con lunghezze d'onda associate relativamente piccole.

In queste condizioni, a causa della produzione di particelle, la fisica richiede il ricorso a schemi teorici nuovi rispetto quelli basati sull'equazione di Schrödinger e su funzioni d'onda dipendenti da un numero fisso di variabili. Vanno piuttosto scelti modelli analoghi all'elettromagnetismo che descrive processi che comportano l'irraggiamento e quindi la creazione, o l'assorbimento, di fotoni. L'analogia con l'elettromagnetismo conduce in modo naturale alla teoria dei campi, in cui le variabili dinamiche necessarie per descrivere lo stato di un sistema sono gli stessi campi, variabili definite e indipendenti in tutti i punti dello spazio.

La teoria dei campi quanto-relativistici costituisce uno schema assai complesso e difficile da trattare in tutti i suoi risvolti. Fortunatamente, in un regime di piccole lunghezze d'onda è possibile trattare gli effetti quantistici in approssimazione semiclassica ottenendo, nella maggior parte dei casi, risultati del tutto soddisfacenti, ed evitando di affrontare gli aspetti più tecnici della teoria dei campi quantistici.

Le lezioni seguiranno dunque la traccia seguente: inizieremo trattando il caso più semplice, quello delle particelle senza spin e dei campi scalari, descrivendone l'azione e le variabili dinamiche nei vari regimi associati al processo d'urto, in particolare a quelli di campo piccolo che è associato agli stati asintotici. Introduremo poi l'approssimazione semiclassica per le ampiezze; nell'ambito dei processi d'urto, studieremo il problema delle condizioni asintotiche sulla dinamica, cioè la descrizione dei processi d'urto molto prima e molto dopo l'urto stesso. Definite le condizioni asintotiche, troveremo la corrispondente soluzione semiclassica delle equazioni dinamiche, e calcoleremo a partire da queste soluzioni le ampiezze di transizione. Questo calcolo comporta qualche sottigliezza matematica legata al fatto che il processo d'urto è schematizzato con durata infinita; questo comporta l'esecuzione di un limite sull'integrale d'azione stesso. Otterremo in questo modo una formula generale per i processi d'urto che applicheremo innanzi tutto al caso elastico, calcolandone esplicitamente la sezione d'urto differenziale. Successiva-

mente, allo scopo di descrivere i processi con creazione di particelle, ricorreremo al metodo dei diagrammi di Feynman che applicheremo al caso con quattro corpi nello stato finale.

Esaurita così la trattazione del caso più semplice, studieremo alcuni casi di modelli con simmetrie isotopiche, cioè modelli che coinvolgono più campi legati da proprietà di simmetria. Mostriamo che questi sistemi sono caratterizzati dall'esistenza di correnti conservate. Partendo dal caso di un'unica corrente conservata sarà possibile introdurre l'elettrodinamica del campo scalare accoppiando la corrente conservata al potenziale tetra-vettoriale elettromagnetico. Il risultato verrà inquadrato in un principio generale, quello della simmetria di *gauge*, che verrà immediatamente esteso al modello di Higgs abeliano.

Studieremo poi la possibilità di cariche non commutative (non abeliane) cioè cariche che non possono essere definite simultaneamente; generalizzando il principio di *gauge* a questo caso sarà possibile introdurre il campo di Yang e Mills e, successivamente, il modello di Higgs non commutativo (non abeliano). Studieremo in particolare il settore bosonico del modello standard delle interazioni elettrodeboli, cioè la particella di Higgs e i bosoni intermedi.

Il passo successivo sarà l'introduzione, accanto ai campi scalari e vettoriali, di quelli spinoriali, che permetteranno l'introduzione di leptoni e quark, della cromodinamica quantistica (QCD) e il completamento della teoria elettrodebole.

Capitolo 2

La teoria dei campi relativistici e lo scattering in approssimazione semiclassica

2.1 Il campo scalare e la sua azione

Nella descrizione dei sistemi relativistici le variabili dinamiche sono identificate con i campi, che sono funzioni definite in ogni punto dello spazio. Tra gli esempi più importanti ricordiamo i campi elettromagnetici e quelli di Dirac e di Yukawa, che permettono di esprimere in modo diretto il principio di covarianza, secondo il quale le equazioni della dinamica sono invarianti per cambiamenti del sistema di riferimento, il principio di causalità, che garantisce che gli effetti seguano temporalmente le cause, e quello collegato di località, che prevede che le variabili associate a punti diversi dello spazio siano indipendenti.

Nella teoria dei campi le equazioni della dinamica sono formulate in base al principio di stazionarietà dell'azione. Quest'ultima, in base ai principi di covarianza e località, viene definita come l'integrale su tutto lo spazio e sull'intervallo di tempo significativo di una densità lagrangiana:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d\vec{r} \mathcal{L}(\vec{r}, t) . \quad (2.1.1)$$

\mathcal{L} è funzione locale dei campi e delle loro derivate prime spazio-temporali. Quest'ultima condizione corrisponde alla richiesta di equazioni di propagazione con derivate di ordine non superiore al secondo.

Il principio di covarianza richiede che \mathcal{L} si trasformi come un campo scalare: passando dal sistema di riferimento O a O' con coordinate tetra-vettoriali $x' = \Lambda x$, come ad esempio

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.1.2)$$

la densità lagrangiana si trasforma nel modo seguente:

$$\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(\Lambda^{-1}x). \quad (2.1.3)$$

Nel caso in cui il campo ϕ si trasforma come uno scalare si avrà:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2c^2} (\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2} [(\nabla \phi)^2 + \mu^2 \phi^2] - \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad (2.1.4)$$

in cui si riconosce la struttura tipica di una lagrangiana differenza fra un termine cinetico, il primo (∂_t è la derivata parziale rispetto al tempo), e un potenziale. Un criterio fondamentale, detto di rinormalizzabilità, vincola il potenziale a dipendere dalle potenze del campo scalare non superiori a 4. Il criterio di rinormalizzabilità sarà discusso in maggior dettaglio nel capitolo 3.6.

Nel formalismo covariante scriviamo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial \phi)^2 - \mu^2 \phi^2] - \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad (2.1.5)$$

ricordando che ∂ è il tetra-vettore delle derivate parziali e $\partial^2 = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2$; la densità di energia corrispondente è data da:

$$U = \frac{1}{2c^2} (\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2} [(\nabla \phi)^2 + \mu^2 \phi^2] + \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (2.1.6)$$

Considerando la variazione dell'azione per una generica variazione $\delta\phi$ di ϕ per cui $\delta\phi(t_1, \vec{r}) = \delta\phi(t_2, \vec{r}) = 0$ e localizzata nello spazio, si ha

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d\vec{r} \left[\partial \phi \partial \delta \phi - \mu^2 \phi \delta \phi - \frac{\lambda}{3!} \phi^3 \delta \phi \right] \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \int d\vec{r} \left[\partial^2 \phi + \mu^2 \phi + \frac{\lambda}{3!} \phi^3 \right] \delta \phi. \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

La condizione di stazionarietà dell'azione connessa con l'arbitrarietà di $\delta\phi$ conduce quindi all'equazione del campo:

$$\partial^2 \phi + \mu^2 \phi + \frac{\lambda}{3!} \phi^3 = 0. \quad (2.1.8)$$

Nel limite di ϕ infinitesimo, cioè al primo ordine in ϕ , l'ultimo termine diventa trascurabile e l'equazione diventa lineare:

$$\partial^2 \phi + \mu^2 \phi = 0. \quad (2.1.9)$$

In Appendice A si osserva che una soluzione generica di questa equazione tende a zero a grandi tempi come la potenza $-3/2$ del tempo. Questo suggerisce che una soluzione generica della (2.1.8) ha lo stesso andamento, dato che gli effetti dei termini non lineari d'interazione nell'equazione completa risultano infinitesimi al limite asintotico rispetto ai termini lineari. Questo argomento verrà subito usato nel prossimo capitolo identificando le condizioni iniziali e finali dei processi studiati con soluzioni libere.

È facile dimostrare come il campo nel limite libero si presti a un'interpretazione particellare. A questo scopo, osserviamo innanzi tutto che la densità di energia al limite libero diventa:

$$U_0 = \frac{1}{2c^2} (\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2} [(\nabla \phi)^2 + \mu^2 \phi^2] . \quad (2.1.10)$$

Facendo riferimento a un volume spaziale finito V , la corrispondente energia totale $E = \int_V d\vec{r} U_0$ può essere decomposta secondo i modi normali sviluppando il campo in serie di Fourier:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \tilde{\phi}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} , \quad (2.1.11)$$

ottenendo:

$$E = \frac{1}{2c^2} \sum_{\vec{k}} [|\partial_t \tilde{\phi}_{\vec{k}}|^2 + \omega^2 |\tilde{\phi}_{\vec{k}}|^2] \quad (2.1.12)$$

dove

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \mu^2 . \quad (2.1.13)$$

La (2.1.12), descrivendo l'energia del campo come quella di un sistema di oscillatori armonici, permette di quantizzare il campo stesso collegandone le ampiezze di Fourier agli operatori di creazione e distruzione associati ai modi normali, secondo le formule, valide in rappresentazione di Schrödinger:

$$\tilde{\phi}_{\vec{k}} = c \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (A_{\vec{k}} + A_{-\vec{k}}^\dagger) \quad , \quad \partial_t \tilde{\phi}_{\vec{k}} = -ic \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} (A_{\vec{k}} - A_{-\vec{k}}^\dagger) . \quad (2.1.14)$$

Gli operatori $A_{\vec{k}}$ e $A_{\vec{k}}^\dagger$ distruggono e, rispettivamente, creano particelle di impulso $\hbar\vec{k}$.

Dalla formula per l'energia si deduce l'Hamiltoniana:

$$H = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^\dagger A_{\vec{k}} + \text{costante} , \quad (2.1.15)$$

da cui si vede che le particelle di impulso $\hbar\vec{k}$ hanno l'energia:

$$\hbar\omega_{\vec{k}} = \sqrt{c^2 \hbar^2 (k^2 + \mu^2)} , \quad (2.1.16)$$

e quindi massa $m = \hbar \frac{\mu}{c}$. Dato che le particelle in questione sono libere, chiameremo (2.1.9) *l'equazione libera*, e nella densità lagrangiana distingueremo la parte *libera*, che si identifica con quella quadratica nei campi, dal resto, che chiameremo *l'interazione* e che indicheremo di norma con \mathcal{L}_I .

Allo stato corrispondente a una particella di impulso $\hbar\vec{k}$ è associato il vettore di stato $A_{\vec{k}}^\dagger |0\rangle$ se $|0\rangle$ rappresenta lo stato di vuoto.

Gli operatori di creazione e distruzione soddisfano le regole di commutazione:

$$[A_{\vec{k}}, A_{\vec{q}}^\dagger] = \delta_{\vec{k}, \vec{q}} .$$

Inoltre, se indichiamo con $|\{N_{\vec{q}}\}\rangle$ lo stato con $N_{\vec{q}}$ particelle di impulso $\hbar\vec{q}$ per ogni q , si ha

$$A_{\vec{k}}|\{N_{\vec{q}}\}\rangle = \sqrt{N_{\vec{q}}} |\{N_{\vec{q}} - \delta_{\vec{k},\vec{q}}\}\rangle \quad e \quad A_{\vec{k}}^\dagger|\{N_{\vec{q}}\}\rangle = \sqrt{N_{\vec{q}} + 1} |\{N_{\vec{q}} + \delta_{\vec{k},\vec{q}}\}\rangle. \quad (2.1.17)$$

Dalla (2.1.11) si vede che il campo quantistico libero evoluto al tempo t in rappresentazione di Heisenberg si decompone nel modo seguente:

$$\phi(\vec{r}, t) = c\sqrt{\frac{\hbar}{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left(A_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}}t} + A_{-\vec{k}}^\dagger e^{i\omega_{\vec{k}}t} \right). \quad (2.1.18)$$

Il passaggio al limite di volume infinito si effettua nel modo usuale: la variabile discreta \vec{k} assume in questo caso valori continui, e le somme su \vec{k} vanno sostituite da integrali tridimensionali:

$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\vec{k}. \quad (2.1.19)$$

Corrispondentemente,

$$\delta_{\vec{k},\vec{q}} \rightarrow \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(\vec{k} - \vec{q}). \quad (2.1.20)$$

Definiamo ora gli operatori $A(\vec{k})$, funzioni della variabile continua \vec{k} , nel modo seguente:

$$A(\vec{k}) = \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}} A_{\vec{k}}, \quad (2.1.21)$$

in modo che

$$[A(\vec{k}), A^\dagger(\vec{q})] = \delta(\vec{k} - \vec{q}). \quad (2.1.22)$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= c\sqrt{\frac{\hbar}{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left(A_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}}t} + A_{-\vec{k}}^\dagger e^{i\omega_{\vec{k}}t} \right) \\ &= c\sqrt{\frac{\hbar}{V}} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left[A(\vec{k}) e^{-i\omega_{\vec{k}}t} + A^\dagger(-\vec{k}) e^{i\omega_{\vec{k}}t} \right] \\ &= \frac{c\sqrt{\hbar}}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{k} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left[A(\vec{k}) e^{-i\omega_{\vec{k}}t} + A^\dagger(-\vec{k}) e^{i\omega_{\vec{k}}t} \right]. \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

Utilizzando la notazione tetra-vettoriale

$$k \cdot x = \omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r}, \quad (2.1.24)$$

abbiamo infine

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{c\sqrt{\hbar}}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{k} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left[A(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} + A^\dagger(\vec{k}) e^{ik \cdot x} \right]. \quad (2.1.25)$$

Nel formalismo della seconda quantizzazione un generico operatore viene sviluppato in somme di prodotti degli operatori di creazione e distruzione. Ogni termine di questo sviluppo induce una ben determinata transizione dallo stato iniziale in cui le particelle occupano gli stati su cui agiscono gli operatori di distruzione allo stato finale caratterizzato dagli operatori di creazione. Nel caso in cui le singole particelle occupano stati nettamente distinti, come accade in quasi tutti quelli d'interesse in fisica relativistica, un operatore di distruzione sullo stato di impulso $\hbar\vec{k}$ contribuisce al calcolo di un elemento di matrice tramite la trasformata di Fourier della funzione d'onda di una particella iniziale $\psi(\vec{k})$. Nel caso di più particelle nello stato iniziale, il prodotto degli operatori di distruzione contribuisce all'elemento di matrice tramite il prodotto simmetrizzato delle trasformate di Fourier delle funzioni d'onda delle particelle coinvolte. Similmente, il prodotto degli operatori di creazione contribuisce all'elemento di matrice tramite il prodotto simmetrizzato delle trasformate di Fourier delle funzioni d'onda complesse coniugate delle particelle nello stato finale.

2.2 L'approssimazione semiclassica e le condizioni asintotiche

Stabilite e identificate le variabili dinamiche rilevanti nei processi relativistici, passiamo a considerare i problemi connessi con la valutazione delle relative ampiezze di transizione in approssimazione semi-classica. Come è ben evidenziato in qualunque testo introduttivo alla meccanica quantistica, l'ampiezza di transizione fra lo stato i e lo stato f è approssimata al limite semi-classico da

$$A_{i \rightarrow f} = e^{\frac{i}{\hbar} S_{i \rightarrow f}} , \quad (2.2.1)$$

dove $S_{i \rightarrow f}$ è l'azione corrispondente alla traiettoria (cammino) che descrive classicamente la transizione. L'esempio più noto è quello di una particella non relativistica che, nell'intervallo di tempo T , passa dal punto \vec{r}_I al punto \vec{r}_F ; classicamente il moto avviene con velocità $\vec{v} = \frac{\vec{r}_F - \vec{r}_I}{T}$ e quindi l'azione vale:

$$S_{i \rightarrow f} = T \frac{m}{2} v^2 = \frac{m (\vec{r}_F - \vec{r}_I)^2}{2T} . \quad (2.2.2)$$

L'ampiezza corrispondente è data, al limite semiclassico, dall'espressione

$$A_{i \rightarrow f} \sim e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m(\vec{r}_F - \vec{r}_I)^2}{2T}} , \quad (2.2.3)$$

che dà luogo ai noti fenomeni di interferenza.

Passiamo ora al caso di un processo di scattering relativistico, caratterizzato dall'energia E . Si deve osservare anzitutto che il processo di scattering ha durata praticamente infinita rispetto al tempo caratteristico $\frac{\hbar}{E}$, e quindi l'ampiezza va calcolata valutando l'azione (2.1.1) in corrispondenza della soluzione delle equazioni del campo (2.1.8) che interpola tra una configurazione iniziale a $t \rightarrow -\infty$ e una finale a $t \rightarrow +\infty$, che in base a quanto detto corrispondono a soluzioni dell'equazione del campo libero, eq. (2.1.9). La relazione fra campo asintotico e funzioni d'onda degli stati iniziale e finale viene individuata dalla decomposizione del campo asintotico in termini

degli operatori di creazione e distruzione, eq. (2.1.18), e della corrispondenza di questi operatori con le funzioni d'onda descritta alla fine del paragrafo precedente.

Vediamo ora come tutto questo si realizza in pratica. L'idea più ovvia sarebbe quella di individuare una configurazione del campo al tempo $-T$, $\phi_I(\vec{r})$, e un'altra configurazione al tempo T , $\phi_F(\vec{r})$, e passare poi al limite $T \rightarrow \infty$. Questo tuttavia non è possibile, come si vede subito trattando il caso del campo libero. Per semplicità di calcolo consideriamo la trasformata di Fourier del campo:

$$\tilde{\phi}(\vec{k}, t) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{r} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \phi(\vec{r}, t) . \quad (2.2.4)$$

Allo scopo di semplificare le formule scegliamo anche il sistema di unità di misura naturale per i processi relativistici in cui $\hbar = c = 1$. In questo sistema di unità di misura si ha semplicemente

$$m = \mu; \quad E_k = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} . \quad (2.2.5)$$

Per la trasformata di Fourier del campo abbiamo dunque le condizioni al contorno:

$$\tilde{\phi}(\vec{k}, +T) = \tilde{\phi}_F(\vec{k}) \quad , \quad \tilde{\phi}(\vec{k}, -T) = \tilde{\phi}_I(\vec{k}) . \quad (2.2.6)$$

La forma generale della soluzione dell'equazione (2.1.9) è

$$\tilde{\phi}(\vec{k}, t) = \tilde{\phi}_+(\vec{k}) e^{iE_k t} + \tilde{\phi}_-(\vec{k}) e^{-iE_k t} . \quad (2.2.7)$$

La traiettoria del campo libero è determinata da due funzioni arbitrarie $\tilde{\phi}_+$ e $\tilde{\phi}_-$ che devono essere ricavate invertendo il sistema

$$\begin{pmatrix} \tilde{\phi}_F(\vec{k}) \\ \tilde{\phi}_I(\vec{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{iE_k T} & e^{-iE_k T} \\ e^{-iE_k T} & e^{iE_k T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_+(\vec{k}) \\ \tilde{\phi}_-(\vec{k}) \end{pmatrix} . \quad (2.2.8)$$

Si tratta dunque di risolvere il sistema (2.2.8), valutare l'azione tra $-T$ e T , e andare infine al limite $T \rightarrow \infty$. Questo presenta una difficoltà fondamentale, dato che la matrice in (2.2.8) non è uniformemente invertibile al variare di T . Questa difficoltà rende necessaria una riformulazione delle condizioni al contorno.

A questo scopo, tenendo conto della (2.2.7), osserviamo che si ha:

$$e^{\pm iE_k t} \tilde{\phi}(\vec{k}, t) \Big|_{|t| \rightarrow +\infty} \rightarrow \tilde{\phi}_{\mp}(\vec{k}) , \quad (2.2.9)$$

dove i limiti vanno intesi in *senso debole*, cioè a meno di termini con fattori di fase rapidamente variabili che si annullano sostituendo $e^{\pm iE_k t} \tilde{\phi}(\vec{k}, t)$ col suo valore medio su un piccolo volume dello spazio degli impulsi. Per essere più precisi introduciamo il campo mediato:

$$\tilde{\phi}_{f,\pm}(t) \equiv \int d\vec{k} f(\vec{k}) e^{\mp iE_k t} \tilde{\phi}(\vec{k}, t) ,$$

assumendo che f sia una funzione sufficientemente regolare che si annulla rapidamente fuori da un volumetto nello spazio degli impulsi (si pensi a una gaussiana). Utilizzando il risultato fornito in (A.0.7) in appendice A per un f gaussiano, si vede subito che

$$\tilde{\phi}_{f,\pm}(t) \Big|_{|t| \rightarrow +\infty} \rightarrow \int d\vec{k} f(\vec{k}) \tilde{\phi}_{\pm}(\vec{k}) , \quad (2.2.10)$$

che chiarisce il senso della (2.2.9).

Nel caso del campo interagente, al limite semiclassico, ci si aspetta un comportamento asintotico analogo. In effetti, come già osservato, una soluzione generica dell'equazione del campo si evolve a grandi tempi verso soluzioni dell'equazione libera che, a loro volta, appaiono come combinazioni lineari di pacchetti d'onda di ampiezza localmente infinitesima. Peraltro R. Haag ha mostrato che, sotto ipotesi molto naturali, qualunque elemento di matrice del campo interagente converge asintoticamente nel senso della (2.2.10) allo stesso elemento di matrice del campo libero.

La condizione al contorno debole si scrive nel modo seguente:

$$e^{iE_k t} \tilde{\phi}(\vec{k}, t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \tilde{\phi}_I(\vec{k}), \quad (2.2.11)$$

$$e^{-iE_k t} \tilde{\phi}(\vec{k}, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \tilde{\phi}_F(\vec{k}), \quad (2.2.12)$$

in modo da isolare la parte di distruzione del campo nel lontano passato, e quella di creazione nel lontano futuro. Queste equazioni mostrano che il campo è determinato dagli elementi di matrice della sua parte di distruzione (con frequenza negativa) al tempo $t \rightarrow -\infty$, e da quelli della sua parte di creazione (con frequenza positiva) al tempo $t \rightarrow +\infty$. L'ampiezza di scattering relativistica in approssimazione semiclassica è dunque determinata dai valori attribuiti a queste componenti. D'altra parte l'ampiezza di scattering deve dipendere in modo simmetrico dalle funzioni d'onda delle particelle nello stato iniziale, e dalle funzioni d'onda complesse coniugate delle particelle nello stato finale. Questa condizione di simmetria, combinata con il fatto che i campi liberi sono funzioni lineari degli operatori di creazione e distruzione, i quali assumono il valore delle funzioni d'onda delle particelle iniziali e finali, permette di concludere che i valori asintotici del campo in trasformata di Fourier sono lineari e simmetrici nelle funzioni d'onda, e quindi

$$\tilde{\phi}_I(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_k}} \sum_{i=1}^2 \psi_{\vec{p}_i}(\vec{k}), \quad (2.2.13)$$

nel lontano passato, e

$$\tilde{\phi}_F(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_k}} \sum_{j=1}^n \psi_{\vec{k}_j}^*(\vec{k}), \quad (2.2.14)$$

nel lontano futuro. Qui sopra \vec{p}_i e \vec{k}_j sono gli impulsi medi delle particelle iniziali e finali rispettivamente.

Le due prescrizioni asintotiche possono essere riassunte in una sola osservando che la soluzione dell'equazione libera:

$$\tilde{\phi}^{(as)}(\vec{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_k}} \left[\sum_{i=1}^2 \psi_{\vec{p}_i}(\vec{k}) e^{-iE_k t} + \sum_{j=1}^n \psi_{\vec{k}_j}^*(\vec{k}) e^{iE_k t} \right] \quad (2.2.15)$$

le soddisfa entrambe. Si chiederà dunque che il campo interagente evolva debolmente a grandi tempi verso il campo asintotico (2.2.15). L'espressione della trasformata di Fourier inversa della

(2.2.15) è

$$\phi^{(as)}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d\vec{k} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \left[\sum_{i=1}^2 \psi_{\vec{p}_i}(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} + \sum_{j=1}^N \psi_{\vec{k}_j}^*(\vec{k}) e^{ik \cdot x} \right] \quad (2.2.16)$$

Sarà utile disporre di una forma esplicita per i pacchetti d'onda. Per semplicità ci limiteremo a considerare pacchetti d'onda di forma gaussiana:

$$\psi_{\vec{p}_0}(\vec{p}) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}\sigma)^{3/2}} e^{-\frac{(\vec{p}-\vec{p}_0)^2}{2\sigma^2}}; \quad \int d\vec{p} |\psi_{\vec{p}_0}(\vec{p})|^2 = 1, \quad (2.2.17)$$

dove il parametro σ , che definisce l'indeterminazione in impulso, e quindi l'inverso della dimensione spaziale dei pacchetti, verrà assunto eguale per tutte le particelle.

Una ulteriore semplificazione si ottiene utilizzando la rappresentazione molto schematica delle onde piane, che corrisponde a prendere il limite $\sigma \rightarrow 0$ nell'espressione (2.2.17). Si trova

$$\psi_{\vec{k}_j}(\vec{q}_j) \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3}{(\sqrt{\pi}\sigma)^{3/2}} \delta(\vec{q}_j - \vec{k}_j) = (\sqrt{4\pi}\sigma)^{3/2} \delta(\vec{q}_j - \vec{k}_j). \quad (2.2.18)$$

In questo limite, tenendo conto delle (2.2.13) e (2.2.14), le condizioni asintotiche diventano quindi

$$e^{iE_k t} \tilde{\phi}(\vec{k}, t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4\pi}\sigma)^{3/2}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{i=1}^2 \frac{\delta(\vec{k} - \vec{p}_i)}{\sqrt{2E_{p_i}}} \quad (2.2.19)$$

$$e^{-iE_k t} \tilde{\phi}(\vec{k}, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4\pi}\sigma)^{3/2}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{j=1}^n \frac{\delta(\vec{k} + \vec{k}_j)}{\sqrt{2E_{k_j}}}. \quad (2.2.20)$$

e la eq. (2.2.16) diventa

$$\phi^{(as)}(\vec{x}, t) = \frac{(\sqrt{4\pi}\sigma)^{3/2}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left[\sum_{i=1}^2 \frac{e^{-ip_i \cdot x}}{\sqrt{2E_{p_i}}} + \sum_{j=1}^n \frac{e^{ik_j \cdot x}}{\sqrt{2E_{k_j}}} \right]. \quad (2.2.21)$$

In Appendice B presentiamo l'applicazione del nostro metodo a un modello particolarmente semplice, in cui le particelle associate al campo interagiscono con un potenziale esterno dipendente dal tempo. Mostriamo in particolare che le ampiezze risultanti dall'azione combinata del potenziale a tempi differenti fattorizza nel prodotto nell'ordine temporale delle singole ampiezze. Cioè, per esempio, la transizione fra lo stato iniziale e quello finale di una particella dovuta all'azione combinata del potenziale a due tempi successivi è la somma su tutti gli stati intermedi possibili dei prodotti delle singole ampiezze. Questo risultato mostra come la nostra scelta delle condizioni iniziali e finali sia consistente col principio di causalità.

2.3 La sezione d'urto

Abbiamo stabilito che il processo di scattering corrisponde a una transizione fra lo stato asintotico corrispondente ai pacchetti di onde piane associate alle particelle iniziali e quello associato alle

particelle finali. In base al principio di sovrapposizione degli stati, la meccanica quantistica associa a una generica transizione un'ampiezza identificabile con l'elemento di matrice fra lo stato iniziale e quello finale di un opportuno operatore. Nel caso dello scattering questo operatore è detto matrice \mathbf{S} . Data l'omogeneità dello spazio-tempo la matrice \mathbf{S} conserva energia e impulso totali del sistema.

Nei calcoli espliciti l'ampiezza di scattering corrisponde all'integrale:

$$A_{i \rightarrow f} = \int \psi_{\vec{k}_1}^*(\vec{q}_1) d\vec{q}_1 \dots \psi_{\vec{k}_n}^*(\vec{q}_n) d\vec{q}_n d\vec{Q}_1 d\vec{Q}_2 \mathbf{S}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n; \vec{Q}_1, \vec{Q}_2) \psi_{\vec{p}_1}(\vec{Q}_1) \psi_{\vec{p}_2}(\vec{Q}_2), \quad (2.3.1)$$

dove, tenendo conto della conservazione dell'energia e dell'impulso totali, possiamo scrivere:

$$\mathbf{S}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n; \vec{Q}_1, \vec{Q}_2) = -2\pi i \delta\left(\sum_i \vec{q}_i - \vec{Q}_1 - \vec{Q}_2\right) \delta\left(\sum_i E_{q_i} - E_{Q_1} - E_{Q_2}\right) T(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n; \vec{Q}_1, \vec{Q}_2). \quad (2.3.2)$$

Le funzioni di pacchetto sono le stesse che appaiono in (2.2.13) e (2.2.14), e hanno la forma (2.2.17). La probabilità di transizione è data da $|A_{i \rightarrow f}|^2$.

D'altra parte la densità di probabilità di produzione di n particelle di impulsi rispettivi $\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n$ è data da:

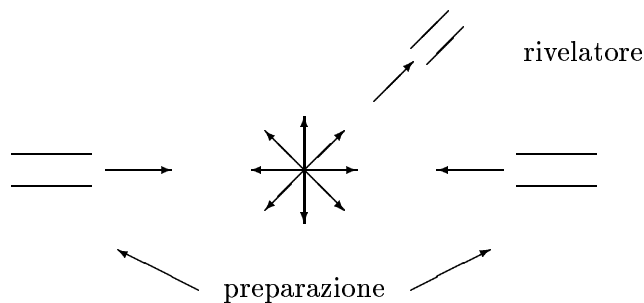
$$W(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) = \left| \int d\vec{Q}_1 d\vec{Q}_2 \mathbf{S}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n; \vec{Q}_1, \vec{Q}_2) \psi_{\vec{p}_1}(\vec{Q}_1) \psi_{\vec{p}_2}(\vec{Q}_2) \right|^2. \quad (2.3.3)$$

Per confrontare la (2.3.1) con la (2.3.3) va osservato che le funzioni di pacchetto scelte non forniscono una base ortonormale di stati di singola particella. Tuttavia il sistema è completo, dato che nessuna funzione d'onda è ortogonale a tutte le funzioni di pacchetto. Gli esperimenti misurano la sezione d'urto differenziale dei processi che, come vedremo subito, è strettamente collegata alla densità di probabilità di transizione nello spazio degli stati finali (lo spazio delle fasi). Evidentemente il riferimento alle funzioni di pacchetto implica un processo di media su regioni dello spazio degli stati finali (cioè, su regioni dello spazio degli impulsi) di singola particella, tanto più accurato quanto più σ è piccolo. Dato che il nostro calcolo è basato in modo sostanziale sul riferimento a funzioni di pacchetto, è opportuno verificare come venga raggiunta la densità di probabilità cercata nel limite di σ infinitesimo. Assumendo che i pacchetti d'onda delle particelle nello stato finale abbiano la forma gaussiana eq. (2.2.17), e tenendo conto della (2.2.18), si ha

$$\frac{|A_{i \rightarrow f}|^2}{(\sqrt{4\pi\sigma})^{3n}} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} W. \quad (2.3.4)$$

dove, si badi bene, abbiamo separato la dipendenza dalle dimensioni dei pacchetti relativi agli stati finali da quella dei pacchetti relativi agli stati iniziali che intervengono nel calcolo della luminosità, al quale ci accingiamo.

Passando dagli aspetti formali a quelli fisici, osserviamo che il processo di misura associato allo scattering si articola in due stadi. Il primo stadio consiste nella preparazione, tramite opportuni collimatori - acceleratori, di un fascio rappresentabile tramite pacchetti di onde iniziali. Il secondo nell'analisi dello stato finale tramite opportuni collimatori - rivelatori.



In molte situazioni fisicamente importanti (ma non in tutte) uno dei due fasci è a riposo nel laboratorio. La situazione da noi discussa ha invece carattere del tutto generale.

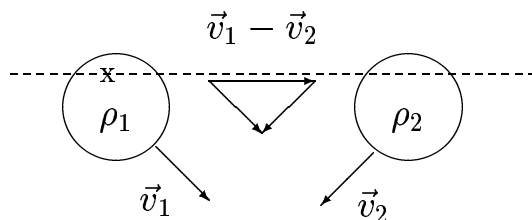
Siano $\psi_{\vec{p}_1}$ e $\psi_{\vec{p}_2}$ le funzioni d'onda dei due pacchetti iniziali. In tutti i casi di interesse pratico i pacchetti corrispondenti non si sparpagliano in modo significativo e quindi le densità di probabilità corrispondenti si evolvono traslando rigidamente:

$$\rho_i(\vec{r}, t) = \rho_i(\vec{r} - \vec{v}_i t) \quad , \quad i = 1, 2 \quad (2.3.5)$$

dove

$$\vec{v}_i = \frac{\vec{p}_i}{E_{p_i}} \equiv \frac{\vec{p}_i}{\sqrt{|\vec{p}_i|^2 + m_i^2}} \quad (2.3.6)$$

Definiamo *luminosità integrata* del sistema di preparazione (nel caso di un solo fascio si parla di flusso) il rapporto, calcolato per d infinitesimo, tra la probabilità che, in assenza di interazione, le due particelle si avvicinino a distanza relativa inferiore a d , e πd^2 .



Per calcolare la luminosità si consideri la figura qui sopra e si osservi che, trovandosi la particella 1 nel punto x , la probabilità considerata, per d infinitesimo, è eguale a πd^2 volte l'integrale di ρ_2 lungo la retta tratteggiata, cioè:

$$\pi d^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \rho_2(\vec{r} + (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)t) \quad (2.3.7)$$

Integrando su tutte le possibili scelte del punto x e dividendo per πd^2 si ha la formula della luminosità integrata:

$$L = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \int d\vec{r} dt \rho_1(\vec{r}) \rho_2(\vec{r} + (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)t)$$

$$\begin{aligned}
&= |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \int d\vec{r} dt \rho_1(\vec{r} - \vec{v}_1 t) \rho_2(\vec{r} - \vec{v}_2 t) \\
&= |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \int d\vec{r} dt \rho_1(\vec{r}, t) \rho_2(\vec{r}, t) .
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Introducendo le funzioni d'onda si ha:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}{(2\pi)^6} \int d\vec{r} dt d\vec{Q}_1 d\vec{Q}'_1 d\vec{Q}_2 d\vec{Q}'_2 e^{i(\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 - \vec{Q}'_1 - \vec{Q}'_2) \cdot \vec{r}} e^{-i(E_{Q_1} + E_{Q_2} - E_{Q'_1} - E_{Q'_2})t} \\
&\quad \psi_{\vec{p}_1}^*(\vec{Q}'_1) \psi_{\vec{p}_1}(\vec{Q}_1) \psi_{\vec{p}_2}^*(\vec{Q}'_2) \psi_{\vec{p}_2}(\vec{Q}_2) \\
&= \frac{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}{(2\pi)^2} \int d\vec{Q}_1 d\vec{Q}'_1 d\vec{Q}_2 d\vec{Q}'_2 \delta(\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 - \vec{Q}'_1 - \vec{Q}'_2) \delta(E_{Q_1} + E_{Q_2} - E_{Q'_1} - E_{Q'_2}) \\
&\quad \psi_{\vec{p}_1}^*(\vec{Q}'_1) \psi_{\vec{p}_1}(\vec{Q}_1) \psi_{\vec{p}_2}^*(\vec{Q}'_2) \psi_{\vec{p}_2}(\vec{Q}_2) .
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

È interessante valutare a titolo di esempio la luminosità integrata per due pacchetti del tipo (2.2.17) centrati sugli impulsi \vec{p}_i , $i = 1, 2$ nel limite di σ infinitesimo. Ponendo $\vec{q}_i \equiv \vec{Q}_i - \vec{p}_i$ e $\vec{q}'_i \equiv \vec{Q}'_i - \vec{p}_i$, si ha nel limite:

$$E_{Q_i} = \sqrt{|\vec{p}_i|^2 + m^2} + \vec{v}_i \cdot \vec{q}_i \equiv E_{p_i} + \vec{v}_i \cdot \vec{q}_i . \tag{2.3.10}$$

Utilizzando la (2.3.9) troviamo

$$L = \frac{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}{4\pi^5 \sigma^6} \int d\vec{q}_1 d\vec{q}_2 d\vec{q}'_1 d\vec{q}'_2 \delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \vec{q}'_1 - \vec{q}'_2) \delta(\vec{v}_1 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}'_1) - \vec{v}_2 \cdot (\vec{q}_2 - \vec{q}'_2)) e^{-\sum_i \frac{q_i^2 + q_i'^2}{2\sigma^2}} . \tag{2.3.11}$$

Ponendo poi $\vec{q}_\pm = \vec{q}_1 \pm \vec{q}'_1$ e svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}{32\pi^5 \sigma^6} \int d\vec{q}_+ d\vec{q}_2 d\vec{q}_- \delta((\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot \vec{q}_-) e^{-\frac{q_+^2 + q_-^2 + 2q_2^2 + 2(\vec{q}_2 + \vec{q}_-)^2}{4\sigma^2}} \\
&= \frac{1}{32\pi^5 \sigma^6} \int d\vec{q}_+ d\vec{q}_2 d\vec{q}_-^T e^{-\frac{q_+^2 + 3q_-^T{}^2 + 4q_2^2 + 4\vec{q}_2 \cdot \vec{q}_-^T}{4\sigma^2}} = \frac{\sigma^2}{2\pi} ,
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

dove il suffisso T indica la proiezione trasversa rispetto a $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

Data la luminosità, la probabilità di una certa transizione è eguale al prodotto della *sezione d'urto* relativa per la luminosità stessa. Se la probabilità di transizione è calcolabile per una fissata luminosità, questo fornisce di fatto la sezione d'urto. Tenendo conto delle (2.3.3) e (2.3.2) possiamo esprimere la densità di probabilità di transizione dallo stato di cui abbiamo descritto il processo di preparazione allo stato finale definito dalle variabili $\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n$, come:

$$\begin{aligned}
W(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) &= (2\pi)^2 \int d\vec{Q}_1 d\vec{Q}'_1 d\vec{Q}_2 d\vec{Q}'_2 \delta(\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 - \vec{Q}'_1 - \vec{Q}'_2) \\
&\quad \delta(E_{Q_1} + E_{Q_2} - E_{Q'_1} - E_{Q'_2}) \psi_{\vec{p}_1}^*(\vec{Q}'_1) \psi_{\vec{p}_1}(\vec{Q}_1) \psi_{\vec{p}_2}^*(\vec{Q}'_2) \psi_{\vec{p}_2}(\vec{Q}_2) \\
&\quad \delta\left(\sum_i E_{k_i} - E_{Q_1} - E_{Q_2}\right) \delta\left(\sum_i \vec{k}_i - \vec{Q}_1 - \vec{Q}_2\right) \\
&\quad T(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n; \vec{Q}_1, \vec{Q}_2) T^*(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n; \vec{Q}'_1, \vec{Q}'_2) .
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Questa espressione va poi integrata sullo spazio delle fasi, cioè sugli impulsi $\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n$ selezionati dai collimatori-rivelatori. È essenziale agli effetti della misura che la risoluzione in energia ed impulso totale del processo di analisi sia peggiore di quella nel processo di preparazione; questo equivale ad assumere che il parametro σ che definisce l'inverso della dimensione dei pacchetti entranti in (2.2.17) sia infinitesimo. In questo limite, possiamo approssimare il nostro risultato sostituendo

$$\delta \left(\sum_i E_{k_i} - E_{Q_1} - E_{Q_2} \right) \rightarrow \delta \left(\sum_i E_{k_i} - E_{p_1} - E_{p_2} \right) \quad (2.3.14)$$

e

$$\delta \left(\sum_i \vec{k}_i - \vec{Q}_1 - \vec{Q}_2 \right) \rightarrow \delta \left(\sum_i \vec{k}_i - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 \right) . \quad (2.3.15)$$

È inoltre ovviamente essenziale che la ampiezza di scattering vari poco nell'intervallo di variabilità degli impulsi iniziali e che quindi si possa sostituire

$$T(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n; \vec{Q}_1, \vec{Q}_2) T^*(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n; \vec{Q}'_1, \vec{Q}'_2) \rightarrow |T(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n; \vec{p}_1, \vec{p}_2)|^2 . \quad (2.3.16)$$

Ciò porta al risultato:

$$W(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) = \frac{(2\pi)^4 L}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} |T(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n; \vec{p}_1, \vec{p}_2)|^2 \delta \left(\sum_i E_i - E_{p_1} - E_{p_2} \right) \delta \left(\sum_i \vec{k}_i - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 \right) . \quad (2.3.17)$$

Da questa espressione, utilizzando la definizione sopra fornita si ha la *sezione d'urto differenziale*:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} |T|^2 \delta^4(P_f - P_i) d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_n , \quad (2.3.18)$$

dove abbiamo introdotto i tetra-impulsi iniziale e finale

$$P_i \equiv p_1 + p_2; \quad P_f \equiv \sum_{j=1}^n k_j . \quad (2.3.19)$$

Per calcolare le sezioni d'urto applicando questa formula dobbiamo dunque valutare l'ampiezza T in approssimazione semiclassica; questo calcolo richiede la soluzione dell'equazione del campo, illustrata nel prossimo capitolo.

2.4 La soluzione dell'equazione del campo

Nel contesto dell'approssimazione semiclassica dobbiamo individuare la soluzione dell'equazione del campo (2.1.8) che soddisfa le condizioni asintotiche appena descritte. Riscriviamo l'equazione (2.1.8) nella forma

$$(\partial^2 + m^2) \phi = -\frac{\lambda}{3!} \phi^3 \equiv J , \quad (2.4.1)$$

la cui trasformata di Fourier è data da

$$\left(\partial_t^2 + k^2 + m^2\right) \tilde{\phi}(\vec{k}, t) = \left(\partial_t^2 + E_k^2\right) \tilde{\phi}(\vec{k}, t) = \tilde{J}(\vec{k}, t) . \quad (2.4.2)$$

La soluzione cercata può essere ricavata col metodo della funzione di Green. Definiamo *funzione di Green* $\tilde{\Delta}(\vec{k}, t)$ la soluzione dell'equazione inomogenea:

$$\left(\partial_t^2 + E_k^2\right) \tilde{\Delta}(\vec{k}, t) = \delta(t) , \quad (2.4.3)$$

con le condizioni

$$\tilde{\Delta}(\vec{k}, t) \sim e^{iE_k t} \quad \text{per } t < 0 \quad (2.4.4)$$

$$\tilde{\Delta}(\vec{k}, t) \sim e^{-iE_k t} \quad \text{per } t > 0 . \quad (2.4.5)$$

Si verifica direttamente che

$$\tilde{\Delta}(\vec{k}, t) = \frac{i}{2E_k} \left[\theta(t) e^{-iE_k t} + \theta(-t) e^{iE_k t} \right] . \quad (2.4.6)$$

Data la funzione di Green si vede subito che

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\vec{k}, t) &= \tilde{\phi}^{(as)}(\vec{k}, t) + \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \tilde{\Delta}(\vec{k}, t - t') \tilde{J}(\vec{k}, t') \\ &= \tilde{\phi}^{(as)}(\vec{k}, t) + \frac{i}{2E_k} \left[e^{-iE_k t} \int_{-\infty}^t dt' e^{iE_k t'} \tilde{J}(\vec{k}, t') + e^{iE_k t} \int_t^{\infty} dt' e^{-iE_k t'} \tilde{J}(\vec{k}, t') \right] \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

è soluzione della (2.4.2) e soddisfa le condizioni (2.2.19) e (2.2.20). Infatti al limite asintotico il termine in parentesi non dà contributo dato che, per esempio, se $t \rightarrow -\infty$ il primo addendo si annulla, mentre il secondo addendo tende alla trasformata di Fourier rispetto al tempo di \tilde{J} moltiplicata per un fattore di fase con frequenza positiva, $e^{iE_k t}$, che quindi contribuisce con una fase rapidamente variabile che va trascurata. Del tutto analoga è la situazione al limite $t \rightarrow \infty$. Resta dunque il contributo di $\tilde{\phi}^{(as)}$ che è quello voluto.

Sarà presto utile riscrivere (2.4.7) in forma covariante. A tale scopo, consideriamo la sua antitrasformata di Fourier:

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi^{(as)}(\vec{r}, t) + \int dt' \int d\vec{k} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \tilde{\Delta}(\vec{k}, t - t') \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{r}' e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'} J(\vec{r}', t'), \quad (2.4.8)$$

che può essere riscritta più semplicemente nella forma

$$\phi(x) = \phi^{(as)}(x) + \int d^4 x' J(x') \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \tilde{\Delta}(\vec{k}, t - t'), \quad (2.4.9)$$

dove abbiamo introdotto i tetra-vettori $x = (t, \vec{r})$ e $x' = (t', \vec{r}')$. L'integrando può essere calcolato utilizzando l'espressione esplicita della funzione di Green $\tilde{\Delta}(\vec{k}, t)$, eq. (2.4.6), e la rappresentazione della funzione a gradino $\theta(t)$

$$\theta(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\epsilon}, \quad (2.4.10)$$

dove ϵ è un infinitesimo positivo. Si trova

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tilde{\Delta}(\vec{k}, t) &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d\vec{k} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{1}{2E_k} \int d\omega \left[\frac{e^{-i(E_k+\omega)t}}{\omega + i\epsilon} + \frac{e^{i(E_k+\omega)t}}{\omega + i\epsilon} \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ik\cdot x} \frac{1}{2E_k} \left[\frac{1}{E_k + \omega - i\epsilon} + \frac{1}{E_k - \omega - i\epsilon} \right], \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

dove abbiamo effettuato i cambi di variabile $\omega \rightarrow -E_k - \omega$ nel primo addendo della parentesi quadrata, e $\omega \rightarrow -E_k + \omega$ nel secondo addendo, e abbiamo definito il tetra-vettore $k = (\omega, \vec{k})$. Svolgendo i calcoli, troviamo

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tilde{\Delta}(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ik\cdot x} \frac{1}{m^2 - k^2 - i\epsilon} \equiv \Delta(x). \quad (2.4.12)$$

(nei calcoli di questo tipo, l'infinitesimo positivo ϵ può essere ridefinito quando necessario, purché si tenga traccia del suo segno.) La funzione $\Delta(x)$ così definita è manifestamente uno scalare rispetto a trasformazioni di Lorentz. Si noti che

$$(\partial^2 + m^2) \Delta(x) = \delta^{(4)}(x). \quad (2.4.13)$$

La (2.4.7) si scrive allora in forma covariante:

$$\phi(x) = \phi^{(as)}(x) + \int d^4y \Delta(x-y) J(y) \equiv \left(\phi^{(as)} + \Delta * J \right) (x), \quad (2.4.14)$$

dove ovviamente $\phi^{(as)}$ è dato in eq. (2.2.16). Si noti che la eq. (2.4.14) è una soluzione implicita dell'equazione di partenza, dato che J dipende da ϕ ; la soluzione esplicita può essere ottenuta utilizzando la (2.4.14) ricorsivamente. In pratica, abbiamo trasformato l'equazione differenziale di partenza in una equazione integrale, che incorpora la condizione al contorno.

Identificata in questo modo la soluzione che interpola le condizioni asintotiche passiamo a valutare l'azione corrispondente.

2.5 Il calcolo dell'ampiezza di transizione

Questo calcolo presenta una difficoltà: dato che, come abbiamo già osservato, un processo d'urto riguarda un intervallo di tempo praticamente infinito, non è assolutamente detto che l'integrale di azione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d\vec{r} \mathcal{L}(\vec{r}, t), \quad (2.5.1)$$

sia convergente, anche in considerazione del comportamento oscillante della soluzione asintotica. Un metodo pratico per superare questa difficoltà consiste nell'introdurre un fattore di convergenza, sostituendo il campo $\phi^{(as)}(x)$ con

$$\phi^{(as,\epsilon)}(x) \equiv e^{-\epsilon|t|} \phi^{(as)}(x), \quad (2.5.2)$$

e andando alla fine al limite $\epsilon \rightarrow 0+$. Si osservi che $\phi^{(as,\epsilon)}$ non è soluzione dell'equazione libera; ne segue che la (2.4.14) modificata nella forma

$$\phi = \phi^{(as,\epsilon)} + \Delta * J , \quad (2.5.3)$$

non rende stazionaria l'azione di partenza, bensì l'azione ottenuta a partire dalla densità lagrangiana modificata

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \phi \left(\partial^2 + m^2 \right) \phi^{(as,\epsilon)} . \quad (2.5.4)$$

È evidente che questa correzione è infinitesima con ϵ in ogni punto e per ogni tempo; non è peraltro detto che il suo integrale sia pure infinitesimo.

Nell'ambito dell'approssimazione scelta è chiaro che l'ampiezza di transizione va calcolata tenendo conto della correzione (2.5.4) con cui si ha:

$$S = - \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d\vec{r} \left[\frac{1}{2} \phi \left(\partial^2 + m^2 \right) \left(\phi - 2\phi^{(as,\epsilon)} \right) + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right] . \quad (2.5.5)$$

Osservando che $(\partial^2 + m^2) \Delta * J = J$ e integrando per parti si ha:

$$\begin{aligned} S_{i \rightarrow f} &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d\vec{r} \left[\frac{1}{2} \left(\phi^{(as,\epsilon)} + \Delta * J \right) \left(\partial^2 + m^2 \right) \left(\Delta * J - \phi^{(as,\epsilon)} \right) + \frac{\lambda}{4!} \left(\phi^{(as,\epsilon)} + \Delta * J \right)^4 \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d\vec{r} \left[\frac{1}{2} \phi^{(as,\epsilon)} \left(\partial^2 + m^2 \right) \phi^{(as,\epsilon)} - \frac{1}{2} \left(\Delta * J \right) \left(\partial^2 + m^2 \right) \Delta * J - \frac{\lambda}{4!} \left(\phi^{(as,\epsilon)} + \Delta * J \right)^4 \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d\vec{r} \left[\frac{1}{2} \phi^{(as,\epsilon)} \left(\partial^2 + m^2 \right) \phi^{(as,\epsilon)} - \frac{1}{2} J \Delta * J - \frac{\lambda}{4!} \left(\phi^{(as,\epsilon)} + \Delta * J \right)^4 \right] . \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Consideriamo ora il contributo corrispondente al primo termine in parentesi:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d\vec{r} \phi^{(as,\epsilon)} \left(\partial^2 + m^2 \right) \phi^{(as,\epsilon)} \\ &= \frac{(2\pi)^3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d\vec{k} \tilde{\phi}^{(as,\epsilon)}(-\vec{k}, t) \left(\partial_t^2 + E_k^2 \right) \tilde{\phi}^{(as,\epsilon)}(\vec{k}, t) . \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Si vede che esso si annulla per $\epsilon \rightarrow 0$. Infatti, scrivendo:

$$\tilde{\phi}^{(as,\epsilon)}(\vec{k}, t) = e^{-\epsilon|t|} \left[\varphi_+(\vec{k}) e^{iE_k t} + \varphi_-(\vec{k}) e^{-iE_k t} \right] , \quad (2.5.8)$$

si ha:

$$\begin{aligned} \left(\partial_t^2 + E_k^2 \right) \tilde{\phi}^{(as,\epsilon)}(\vec{k}, t) &= \left(\epsilon^2 - 2\epsilon\delta(t) \right) \tilde{\phi}^{(as,\epsilon)}(\vec{k}, t) \\ &\quad - 2i\epsilon \text{sign}(t) E_k e^{-\epsilon|t|} \left(\varphi_+(\vec{k}) e^{iE_k t} - \varphi_-(\vec{k}) e^{-iE_k t} \right) . \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Inserendo quest'espressione nella (2.5.7) osserviamo che il contributo proporzionale a ϵ^2 è infinitesimo al limite $\epsilon \rightarrow 0+$ perché l'integrale sul tempo è proporzionale a $\frac{1}{\epsilon}$; così pure quello in

$\epsilon\delta(t)$ dato che la presenza della $\delta(t)$ rende finito l'integrale. Resta pertanto:

$$\begin{aligned}
& -i\epsilon(2\pi)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \operatorname{sign}(t) e^{-2\epsilon|t|} \\
& \times \int d\vec{k} E_k \left[\varphi_+(-\vec{k})e^{iE_k t} + \varphi_-(-\vec{k})e^{-iE_k t} \right] \left[\varphi_+(\vec{k})e^{iE_k t} - \varphi_-(\vec{k})e^{-iE_k t} \right] + O(\epsilon) \\
& = -i\epsilon(2\pi)^3 \int d\vec{k} E_k \int_{-\infty}^{+\infty} dt \operatorname{sign}(t) e^{-2\epsilon|t|} \left[e^{2iE_k t} \varphi_+(-\vec{k})\varphi_+(\vec{k}) - e^{-2iE_k t} \varphi_-(-\vec{k})\varphi_-(\vec{k}) \right] + O(\epsilon).
\end{aligned} \tag{2.5.10}$$

Calcolando esplicitamente l'integrale rispetto al tempo si ha infine:

$$2\epsilon(2\pi)^3 \int d\vec{k} \frac{E_k^2}{\epsilon^2 + E_k^2} \left[\varphi_+(-\vec{k})\varphi_+(\vec{k}) + \varphi_-(-\vec{k})\varphi_-(\vec{k}) \right] + O(\epsilon) = O(\epsilon). \tag{2.5.11}$$

Dunque, calcolato il limite $\epsilon \rightarrow 0+$, si ottiene la formula:

$$S_{i \rightarrow f} = - \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d\vec{r} \left[\frac{1}{2} J \Delta * J + \frac{\lambda}{4!} \left(\phi^{(as)} + \Delta * J \right)^4 \right], \tag{2.5.12}$$

dove, tenendo conto della definizione di J (2.4.1) e della (2.5.3), si ha:

$$J = -\frac{\lambda}{3!} \left(\phi^{(as)} + \Delta * J \right)^3, \tag{2.5.13}$$

e $\phi^{(as)}$ è dato da

$$\phi^{(as)}(x) = \frac{(\sqrt{4\pi}\sigma)^{3/2}}{(2\pi)^{3/2}} \left[\sum_{i=1}^2 \frac{e^{-ip_i \cdot x}}{\sqrt{2E_{p_i}}} + \sum_{j=1}^n \frac{e^{ik_j \cdot x}}{\sqrt{2E_{k_j}}} \right]. \tag{2.5.14}$$

Il fattore $(\sqrt{4\pi}\sigma)^{3/2}$ scompare nel calcolo della probabilità di transizione, come mostrato in eq. (2.3.4), e sarà pertanto omissivo di qui in avanti.

L'ampiezza di transizione è data, in approssimazione semiclassica, da

$$A_{i \rightarrow f} \simeq \exp(iS_{i \rightarrow f}) = 1 + iS_{i \rightarrow f} + \frac{1}{2}(iS_{i \rightarrow f})(iS_{i \rightarrow f}) + \dots \tag{2.5.15}$$

Il primo termine di questo sviluppo corrisponde al caso, assai poco interessante, in cui lo stato finale coincide con quello iniziale; infatti, questo contributo è presente anche nel limite in cui la lagrangiana di interazione si annulla. D'ora in poi ignoreremo questo contributo. Il termine successivo è proporzionale all'azione, data dalle espressioni (2.5.12, 2.5.13, 2.5.14). È facile mostrare che l'azione è data da una somma di termini di grado $\lambda^k (\phi^{(as)})^{2k+2}$ al variare di k .^{*} Abbiamo già ricordato che in una teoria quantistica un'ampiezza di transizione corrisponde all'elemento di matrice di un operatore opportuno fra le funzioni d'onda dello stato iniziale e di quello finale. Nel caso in studio le funzioni d'onda sono direttamente legate alle funzioni di pacchetto delle

^{*}Si mostri preliminarmente, sviluppando il secondo membro della (2.5.13), che J è dato da una somma di termini di grado $\lambda^k (\phi^{(as)})^{2k+1}$; sostituendo questo sviluppo nell'espressione (2.5.12) si ottiene il risultato annunciato.

particelle che appaiono nell'espressione del campo asintotico (2.2.13) e (2.2.14). Per un processo di scattering la funzione d'onda dello stato iniziale dipende dagli impulsi delle due particelle iniziali ed è il prodotto (simmetrizzato) delle funzioni di pacchetto a esse associate. Se il numero delle particelle finali è $2n$, la corrispondente funzione d'onda è il prodotto (sempre simmetrizzato) di altrettante funzioni di pacchetto. Possiamo concludere che l'ampiezza relativa a un processo con $2n$ particelle finali deve emergere dal termine di grado $\lambda^n(\phi^{(as)})^{2n+2}$ nello sviluppo di (2.5.15). Resta però da chiarire il meccanismo che seleziona tali termini dallo sviluppo generale dell'azione.

Facile è capire le ragioni dell'esclusione di termini di grado inferiore a quello indicato; questa è infatti dovuta alla conservazione dell'energia e dell'impulso che, per risultare soddisfatta, richiede l'intervento nel calcolo di tutte le particelle coinvolte nel processo con la rispettiva funzione d'onda.

Per giustificare invece l'esclusione dei termini di grado superiore ci si può riferire all'argomento seguente. Come è stato mostrato trattando la sezione d'urto, la determinazione dell'ampiezza di transizione nello spazio dei tetra-impulsi e di conseguenza quella delle sezioni d'urto differenziali comporta l'uso delle funzioni di pacchetto al limite di risoluzione perfetta, $\sigma \rightarrow 0$. Non è particolarmente divertente, ma nemmeno difficile, verificare che questa procedura seleziona automaticamente i termini in $\lambda^n(\phi^{(as)})^{2n+2}$ nell'azione (2.5.12); infatti quelli di grado superiore si annullano, al limite di risoluzione perfetta, più velocemente dei precedenti. Per questa stessa ragione, i termini successivi al secondo nello sviluppo (2.5.15) vanno trascurati, e si ha semplicemente

$$A_{i \rightarrow f} \simeq iS_{i \rightarrow f}. \quad (2.5.16)$$

Prima di passare ai calcoli espliciti può valer la pena di ricordare che, per le citate ragioni di economia, noi ometteremo i pacchetti nella nostra analisi e ci limiteremo a trascurare gli eventuali termini delle ampiezze di transizione non lineari, o antilineari, in ciascuna delle funzioni.

Può valere la pena di sottolineare la possibilità di generalizzare la formula (2.5.12); per questo osserviamo che nel caso trattato, corrispondente alla densità lagrangiana (2.1.5), questa si decompone nella somma della parte libera, quadratica nel campo, e dell'interazione $\mathcal{L}_I \equiv -\frac{\lambda}{4!}\phi^4$; più in generale l'interazione potrà dipendere anche dalle derivate dei campi. Evidentemente J , la sorgente dell'equazione del campo (2.4.1), nel nostro caso vale

$$J = \frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{3!}\phi^3. \quad (2.5.17)$$

Questa formula può essere facilmente estesa al caso in cui si abbiano più campi ϕ_i , $i = 1, \dots, N$ non necessariamente scalari, e in cui l'interazione \mathcal{L}_I dipenda anche dalle derivate prime dei campi. In questo caso si avranno tante sorgenti indipendenti J_i quanti sono i campi. Inoltre, tenendo conto della struttura generale delle equazioni di Eulero-Lagrange, è facile capire che le singole sorgenti sono date da

$$J_i = \frac{\partial}{\partial \phi_i} \mathcal{L}_I - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \mathcal{L}_I; \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.5.18)$$

a $\phi^{(as)}$. Si noti che i fattori combinatori che appaiono al denominatore del coefficiente dei singoli termini possono essere scritti come $k \prod_v n_v!$, dove v sta a indicare il generico vertice del diagramma, n_v è il numero della linee esterne associate al vertice e il fattore k rappresenta la classe di simmetria del diagramma. Con classe di simmetria di un diagramma si intende il numero di trasformazioni rigide sul piano del foglio che trasformano in se stesso e in modo non banale il diagramma privo di linee esterne; k vale 1 nel primo diagramma e 2 negli altri. Infine la potenza di λ nel coefficiente di ciascun termine è eguale al numero dei vertici del diagramma corrispondente.

Avendo semplificato la costruzione delle ampiezze tramite il metodo grafico passiamo a ricostruirne la struttura analitica. Per questo è utile ricordare l'espressione dell'azione in forma covariante, eq. (2.5.12):

$$S_{i \rightarrow f} = - \int d^4x \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x) - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta(x-y) J(y). \quad (2.6.5)$$

Si noti che la forma originale è stata semplificata usando la (2.4.14). Come accennato nel capitolo 2.5, questa formula può essere scritta in una forma del tutto generale, cioè valida in qualunque modello (purché si tenga conto dell'eventuale molteplicità dei campi):

$$S_{i \rightarrow f} = \int d^4x \mathcal{L}_I - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta(x-y) J(y). \quad (2.6.6)$$

Per il calcolo delle ampiezze invarianti è utile introdurre le trasformate di Fourier 4-dimensionali. Per una generica funzione $F(x)$ avremo

$$\hat{F}(k) \equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{ik \cdot x} F(x) \quad F(x) = \int d^4k e^{-ik \cdot x} \hat{F}(k). \quad (2.6.7)$$

Si ottiene

$$\hat{\phi}(q) = \hat{\phi}^{(as)}(q) + \frac{1}{m^2 - q^2 - i0_+} \hat{J}(q) \quad (2.6.8)$$

e quindi

$$\begin{aligned} S_{i \rightarrow f} &= -\frac{1}{2} \int d^4k d^4k' (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k+k') \hat{J}(k) \frac{1}{m^2 - k^2 - i0_+} \hat{J}(k') \\ &\quad - \frac{\lambda}{4!} \int \prod_{l=1}^4 d^4q_l \left[\hat{\phi}^{(as)}(q_l) + \frac{1}{m^2 - q_l^2 - i0_+} \hat{J}(q_l) \right] (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{l=1}^4 q_l\right). \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

Similmente (2.5.13) si scrive

$$\begin{aligned} \hat{J}(k) &= -\frac{\lambda}{3!} \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot x} \prod_{l=1}^3 \int d^4q_l e^{-iq_l \cdot x} \left[\hat{\phi}^{(as)}(q_l) + \frac{\hat{J}(q_l)}{m^2 - q_l^2 - i0_+} \right] \\ &= -\frac{\lambda}{3!} \int \prod_{l=1}^3 d^4q_l \left[\hat{\phi}^{(as)}(q_l) + \frac{\hat{J}(q_l)}{m^2 - q_l^2 - i0_+} \right] \delta^{(4)}\left(k - \sum_{l=1}^3 q_l\right). \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

Infine la (2.5.14) diventa

$$\hat{\phi}^{(as)}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left[\sum_{i=1}^2 \frac{\delta^{(4)}(k-p_i)}{\sqrt{2E_{p_i}}} + \sum_{j=1}^n \frac{\delta^{(4)}(k+k_j)}{\sqrt{2E_{k_j}}} \right]. \quad (2.6.11)$$

2.7 L'urto elastico

Consideriamo a titolo di esempio il caso dell'ampiezza elastica, che corrisponde a due particelle nello stato finale, e quindi a termini di grado 4 in $\phi^{(as)}$. Quest'ampiezza si ottiene osservando che, all'ordine minimo in $\phi^{(as)}$, $J = -\frac{\lambda}{3!} \left(\phi^{(as)}\right)^3 + O\left(\left(\phi^{(as)}\right)^5\right)$. Sostituendo in eq. (2.5.12) si ha al secondo membro un solo termine di grado 4 in $\phi^{(as)}$ (proveniente dal primo termine), cioè:

$$\begin{aligned} A_{2 \rightarrow 2} &= -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \left(\phi^{(as)}(x)\right)^4 \\ &= -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \frac{4!}{\sqrt{\prod_{i=1}^2 [(2\pi)^3 2E_{p_i}] \prod_{j=1}^2 [(2\pi)^3 2E_{k_j}]}} e^{i(k_1+k_2-p_1-p_2)\cdot x}. \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

Il fattore $4!$ al numeratore conta il numero dei modi in cui si possono estrarre i termini lineari in ciascuna onda piana da $\left(\phi^{(as)}\right)^4$. Calcolando l'integrale si ha:

$$A_{2 \rightarrow 2} = -i \frac{\lambda}{\sqrt{\prod_{i=1}^2 [(2\pi)^3 2E_{p_i}] \prod_{j=1}^2 [(2\pi)^3 2E_{k_j}]}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2), \quad (2.7.2)$$

dove vediamo apparire esplicitamente la δ di Dirac preannunciata in capitolo 2.3.

È ora immediato identificare la funzione T definita in eq. (2.3.2), che appare nell'espressione generale per la sezione d'urto, eq. (2.3.18). Si ha infatti

$$A_{2 \rightarrow 2} = -2\pi i T(k_1, k_2; p_1, p_2) \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2), \quad (2.7.3)$$

e quindi, confrontando con la (2.7.2),

$$T(k_1, k_2; p_1, p_2) = \frac{\lambda}{\sqrt{4E_{p_1} E_{p_2}}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{k_2}} \sqrt{(2\pi)^3 2E_{k_2}}}. \quad (2.7.4)$$

La sezione d'urto differenziale è data da

$$\begin{aligned} d\sigma_2 &= \frac{|\lambda|^2}{4E_{p_1} E_{p_2}} \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \frac{d\vec{k}_1}{(2\pi)^3 2E_{k_1}} \frac{d\vec{k}_2}{(2\pi)^3 2E_{k_2}} \\ &= \frac{|\lambda|^2}{4|\vec{p}_1 E_{p_2} - \vec{p}_2 E_{p_1}|} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \frac{d\vec{k}_1}{(2\pi)^3 2E_{k_1}} \frac{d\vec{k}_2}{(2\pi)^3 2E_{k_2}}. \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

La misura di integrazione

$$d\phi_2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \frac{d\vec{k}_1}{(2\pi)^3 2E_{k_1}} \frac{d\vec{k}_2}{(2\pi)^3 2E_{k_2}} \quad (2.7.6)$$

è chiamata usualmente *spazio delle fasi invariante*, ed è comune a qualunque processo con due particelle nello stato finale. Proprio grazie alla sua proprietà di invarianza rispetto a trasformazioni di Lorentz, lo spazio delle fasi invariante può essere calcolato in un sistema di riferimento

qualunque. In molti casi, un sistema di riferimento conveniente per il calcolo di sezioni d'urto è il sistema di quiete del centro di massa delle particelle dello stato iniziale, in cui $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$. Assumendo che \vec{p}_1 e \vec{p}_2 siano diretti lungo l'asse z , avremo

$$p_1 = (E_p, 0, 0, +p) \quad (2.7.7)$$

$$p_2 = (E_p, 0, 0, -p). \quad (2.7.8)$$

In questo sistema di riferimento,

$$\begin{aligned} d\phi_2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \delta(2E_p - E_{k_1} - E_{k_2}) \frac{d\vec{k}_1}{2E_{k_1}} \frac{d\vec{k}_2}{2E_{k_2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \delta(2E_p - 2E_{k_1}) \frac{d\vec{k}_1}{4E_{k_1}^2}. \end{aligned} \quad (2.7.9)$$

Nel secondo passaggio abbiamo effettuato l'integrale sull'impulso \vec{k}_2 usando la δ di conservazione dell'impulso spaziale, e dunque abbiamo posto $\vec{k}_2 = -\vec{k}_1$ nell'integrando. Questa espressione può essere ulteriormente semplificata passando alle coordinate polari $k \equiv |\vec{k}_1|$, θ e ϕ per l'impulso \vec{k}_1 , e osservando che, grazie alla simmetria del processo per rotazioni intorno all'asse z , l'ampiezza non può dipendere dall'angolo azimuthale ϕ . Pertanto,

$$d\phi_2 = \frac{1}{2\pi} \delta(2E_p - 2E_k) \frac{k^2 dk}{4E_k^2} d\cos\theta. \quad (2.7.10)$$

L'integrale in k può ora essere effettuato usando la relazione

$$\delta(2E_p - 2E_k) = \frac{E_p}{2p} \delta(p - k). \quad (2.7.11)$$

Si ottiene

$$d\phi_2 = \frac{1}{16\pi} \frac{p}{E_p} d\cos\theta. \quad (2.7.12)$$

La sezione d'urto differenziale angolare, cioè riferita all'angolo solido infinitesimo $d\Omega$, è quindi data da

$$d\sigma_2 = \frac{|\lambda|^2}{128\pi E_p^2} d\cos\theta. \quad (2.7.13)$$

2.8 L'ampiezza invariante

Quanto detto nel paragrafo precedente può essere immediatamente generalizzato al caso generale del calcolo dell'ampiezza per un generico processo relativistico con n corpi nello stato finale. Avremo infatti

$$A_{i \rightarrow f} = (2\pi)^4 i \delta^{(4)}\left(\sum_{j=1}^n k_j - \sum_{i=1}^2 p_i\right) \frac{M_{fi}}{\sqrt{\prod_{i=1}^2 [(2\pi)^3 2E_{p_i}] \prod_{j=1}^n [(2\pi)^3 2E_{k_j}]}} , \quad (2.8.1)$$

dove M_{fi} è chiamata *ampiezza invariante*, perché è appunto invariante rispetto a trasformazioni di Lorentz. Nel caso elastico si ha evidentemente $M_{fi} = -\lambda$.

Procedendo come nel caso dell'urto elastico, si identifica facilmente la funzione T , per confronto con la sua definizione:

$$A_{i \rightarrow f} = -2\pi i T(k_1, \dots, k_n; p_1, p_2) \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - \dots - k_n). \quad (2.8.2)$$

Confrontando con la (2.8.1), si ottiene

$$T(k_1, \dots, k_n; p_1, p_2) = -\frac{M_{fi}}{\sqrt{4E_{p_1}E_{p_2}}} \frac{1}{\prod_{j=1}^n \sqrt{(2\pi)^3 2E_{k_j}}}. \quad (2.8.3)$$

La sezione d'urto differenziale è data da

$$d\sigma_n = \frac{|M_{fi}|^2}{4|\vec{p}_1 E_{p_2} - \vec{p}_2 E_{p_1}|} d\phi_n(p_1, p_2; k_j) \quad (2.8.4)$$

dove

$$d\phi_n(p_1, p_2; k_j) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{j=1}^n k_j - \sum_{i=1}^2 p_i\right) \prod_{j=1}^n \frac{d\vec{k}_j}{(2\pi)^3 2E_{k_j}} \quad (2.8.5)$$

è lo spazio delle fasi invariante per n particelle nello stato finale. Osserviamo infine che, in quei sistemi di riferimento in cui gli impulsi \vec{p}_1 e \vec{p}_2 hanno la stessa direzione, si ha

$$|\vec{p}_1 E_{p_2} - \vec{p}_2 E_{p_1}| = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}, \quad (2.8.6)$$

dove m_1 e m_2 sono le masse delle particelle nello stato iniziale.

2.9 Le regole di Feynman del modello scalare

Confrontando (2.6.9) e (2.6.10) con le loro equivalenti in forma grafica (2.6.2) e (2.6.3) e tenendo conto della (2.6.11) possiamo notare che a ogni linea di ciascun diagramma è associata una variabile d'integrazione tetra-impulso; queste variabili sono vincolate dalla conservazione del flusso di tetra-impulso attraverso ogni vertice, grazie alla funzione $\delta^{(4)}$ in eq. (2.6.10), e sono identificate col tetra-impulso delle particelle asintotiche (cioè appartenenti allo stato iniziale (p_i) o finale (k_j)) nel caso delle linee esterne. È evidente che, fissata una particolare corrispondenza fra linee esterne e particelle asintotiche, tutti i tetra-impulsi sono fissati dalla conservazione del tetra-impulso che entra in ogni vertice. Resta un fattore

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{j=1}^n k_j - \sum_{i=1}^2 p_i\right) \quad (2.9.1)$$

che impone la conservazione globale del tetra-impulso. Quindi l'integrale corrispondente a un certo diagramma è immediatamente calcolato, e si riduce al prodotto dei fattori

$$\frac{1}{m^2 - q_l^2 - i0+} \quad (2.9.2)$$

corrispondenti alle linee interne, dei fattori $-\lambda$ associati a ciascun vertice. Inoltre, a ciascuna linea esterna corrisponde un fattore

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E}}. \quad (2.9.3)$$

Infine, occorre includere il fattore di conservazione globale del tetra-impulso, eq. (2.9.1).

Come già ampiamente commentato, l'ampiezza è ottenuta sommando su tutte le possibili associazioni delle linee esterne alle particelle asintotiche. Tra queste, quelle che differiscono per permutazioni delle particelle asintotiche associate alle n_v linee esterne che convergono sullo stesso vertice v e per rotazioni del diagramma sono equivalenti, in quanto danno chiaramente lo stesso contributo. Tale contributo va dunque moltiplicato per il fattore $k \prod_v n_v!$ prima descritto, e compensa esattamente il denominatore del coefficiente che appare in eq. (2.6.4).

In conclusione l'ampiezza per un processo con due particelle nello stato iniziale e $2n$ particelle nello stato finale si ottiene:

1. selezionando tutti i diagrammi con $2n + 2$ linee esterne e con vertici a quattro linee (si noti che nella lagrangiana di interazione, eq. (2.1.4), appare la quarta potenza di ϕ);
2. determinando tutte le associazioni non equivalenti delle linee esterne con le particelle asintotiche, e determinando il corrispondente flusso di tetra-impulso nelle linee interne;
3. sommando su tutti i diagrammi e su tutte le scelte delle linee esterne il prodotto di $-\lambda$ elevato al numero dei vertici (che è eguale a n) per i fattori $\frac{1}{m^2 - q_l^2 - i0+}$ associati alle linee interne, essendo i tetra-impulsi q_l fissati dalla conservazione del tetra-impulso in ogni vertice;
4. moltiplicando il risultato per i volte il fattore di conservazione globale del tetra-impulso.

Confrontando con la definizione (2.8.1) si vede subito che l'ampiezza invariante è eguale al risultato del punto 3. cambiato di segno.

Notiamo che i fattori essenziali del calcolo, che, come vedremo nel seguito, dipendono dal particolare modello, sono quelli associati alle linee, cioè i propagatori, e ai vertici.

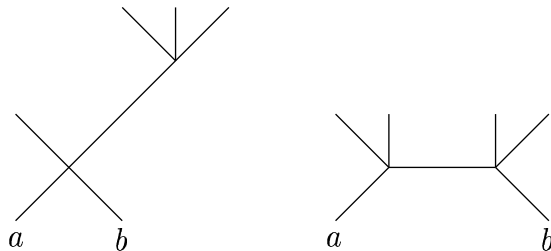
I propagatori sono le funzioni di Green delle equazioni dei campi.

I fattori di vertice possono essere estratti direttamente dall'interazione \mathcal{L}_I ($-\frac{\lambda}{4!}\phi^4$ nel nostro caso). Infatti il fattore corrispondente a un dato vertice altro non è che l'ampiezza invariante di un processo virtuale in cui a tutte le linee confluenti nel vertice, siano esse esterne o interne, sono associate particelle asintotiche reali o virtuali; alle particelle associate alle linee interne va attribuito il tetra-impulso portato dalla linea.

Nel caso specifico del modello scalare, in ogni vertice confluiscono quattro linee, e l'ampiezza invariante per un processo che coinvolge quattro particelle, come quello reale elastico, è $-\lambda$; essa coincide, appunto, col fattore di vertice. Vedremo fra breve casi più complicati in cui, in particolare, il fattore di vertice dipende dai tetra-impulsi.

Allo scopo di illustrare il procedimento ora descritto, calcoliamo l'ampiezza invariante per il processo con quattro particelle nello stato finale ($n = 2$), che corrisponde al secondo diagramma in (2.6.4). Indichiamo le particelle iniziali con a e b , quelle finali con 1, 2, 3, e 4.

Si vuole mettere in corrispondenza alle associazioni non equivalenti delle particelle asintotiche alle linee esterne con diagrammi orientati, in cui le linee esterne corrispondenti alle particelle iniziali convergono verso i loro vertici dal basso e quelle corrispondenti alle particelle finali emergono verso l'alto. Nel caso in studio si hanno due diagrammi:



In questi diagrammi l'orientazione delle linee interne è irrilevante. Il diagramma a sinistra corrisponde a quattro contributi inequivalenti, a seconda della scelta della linea ($j = 1, \dots, 4$) uscente dal vertice in basso; il tetra-impulso associato alla linea interna è $p_1 + p_2 - k_j$. Il diagramma a destra corrisponde a 6 contributi inequivalenti a seconda della scelta della coppia di linee ($i < j = 1, \dots, 4$) uscenti dal vertice a sinistra; il tetra-impulso associato alla linea interna è $p_1 - k_i - k_j$. Tenendo conto di tutti i contributi troviamo che l'ampiezza invariante del processo è:

$$M_{2 \rightarrow 4} = -\lambda^2 \left[\sum_{j=1}^4 \frac{1}{m^2 - (p_1 + p_2 - k_j)^2} + \sum_{j=2}^4 \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{m^2 - (p_1 - k_i - k_j)^2} \right]. \quad (2.9.4)$$

È opportuno osservare che nei fattori di linea interna, che normalmente sono chiamati propagatori, sono stati soppressi gli infinitesimi $i0+$; questo è giustificato dal fatto che i denominatori non possono annullarsi per i valori ammissibili dei tetra-impulsi. Per esempio è facile vedere, utilizzando la conservazione del tetra-impulso, che $(p_1 + p_2 - k_j)^2 > 9m^2$.

2.10 Le simmetrie in teoria dei campi

Abbiamo iniziato il nostro studio considerando il caso di un campo scalare; un'ovvia generalizzazione che mantiene molti caratteri di semplicità è quello di un sistema di campi scalari. Consideriamo dunque il caso di n campi scalari ϕ_i , $i = 1, \dots, n$; la densità lagrangiana è una funzione dei campi e delle loro derivate: $\mathcal{L}(\phi_i, \partial\phi_i)$. Nuovamente consideriamo, in analogia con (2.1.7), la condizione di stazionarietà dell'azione:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d\vec{r} \sum_{i=1}^n \left[\partial_\mu \delta\phi_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} + \delta\phi_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \right] \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \int d\vec{r} \sum_{i=1}^n \delta\phi_i \left[\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \right], \end{aligned} \quad (2.10.1)$$

che conduce al sistema delle equazioni dei campi

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.10.2)$$

Supponiamo ora che i campi siano legati da trasformazioni di simmetria per l'azione. Per semplicità consideriamo il caso $n = 2$ e assumiamo che l'azione sia invariante per trasformazioni $\phi_i(x) \rightarrow \phi'_i(x)$ definite da

$$\begin{pmatrix} \phi'_1(x) \\ \phi'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix}. \quad (2.10.3)$$

La (2.10.3) può essere scritta, per α infinitesimo, come

$$\phi'_i(x) - \phi_i(x) \sim \alpha \sum_{j=1}^2 \epsilon_{ij} \phi_j(x), \quad (2.10.4)$$

dove ϵ_{ij} è il tensore antisimmetrico in due dimensioni:

$$\epsilon_{12} = 1 \quad , \quad \epsilon_{21} = -1 \quad , \quad \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0. \quad (2.10.5)$$

Evidentemente queste trasformazioni rappresentano una rotazione in uno spazio a due dimensioni (che non ha nessuna relazione con lo spazio fisico) in cui le coordinate di un punto sono le componenti del campo, inteso come un vettore; chiameremo *isotopico* questo spazio. La condizione che vogliamo imporre è che la densità lagrangiana non cambi per rotazioni *intorno all'origine* dello spazio isotopico. Scriveremo dunque, tenendo conto della dipendenza di \mathcal{L} dai campi e dalle loro derivate:

$$\sum_{i,j=1}^2 \left[\partial_\mu (\epsilon_{ij} \alpha \phi_j(x)) \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \partial_\mu \phi_i(x)} + (\epsilon_{ij} \alpha \phi_j(x)) \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi_i(x)} \right] = 0. \quad (2.10.6)$$

Dato che α è arbitrario e non dipende da x , è possibile estrarlo dalla condizione d'invarianza che, usando la (2.10.2), diventa:

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^2 \epsilon_{ij} \left[\partial_\mu \phi_j(x) \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial_\mu \phi_i(x))} + \phi_j(x) \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi_i(x)} \right] \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \epsilon_{ij} \left[\partial_\mu \phi_j(x) \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial_\mu \phi_i(x))} + \phi_j(x) \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right] \\ &= \partial_\mu \left[\sum_{i,j=1}^2 \epsilon_{ij} \phi_j(x) \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \partial_\mu \phi_i(x)} \right] \equiv \partial_\mu J^\mu(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.10.7)$$

Questa equazione definisce una tetra-corrente conservata, cioè una tetra-corrente che soddisfa la stessa equazione di continuità della corrente elettrica; si tratta di:

$$J^\mu(x) = \sum_{i,j=1}^2 \epsilon_{ij} \phi_j(x) \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \partial_\mu \phi_i(x)}. \quad (2.10.8)$$

Tipicamente la densità lagrangiana invariante rispetto alle trasformazioni (2.10.4) è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial \phi_1)^2 + (\partial \phi_2)^2 - \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2)] - \frac{\lambda}{8} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2, \quad (2.10.9)$$

da cui, usando la eq. (2.10.8),

$$J_\mu = \phi_2 \partial_\mu \phi_1 - \phi_1 \partial_\mu \phi_2. \quad (2.10.10)$$

La (2.10.7) dimostra nel nostro caso un teorema assai generale, il teorema di Noether, che associa correnti conservate a simmetrie per trasformazioni continue, cioè riducibili in forma infinitesima come la (2.10.4).

2.11 Campi carichi e antiparticelle

Il caso del campo con due componenti può essere trattato in maniera più semplice formando il campo scalare complesso

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_1(x) + i\phi_2(x)]. \quad (2.11.1)$$

La trasformazione (2.10.3) diventa semplicemente

$$\Phi'(x) = e^{i\alpha} \Phi(x), \quad (2.11.2)$$

ovvero una trasformazione di fase per il campo complesso. Inoltre la densità lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = \partial\Phi^* \partial\Phi - m^2 \Phi^* \Phi - \frac{\lambda}{2} (\Phi^* \Phi)^2, \quad (2.11.3)$$

e la corrente

$$J_\mu = i [\Phi^* \partial_\mu \Phi - \Phi \partial_\mu \Phi^*]. \quad (2.11.4)$$

Interpretando eJ come tetra-corrente elettrica associata al nostro campo complesso, parleremo di campo scalare *carico*.

Dato che l'equazione asintotica per il campo carico è identica alla (2.4.1) per il campo reale, ci aspettiamo una soluzione del tutto analoga, combinazione lineare di onde a frequenza negativa e di frequenza positiva, associate rispettivamente a particelle nello stato iniziale e finale e che corrispondono alla funzione d'onda delle prime e al complesso coniugato di quella delle seconde.

Avendo definito una corrente conservata, possiamo chiederci qual è lo stato di carica di queste particelle. A questo proposito dobbiamo ricordare che una trasformazione di simmetria generata da una carica agisce sulla funzione d'onda di una particella moltiplicandola per un fattore di fase proporzionale alla carica della particella stessa. Evidentemente nel nostro caso il fattore di fase (2.11.2) si trasmette dal campo Φ alle funzioni d'onda delle particelle asintotiche, dunque lo stesso fattore di fase rappresenta l'azione della simmetria di carica su tutte le componenti del campo, siano esse a frequenza negativa o positiva. Ma, tenendo conto dell'interpretazione delle componenti a frequenza positiva come funzione d'onda *complessa coniugata* delle particelle finali associate al campo Φ , dobbiamo concludere che queste portano carica opposta di quelle iniziali. Evidentemente se consideriamo il campo Φ^\dagger abbiamo la stessa situazione, ma con fase opposta e quindi si scambiano le cariche delle particelle iniziali con quelle delle particelle finali. Possiamo dunque concludere che la teoria dei campi prevede per ogni particella carica un'*antiparticella* con carica opposta. Questo è un teorema fondamentale, detto CPT, che stabilisce una stretta corrispondenza fra *materia* e *antimateria*.

Il propagatore del campo scalare carico è identico (per la stessa massa) a quello del campo neutro, ma connette il campo col suo hermitiano coniugato; infatti la sorgente J del campo Φ si ottiene, a meno del segno, derivando la densità lagrangiana d'interazione rispetto al campo Φ^\dagger . Questa situazione è tipica di qualunque campo carico, sia esso scalare o meno.

2.12 I campi spinoriali

Abbiamo discusso nel capitolo 2.1 il ruolo dell'invarianza relativistica nella teoria delle interazioni fondamentali e abbiamo accennato in particolare alle proprietà di covarianza dei campi. Ci siamo limitati fin qui a considerare l'esempio dei campi scalari, che come si è detto si trasformano secondo l'equazione

$$\phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) . \quad (2.12.1)$$

Un altro esempio noto (che sarà trattato diffusamente nei capitoli 3.3 e 3.1) è quello dei campi tetra-vettoriali, per i quali

$$A^\mu(x) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x) . \quad (2.12.2)$$

Il caso generale è quello di un sistema di campi complessi ϕ_α , $\alpha = 1, \dots, n$, con la legge di trasformazione

$$\phi'_\alpha(x) = \sum_{\beta=1}^n S(\Lambda)_\alpha^\beta \phi_\beta(\Lambda^{-1}x) , \quad (2.12.3)$$

dove la matrice $S(\Lambda)$ soddisfa la condizione

$$S(\Lambda\Lambda') = S(\Lambda)S(\Lambda') , \quad (2.12.4)$$

e la moltiplicazione è intesa nel senso delle matrici. Il campo tetra-vettoriale fornisce un esempio ovvio di questa legge.

Un altro esempio meno diretto può essere costruito osservando che le matrici hermitiane a due dimensioni possono essere messe in corrispondenza biunivoca con i tetra-vettori. Consideriamo una generica matrice hermitiana 2×2 x ; essa può essere così parametrizzata:

$$x = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \equiv x^\mu \sigma_\mu \quad (2.12.5)$$

dove

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (2.12.6)$$

Si noti che il determinante di x vale

$$\det x = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \equiv x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu \equiv x^2 . \quad (2.12.7)$$

Consideriamo una generica matrice 2×2 con elementi complessi e determinante unitario ($L \in SL(2C)$):

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; \quad \det L = ad - bc = 1 . \quad (2.12.8)$$

La trasformazione

$$x \rightarrow x' = LxL^\dagger \quad (2.12.9)$$

definisce una trasformazione lineare sulle componenti di x che non cambia il determinante di x , né il segno di x^0 . Inoltre, x' è ancora una matrice hermitiana. Questa trasformazione è quindi identificabile con una trasformazione di Lorentz:

$$x \rightarrow x' = \Lambda(L) x . \quad (2.12.10)$$

Per calcolare gli elementi della matrice Λ si scrive

$$LxL^\dagger = L\sigma_\nu L^\dagger x^\nu = \sigma_\mu x'^\mu = \sigma_\mu \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad (2.12.11)$$

cioè

$$L\sigma_\nu L^\dagger = \sigma_\mu \Lambda_\nu^\mu . \quad (2.12.12)$$

È conveniente introdurre le matrici $\bar{\sigma}_\mu$, definite nel modo seguente:

$$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0; \quad \bar{\sigma}_i = -\sigma_i. \quad (2.12.13)$$

È immediato verificare che

$$\text{Tr}(\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu) = 2g_{\mu\nu}. \quad (2.12.14)$$

Si ha pertanto

$$\frac{1}{2} \text{Tr}(\bar{\sigma}_\mu L\sigma_\nu L^\dagger) = g_{\mu\rho} \Lambda_\nu^\rho , \quad (2.12.15)$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{2} \text{Tr}(\bar{\sigma}^\mu L\sigma_\nu L^\dagger) = \Lambda_\nu^\mu . \quad (2.12.16)$$

A titolo di esempio, consideriamo la matrice

$$L = \begin{pmatrix} e^{\frac{\chi+i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\chi+i\theta}{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.12.17)$$

La corrispondente $\Lambda(L)$ è data da:

$$\Lambda(L) = \begin{pmatrix} \cosh \chi & 0 & 0 & \sinh \chi \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sinh \chi & 0 & 0 & \cosh \chi \end{pmatrix}, \quad (2.12.18)$$

e rappresenta una rotazione di un angolo θ intorno all'asse z ed una accelerazione (in inglese *boost*), cioè un passaggio da un sistema di riferimento ad un altro in moto rispetto al primo, con velocità (relativa) $\frac{v}{c} = \tanh \chi$ parallela all'asse z .

L'idea naturale a questo punto è quella di invertire la relazione tra Λ e L e introdurre un nuovo tipo di campi, detti *spinoriali*, con la legge di trasformazione

$$\xi'_\alpha(x) = \sum_{\beta=1}^2 L(\Lambda)_\alpha^\beta \xi_\beta(\Lambda^{-1}x) . \quad (2.12.19)$$

Tuttavia l'inversione cercata è problematica; infatti, se si sostituisce θ con $\theta + 2\pi$, L cambia segno mentre Λ non cambia. Questo conferma che

$$\Lambda(L) = \Lambda(-L) , \quad (2.12.20)$$

che peraltro segue direttamente dalla (2.12.16). La matrice L pensata come funzione della trasformazione di Lorentz ha dunque due valori.

La ragione matematica di ciò è che L non corrisponde a trasformazioni Λ , ma a sequenze continue $\Lambda(t)$, $0 \leq t \leq 1$, con $\Lambda(1) = \Lambda$ e $\Lambda(0) = I$, la trasformazione identica. L'esistenza dei due valori segue dalla possibilità di ottenere una rotazione data ruotando intorno ad uno stesso asse in versi opposti e per angoli la cui somma sia eguale ad un angolo giro.

La difficoltà che abbiamo incontrato è dunque insuperabile a meno che non si assuma come gruppo di simmetria della teoria dei campi relativistici il gruppo delle matrici L invece di quello di Lorentz. Naturalmente questo comporta un cambiamento del significato fisico dell'angolo di rotazione. Questo non cambia minimamente le teorie bosoniche, e ci permette di inserire gli spinori sullo stesso piano degli altri campi.

Identificato dunque in questo modo il gruppo di simmetria spazio-temporale, introduciamo un campo spinoriale a due componenti complesse $\xi_R(x)$ (il significato dell'indice R verrà presto chiarito), la cui legge di trasformazione per un cambiamento di sistema di riferimento corrispondente a L è data da

$$\xi_R(x) \rightarrow \xi'_R(x) = L \xi_R(\Lambda^{-1}(L)x) . \quad (2.12.21)$$

Introdotti i nuovi campi, ci poniamo il problema di costruire densità Lagrangiane che dipendano da questi campi e dalle loro derivate prime e che si trasformino come (2.1.3). La densità lagrangiana dovrà essere di grado pari nei campi spinoriali, perché altrimenti cambierebbe segno per una rotazione di 2π . Osserviamo che la matrice antisimmetrica

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad (2.12.22)$$

soddisfa la relazione

$$L^T \epsilon L = \epsilon , \quad (2.12.23)$$

dove l'apice T indica l'usuale trasposizione matriciale. Infatti

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ad - bc) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12.24)$$

e $ad - bc = \det L = 1$. Utilizzando le relazioni (2.12.23) e (2.12.12), si può verificare che il bilineare

$$\xi_R^T \epsilon \sigma_\mu \epsilon \xi_R^* \quad (2.12.25)$$

si trasforma come un tetra-vettore covariante:

$$\begin{aligned} \xi_R^T L^T \epsilon \sigma_\mu \epsilon L^* \xi_R^* &= \xi_R^T L^T \epsilon (LL^{-1}) \sigma_\mu (LL^{-1})^\dagger \epsilon L^* \xi_R^* \\ &= \xi_R^T \epsilon L^{-1} \sigma_\mu (L^{-1})^\dagger \epsilon \xi_R^* \\ &= \xi_R^T \epsilon \sigma_\nu \epsilon \xi_R^* \left(\Lambda^{-1} \right)_\mu^\nu . \end{aligned} \quad (2.12.26)$$

Osservando che

$$\epsilon \sigma_\mu \epsilon = -\bar{\sigma}_\mu^T \quad (2.12.27)$$

si ha

$$\xi_R^T \epsilon \sigma_\mu \epsilon \xi_R^* = -\xi_R^T \bar{\sigma}_\mu^T \xi_R^* = -\xi_R^\dagger \bar{\sigma}_\mu \xi_R. \quad (2.12.28)$$

Quindi il bilineare

$$\xi_R^\dagger \bar{\sigma}_\mu \partial^\mu \xi_R \quad (2.12.29)$$

si trasforma come uno scalare rispetto a trasformazioni di Lorentz. Questo risultato ci permette di abbozzare una teoria dei campi spinoriali. Si consideri la densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\text{Weyl}}^{(R)} = i \xi_R^\dagger \bar{\sigma}_\mu \partial^\mu \xi_R \quad (2.12.30)$$

Essa è evidentemente hermitiana, grazie all'introduzione del fattore i , e si trasforma come un campo scalare.

L'equazione del moto per lo spinore ξ_R originata dalla densità lagrangiana $\mathcal{L}_{\text{Weyl}}^{(R)}$ è

$$\bar{\sigma}_\mu \partial^\mu \xi_R = 0. \quad (2.12.31)$$

Questa equazione ha per soluzione onde piane con frequenza negativa:

$$\xi_R^{(-)} = \frac{u(p)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - |\vec{p}|t)}, \quad (2.12.32)$$

e con frequenza positiva

$$\xi_R^{(+)} = \frac{v(p)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r} - |\vec{p}|t)}, \quad (2.12.33)$$

dove u e v sono spinori che soddisfano le equazioni

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} u = |\vec{p}| u \quad (2.12.34)$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} v = -|\vec{p}| v. \quad (2.12.35)$$

Quantizzando la teoria libera si trova che l'energia non è limitata inferiormente, perché agli stati asintotici con frequenza positiva corrisponde effettivamente un'energia negativa; in queste condizioni il sistema è intrinsecamente instabile a meno che non si assuma la validità del principio di Pauli e che gli stati con energia negativa non siano accessibili perché occupati. Per questo, al limite semi-classico, i campi spinoriali acquistano una proprietà di anti-commutatività che implica che ogni operazione di crossing (discussa nel capitolo 3.5) su un'ampiezza cambia segno all'ampiezza stessa; in particolare le ampiezze sono funzioni antisimmetriche degli impulsi e spin delle eventuali particelle spinoriali identiche.

Le particelle spinoriali associate a $\mathcal{L}_{\text{Weyl}}^{(R)}$, descritte dalle soluzioni a frequenza negativa (2.12.32), hanno dunque massa nulla e proiezione dello spin lungo la direzione dell'impulso (*elicità*) $+\frac{1}{2}$, come risulta dall'eq. (2.12.34).

Come abbiamo visto nel capitolo 2.11, le soluzioni con frequenza positiva (2.12.33) sono associate alle antiparticelle nello stato finale. Osserviamo ora che, in base alla (2.2.14) e ai

commenti che la seguono, v va considerato come uno spinore complesso coniugato. L'eq. (2.12.35) implica

$$\vec{\sigma}^* \cdot \vec{p} v^* = \vec{\sigma}^T \cdot \vec{p} v^* = |\vec{p}| v^*. \quad (2.12.36)$$

Per ottenere l'azione dell'operatore elicità, moltiplichiamo questa equazione a sinistra per la matrice antisimmetrica ϵ e ricordiamo che, tenendo conto della (2.12.27), si ha

$$\epsilon \vec{\sigma}^T = -\vec{\sigma} \epsilon. \quad (2.12.37)$$

Troviamo quindi

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} (\epsilon v^*) = -|\vec{p}| (\epsilon v^*), \quad (2.12.38)$$

che indica elicità $-\frac{1}{2}$. Dunque la particella associata a ξ_R ha elicità $\frac{1}{2}$ ed è quindi polarizzata secondo la regola della mano destra; questo giustifica l'indice R (right). L'antiparticella ha invece elicità opposta alla particella.

Se ne conclude che la pura e semplice riflessione di parità applicata alla densità lagrangiana $\mathcal{L}_{\text{Weyl}}^{(R)}$ produce una teoria diversa dall'originale. Le soluzioni dell'equazione degli spinori restano le stesse soltanto se alla riflessione degli assi (P) si fa seguire lo scambio particella-antiparticella (C).

Osserviamo infine che la densità lagrangiana eq. (2.12.30) è evidentemente invariante per trasformazioni di fase dei campi analoghe alla (2.11.2):

$$\xi_R(x) \rightarrow \xi'_R(x) = e^{i\varphi} \xi_R(x). \quad (2.12.39)$$

La corrente conservata corrispondente secondo la (2.10.8) è

$$J_R^\mu = -\xi_R^\dagger \vec{\sigma}^\mu \xi_R. \quad (2.12.40)$$

Abbiamo finora studiato le proprietà del campo spinoriale ξ_R sotto l'azione delle trasformazioni di Lorentz. È importante studiarne il comportamento rispetto alla cosiddetta inversione di parità, cioè il cambiamento dell'orientazione degli assi spaziali. Consideriamo la matrice (2.12.17); per effetto dell'inversione di parità, il parametro χ , associato alla velocità relativa dei due sistemi di riferimento, cambia segno, mentre l'angolo θ rimane invariato. Come è facile verificare direttamente, l'immagine riflessa di parità di L è dunque

$$L \rightarrow L_P = \epsilon L^* \epsilon^T, \quad (2.12.41)$$

È anche facile mostrare che L_P non può essere riportata a L con una trasformazione del tipo

$$L \rightarrow L' = z L z^{-1} \quad (2.12.42)$$

con z indipendente dai parametri θ e χ . Dunque l'immagine riflessa di ξ_R è un nuovo campo spinoriale, che chiameremo ξ_L :

$$P : \xi_R \rightarrow \xi_L \quad (2.12.43)$$

che si trasforma nel modo seguente:

$$\xi_L(x) \rightarrow \xi'_L(x) = \epsilon L^* \epsilon^T \xi_L(\Lambda^{-1}(L)x). \quad (2.12.44)$$

Si osservi che ξ_L si trasforma come $\epsilon \xi_R^*$. Infatti

$$\epsilon \xi_R^* \rightarrow \epsilon L^* \xi_R^* = \epsilon L^* \epsilon^T (\epsilon \xi_R^*). \quad (2.12.45)$$

In modo simile a quanto visto nel caso dello spinore ξ_R , si verifica che $\xi_L^\dagger \sigma_\mu \xi_L$ si trasforma come un tetra-vettore covariante, e quindi che

$$\mathcal{L}_{\text{Weyl}}^{(L)} = i \xi_L^\dagger \sigma_\mu \partial^\mu \xi_L \quad (2.12.46)$$

è una buona densità lagrangiana per ξ_L . Con un argomento analogo a quello utilizzato nel caso dello spinore ξ_R , si mostra che le particelle associate al campo ξ_L hanno elicità negativa.

La somma

$$\mathcal{L}_{\text{Weyl}} = \mathcal{L}_{\text{Weyl}}^{(R)} + \mathcal{L}_{\text{Weyl}}^{(L)} \quad (2.12.47)$$

è invariante sotto l'azione dell'inversione di parità; infatti

$$P : i \xi_R^\dagger \bar{\sigma}_\mu \partial^\mu \xi_R \rightarrow i \xi_L^\dagger \sigma_\mu \partial^\mu \xi_L. \quad (2.12.48)$$

Un'altra riflessione degli assi di grande importanza in fisica è quella del tempo (T). Questa riflessione, dovendo scambiare gli stati iniziali con i finali, agisce sui bilineari trasponendoli e manda:

$$\xi_{L/R}(t, \vec{r}) \rightarrow \xi_{L/R}^\dagger(-t, \vec{r}) \epsilon. \quad (2.12.49)$$

Si ha quindi:

$$\xi_R^\dagger \bar{\sigma}^\mu \eta_R(t, \vec{r}) \rightarrow \eta_R^\dagger \bar{\sigma}_\mu \xi_R(-t, \vec{r}) \quad (2.12.50)$$

$$\xi_L^\dagger \sigma^\mu \eta_L(t, \vec{r}) \rightarrow \eta_L^\dagger \sigma_\mu \xi_L(-t, \vec{r}) \quad (2.12.51)$$

$$\xi_{R/L}^T \epsilon \eta_{R/L}(t, \vec{r}) \rightarrow \eta_{R/L}^\dagger \epsilon \xi_{R/L}(-t, \vec{r}). \quad (2.12.52)$$

2.13 Termini di massa per i campi spinoriali e accoppiamenti con gli scalari

Consideriamo ora la possibilità formare, a partire dagli spinori, termini di lagrangiana bilineari nei campi, senza derivate. Si noti in proposito che il prodotto scalare convenzionale di due spinori ξ_R e η_R ,

$$\xi_R^\dagger \eta_R = \sum_{\alpha=1}^2 (\xi_R^*)_\alpha (\eta_R)_\alpha \quad (2.13.1)$$

non è invariante, perché L non è unitaria. È possibile definire una contrazione invariante fra gli indici spinoriali (una specie di prodotto scalare), e quindi di costruire invarianti, utilizzando la matrice ϵ . Si può verificare, usando la (2.12.23), che la quantità $\xi_R^T \epsilon \eta_R$ è invece invariante:

$$\xi_R^T \epsilon \eta_R \rightarrow \xi_R^T L^T \epsilon L \eta_R = \xi_R^T \epsilon \eta_R. \quad (2.13.2)$$

In modo simile, si verifica che $\xi_L^T \epsilon \eta_L$ è invariante. Infine, si consideri uno spinore destrorso ξ_R e uno sinistrorso ξ_L . Poiché, come si è visto, le proprietà di trasformazione di ξ_L sono uguali a

quelle di $\epsilon \xi_R^*$, è possibile scrivere $\xi_L = \epsilon \eta_R^*$ per qualche spinore destrorso η_R . Di conseguenza, il bilineare

$$\xi_L^\dagger \xi_R = -\eta_R^T \epsilon \xi_R \quad (2.13.3)$$

è pure un invariante.

Consideriamo un sistema di n_r spinori destrorsi $\xi_R^{(r)}$ ($r = 1, \dots, n_r$), n_l spinori sinistrorsi $\xi_L^{(l)}$ ($l = 1, \dots, n_l$), e n_s campi scalari $\phi^{(s)}$ ($s = 1, \dots, n_s$). A parte i termini cinetici per ciascuno dei campi, è possibile formare i seguenti termini di densità lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= \sum_{rl} m_{rl} \left[\xi_R^{(r)\dagger} \xi_L^{(l)} + \xi_L^{(l)\dagger} \xi_R^{(r)} \right] \\ &\quad + \sum_{rr'} \left[M_{rr'}^{(R)} \xi_R^{(r)T} \epsilon \xi_R^{(r')} - M_{rr'}^{(R)*} \xi_R^{(r')\dagger} \epsilon \xi_R^{(r)*} \right] \\ &\quad + \sum_{ll'} \left[M_{ll'}^{(L)} \xi_L^{(l)T} \epsilon \xi_L^{(l')} - M_{ll'}^{(L)*} \xi_L^{(l')\dagger} \epsilon \xi_L^{(l)*} \right] \end{aligned} \quad (2.13.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &= \sum_{rls} \left[g_{rls} \phi^{(s)} \xi_R^{(r)\dagger} \xi_L^{(l)} + g_{rls}^* \phi^{(s)\dagger} \xi_L^{(l)\dagger} \xi_R^{(r)} \right] \\ &\quad + \sum_{rr's} \left[G_{rr's}^{(R)} \phi^{(s)} \xi_R^{(r)T} \epsilon \xi_R^{(r')} - G_{rr's}^{(R)*} \phi^{(s)\dagger} \xi_R^{(r')\dagger} \epsilon \xi_R^{(r)*} \right] \\ &\quad + \sum_{ll's} \left[G_{ll's}^{(L)} \phi^{(s)} \xi_L^{(l)T} \epsilon \xi_L^{(l')} - G_{ll's}^{(L)*} \phi^{(s)\dagger} \xi_L^{(l')\dagger} \epsilon \xi_L^{(l)*} \right]. \end{aligned} \quad (2.13.5)$$

È importante notare che i campi spinoriali hanno la dimensione di $E^{\frac{3}{2}}$, mentre i campi bosonici hanno quella di E . Assumendo che le costanti $M^{(R)}$, $M^{(L)}$ e m abbiano le dimensioni di E , e che le costanti $G^{(R)}$, $G^{(L)}$ e g siano adimensionate, sia \mathcal{L}_M sia $\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$ hanno la dimensione corretta per una densità lagrangiana, cioè E^4 .

Osserviamo \mathcal{L}_M contiene termini di massa per i campi spinoriali. Il primo di essi è compatibile con una trasformazione di fase comune di tutti gli spinori, ed è detto *termine di massa di Dirac*, mentre gli altri due non hanno questa proprietà e sono detti *termini di massa di Majorana*. Tenendo conto della natura anticommutante dei campi spinoriali menzionata nel capitolo 2.12 (che è legata alla statistica di Fermi-Dirac) e del fatto che la matrice ϵ è antisimmetrica, si ha che le matrici di massa $M^{(R)}$ e $M^{(L)}$ sono simmetriche. Commenti dello stesso tipo valgono per $\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$, che contiene accoppiamenti dei campi spinoriali con i campi scalari, detti *accoppiamenti di Yukawa*.

La forma delle eq. (2.13.4) e (2.13.5) non è affatto unica, dato che è possibile ridefinire i campi spinoriali di una data chiralità sostituendoli con combinazioni lineari degli spinori della stessa chiralità e di quelli di chiralità opposta complessi coniugati e moltiplicati per ϵ . Se si assume per i termini contenenti le derivate covarianti la forma canonica, resta la libertà di trasformazioni del tipo

$$\begin{aligned} \xi_L^{(l)} &\rightarrow \sum_{l'} \alpha_{ll'} \xi_L^{(l')} + \sum_r \beta_{lr} \epsilon \xi_R^{(r)*} \\ \epsilon \xi_R^{(r)*} &\rightarrow \sum_l \gamma_{rl} \xi_L^{(l)} + \sum_{r'} \eta_{rr'} \epsilon \xi_R^{(r')*}, \end{aligned} \quad (2.13.6)$$

vincolate dalle condizioni

$$\begin{aligned}
\sum_{l''} \alpha_{ll''} \alpha_{l''l}^* + \sum_r \beta_{lr} \beta_{lr}^* &= \delta_{ll} \\
\sum_l \gamma_{rl} \gamma_{rl}^* + \sum_{r''} \eta_{rr''} \eta_{rr''}^* &= \delta_{rr} \\
\sum_{l''} \alpha_{ll''} \eta_{r'l''}^* + \sum_{r'} \beta_{lr'} \gamma_{r'r'}^* &= 0 .
\end{aligned} \tag{2.13.7}$$

Introducendo un super-spinore Ξ le cui componenti, Ξ_α si identificano con gli spinori sinistri: $\xi_L^{(l)}$ o con i destri complessi coniugati: $\epsilon \xi_R^{(r)*}$, si vede subito che la trasformazione (2.13.6) corrisponde ad una trasformazione unitaria \mathcal{U} su Ξ .

Consideriamo ora i termini di massa che appaiono nella (2.13.4); essi possono essere riscritti in termini del super-spinore nella forma

$$\mathcal{L}_M = \sum_\beta \left[\mathcal{M}_{\alpha\beta} \Xi_\alpha^T \epsilon \Xi_\beta - \mathcal{M}_{\beta\alpha}^* \Xi_\alpha^\dagger \epsilon \Xi_\beta^* \right] , \tag{2.13.8}$$

dove \mathcal{M} è una matrice simmetrica complessa: i suoi elementi (l, l') si identificano con $M_{ll'}^{(L)}$, quelli (r, r') con $-M_{r'r}^{(R)*}$ e quelli (r, l) con m_{rl} . Sotto una trasformazione del tipo (2.13.6) la matrice \mathcal{M} si trasforma in $\mathcal{U}^T \mathcal{M} \mathcal{U}$. Questo ci mostra che \mathcal{L}_M può essere sempre posta in una forma canonica priva di termini di Dirac e con termini di Majorana diagonali e positivi. Infatti una matrice simmetrica a elementi complessi può sempre essere scritta nella forma $\mathcal{V}^T \mathcal{D} \mathcal{V}$ con \mathcal{V} unitaria e \mathcal{D} diagonale reale; per convincersene basta osservare che una matrice simmetrica complessa $N \times N$ è individuata da $N(N+1)$ parametri reali, la matrice \mathcal{V} da N^2 e \mathcal{D} da N parametri reali.

La riducibilità di qualunque tipo di termine di massa spinoriale alla forma di Majorana appena mostrata può apparire paradossale alla luce delle considerazioni precedenti circa la incompatibilità dei singoli termini di massa di Majorana con l'esistenza di cariche conservate a causa della mancata invarianza per trasformazioni di fase. È però facile verificare che ad ogni massa di Dirac corrisponde una coppia di autovalori degeneri della matrice di massa in forma canonica di Majorana; la trasformazione di fase corrispondente alla carica conservata appare come una rotazione nello spazio degli autovettori degeneri. Per illustrare meglio la situazione vale la pena di esaminare in dettaglio il caso di un super-spinore bidimensionale, cioè in cui l'indice α ha due valori e la matrice di massa è:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} , \tag{2.13.9}$$

dove gli elementi di matrice sono numeri complessi. Le masse al quadrato delle particelle sono gli autovalori della matrice

$$\mathcal{M}^* \mathcal{M} = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ b^* & c^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a^*b + b^*c \\ ab^* + bc^* & |b|^2 + |c|^2 \end{pmatrix} , \tag{2.13.10}$$

cioè

$$\frac{|a|^2 + |c|^2 + 2|b|^2 \pm \sqrt{(|a|^2 - |c|^2)^2 + 4[|b|^2(|a|^2 + |c|^2) + 2\text{Re}(a^*c^*b^2)]}}{2} . \quad (2.13.11)$$

È evidente che per una scelta generica dei tre parametri complessi \mathcal{L}_M si riduce alla somma di due termini di Majorana; si ha invece degenerazione degli autovalori, e quindi una teoria di Dirac, se il discriminante si annulla; a meno di una trasformazione di fase globale dei parametri che rende b reale, la condizione di degenerazione individua la matrice

$$\mathcal{M}_D = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a^* \end{pmatrix} , \quad b = b^* . \quad (2.13.12)$$

Un altro limite interessante è quello in cui $c = 0$, per cui la (2.13.11) si riduce a

$$\frac{1}{2} \left[|a|^2 + 2|b|^2 \pm \sqrt{|a|^4 + 4|b|^2|a|^2} \right] . \quad (2.13.13)$$

Al limite $|b| \ll |a|$ questi si riducono a $|a|$ e $|b|^2/|a|$. Questa situazione produce il cosiddetto meccanismo altalena (see-saw in inglese) per le masse dei neutrini.

Perché la teoria sia invariante per riflessione T è necessario che si possa scegliere una trasformazione del tipo (2.13.6) che renda reali tutti i parametri, masse e costanti d'accoppiamento. Una teoria P -invariante deve contenere una coppia di spinori con le opposte orientazioni ($R - L$).

Capitolo 3

I modelli delle interazioni fondamentali

3.1 L'elettrodinamica spinoriale

L'esempio più noto di applicazione fenomenologica della teoria dei campi spinoriali è l'elettrodinamica, costruita da Dirac. Questa si basa su una coppia di campi spinoriali ξ_R e ξ_L con invarianza per una trasformazione di fase comune associata alla carica elettrica. Non ci sono campi scalari.

Cominciamo con lo scrivere la densità lagrangiana per la teoria libera:

$$\mathcal{L}_0 = i\xi_R^\dagger \bar{\sigma}_\mu \partial^\mu \xi_R + i\xi_L^\dagger \sigma_\mu \partial^\mu \xi_L - m (\xi_R^\dagger \xi_L + \xi_L^\dagger \xi_R). \quad (3.1.1)$$

Come già osservato alla fine del capitolo 2.10, \mathcal{L}_0 è invariante per trasformazioni di fase dei campi spinoriali:

$$\xi_R(x) \rightarrow e^{ie\Lambda} \xi_R(x) \quad (3.1.2)$$

$$\xi_L(x) \rightarrow e^{ie\Lambda} \xi_L(x), \quad (3.1.3)$$

dove Λ è una costante reale. Si noti che abbiamo introdotto un termine di massa di Dirac per i campi spinoriali, poichè i termini di massa di Majorana non sono compatibili con la richiesta di invarianza (3.1.2,3.1.3). Questa simmetria dà luogo alla corrente conservata

$$J_\mu = -e (\xi_R^\dagger \bar{\sigma}_\mu \xi_R + \xi_L^\dagger \sigma_\mu \xi_L); \quad \partial^\mu J_\mu = 0. \quad (3.1.4)$$

È noto che il campo elettromagnetico interagisce con la materia tramite la corrente elettrica e la densità di carica. L'energia d'interazione campo-cariche si scrive nella forma:

$$H_I = \frac{e}{c} \int d\vec{r} (\Phi_{em} \rho - \vec{J} \cdot \vec{A}), \quad (3.1.5)$$

dove Φ_{em} è il potenziale elettrostatico, \vec{A} il potenziale vettore, ρ la densità di particella, cioè la densità di carica divisa per la carica elementare, \vec{J} quella di corrente di particella ed e la carica elementare. In forma covariante $e(c\rho, \vec{J})$ corrispondono al tetra-vettore corrente J_μ e $(\frac{\Phi_{em}}{c}, \vec{A})$ al potenziale A^μ ; nelle nostre unità di misura si ha:

$$H_I = \int d\vec{r} A^\mu J_\mu. \quad (3.1.6)$$

Volendo dunque descrivere la dinamica dei campi spinoriali in presenza di un campo elettromagnetico useremo la densità lagrangiana (ricordando sempre la analogia $L = T - V$):

$$\mathcal{L}_I = -A^\mu J_\mu = e A^\mu \left(\xi_R^\dagger \bar{\sigma}_\mu \xi_R + \xi_L^\dagger \sigma_\mu \xi_L \right) . \quad (3.1.7)$$

Dunque si ha

$$\mathcal{L}_{QED} = i\xi_R^\dagger \bar{\sigma}_\mu (\partial^\mu - ieA_\mu) \xi_R + i\xi_L^\dagger \sigma_\mu (\partial^\mu - ieA_\mu) \xi_L - m \left(\xi_R^\dagger \xi_L + \xi_L^\dagger \xi_R \right) . \quad (3.1.8)$$

Questa teoria è invariante per riflessioni P e T.

Praticamente in tutti i testi si utilizza una notazione che semplifica notevolmente la scrittura della teoria di Dirac. I campi spinoriali sono raggruppati in tetra-spinori:

$$\psi(x) \equiv \begin{pmatrix} \xi_R(x) \\ \xi_L(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \xi_{R1}(x) \\ \xi_{R2}(x) \\ \xi_{L1}(x) \\ \xi_{L2}(x) \end{pmatrix} . \quad (3.1.9)$$

Si introducono le matrici

$$\gamma_\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \bar{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma_5 \equiv \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \quad (3.1.10)$$

e si definisce

$$\bar{\psi}(x) \equiv (\xi_L^\dagger(x) \quad \xi_R^\dagger(x)) = \psi^\dagger \gamma_0 . \quad (3.1.11)$$

È evidente il ruolo di γ_5 , che distingue gli spinori destrorsi da quelli sinistrorsi. Le matrici che proiettano il tetra-spinore su queste componenti sono infatti

$$\frac{1 + \gamma_5}{2} \psi = \begin{pmatrix} \xi_R \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_L \end{pmatrix} . \quad (3.1.12)$$

In termini di queste quantità, la densità lagrangiana dell'elettrodinamica assume la forma

$$\mathcal{L}_{QED} = i\bar{\psi} \gamma_\mu (\partial^\mu - ieA^\mu) \psi - m\bar{\psi}\psi . \quad (3.1.13)$$

Questa espressione può essere riscritta in modo più semplice e significativo introducendo la *derivata covariante*:

$$D_\mu \psi(x) \equiv \partial_\mu \psi(x) - ieA_\mu(x) \psi(x) . \quad (3.1.14)$$

La novità importante è che la densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_{QED} = i\bar{\psi} \gamma_\mu D^\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \quad (3.1.15)$$

è invariante per le trasformazioni

$$\psi(x) \rightarrow e^{+ie\Lambda(x)} \psi(x) \quad (3.1.16)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow e^{-ie\Lambda(x)} \bar{\psi}(x) \quad (3.1.17)$$

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x) , \quad (3.1.18)$$

che sono una generalizzazione della (2.11.2) con Λ dipendente da x . Per ragioni storiche le trasformazioni (3.1.18) sono dette *trasformazioni di gauge*.

Considerando (3.1.18) possiamo capire il significato dell'aggettivo *covariante* associato alla derivata definita sopra; infatti, se consideriamo la trasformazione della derivata parziale ordinaria:

$$\partial_\mu \psi(x) \rightarrow \partial_\mu \left(e^{ie\Lambda(x)} \psi(x) \right) = e^{ie\Lambda(x)} \partial_\mu \psi(x) + ie \partial_\mu \Lambda(x) e^{ie\Lambda(x)} \psi(x) \quad (3.1.19)$$

vediamo che essa non è analoga a quella del campo ψ , cioè non viene moltiplicata per un fattore di fase; questo invece avviene per la derivata covariante di ψ , dato che il secondo termine in (3.1.14) si trasforma:

$$-ieA_\mu(x)\psi(x) \rightarrow -ieA_\mu(x)e^{ie\Lambda(x)}\psi(x) - ie\partial_\mu\Lambda(x)e^{ie\Lambda(x)}\psi(x), \quad (3.1.20)$$

e i due termini in $\partial_\mu\Lambda$ nelle due equazioni si compensano. Abbiamo stabilito dunque che:

$$D_\mu \psi(x) \rightarrow e^{ie\Lambda(x)} D_\mu \psi(x). \quad (3.1.21)$$

È immediato verificare che analogo risultato vale per le derivate multiple:

$$D_{\mu_1} \dots D_{\mu_n} \psi(x) \rightarrow e^{ie\Lambda(x)} D_{\mu_1} \dots D_{\mu_n} \psi(x) \quad (3.1.22)$$

per qualunque n .

L'esempio che abbiamo descritto è l'applicazione più semplice del *Principio di Invarianza di Gauge* che vincola le teorie che coinvolgono campi tetra-vettoriali (come il potenziale tetra-vettore) all'invarianza sotto trasformazioni di gauge analoghe alla (3.1.18). Dal punto di vista fisico si può dimostrare che l'invarianza di gauge è necessaria per eliminare l'effetto delle componenti del campo tetra-vettoriale che non corrispondono a variabili fisiche del sistema; queste esistono necessariamente perché il campo tetra-vettoriale ha quattro componenti, mentre le particelle associate, che hanno spin unitario, hanno al più tre stati indipendenti. Verificheremo esplicitamente questa eliminazione nel caso del modello di Higgs.

Naturalmente per parlare di elettrodinamica bisogna aggiungere alla densità lagrangiana (3.1.15) quella del campo elettromagnetico. Ricordando che, nel sistema razionalizzato, la densità di energia elettromagnetica è $\frac{E^2+B^2}{2}$, e che il termine in E^2 va interpretato come di energia cinetica perché il campo elettrico \vec{E} è proporzionale alla derivata temporale del potenziale vettore mentre il campo magnetico \vec{B} corrisponde alle derivate spaziali (il rotore) dello stesso, concludiamo che la densità lagrangiana elettromagnetica è:

$$\mathcal{L}_{em} = \frac{E^2 - B^2}{2}. \quad (3.1.23)$$

Questa densità lagrangiana può essere riscritta in forma esplicitamente covariante per mezzo del tensore

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (3.1.24)$$

detto *tensore dei campi*. Si ha

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (3.1.25)$$

Il tensore $F_{\mu\nu}$ invariante sotto trasformazioni di gauge, come si vede immediatamente applicando la trasformazione in eq. (3.1.18). Lo stesso risultato si ottiene osservando che

$$F_{\mu\nu}(x)\psi(x) = -\frac{i}{e}(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi(x) \equiv -\frac{i}{e}[D_\mu, D_\nu]\psi(x), \quad (3.1.26)$$

da cui si vede subito che $F_{\mu\nu}$, e quindi \mathcal{L}_{em} , sono invarianti. Anzi va evidenziato a questo punto che \mathcal{L}_{em} è l'unico termine proponibile per una densità lagrangiana dipendente dal solo tetrapotenziale A^μ e invariante di gauge (si ricordi il vincolo della indipendenza dalle derivate di ordine superiore al primo); in particolare, l'invarianza di gauge esclude la possibilità di termini del tipo $\mu^2 A_m u A^\mu$ che corrisponderebbero a una ipotetica massa del fotone. Includendo il termine di densità lagrangiana elettromagnetica, abbiamo dunque

$$\mathcal{L}_{QED} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (3.1.27)$$

È ora immediato ricavare le equazioni del moto. Otteniamo

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = e\gamma^\mu A_\mu\psi \quad (3.1.28)$$

$$\partial^2 A^\mu - \partial^\mu\partial A = -J^\mu. \quad (3.1.29)$$

Il passo successivo è la determinazione delle funzioni di Green per le due equazioni. Molti calcoli sono semplificati usando le proprietà algebriche delle matrici γ :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2I g^{\mu\nu} \quad , \quad \text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}. \quad (3.1.30)$$

La funzione di Green per il campo spinoriale è definita da

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)S(x) = \delta(x). \quad (3.1.31)$$

La $S(x)$ può essere facilmente ricavata dalle funzioni di Green note osservando che in base alle relazioni (3.1.30)

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)S(x) = -(\partial^2 + m^2)S(x) = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\delta(x) \quad (3.1.32)$$

da cui, confrontando con le (2.4.12,2.4.13), si ha

$$S(x) = -(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\Delta(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\mu k^\mu + m}{k^2 - m^2 + i0+} e^{-ik\cdot x}, \quad (3.1.33)$$

dove $\Delta(x)$ è la funzione di Green per il campo scalare, definita in eq. (2.4.12).

La funzione di Green per A^μ sarebbe la soluzione di

$$\partial^2\Delta^{\mu\nu}(x) - \partial^\mu\partial_\lambda\Delta^{\lambda\nu}(x) = -g^{\mu\nu}\delta^4(x). \quad (3.1.34)$$

L'uso del condizionale è dovuto al fatto che $\Delta^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu X^\nu(x)$ per qualunque X^ν è soluzione della equazione omogenea associata alla (3.1.34) che pertanto non ha un'unica soluzione; questa

difficoltà è strettamente collegata al fatto che le equazioni di Maxwell non determinano il potenziale vettore e quindi le equazioni del campo per il potenziale tetra-vettore vanno integrate con una prescrizione supplementare. La scelta di questa prescrizione ha costituito uno dei problemi principali della fisica teorica del ventesimo secolo per ragioni connesse con gli assiomi della meccanica quantistica e in particolare con la conservazione della probabilità, ma nell'approssimazione semiclassica e nella formulazione completa dell'elettrodinamica il problema è risolto in un modo assai semplice che qui presenteremo in forma ulteriormente semplificata: si tratta di introdurre nella densità lagrangiana un termine che *fissa la gauge*, cioè:

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 , \quad (3.1.35)$$

e che sostanzialmente impone, tramite l'equazione del campo A , la condizione di Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$. La densità lagrangiana, finalmente completa, dell'elettrodinamica è dunque:

$$\mathcal{L}_{QED} = i\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 . \quad (3.1.36)$$

Gli ultimi due termini di questa espressione possono essere riscritti nella forma

$$\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 = \frac{1}{2} \partial_\mu (A_\nu \partial^\nu A^\mu - A^\mu \partial_\nu A^\nu) , \quad (3.1.37)$$

cioè come una tetra-divergenza. Per il teorema di Gauss-Green, questa contribuisce all'azione solo per termini di bordo e quindi non contribuisce alle equazioni del campo. Possiamo quindi ridurre la densità lagrangiana ai primi tre termini della (3.1.36):

$$\mathcal{L}_{QED} = i\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu . \quad (3.1.38)$$

Le equazioni del moto per il campo A^μ sono ora

$$\partial^2 A^\mu = -J^\mu , \quad (3.1.39)$$

e il corrispondente propagatore è la soluzione di:

$$\partial^2 \Delta^{\mu\nu}(x) = -g^{\mu\nu} \delta^4(x) , \quad (3.1.40)$$

che può essere calcolata direttamente dalla (2.4.12) con $m = 0$:

$$\Delta^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\nu} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 + i0+} . \quad (3.1.41)$$

Occupiamoci ora delle regole di Feynman per la QED. Osserviamo che il campo di Dirac è carico e le sue linee sono orientate; il propagatore corrisponde alla matrice $S(x - y)$ in (3.1.33), in cui l'indice di linea corrisponde al campo $\psi(x)$ e quello di colonna a $\bar{\psi}(y)$. Il propagatore del fotone è dato in (3.1.41). Infine, la lagrangiana (3.1.38) contiene un unico termine di interazione:

$$e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi . \quad (3.1.42)$$

I simboli grafici convenzionali sono:

$$\alpha \longleftarrow \beta \quad \leftrightarrow \quad \frac{(\gamma^\mu q_\mu + m)_\beta^\alpha}{q^2 - m^2 + i0+} \quad (3.1.43)$$

per il propagatore del campo spinoriale (il momento q fluisce nella stessa direzione della freccia);

$$\mu \text{ ~~~~~ } \nu \quad \leftrightarrow \quad \frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + i0+} \quad (3.1.44)$$

per il propagatore del fotone, e infine

$$\begin{array}{c} \mu \\ | \\ \alpha \swarrow \quad \searrow \beta \end{array} \quad \leftrightarrow \quad e(\gamma^\mu)_\beta^\alpha \quad (3.1.45)$$

per il fattore di vertice. Si noti che ogni estremo di una linea corrispondente al campo fermionico porta un indice spinoriale (α e β in figura), e che ogni estremo di una linea corrispondente al campo vettoriale porta un indice tetra-vettoriale (μ e ν in figura).

Nel caso del campo vettoriale l'espressione del valore asintotico (2.5.14) va corretta per tener conto degli stati di polarizzazione del campo stesso. Per questo si introduce per ciascuna onda piana con tetra-impulso p_μ un tetra-vettore di polarizzazione ϵ_μ , in generale complesso, che dipende dallo stato di elicità della particella asintotica. Il campo vettoriale asintotico corrispondente alle eventuali onde piane i iniziali e f finali risulta essere:

$$A_\mu^{(as)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left[\sum_i \epsilon_\mu^{(i)}(p_i, \lambda_i) \frac{e^{-ip_i \cdot x}}{\sqrt{2E(p_i)}} + \sum_f \epsilon_\mu^{(f)*}(p_f, \lambda_f) \frac{e^{ip_f \cdot x}}{\sqrt{2E(p_f)}} \right], \quad (3.1.46)$$

dove anche in questo caso abbiamo ommesso un fattore $(\sqrt{4\pi\sigma})^{3/2}$. I vettori di polarizzazione sono soggetti alla condizione di normalizzazione

$$\epsilon_\mu^*(p, \lambda) \epsilon^\mu(p, \lambda) = -1. \quad (3.1.47)$$

La condizione di gauge fixing che abbiamo scelto equivale sostanzialmente a imporre che $\partial_\mu A^\mu$ sia uguale a zero. Questo si traduce nella condizione

$$p^\mu \epsilon_\mu(p, \lambda) = 0. \quad (3.1.48)$$

Il vettore di polarizzazione ϵ^μ può essere decomposto nel modo seguente:

$$\epsilon^\mu = \epsilon_T^\mu + a p^\mu + b \bar{p}^\mu, \quad (3.1.49)$$

dove

$$\bar{p} = (p^0, -\vec{p}); \quad \epsilon_T = (0, \vec{\epsilon}_T); \quad \vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_T = 0. \quad (3.1.50)$$

È immediato verificare che il coefficiente b deve annullarsi come conseguenza della condizione (3.1.48) e della condizione di mass-shell $p^2 = 0$. La componente di polarizzazione longitudinale

ap^μ , d'altro canto, può sempre essere eliminata mediante una opportuna trasformazione di gauge; infatti, anche con l'introduzione del termine di gauge fixing \mathcal{L}_{gf} , la lagrangiana possiede una invarianza residua rispetto a trasformazioni del tipo $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$, con $\partial^2 \Lambda = 0$. Se ne conclude che le particelle associate al campo A^μ , cioè i fotoni, possono avere soltanto stati di polarizzazione trasversale; questo risultato è d'altra parte noto dalla fisica classica. Utilizzando le condizioni (3.1.47) e (3.1.48), è facile ottenere che

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu(p, \lambda) \epsilon_\nu^*(p, \lambda) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu \bar{p}_\nu + \bar{p}_\mu p_\nu}{p \cdot \bar{p}}. \quad (3.1.51)$$

Analogamente, il campo spinoriale asintotico si scrive in termini di spinori che descrivono lo stato di spin dei fermioni nello stato iniziale e finale; si ha

$$\psi^{(as)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[\sum_i \frac{u(p_i, \lambda_i)}{\sqrt{2E_{p_i}}} e^{-ip_i \cdot x} + \sum_f \frac{v(\bar{k}_f, \bar{\lambda}_f)}{\sqrt{2E_{\bar{k}_f}}} e^{i\bar{k}_f \cdot x} \right] \quad (3.1.52)$$

$$\bar{\psi}^{(as)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[\sum_i \frac{\bar{v}(\bar{p}_i, \bar{\lambda}_i)}{\sqrt{2E_{\bar{p}_i}}} e^{-i\bar{p}_i \cdot x} + \sum_f \frac{\bar{u}(k_f, \lambda_f)}{\sqrt{2E_{k_f}}} e^{ik_f \cdot x} \right], \quad (3.1.53)$$

dove abbiamo indicato con p_i, λ_i gli impulsi e le elicità delle particelle nello stato iniziale, con $\bar{k}_f, \bar{\lambda}_f$ quelli delle antiparticelle nello stato finale, con $\bar{p}_i, \bar{\lambda}_i$ quelli delle antiparticelle nello stato iniziale, e con k_f, λ_f quelli delle particelle nello stato finale. Si noti che $\bar{\psi}^{(as)}$ non è il campo coniugato di Dirac di $\psi^{(as)}$; questo dipende dal fatto che l'operazione di limite debole, definita nel capitolo 2.2, non preserva le proprietà di hermiticità dei campi. Gli spinori u e v sono così normalizzati:

$$\bar{u}(p, \lambda) u(p, \lambda') = 2m \delta_{\lambda\lambda'}; \quad \bar{v}(p, \lambda) v(p, \lambda') = -2m \delta_{\lambda\lambda'}; \quad \bar{v}(p, \lambda) u(p, \lambda') = 0, \quad (3.1.54)$$

e soddisfano le relazioni

$$(\gamma_\mu p^\mu - m) u(p, \lambda) = 0 \quad (3.1.55)$$

$$(\gamma_\mu p^\mu + m) v(p, \lambda) = 0 \quad (3.1.56)$$

che discendono dall'equazione del moto per il campo in assenza di interazione. Queste relazioni implicano immediatamente che

$$\sum_\lambda u(p, \lambda) \bar{u}(p, \lambda) = \gamma_\mu p^\mu + m \quad (3.1.57)$$

$$\sum_\lambda v(p, \lambda) \bar{v}(p, \lambda) = \gamma_\mu p^\mu - m. \quad (3.1.58)$$

3.2 Un esempio: lo scattering Compton

A titolo di esempio possiamo calcolare la sezione d'urto per il processo

$$e^-(p) + \gamma(q) \rightarrow e^-(p') + \gamma(q'), \quad (3.2.1)$$

detto diffusione Compton (tra parentesi abbiamo indicato i tetra-impulsi delle particelle coinvolte). L'ampiezza invariante corrisponde ai diagrammi

$$(3.2.2)$$

Siano ϵ e ϵ' i vettori di polarizzazione dei fotoni negli stati in iniziale e finale, soggetti alla condizione (3.1.48):

$$\epsilon \cdot q = \epsilon' \cdot q' = 0 . \quad (3.2.3)$$

L'ampiezza invariante corrispondente risulta essere

$$M = e^2 \left[\bar{u}(p') (\epsilon_\alpha \gamma^\alpha) \frac{\gamma^\mu (p' - q)_\mu + m}{(q - p')^2 - m^2} (\epsilon'^*_\beta \gamma^\beta) u(p) + \bar{u}(p') (\epsilon'^*_\beta \gamma^\beta) \frac{\gamma^\mu (p' + q')_\mu + m}{(q' + p')^2 - m^2} (\epsilon_\alpha \gamma^\alpha) u(p) \right] . \quad (3.2.4)$$

Si noti che i due termini e i diagrammi corrispondenti sono ottenuti incrociando le linee esterne fotoniche e che questo corrisponde allo scambio $q \leftrightarrow -q'$ e $\epsilon \leftrightarrow \epsilon'^*$, detto *crossing*.

3.3 L'elettrodinamica scalare

In modo simile a quanto esposto nel capitolo precedente, è possibile costruire la densità lagrangiana che descrive l'interazione di un campo scalare carico Φ con il campo elettromagnetico. La richiesta di invarianza rispetto a trasformazioni di gauge

$$\Phi(x) \rightarrow e^{+ie\Lambda(x)} \Phi(x) \quad (3.3.1)$$

$$\Phi^*(x) \rightarrow e^{-ie\Lambda(x)} \Phi^*(x) \quad (3.3.2)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \quad (3.3.3)$$

conduce univocamente alla densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = D_\mu \Phi^* D^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi - \frac{\lambda}{2} (\Phi^* \Phi)^2 - \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu , \quad (3.3.4)$$

dove la derivata covariante per il campo Φ è definita da

$$D_\mu \Phi(x) \equiv \partial_\mu \Phi(x) - ie A_\mu(x) \Phi(x) . \quad (3.3.5)$$

Proseguendo la nostra analisi sulla falsariga della teoria spinoriale, possiamo scrivere le equazioni dei campi:

$$(\partial^2 + m^2) \Phi = ie A^\mu \partial_\mu \Phi + ie \partial_\mu (A^\mu \Phi) + e^2 A^2 \Phi - \lambda \Phi^* \Phi^2 \equiv J_\Phi \quad (3.3.6)$$

$$\partial^2 A^\mu = -ie (\Phi^* D^\mu \Phi - \Phi D^\mu \Phi^*) \equiv -J_A^\mu . \quad (3.3.7)$$

Non scriviamo in modo esplicito l'equazione per il campo Φ^* che è la complessa coniugata di quella di Φ .

La funzione di Green per il campo scalare è la ben nota $\Delta(x)$ di eq. (2.4.12), mentre quella per il campo vettoriale A_μ è stata ricavata nel capitolo precedente.

3.4 Il modello di Higgs abeliano

Abbiamo fin qui passato sotto silenzio la possibilità di introdurre trasformazioni di simmetria e di gauge analoghe alla (3.1.18) che però *non lasciano invariata l'origine dello spazio isotopico*. Per esempio:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &\rightarrow e^{ie\Lambda(x)} \left(\Phi(x) + \frac{v}{\sqrt{2}} \right) - \frac{v}{\sqrt{2}} \\ \Phi^*(x) &\rightarrow e^{-ie\Lambda(x)} \left(\Phi^*(x) + \frac{v}{\sqrt{2}} \right) - \frac{v}{\sqrt{2}} \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) .\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

Considerando ora questa possibilità, dobbiamo chiederci come cambia la derivata covariante e come cambia l'interazione del campo Φ con Φ^* . Per rispondere alla prima domanda basta osservare che la quantità

$$D_\mu \left(\Phi(x) + \frac{v}{\sqrt{2}} \right) \equiv \partial_\mu \Phi(x) - ieA_\mu(x) \left(\Phi(x) + \frac{v}{\sqrt{2}} \right)\tag{3.4.2}$$

si trasforma come $\Phi + \frac{v}{\sqrt{2}}$; essa è dunque covariante.

Circa l'interazione Φ - Φ^* osserviamo che

$$-\frac{\lambda}{2} \left[\left(\Phi(x) + \frac{v}{\sqrt{2}} \right) \left(\Phi^*(x) + \frac{v}{\sqrt{2}} \right) - \frac{v^2}{2} \right]^2\tag{3.4.3}$$

è l'unico termine possibile che è minimo nell'origine dello spazio isotopico (che corrisponde allo stato senza particelle), è invariante sotto le (3.4.1), e non supera il quarto grado in $|\Phi|$.

Per ragioni di semplicità di calcolo è conveniente, in questo contesto, sostituire il termine \mathcal{L}_{gf} in (3.1.35) con il termine

$$\mathcal{L}_{gfh} = -\frac{1}{2} \left(\partial_\mu A^\mu - ie \frac{v}{\sqrt{2}} (\Phi - \Phi^*) \right)^2 ,\tag{3.4.4}$$

introdotto per la prima volta da G. 't Hooft. Si noti che, trattandosi di una condizione necessaria per fissare univocamente il potenziale tetra-vettore, la scelta fra le varie possibilità non risponde a condizioni di natura fisica. Questo nuovo termine completa la costruzione di una generalizzazione dell'elettrodinamica scalare, detta modello di Higgs abeliano, basata sulla densità lagrangiana

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_H &= \left[D_\mu \left(\Phi + \frac{v}{\sqrt{2}} \right) \right]^* D^\mu \left(\Phi + \frac{v}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\lambda}{2} \left[\left(\Phi(x) + \frac{v}{\sqrt{2}} \right) \left(\Phi^*(x) + \frac{v}{\sqrt{2}} \right) - \frac{v^2}{2} \right]^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left(\partial_\mu A^\mu - ie \frac{v}{\sqrt{2}} (\Phi - \Phi^*) \right)^2 .\end{aligned}\tag{3.4.5}$$

Per capirne i contenuti fisici separiamo la parte libera, bilineare nei campi, che descrive il comportamento asintotico dei campi stessi e quindi il contenuto particellare della teoria, dalla parte

restante, che definisce l'interazione. Ricordando la definizione di derivata covariante (3.4.2) troviamo per densità lagrangiana libera

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 &= \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi + ie \frac{v}{\sqrt{2}} A^\mu \partial_\mu (\Phi - \Phi^*) + \frac{e^2 v^2}{2} A^2 - \frac{\lambda}{4} v^2 (\Phi + \Phi^*)^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \frac{1}{2} (\partial A)^2 + \frac{e^2 v^2}{4} (\Phi - \Phi^*)^2 + ie \frac{v}{\sqrt{2}} \partial_\mu A^\mu (\Phi - \Phi^*) \\
&= \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - \frac{\lambda}{4} v^2 (\Phi + \Phi^*)^2 + \frac{e^2 v^2}{4} (\Phi - \Phi^*)^2 - \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{e^2 v^2}{2} A^2 .
\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

Nel secondo passaggio abbiamo effettuato una integrazione per parti sull'ultimo termine, e abbiamo ommesso un termine proporzionale ad una tetra-divergenza, in analogia a quanto fatto nel caso dell'elettrodinamica spinoriale (si veda l'eq. (3.1.37)). Diventa evidente a questo punto l'opportunità di decomporre il campo Φ in una parte reale e una parte immaginaria:

$$\Phi = \frac{H + iG}{\sqrt{2}} . \tag{3.4.7}$$

Il campo scalare reale H è chiamato *campo di Higgs*, e il campo G *campo di Goldstone*. In termini di H e G otteniamo

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \left[(\partial H)^2 - \lambda v^2 H^2 + (\partial G)^2 - e^2 v^2 G^2 - \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + e^2 v^2 A^2 \right] , \tag{3.4.8}$$

che identifica lo spazio degli stati asintotici del modello con quello di un sistema di particelle di spin 1 e 0 e massa ev associate al campo A e due tipi diversi di scalari: quello di Goldstone con la stessa massa del vettore e quello di Higgs con massa $\sqrt{\lambda}v$.

Con le stesse definizioni l'interazione è

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_I &= -eA^\mu (H\partial_\mu G - G\partial_\mu H) + e^2 v A^2 H - \frac{\lambda}{2} v H (H^2 + G^2) \\
&\quad + \frac{e^2}{2} A^2 H^2 + \frac{e^2}{2} A^2 G^2 - \frac{\lambda}{8} (H^4 + G^4 + 2H^2 G^2) .
\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

Le equazioni dei tre campi possono essere scritte in analogia con la (2.4.1) e con la (3.3.7):

$$(\partial^2 + \lambda v^2) H = J_H \tag{3.4.10}$$

$$(\partial^2 + e^2 v^2) G = J_G \tag{3.4.11}$$

$$(\partial^2 + e^2 v^2) A^\mu = -J^\mu, \tag{3.4.12}$$

dove i secondi membri possono essere direttamente calcolati dall'interazione. Queste equazioni conducono a espressioni analoghe alla (2.4.14) per i tre campi.

Facendo tesoro dell'esperienza accumulata con il modello scalare, passiamo a considerare subito le regole di Feynman del modello. I propagatori dei campi scalari si ottengono direttamente dalla (2.4.12) sostituendo le masse con i valori appropriati; quello del campo tetra-vettoriale si

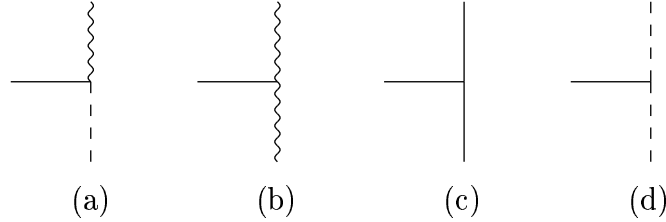
ottiene da (3.1.41) inserendo a denominatore il quadrato della massa, e^2v^2 . Avremo pertanto la seguente corrispondenza fra simboli e fattori di linea:

$$\text{—————} \leftrightarrow \frac{1}{\lambda v^2 - q^2 - i0+} \quad \text{per il campo } H \quad (3.4.13)$$

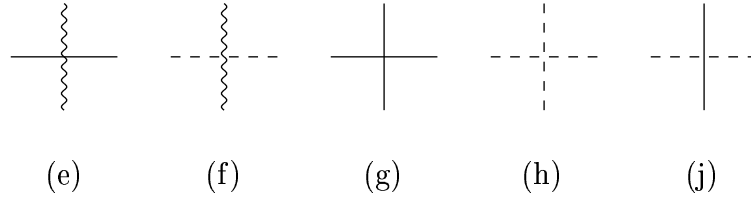
$$\text{-----} \leftrightarrow \frac{1}{e^2v^2 - q^2 - i0+} \quad \text{per il campo } G \quad (3.4.14)$$

$$\text{~~~~~} \leftrightarrow \frac{g^{\mu\nu}}{q^2 - e^2v^2 + i0+} \quad \text{per il campo } A^\mu . \quad (3.4.15)$$

Usando gli stessi simboli per le linee, possiamo elencare i vertici del modello, dedotti dalla (3.4.9). Quelli trilineari, corrispondenti alla prima riga di \mathcal{L}_I , sono



mentre quelli tetra-lineari, elencati nella seconda riga, sono



Il vertice (a) origina dal primo termine in (3.4.9)), e corrisponde a un termine d'interazione contenente derivate. Applicando la regola di valutare l'ampiezza invariante virtuale corrispondente ai campi asintotici

$$H^{(as)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{-ip_H \cdot x}}{\sqrt{2E_{p_H}}}; \quad G^{(as)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{-ip_G \cdot x}}{\sqrt{2E_{p_G}}}; \quad A_\mu^{(as)} = \frac{\epsilon_\mu}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{-ip_A \cdot x}}{\sqrt{2E_{p_A}}}, \quad (3.4.16)$$

si ottiene il fattore

$$ie\epsilon_\mu (p_G^\mu - p_H^\mu) . \quad (3.4.17)$$

Si noti che i tre tetra-impulsi p_H , p_G e p_A sono considerati entranti nel vertice, e la loro somma deve annullarsi. I fattori corrispondenti a tutti gli altri vertici sono ottenuti moltiplicando il coefficiente del termine corrispondente nella lagrangiana di interazione per il fattore combinatorio $\prod_c n_c!$, dove n_c è la potenza del campo della specie c nel termine stesso. Si ricavano facilmente i fattori dati in tab. 3.1.

vertice	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(j)
fattore	$ie\epsilon_\mu(p_G^\mu - p_H^\mu)$	$2e^2vg^{\mu\nu}$	$-3\lambda v$	$-\lambda v$	$2e^2g^{\mu\nu}$	$2e^2g^{\mu\nu}$	-3λ	-3λ	$-\lambda$

Tabella 3.1: Fattori di vertice per il modello di Higgs abeliano; gli indici μ e ν si riferiscono alle gambe vettoriali.

3.5 Il contenuto fisico del modello di Higgs abeliano

Chiarita la struttura del modello è importante considerarne, se pur brevemente, il contenuto fisico, mettendo così in evidenza proprietà che valgono anche nelle estensioni di maggior interesse applicativo che discuteremo nel seguito.

Considerando in generale la struttura dei campi asintotici presentati poco sopra e deducendo il loro spin dalle proprietà di trasformazione per rotazione spaziale (un invariante corrisponde a spin 0, un (tri)vettore spaziale a spin 1) vediamo che i campi di Higgs e Goldstone, che sono associati a pure e semplici onde piane, corrispondono a particelle senza spin; il campo tetra-vettoriale, il *bosone vettore*, per un vettore di polarizzazione generico, ha quattro componenti indipendenti, tre con spin 1 e una con spin 0. Va osservato però che il propagatore (3.4.15) corrispondente alla componente tempo del campo A ha il segno opposto di quello dei campi H e G ; questo significa che la componente di spin nullo di A non corrisponde a particelle associate a stati quanto-meccanici consistenti perché inducono probabilità di transizione negative (maggiori dettagli su questo punto si trovano in Appendice D).

È quindi chiaro che questi stati vanno eliminati dalle funzioni d'onda asintotiche vincolando il vettore di polarizzazione ϵ al sottospazio *fisico* tramite le condizioni:

$$\epsilon^2 = -1 \quad , \quad \epsilon \cdot p = 0 . \quad (3.5.1)$$

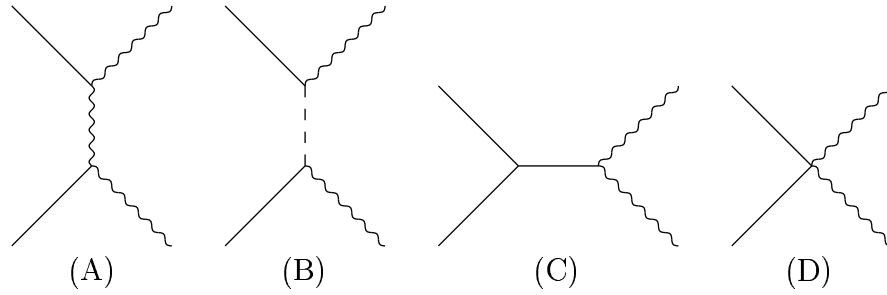
Queste condizioni identificano per ogni fissato impulso tre polarizzazioni ϵ indipendenti corrispondenti ai tre stati di elicità (spin) delle particelle. Infatti, nel sistema di riferimento in cui la particella è in quiete il tetra-vettore impulso diretto ha solo la componente tempo, e le eqs. (3.5.1) impongono che ϵ sia un vettore puramente spaziale.

L'aver selezionato gli stati asintotici non risolve completamente il problema di consistenza quanto-meccanica della teoria perché la componente scalare del campo A continua a intervenire negli stati intermedi dei processi tramite il propagatore (3.4.15). Però si può dimostrare che questi contributi virtuali sono esattamente compensati dai contributi agli stati intermedi corrispondenti al campo di Goldstone purché le particelle asintotiche siano o di Higgs o di spin unitario. Per ragioni di economia didattica noi illustriamo questo risultato studiando l'esempio dello scattering di una particella di spin 1 da parte di una particella Higgs:

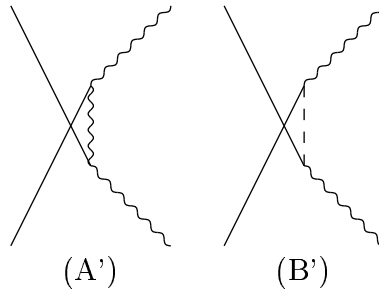
$$H + \gamma \rightarrow H + \gamma. \quad (3.5.2)$$

Per calcolare l'ampiezza invariante del nostro processo bisogna innanzi tutto identificarne i diagrammi di Feynman. Questi diagrammi hanno quattro linee esterne, due di tipo A e due H . Da un punto di vista puramente topologico è immediato constatare che, in presenza di vertici a

tre e quattro *gambe*, i diagrammi rilevanti hanno, o un solo vertice a quattro gambe (e hanno la struttura della lettera X) oppure due a tre gambe (e appaiono simili alla lettera H). Considerando (3.4) e (3.4) si vede subito che si hanno tre diagrammi di tipo H e uno di tipo X:



A questi, vanno aggiunti i diagrammi che si ottengono dai diagrammi (A) e (B) scambiando le linee esterne associate al campo H :



Risulta chiaramente dalle figure che nei diagrammi (A) e (A') appare una linea interna, e quindi uno stato intermedio, di tipo tetra-vettoriale, mentre in (B) e in (B') appare uno stato intermedio di tipo Goldstone. Per calcolare le ampiezze invarianti è necessario identificare i parametri relativi alle particelle asintotiche. Indichiamo con p e p' i tetra-impulsi degli Higgs iniziale e finale rispettivamente, q e q' quelli dei bosoni vettori, e ϵ e ϵ' i corrispondenti vettori di polarizzazione, che soddisfano le condizioni (3.5.1):

$$\epsilon \cdot q = \epsilon' \cdot q' = 0 . \quad (3.5.3)$$

L'ampiezza invariante corrispondente al diagramma (A) è:

$$I_A = \frac{4e^4 v^2 \epsilon \cdot \epsilon'}{(p+q)^2 - e^2 v^2} , \quad (3.5.4)$$

mentre quella del diagramma (B) è:

$$I_B = \frac{e^2 \epsilon \cdot (2p+q) \epsilon' \cdot (p+q+p')}{e^2 v^2 - (p+q)^2} . \quad (3.5.5)$$

Usando (3.5.3) e la legge di conservazione: $p+q = p'+q'$ possiamo sostituire $\epsilon \cdot (2p+q) \rightarrow 2\epsilon \cdot (p+q)$ e $\epsilon' \cdot p' \rightarrow \epsilon' \cdot (p+q)$. Sommando le due ampiezze otteniamo allora:

$$I_{A+B} = \frac{4e^4 v^2}{(p+q)^2 - e^2 v^2} \left[\epsilon \cdot \epsilon' - \frac{\epsilon \cdot (p+q) \epsilon' \cdot (p+q)}{e^2 v^2} \right], \quad (3.5.6)$$

che è identica a quella che si ottiene dal diagramma (A) cambiando il propagatore del bosone vettore:

$$\frac{g^{\mu\nu}}{q^2 - e^2 v^2 + i0+} \rightarrow \frac{g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{e^2 v^2}}{q^2 - e^2 v^2 + i0+}. \quad (3.5.7)$$

Il cambiamento corrisponde alla sostituzione di $g^{\mu\nu}$ con l'operatore di proiezione

$$g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{e^2 v^2}, \quad (3.5.8)$$

che, applicato a un vettore di polarizzazione generico, lo proietta, appunto, sul sottospazio fisico.

Le ampiezze relative ai diagrammi (A') e (B') si ottengono da I_{A+B} semplicemente scambiando p con $-p'$:

$$I_{A'+B'} = \frac{4e^4 v^2}{(p'-q)^2 - e^2 v^2} \left[\epsilon \cdot \epsilon' - \frac{\epsilon \cdot (p'-q) \epsilon' \cdot (p'-q)}{e^2 v^2} \right], \quad (3.5.9)$$

a cui si applicano gli stessi commenti dei diagrammi precedenti.

Infine, le ampiezze relative ai diagrammi (C) e (D) sono date da

$$I_C = -\frac{6\lambda e^2 v^2 \epsilon \cdot \epsilon'}{\lambda v^2 - (p-p')^2}. \quad (3.5.10)$$

$$I_D = 2 e^2 \epsilon \cdot \epsilon', \quad (3.5.11)$$

rispettivamente. L'operazione di incrocio delle gambe esterne corrispondenti allo stesso campo (*crossing*) genera una simmetria generale delle ampiezze di una teoria relativistica.

Generalizzando quanto emerge da questo esempio si deduce che il modello di Higgs abeliano è consistente se si restringono le particelle asintotiche a quelle di Higgs o di spin 1. In queste condizioni si può utilizzare, per il campo vettoriale, il propagatore (3.5.7), e trascurare del tutto il campo di Goldstone. Questo risultato si estende direttamente ai modelli di Higgs più generali che introdurremo fra breve.

Al limite semiclassico, nell'ambito del quale noi ci muoviamo, è possibile eliminare direttamente i gradi di libertà non fisici e in particolare i bosoni di Goldstone sfruttando la invarianza di gauge dei primi tre termini della densità lagrangiana (3.4.5) e omettendo il termine che fissa la gauge. Per vedere come ciò si realizza in pratica, utilizziamo, in luogo della (3.4.7), la parametrizzazione

$$\Phi(x) + \frac{v}{\sqrt{2}} = e^{ie\Theta(x)} \frac{H(x) + v}{\sqrt{2}}, \quad (3.5.12)$$

e osserviamo che $\Theta(x)$ può essere rimosso mediante una opportuna trasformazione di gauge, che trasforma il campo A^μ in

$$\mathcal{A}_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \Theta(x). \quad (3.5.13)$$

Si ottiene così una nuova espressione che dipende solo da H e \mathcal{A} :

$$\mathcal{L}'_H = \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H + \frac{e^2}{2} \mathcal{A}^2 (H + v)^2 - \frac{\lambda}{8} [(H + v)^2 - v^2]^2 - \frac{1}{2} \partial_\mu \mathcal{A}_\nu (\partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu). \quad (3.5.14)$$

La corrispondente parte libera è:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} [(\partial H)^2 - \lambda v^2 H^2 - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu (\partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu) + e^2 v^2 \mathcal{A}^2]. \quad (3.5.15)$$

Ora le equazioni dei campi diventano:

$$\begin{aligned} (\partial^2 + \lambda v^2) H &= J_H \\ (\partial^2 + e^2 v^2) \mathcal{A}^\mu - \partial^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu &= -J^\mu, \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

e non è difficile verificare che la funzione di Green della seconda equazione corrisponde al propagatore al secondo membro della (3.5.7).

3.6 Il criterio di rinormalizzabilità

Abbiamo già accennato nel capitolo 2.1 al criterio di rinormalizzabilità, che vincola l'interazione del campo scalare a termini di grado non superiore al quarto nel campo stesso. È opportuno ora spendere qualche parola in più su questo criterio, anche per spiegare perché non abbiamo scelto in partenza il propagatore (3.5.7), eliminando così fin dall'inizio il campo di Goldstone.

Se si sviluppa la teoria dei campi al di là dell'approssimazione semiclassica, si estende lo sviluppo della teoria di Feynman comprendendo i grafici con maglie, cioè con circuiti chiusi. In queste condizioni i vincoli di conservazione non determinano più tutti le variabili tetra-impulso, e quindi le ampiezze contengono integrali sulle variabili libere. Questi integrali sono tanto meglio definiti quanto più rapidamente i propagatori si annullano all'infinito, e quanto meno i vertici dipendono dai tetra-impulsi. Questa considerazione fa già capire perché abbiamo scelto la nostra formulazione del modello di Higgs col propagatore al primo membro della (3.5.7) scartando quello a secondo membro che non si annulla all'infinito in q .

La scelta del sistema naturale delle unità di misura in cui esiste una sola scala indipendente, diciamo quella delle energie (delle masse), e in cui i campi bosonici e le componenti del tetra-impulso sono dimensionalmente equivalenti, ci permette di generalizzare il nostro discorso. Se, nel calcolo di una data ampiezza, affianchiamo ai grafici semiclassici quelli con maglie chiuse, introduciamo termini contenenti fattori espressi come integrali nei tetra-impulsi, ma che sono dimensionalmente equivalenti a contributi semiclassici. Se questi fattori contengono coefficienti con dimensione pari a potenze negative dell'energia, come sarebbe quello associato a un vertice di grado superiore al quarto nei campi scalari, questo è necessariamente accompagnato da un'integrando di grado maggiore e quindi con convergenza più problematica di quelli associati alla teoria di partenza.

La teoria della rinormalizzazione dimostra l'esistenza di un regime particolare, detto *rinormalizzabile*, in cui gli eventuali problemi connessi con la convergenza degli integrali possono

essere riassorbiti nella definizione dei parametri dell'azione. Il regime è contrassegnato da una scelta dei propagatori che si annullano a grandi tetra-impulsi e costanti di accoppiamento con dimensione di energia non negativa. Il regime rinormalizzabile è l'unico conosciuto in cui la teoria dei campi sia predittiva.

3.7 Correnti e cariche non commutative

Un'ovvia generalizzazione dell'esempio trattato nel capitolo 2.10 consiste nel considerare uno spazio isotopico tridimensionale, cioè il caso in cui si hanno tre campi scalari ϕ_i , $i = 1, 2, 3$ e simmetria per rotazioni in tre dimensioni. Limitandoci a descrivere le trasformazioni al livello infinitesimo, modificheremo la (2.10.4) nella forma:

$$\phi'_i(x) - \phi_i(x) \sim \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \phi_j(x) \varphi_k, \quad (3.7.1)$$

dove ϵ_{ijk} generalizza alle tre dimensioni ϵ_{ij} definito in (2.10.5). Partendo dalla (2.10.6) opportunamente modificata e applicando le equazioni dei campi otteniamo

$$\partial_\mu \sum_{i,j,k=1}^3 \left[\epsilon_{ijk} \varphi_k \phi_j(x) \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \partial_\mu \phi_i(x)} \right] \equiv \sum_{k=1}^3 \varphi_k \partial_\mu J_k^\mu(x) = 0, \quad (3.7.2)$$

da cui, invocando l'arbitrarietà delle componenti di φ , otteniamo un sistema di correnti conservate:

$$J_k^\mu \equiv \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ijk} \phi_j(x) \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \partial_\mu \phi_i(x)}. \quad (3.7.3)$$

A questo punto è possibile tentare di estendere l'elettrodinamica introducendo tre campi tetra-vettoriali A_k^μ , $k = 1, 2, 3$ accoppiati alle correnti tramite la costante di accoppiamento g . Nel caso della generalizzazione tridimensionale della lagrangiana scalare (2.10.9) si ha:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 [(\partial \phi_i)^2 - \mu^2 \phi_i^2] - \frac{\lambda}{4!} \left(\sum_{i=1}^3 \phi_i^2 \right)^2 + g \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_k^\mu \phi_j \partial_\mu \phi_i. \quad (3.7.4)$$

Nuovamente questa densità lagrangiana può essere dedotta, a meno di termini in g^2 , da un'estensione del principio di gauge. Introduciamo dunque la derivata covariante:

$$D^\mu \phi_i(x) \equiv \partial^\mu \phi_i(x) + g \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_k^\mu(x) \phi_j(x), \quad (3.7.5)$$

e introduciamo la nuova densità lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 [(D \phi_i)^2 - \mu^2 \phi_i^2] - \frac{\lambda}{4!} \left(\sum_{i=1}^3 \phi_i^2 \right)^2. \quad (3.7.6)$$

La nuova lagrangiana è invariante per una generalizzazione delle trasformazioni di gauge (3.1.18) che è costruita come una trasformazione unitaria (ortogonale) nello spazio isotopico, piuttosto che come una semplice trasformazione di fase.

L'aspetto più significativo di questa generalizzazione è che la carica e corrispondente al campo A_k è ora sostituita da una matrice hermitiana i cui elementi nello spazio isotopico sono: $(e_k)_{ij} = -ig\epsilon_{ijk}$. Si hanno dunque tre cariche matriciali che non commutano:

$$[e_i, e_j] = i \sum_k \epsilon_{ijk} e_k , \quad (3.7.7)$$

e quindi non possono essere misurate simultaneamente. Si parla per questo di cariche non commutative.

Introdotta una funzione a valore vettoriale reale nello spazio isotopico $\Lambda_i(x)$, possiamo costruire in ogni punto dello spazio-tempo una matrice reale antisimmetrica nello spazio isotopico con elementi di matrice:

$$\hat{\Lambda}(x)_{ij} \equiv \sum_{k=1}^3 \Lambda_k(x) \epsilon_{ijk} . \quad (3.7.8)$$

L'esponenziale di questa matrice $e^{g\hat{\Lambda}(x)}$ è una matrice ortogonale; analogamente possiamo introdurre un campo tetra-vettoriale a valore matriciale nello spazio isotopico con elementi di matrice:

$$\hat{A}_{ij}^\mu \equiv \epsilon_{ijk} A_k^\mu(x) . \quad (3.7.9)$$

Se indichiamo tramite Φ il campo scalare inteso come vettore isotopico e facciamo riferimento alla solita moltiplicazione righe per colonne fra matrici, definiamo le trasformazioni:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\rightarrow e^{g\hat{\Lambda}(x)} \Phi(x) \\ \hat{A}_\mu(x) &\rightarrow e^{g\hat{\Lambda}(x)} \left(g\hat{A}_\mu(x) + \partial_\mu \right) e^{-g\hat{\Lambda}(x)} . \end{aligned} \quad (3.7.10)$$

Con queste notazioni la derivata covariante si scrive:

$$D_\mu \Phi(x) = \left(g\hat{A}_\mu(x) + \partial_\mu \right) \Phi(x) , \quad (3.7.11)$$

ed è evidente che

$$\begin{aligned} D_{\mu_1} \dots D_{\mu_n} \Phi(x) &\equiv \left(g\hat{A}_{\mu_1}(x) + \partial_{\mu_1} \right) \dots \left(g\hat{A}_{\mu_n}(x) + \partial_{\mu_n} \right) \Phi(x) \\ &\rightarrow e^{g\hat{\Lambda}(x)} D_{\mu_1} \dots D_{\mu_n} \Phi(x) . \end{aligned} \quad (3.7.12)$$

La densità lagrangiana (3.7.6) è dunque evidentemente invariante per le trasformazioni di gauge (3.7.10).

3.8 La teoria di Yang-Mills

Il formalismo che abbiamo costruito ci permette di generalizzare facilmente il concetto di tensore dei campi e costruire quindi la generalizzazione dell'elettrodinamica corrispondente alle nuove

trasformazioni di gauge. Infatti possiamo costruire il tensore a valore matriciale $\hat{F}_{\mu\nu}$ tramite il commutatore:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] \Phi(x) &= \left[(g\hat{A}_\mu(x) + \partial_\mu), (g\hat{A}_\nu(x) + \partial_\nu) \right] \Phi(x) \\ &= g \left[\partial_\mu \hat{A}_\nu(x) - \partial_\nu \hat{A}_\mu(x) + g [\hat{A}_\mu(x), \hat{A}_\nu(x)] \right] \equiv g\hat{F}_{\mu\nu}(x)\Phi(x), \end{aligned} \quad (3.8.1)$$

da cui si deduce anche che, per una trasformazione di gauge,

$$\hat{F}_{\mu\nu}(x) \rightarrow e^{g\hat{\Lambda}(x)} \hat{F}_{\mu\nu}(x) e^{-g\hat{\Lambda}(x)}. \quad (3.8.2)$$

Ne segue che la densità lagrangiana di Yang e Mills

$$\mathcal{L}_{YM} \equiv \frac{1}{8} Tr \left(\hat{F}_{\mu\nu}(x) \hat{F}^{\mu\nu}(x) \right) \equiv \frac{1}{8} \sum_{i,j=1}^3 \hat{F}_{\mu\nu \ ij}(x) \hat{F}^{\mu\nu}(x)_{ji} \quad (3.8.3)$$

è gauge invariante.

Per calcolare esplicitamente le componenti del tensore dei campi utilizziamo la seguente identità (di Jacobi):

$$\sum_{a=1}^3 (\epsilon_{ial} \epsilon_{ajm} + \epsilon_{laj} \epsilon_{aim} + \epsilon_{jai} \epsilon_{alm}) = 0. \quad (3.8.4)$$

Dalla (3.8.1) e dalla (3.7.9) ricaviamo:

$$\begin{aligned} \hat{F}_{\mu\nu \ ij}(x) &= \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} [\partial_\mu A_{\nu \ k}(x) - \partial_\nu A_{\mu \ k}(x)] + g \sum_{k,l,m=1}^3 A_{\mu \ l} A_{\nu \ m} [\epsilon_{ikl} \epsilon_{kjm} - \epsilon_{ikm} \epsilon_{kjl}] \\ &= \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \left[\partial_\mu A_{\nu \ k}(x) - \partial_\nu A_{\mu \ k}(x) - g \sum_{l,m=1}^3 \epsilon_{klm} A_{\mu \ l} A_{\nu \ m} \right] \\ &\equiv \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} F_{\mu\nu \ k}. \end{aligned} \quad (3.8.5)$$

La densità lagrangiana di Yang-Mills in termini delle componenti si scrive allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \sum_{i,j,k,l=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{jil} F_{\mu\nu \ k}(x) F^{\mu\nu}(x)_l &= -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^3 F_{\mu\nu \ k}(x) F^{\mu\nu}(x)_k \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^3 (\partial_\mu A_{\nu \ k}(x) - \partial_\nu A_{\mu \ k}(x)) (\partial^\mu A_k^\nu(x) - \partial^\nu A_k^\mu(x)) \\ &\quad + \frac{g}{2} \sum_{ijk=1}^3 \epsilon_{ijk} A_{\mu \ i} A_{\nu \ j} (\partial^\mu A_k^\nu(x) - \partial^\nu A_k^\mu(x)) \\ &\quad - \frac{g^2}{4} \sum_{i,j,k,l,m=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} A_{\mu \ i} A_{\nu \ j} A_l^\mu A_m^\nu. \end{aligned} \quad (3.8.6)$$

Usando l'identità

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad (3.8.7)$$

e aggiungendo il termine che fissa la gauge (3.1.35) per ciascuna delle componenti di A , si arriva alla densità lagrangiana:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \partial_\mu A_\nu^k \partial^\mu A_k^\nu + \frac{g}{2} \sum_{ijk=1}^3 \epsilon_{ijk} A_\mu^i A_\nu^j (\partial^\mu A_k^\nu(x) - \partial^\nu A_k^\mu(x)) - \frac{g^2}{4} \left[\left(\sum_{k=1}^3 A_\mu^k A_k^\mu \right)^2 - \sum_{k,l=1}^3 (A_\mu^k A_l^\mu)^2 \right]. \quad (3.8.8)$$

Quello che abbiamo ottenuto è una versione semplificata della parte puramente gluonica della densità lagrangiana della QCD; la semplificazione consiste nel fatto che nel nostro modello il campo gluonico ha tre componenti invece delle otto della QCD e i colori sono 2 e non 3. La nostra forma semplificata presenta il notevole vantaggio di descrivere compiutamente ma in modo relativamente semplice l'interazione a tre e a quattro gluoni in termini dei tensori ϵ e δ evidenziando che il principio di gauge impone che i bosoni vettoriali accoppiati a cariche non commutative interagiscano fra loro con accoppiamenti direttamente collegati con le regole di commutazione delle cariche (3.7.7).

Per quel che riguarda le regole di Feynman di questa teoria puramente gluonica abbiamo il propagatore:

$$\text{oooo} \leftrightarrow \frac{g^{\mu\nu}}{q^2 + i0+} \quad (3.8.9)$$

e due vertici: quello a tre gluoni:

$$\begin{array}{c} \rho, c, p_c \\ \text{oooo} \\ \mu, a, p_a \text{ ooooo} \\ \text{oooo} \\ \nu, b, p_b \end{array} \leftrightarrow ig\epsilon_{abc} [g^{\mu\rho}(p_c^\nu - p_a^\nu) + g^{\mu\nu}(p_a^\rho - p_b^\rho) + g^{\nu\rho}(p_b^\mu - p_c^\mu)] \quad (3.8.10)$$

e quello a quattro gluoni:

$$\begin{array}{c} \sigma, d \\ \text{oooo} \\ \mu, a \text{ ooooo} \text{oooo} \rho, c \\ \text{oooo} \\ \nu, b \end{array} \leftrightarrow -g^2 [2(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \delta_{ab} \delta_{cd} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta_{ac} \delta_{bd} + g^{\rho\nu} g^{\mu\sigma} \delta_{ad} \delta_{bc}) \\ - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \delta_{bc} \delta_{ad} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \delta_{bd} \delta_{ac} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta_{ad} \delta_{bc} \\ - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta_{ab} \delta_{cd} - g^{\rho\nu} g^{\mu\sigma} \delta_{ab} \delta_{cd} - g^{\rho\nu} g^{\mu\sigma} \delta_{ac} \delta_{bd}] \quad (3.8.11)$$

dove per ogni linea abbiamo indicato gli indici isotopici e tetra-vettoriali e, ove rilevante, il tetra-impulso.

Un esempio semplice di una applicazione di questo modello è il calcolo dell'ampiezza invariante di scattering elastico di due gluoni polarizzati perpendicolarmente al piano di scattering e rispettivamente lungo il primo e il secondo asse dello spazio isotopico.

3.9 Le teorie di gauge non abeliane e modello di Higgs della teoria elettrodebole

La nostra introduzione al modello di Yang-Mills e alle teorie di gauge non abeliane è stata completamente basata sulla simmetria rotatoria in tre dimensioni isotopiche. È peraltro opportuno ribadire che il nucleo della costruzione consiste in un sistema di cariche legate da relazioni di commutazione analoghe alla (3.7.7). Quindi in generale, dato uno spazio di campi, non necessariamente scalari Φ si parte da un sistema di cariche matriciali Q_a , ($a = 1, \dots, n$) legate dalle relazioni di commutazione:

$$[Q_a, Q_b] = ig \sum_{c=1}^n C_{abc} Q_c, \quad (3.9.1)$$

in cui le costanti C , antisimmetriche in abc , sono chiamate costanti di struttura.

Introdotti n campi vettoriali A_a^μ , si definiscono le derivate covarianti

$$D_\mu \Phi \equiv \left(\partial^\mu + ig \sum_{c=1}^n A_\mu{}^c Q_c \right) \Phi, \quad (3.9.2)$$

e si procede nella costruzione definendo in particolare il tensore dei campi:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - g \sum_{b,c=1}^3 C_{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (3.9.3)$$

L'applicazione fisicamente più significativa di questo schema teorico è la teoria elettrodebole; le cariche (correnti) rilevanti sono la carica debole Q_+ associata al decadimento beta, che trasforma il neutrone in protone e quindi aumenta di un'unità la carica elettrica; la coniugata hermitiana Q_- associata al decadimento in anti-elettrone; la carica elettrica Q_e ; e una quarta carica Q_z associata alle interazioni deboli neutre, che commuta con la carica elettrica.

Pensiamo per semplicità a protone e neutrone, invece dei quark che sono le particelle fondamentali, e quindi rappresentiamo il protone con il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e il neutrone con $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si ha:

$$Q_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9.4)$$

Il problema è definire le costanti di struttura. Per questo calcoliamo il commutatore:

$$[Q_+, Q_-] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv Q_0, \quad (3.9.5)$$

che dimostra la necessità di una quarta carica, dato che $Q_0 \neq Q_e$.

Si usa definire l'ipercarica debole introducendo una nuova costante d'accoppiamento, per il momento indeterminata e comunque indipendente dalla g_W fissata dalle regole di commutazione fra le cariche, e definendo:

$$Y \equiv Q_e - Q_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (3.9.6)$$

Evidentemente Y commuta con tutte le altre cariche.

Se facciamo, per il momento, riferimento alle cariche Q_{\pm} , Q_0 e Y , osservando che:

$$[Q_0, Q_{\pm}] = \pm \frac{1}{2} Q_{\pm} , \quad (3.9.7)$$

abbiamo completato il quadro delle regole di commutazione (3.9.1).

Dunque introduciamo, sempre per il momento, quattro campi tetra-vettoriali \mathcal{W}_{\pm} , \mathcal{W}_0 e \mathcal{B} associati alle cariche sopra elencate nello stesso ordine. Il doppietto \mathcal{W}_{\pm} è costituito da campi tetra-vettoriali complessi e fra loro coniugati, $\mathcal{W}_- = \mathcal{W}_+^*$, che sono accoppiati alle cariche Q_{\mp} fra loro hermitiane coniugate. Avremo dunque la derivata covariante:

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + ig_W (Q_0 \mathcal{W}_0_{\mu} + Q_+ \mathcal{W}_-_{\mu} + Q_- \mathcal{W}_+_{\mu}) + ig'_W Y \mathcal{B}_{\mu} , \quad (3.9.8)$$

La differenza più appariscente fra le interazioni deboli e l'elettrodinamica riguarda il raggio delle forze, che è infinito nel caso elettromagnetico, e finito e piccolo, nell'unità di lunghezza corrispondente alla massa del protone, nel caso debole. Il parametro dinamico che determina la scala delle lunghezze in una teoria di campo è la massa del campo che si identifica con l'inverso del raggio della forza trasmessa dal campo.

Quindi dobbiamo definire il meccanismo che genera la massa dei bosoni vettoriali diversi dal fotone lasciando privo di massa il fotone. Questo non può essere che un meccanismo di Higgs, analogo a quello studiato nei capitoli 3.4 e 3.5

Introduciamo dunque un sistema di campi scalari, definendone le leggi di trasformazione di gauge in modo tale che l'origine dello spazio dei campi sia lasciata invariante da una trasformazione di gauge corrispondente alla carica elettrica. La condizione equivale alla richiesta che la configurazione a campi scalari nulli descritta come un vettore sia annichilata dalla carica Q_e .

La scelta più ovvia è quella di un doppietto di campi scalari complessi:

$$\Phi \equiv \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 + \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} , \quad (3.9.9)$$

su cui le cariche agiscono come le matrici (3.9.4), (3.9.5) e (3.9.6). In particolare l'origine dei campi: $\Phi_0 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ è annichilata dalla carica elettrica: $Q_e \Phi_0 = 0$.

Una trasformazione di gauge corrispondente ai parametri Λ_{\pm} , Λ_0 e Λ_Y agisce sul campo scalare e sui campi tetra-vettoriali secondo la (3.7.10) sostituendo

$$e^{g\hat{\Lambda}(x)} \rightarrow e^{ig_W(Q_0\Lambda_0(x)+Q_+\Lambda_-(x)+Q_-\Lambda_+(x))+ig'_W Y\Lambda_Y(x)} , \quad (3.9.10)$$

e la derivata covariante in (3.7.11) con (3.9.8).

Il prodotto scalare nello spazio dei campi Φ :

$$\Phi^\dagger \Phi \equiv |\phi^+|^2 + \left| \phi^0 + \frac{v}{\sqrt{2}} \right|^2 \quad (3.9.11)$$

è invariante per trasformazioni di gauge.

Seguendo ora la linea tracciata in capitolo 3.3 possiamo scrivere la densità lagrangiana relativa ai campi scalari nella forma:

$$\mathcal{L}_S = (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi - \frac{\lambda}{2} \left[\Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2} \right]^2. \quad (3.9.12)$$

A essa va sommata la solita parte riguardante i bosoni vettori, proporzionale al quadrato del tensore dei campi F come, per esempio in (3.8.3).

Approfittando della discussione relativamente accurata del modello di Higgs abeliano svolta nei capitoli 3.3, 3.4, 3.5 e del nostro interesse concentrato sull'approssimazione semiclassica possiamo introdurre immediatamente la riduzione del modello ai gradi di libertà fisici come in (3.5.14).

Per questo introduciamo una nuova parametrizzazione del campo Φ :

$$\begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) + \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \equiv e^{ig_W(Q_0\pi_0(x) + Q_+\pi_-(x) + Q_-\pi_+(x))} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{H(x)+v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (3.9.13)$$

Si noti che a primo membro si hanno due funzioni indipendenti a valore complesso ϕ^+ e ϕ^0 e a secondo membro si ha una funzione a valore complesso π_+ ($\pi_- = \pi_+^*$) e due a valore reale: π_0 e H ; questo ci convince che abbiamo introdotto una riparametrizzazione delle stesse grandezze con variabili diverse.

Riparametriamo anche i campi vettoriali tramite la stessa trasformazione di gauge:

$$\begin{aligned} & ig_W(Q_0\mathcal{W}_{0\mu} + Q_+\mathcal{W}_{-\mu} + Q_-\mathcal{W}_{+\mu}) + ig'_W Y \mathcal{B}_\mu \\ & \equiv e^{ig_W(Q_0\pi_0(x) + Q_+\pi_-(x) + Q_-\pi_+(x))} \\ & \quad \left[\partial_\mu + ig_W(Q_0W_\mu^0 + Q_+W_\mu^- + Q_-W_\mu^+) + ig'_W Y B_\mu \right] \\ & \quad e^{-ig_W(Q_0\pi_0(x) + Q_+\pi_-(x) + Q_-\pi_+(x))}. \end{aligned} \quad (3.9.14)$$

Con la nuova parametrizzazione la (3.9.12), che è invariante di gauge, mantiene la stessa forma, ma la derivata covariante va scritta in termini dei nuovi campi tetra-vettoriali e Φ va sostituito con $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{H(x)+v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Il campo π non appare.

Dunque, nella nuova parametrizzazione, la derivata covariante si scrive:

$$D_\mu \Phi = e^{-ig_W(Q_0\pi_0(x) + Q_+\pi_-(x) + Q_-\pi_+(x))} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\frac{g_W}{\sqrt{2}} W_\mu^- (H+v) \\ \partial_\mu H - \frac{i}{2} (g_W W_\mu^0 - g'_W B_\mu) (H+v) \end{pmatrix}, \quad (3.9.15)$$

e il potenziale è

$$-\frac{\lambda}{8} \left((H+v)^2 - v^2 \right)^2. \quad (3.9.16)$$

Quindi la (3.9.11) diventa:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\partial H)^2 + \frac{1}{8}(g_W W_0^\mu - g'_W B^\mu)(g_W W_\mu^0 - g'_W B_\mu)(H + v)^2 \\ & + \frac{g_W^2}{4} W_+^\mu W_\mu^- (H + v)^2 - \frac{\lambda}{8}(H^4 + 4vH^3 + 4v^2 H^2) . \end{aligned} \quad (3.9.17)$$

A questo punto possiamo completare il nostro modello di Higgs introducendo, secondo la traccia già illustrata, il tensore dei campi. Per questo calcoliamo il commutatore delle derivate covarianti. Con la nuova parametrizzazione dei campi tetra-vettoriali si ha:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] & \equiv \left[\partial_\mu + ig_W (Q_0 W_\mu^0 + Q_+ W_\mu^- + Q_- W_\mu^+) + ig'_W Y B_\mu, \right. \\ & \left. \partial_\nu + ig_W (Q_0 W_\nu^0 + Q_+ W_\nu^- + Q_- W_\nu^+) + ig'_W B_\nu Y \right] \\ & = ig_W (Q_0 (\partial_\mu W_{0\nu} - \partial_\nu W_{0\mu}) + Q_+ (\partial_\mu W_{-\nu} - \partial_\nu W_{-\mu}) \\ & + Q_- (\partial_\mu W_{+\nu} - \partial_\nu W_{+\mu})) + ig'_W Y (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) \\ & - g_W^2 (Q_+ (W_\mu^0 W_\nu^- - W_\nu^0 W_\mu^-) - Q_- (W_\mu^0 W_\nu^+ - W_\nu^0 W_\mu^+) \\ & + Q_0 (W_\mu^- W_\nu^+ - W_\nu^- W_\mu^+)) \\ & \equiv ig_W (Q_0 F_{0\mu\nu} + Q_+ F_{-\mu\nu} + Q_- F_{+\mu\nu}) + ig'_W Y F_{Y\mu\nu} . \end{aligned} \quad (3.9.18)$$

Dunque le componenti del tensore dei campi sono:

$$\begin{aligned} F_{0\mu\nu} & = \partial_\mu W_{0\nu} - \partial_\nu W_{0\mu} + ig_W (W_{-\mu} W_{+\nu} - W_{-\nu} W_{+\mu}) \\ F_{\pm\mu\nu} & = \partial_\mu W_{\pm\nu} - \partial_\nu W_{\pm\mu} \mp ig_W (W_{0\mu} W_{\pm\nu} - W_{0\nu} W_{\pm\mu}) \\ F_{Y\mu\nu} & = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu . \end{aligned} \quad (3.9.19)$$

Non resta che completare la densità lagrangiana aggiungendo i termini in F^2 ottenendo:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\partial H)^2 + \frac{1}{8}(g_W W_0^\mu - g'_W B^\mu)(g_W W_{0\mu} - g'_W B_\mu)(H + v)^2 \\ & + \frac{g_W^2}{4} W_+^\mu W_{-\mu} (H + v)^2 - \frac{\lambda}{8}(H^4 + 4vH^3 + 4v^2 H^2) \\ & - \frac{1}{4}(F_{0\mu\nu} F_0^{\mu\nu} + F_{Y\mu\nu} F_Y^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} F_{+\mu\nu} F_-^{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (3.9.20)$$

Nuovamente, per determinare il contenuto fisico e le regole di Feynman del modello isoliamo la parte libera (quadratica) della densità lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 & = \frac{1}{2}(\partial H)^2 - \frac{\lambda}{2} v^2 H^2 \\ & - \partial_\mu W_{-\nu} (\partial_\mu W_+^\nu - \partial_\nu W_+^\mu) + \frac{g_W^2 v^2}{4} W_{-\mu} W_+^\mu \\ & - \frac{1}{4} ((\partial_\mu W_{0\nu} - \partial_\nu W_{0\mu}) (\partial_\mu W_0^\nu - \partial_\nu W_0^\mu) \\ & + (\partial_\mu W_{Y\nu} - \partial_\nu W_{Y\mu}) (\partial_\mu W_Y^\nu - \partial_\nu W_Y^\mu)) \\ & + \frac{v^2}{8} (g_W W_0^\mu - g'_W B^\mu)(g_W W_{0\mu} - g'_W B_\mu) . \end{aligned} \quad (3.9.21)$$

Confrontando con (3.5.15) è evidente che le parti corrispondenti al campo di Higgs sono identiche e quindi il propagatore di H è dato in (3.4.13). Inoltre l'equazione del campo W_+ è:

$$\left(\partial^2 + \frac{g_W^2 v^2}{4} \right) W_+^\mu - \partial^\mu \partial_\nu W_+^\nu = -J_+^\mu, \quad (3.9.22)$$

dunque, confrontando con (3.5.16), si vede che il propagatore $W_+ - W_-$ (si tratta di campi carichi che sono accoppiati dal propagatore) si ottiene dal secondo membro di (3.5.7) sostituendo la massa ev con $\frac{g_W v}{2}$, cioè:

$$\frac{g^{\mu\nu} - \frac{4g^\mu g^\nu}{g_W^2 v^2}}{q^2 - \frac{g_W^2 v^2}{4} + i0+}. \quad (3.9.23)$$

Un problema nuovo è invece posto dalla parte che riguarda i campi B e W_0 dato che (3.9.21) contiene un termine del tipo $W_0^\mu B_\mu$, cioè un termine di massa non diagonale. La soluzione del problema consiste nel diagonalizzare il termine di massa ridefinendo i campi tramite una trasformazione ortogonale, tale cioè da lasciare diagonale la parte contenente le derivate dei nuovi campi che sono associati alle particelle fisiche.

È evidente che uno dei campi fisici, che chiameremo Z va identificato con:

$$Z^\mu = \frac{g_W W_0^\mu - g'_W B^\mu}{\sqrt{(g_W)^2 + (g'_W)^2}}. \quad (3.9.24)$$

La radice al denominatore rende ortogonale la trasformazione lineare. Z è il campo massivo che media le interazioni deboli neutre.

Il campo elettromagnetico, associato alla carica elettrica Q_e , va identificato con l'altra combinazione lineare di W_0 e B generata dalla trasformazione ortogonale. Scriviamo per questo

$$\begin{pmatrix} W_0^\mu \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}, \quad (3.9.25)$$

da cui possiamo identificare:

$$\cos \theta_W = \frac{g_W}{\sqrt{(g_W)^2 + (g'_W)^2}}, \quad \sin \theta_W = \frac{g'_W}{\sqrt{(g_W)^2 + (g'_W)^2}}. \quad (3.9.26)$$

In termini dei campi fisici la (3.9.21) diventa:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \frac{1}{2}(\partial H)^2 - \frac{\lambda}{2}v^2 H^2 \\ &\quad - \partial_\mu W_{-\nu} (\partial_\mu W_+^\nu - \partial_\nu W_+^\mu) + \frac{g_W^2 v^2}{4} W_{-\mu} W_+^\mu \\ &\quad - \frac{1}{4} (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) (\partial_\mu Z^\nu - \partial_\nu Z^\mu) + \frac{v^2}{8} ((g_W)^2 + (g'_W)^2) Z_\mu Z^\mu \\ &\quad - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial_\mu A^\nu - \partial_\nu A^\mu). \end{aligned} \quad (3.9.27)$$

Considerando la dipendenza da A vediamo che la densità lagrangiana non è ancora completa; dobbiamo aggiungere il termine (3.1.35) per definire il propagatore del fotone. Col nuovo termine abbiamo: $\frac{g^{\mu\nu}}{q^2+i0^+}$ come in (3.1.41).

Per lo Z si ha nuovamente il secondo membro di (3.5.7) con la massa:

$$M_Z = \frac{v\sqrt{(g_W)^2 + (g'_W)^2}}{2} . \quad (3.9.28)$$

I vertici della teoria sono determinati dai termini d'interazione in (3.9.20) in funzione dei parametri v , g_W , g'_W e λ . Si tratta peraltro di stabilire il valore fenomenologico dei parametri.

Osserviamo innanzitutto che la carica elementare deve essere espressa in funzione di questi parametri. A questo scopo, esprimiamo la derivata covariante in termini dei campi fisici:

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu + ig_W [Q_0 (\cos \theta_W Z_\mu + \sin \theta_W A_\mu) + Q_+ W_\mu^- + Q_- W_\mu^+] \\ &\quad + ig'_W (\cos \theta_W A_\mu - \sin \theta_W Z_\mu) Y \\ &= \partial_\mu + i (g_W \sin \theta_W Q_0 + g'_W \cos \theta_W Y) A_\mu + i (g_W \cos \theta_W Q_0 - g'_W \sin \theta_W Y) Z_\mu \\ &\quad + ig_W (Q_+ W_\mu^- + Q_- W_\mu^+) \\ &= \partial_\mu + ig_W (Q_+ W_\mu^- + Q_- W_\mu^+) + ie Q_e A_\mu + i\sqrt{(g_W)^2 + (g'_W)^2} (Q_0 - \sin^2 \theta_W Y) Z_\mu , \end{aligned} \quad (3.9.29)$$

dove abbiamo tenuto conto della (3.9.6) e del fatto che il termine in A deve assumere la forma: $ieQ_e A_\mu$. Ciò impone:

$$eQ_e = e [Q_0 + Y] = g_W \sin \theta_W Q_0 + g'_W \cos \theta_W Y , \quad (3.9.30)$$

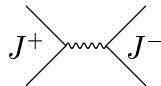
e quindi:

$$e = g_W \sin \theta_W = \frac{g_W g'_W}{\sqrt{(g_W)^2 + (g'_W)^2}} . \quad (3.9.31)$$

L'altro dato fenomenologico proveniente dalla fisica delle basse energie riguarda la costante di accoppiamento della teoria di Fermi del decadimento beta. La teoria, che ovviamente riguarda le transizioni a bassa energia, prevede un accoppiamento tra correnti con costante

$$G_F \sim \frac{10^{-5}}{m_p^2} , \quad (3.9.32)$$

dove m_p è la massa del protone, cioè $A = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J^+ \cdot J^-$. Nel nostro modello l'interazione è mediata dallo scambio di un W_\pm e l'ampiezza corrisponde a un diagramma del tipo



Tenendo conto del propagatore del W_{\pm} e delle costanti d'accoppiamento $\frac{g_W}{2\sqrt{2}}$ tra W e correnti come vedremo fra poco, l'ampiezza corrispondente al diagramma è:

$$g_W^2 J^+_{\mu} \frac{g^{\mu\nu} - \frac{4q^{\mu}q^{\nu}}{g_W^2 v^2}}{q^2 - \frac{g_W^2 v^2}{4} + i0+} J_{\nu}^{-} , \quad (3.9.33)$$

dove q è il tetra-impulso scambiato fra le correnti. A bassa energia questo tetra-impulso è trascurabile rispetto alla massa del W e quindi l'ampiezza da confrontare con quella della teoria di Fermi è:

$$\frac{g_W^2}{8} J^+_{\mu} \frac{g^{\mu\nu}}{-\frac{g_W^2 v^2}{4} + i0+} J_{\nu}^{-} = -\frac{1}{2v^2} J^+ \cdot J^{-} \quad (3.9.34)$$

da cui possiamo concludere che

$$G_F = \frac{1}{\sqrt{2}v^2} . \quad (3.9.35)$$

Le altre due costanti sono determinabili da parametri di alta energia:

$$\begin{aligned} M_Z &= 91.1885(22) \text{ GeV}/c^2 = \frac{v\sqrt{(g_W)^2 + (g'_W)^2}}{2} = \frac{vg_W}{2 \cos \theta_W} \\ &\sim 110 \text{ GeV}/c^2 < M_H = \lambda v^2 = \sqrt{2}\lambda G_F . \end{aligned} \quad (3.9.36)$$

Fissati i parametri, l'interazione fra i bosoni intermedi e quello di Higgs è descritta dalla:

$$\begin{aligned} I &= ie \left[W_{\mu-} \left(A^{\nu} \partial_{\mu} W_{\nu+} - W_{+}^{\nu} \partial_{\mu} A_{\nu} \right) + W_{\mu+} \left(W_{-}^{\nu} \partial_{\mu} A_{\nu} - A^{\nu} \partial_{\mu} W_{\nu-} \right) \right. \\ &\quad \left. + A_{\mu} \left(W_{+}^{\nu} \partial_{\mu} W_{\nu-} - W_{-}^{\nu} \partial_{\mu} W_{\nu+} \right) \right] \\ &\quad + ig_W \cos \theta_W \left[W_{\mu-} \left(Z^{\nu} \partial_{\mu} W_{\nu+} - W_{+}^{\nu} \partial_{\mu} Z_{\nu} \right) \right. \\ &\quad \left. + W_{\mu+} \left(W_{-}^{\nu} \partial_{\mu} Z_{\nu} - Z^{\nu} \partial_{\mu} W_{\nu-} \right) + Z_{\mu} \left(W_{+}^{\nu} \partial_{\mu} W_{\nu-} - W_{-}^{\nu} \partial_{\mu} W_{\nu+} \right) \right] \\ &\quad + eg_W \cos \theta_W \left[2(Z \cdot A)(W_{+} \cdot W_{-}) \right. \\ &\quad \left. - (Z \cdot W_{+})(A \cdot W_{-}) - (Z \cdot W_{-})(A \cdot W_{+}) \right] \\ &\quad - e^2 \left[A^2(W_{+} \cdot W_{-}) - (A \cdot W_{+})(A \cdot W_{-}) \right] \\ &\quad - g_W^2 \cos^2 \theta_W \left[Z^2(W_{+} \cdot W_{-}) - (Z \cdot W_{+})(Z \cdot W_{-}) \right] \\ &\quad + \left[\frac{M_Z^2 G_F}{\sqrt{2}} Z^2 + \frac{g_W^2}{4} (W_{+} \cdot W_{-}) \right] \left(H^2 + \frac{2H}{\sqrt{\sqrt{2}G_F}} \right) \\ &\quad - \frac{\lambda}{8} \left[H^4 + \frac{4H^3}{\sqrt{\sqrt{2}G_F}} \right] . \end{aligned} \quad (3.9.37)$$

Riassumendo, le ampiezze bosoniche della teoria elettrodebole sono costruite tramite le seguenti regole di Feynman.

Il propagatore del fotone, ricavato da (3.1.41):

$$\mu \text{-----} \nu \leftrightarrow \frac{g^{\mu\nu}}{q^2 + i0+}, \quad (3.9.38)$$

Il propagatore dello Z :

$$\mu \text{zzzzzzzzzzzzzzzz} \nu \leftrightarrow \frac{g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{M_Z^2}}{q^2 - M_Z^2 + i0+}, \quad (3.9.39)$$

Il propagatore del W :

$$\mu \text{wwwwwwwwww} \nu \leftrightarrow \frac{g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{M_W^2}}{q^2 - M_W^2 + i0+}, \quad (3.9.40)$$

Il propagatore dell' H è dato in (3.4.13).

Passando ai vertici, ci limitiamo a considerare quelli trilineari. Indicando i bosoni vettori neutri (Z e A) col simbolo B e la gamba corrispondente tramite una linea punteggiata, abbiamo il vertice:

$$\begin{array}{c} \nu + p_+ \\ \vdots \\ \mu \text{-----} \nu \end{array} \leftrightarrow ig_B \left[g^{\mu\rho} (p_-^\nu - p^\nu) + g^{\mu\nu} (p^\rho - p_+^\rho) + g^{\nu\rho} (p_+^\mu - p_-^\mu) \right] \quad (3.9.41)$$

con $g_A = e$ e $g_Z = g_W \cos \bar{\theta}_W$. I tetra-impulsi sono sempre considerati entranti. Inoltre abbiamo i vertici di accoppiamento del bosone di Higgs con i vettori:

$$\begin{array}{c} \nu + \\ \vdots \\ \text{-----} \\ \vdots \\ \rho - \end{array} \leftrightarrow g_W M_W g^{\nu\rho}, \quad \begin{array}{c} \nu \\ \vdots \\ \text{-----} \\ \vdots \\ \rho \end{array} \leftrightarrow \frac{g_W M_Z}{\cos \theta_W} g^{\nu\rho}. \quad (3.9.42)$$

L'accoppiamento di tre Higgs è descritto in capitolo 3.4.

Avendo così determinato la dinamica dei bosoni intermedi delle interazione elettrodeboli resta da studiare come questi bosoni si accoppiano alla materia formata da quark e leptoni.

3.10 Gli spinori della teoria elettrodebole

Nella teoria elettrodebole la materia è essenzialmente spinoriale, ed è costituita da quark e leptoni. La teoria, almeno nella sua versione più economica, prevede che siano conservati il numero dei leptoni (Leptonico) e quello dei quark (Barionico). quark e leptoni sono organizzati in tre generazioni, ciascuna delle quali (la i^{esima} , $(i = 1, \dots, 3)$) contiene un leptone $e^{(i)}$ con la carica $(-e)$ dell'elettrone, un neutrino $\nu^{(i)}$, un quark $u^{(i)}$ con carica $\frac{2}{3}e$ e un quark $d^{(i)}$ con carica $-\frac{1}{3}e$. Tutte le particelle, salvo il neutrino, hanno massa; quindi tutti i campi, salvo ν hanno componenti R e L ; il neutrino ha solo la componente L . Si noti che diamo per scontata l'estensione della parametrizzazione (3.9.13) ai campi spinoriali.

Organizzando, per ogni generazione i , l'insieme degli spinori in un superspinore L e un superspinore R :

$$\xi_L^{(i)} = \begin{pmatrix} \nu_L^{(i)} \\ e_L^{(i)} \\ u_L^{(i)} \\ d_L^{(i)} \end{pmatrix}, \quad \xi_R^{(i)} = \begin{pmatrix} e_R^{(i)} \\ u_R^{(i)} \\ d_R^{(i)} \end{pmatrix}, \quad (3.10.1)$$

possiamo definire l'azione delle cariche descritte nel capitolo 3.7 sui campi spinoriali.

La teoria $V - A$ delle interazioni deboli assicura che le cariche $Q_{\pm,0}$ annullano gli spinori R mentre la loro azione su quelli L è data, per esempio, nel caso di Q_0 da:

$$Q_0 \xi_L^{(i)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^{(i)} \\ e_L^{(i)} \\ u_L^{(i)} \\ d_L^{(i)} \end{pmatrix}. \quad (3.10.2)$$

Ricordando la relazione (3.9.31) osserviamo che l'iperparica debole Y agisce su ξ_R come la carica elettrica:

$$Y \xi_R^{(i)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_R^{(i)} \\ u_R^{(i)} \\ d_R^{(i)} \end{pmatrix}. \quad (3.10.3)$$

Con argomenti analoghi si deduce l'azione sugli spinori L :

$$Y \xi_L^{(i)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^{(i)} \\ e_L^{(i)} \\ u_L^{(i)} \\ d_L^{(i)} \end{pmatrix}. \quad (3.10.4)$$

Questo ci permette di scrivere le derivate covarianti e quindi gli accoppiamenti dei bosoni intermedi agli spinori.

Consideriamo dunque la densità lagrangiana spinoriale, con riferimento alla trattazione presentata nel capitolo (2.12). La conservazione delle cariche barionica e leptonica esclude la possibilità di termini di massa e accoppiamento di Yukawa del tipo corrispondente alle ultime due righe delle (2.13.4, 2.13.5); la necessaria conservazione delle cariche $Q_{\pm,0}$ esclude anche la possibilità di termini di massa di Dirac, salvo quelli indotti da accoppiamenti di Yukawa corrispondenti alla seconda riga della (2.13.5), che discuteremo fra breve.

Gli accoppiamenti di Yukawa permessi vanno costruiti tenendo conto dell'invarianza per la simmetria Q e Y . La prima, che per ragioni di analogia viene detta *spin isotopico debole* perché le cariche $Q_{\pm,0}$ commutano come le componenti corrispondenti $L_{\pm,0}$ del momento angolare, riguarda l'accoppiamento del campo scalare Φ o Φ^\dagger con ξ_L , e i corrispondenti accoppiamenti hermitiani coniugati. Dal punto di vista dello spin isotopico debole, è evidente dalla (3.10.2) che ξ_L corrisponde a due doppietti di isospin $\frac{1}{2}$, uno leptonico ℓ_L e uno barionico q_L (di quark). Anche Φ corrisponde a un doppietto che è dato in (3.9.9), tornando alla parametrizzazione generale (3.9.9), perché la (3.9.13) cela la covarianza sotto isospin. È facile mostrare che il campo Φ^c , definito come

$$\Phi^c = \begin{pmatrix} (\phi^0)^* \\ -(\phi^+)^* \end{pmatrix} \quad (3.10.5)$$

è pure un doppietto di isospin, cioè si trasforma come Φ sotto trasformazioni di gauge di $SU(2)$. Si noti l'analogia col caso delle particelle k e \bar{k} .

Con i doppietti a disposizione, si possono costruire i seguenti invarianti:

$$\begin{aligned}\Phi^\dagger \ell_L &= (\phi^+)^* \nu_L + (\phi^0)^* e_L \quad , \quad \Phi^{c\dagger} \ell_L = \phi^0 \nu_L - \phi^+ e_L \\ \Phi^\dagger q_L &= (\phi^+)^* u_L + (\phi^0)^* d_L \quad , \quad \Phi^{c\dagger} q_L = \phi^0 u_L - \phi^+ d_L .\end{aligned}\tag{3.10.6}$$

Per completare i termini d'accoppiamento dobbiamo moltiplicare gli elementi della prima riga per e_R^\dagger e quelli della seconda per u_R^\dagger o d_R^\dagger selezionando le combinazioni che risultano neutre, cioè invarianti sotto trasformazione di fase generata da Q_e . È evidente che solo il primo termine della prima riga dà un contributo accettabile (il secondo contribuirebbe se esistesse un ν_R), mentre quelli dalla seconda contribuiscono se si moltiplica il primo per d_R^\dagger e il secondo per u_R^\dagger .

Riconsiderando gli indici di generazione, prima soppressi, e la parametrizzazione (3.9.13) estesa agli spinori, che equivale alla sostituzione

$$\begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ H + v \end{pmatrix},\tag{3.10.7}$$

otteniamo il termine di Yukawa:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y &= i \frac{H + v}{\sqrt{2}} \sum_{ij} \left[g_{ij} e_R^{(i)\dagger} l_L^{(j)} + g_{ji}^* e_L^{(i)\dagger} l_R^{(j)} \right. \\ &\quad \left. + F_{ij} u_R^{(i)\dagger} u_L^{(j)} + F_{ji}^* u_L^{(i)\dagger} u_R^{(j)} + G_{ij} d_R^{(i)\dagger} d_L^{(j)} + G_{ji}^* d_L^{(i)\dagger} d_R^{(j)} \right]\end{aligned}\tag{3.10.8}$$

in cui appare chiaramente il termine di massa di Dirac indotto dall'accoppiamento di Yukawa.

La densità lagrangiana spinoriale elettrodebole corrispondente alla (2.13.5) è pertanto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_S &= i \sum_i \left\{ l_R^{(i)\dagger} \bar{\sigma}^\mu \left(\partial - ieA + i \frac{g_W}{\cos \theta_W} \sin^2 \theta_W Z \right)_\mu l_R^{(i)} \right. \\ &\quad + u_R^{(i)\dagger} \bar{\sigma}^\mu \left(\partial + i \frac{2e}{3} A - i \frac{2g_W}{3 \cos \theta_W} \sin^2 \theta_W Z \right)_\mu u_R^{(i)} \\ &\quad + d_R^{(i)\dagger} \bar{\sigma}^\mu \left(\partial - i \frac{e}{3} A + i \frac{g_W}{3 \cos \theta_W} \sin^2 \theta_W Z \right)_\mu d_R^{(i)} \\ &\quad + \nu_L^{(i)\dagger} \sigma^\mu \left(\partial + i \frac{g_W}{2 \cos \theta_W} Z \right)_\mu \nu_L^{(i)} \\ &\quad + e_L^{(i)\dagger} \sigma^\mu \left(\partial - ieA - i \frac{g_W}{\cos \theta_W} \left(\frac{1}{2} - \sin^2 \theta_W \right) Z \right)_\mu e_L^{(i)} \\ &\quad + u_L^{(i)\dagger} \sigma^\mu \left(\partial + i \frac{2e}{3} A + i \frac{g_W}{\cos \theta_W} \left(\frac{1}{2} - \frac{2 \sin^2 \theta_W}{3} \right) Z \right)_\mu u_L^{(i)} \\ &\quad + d_L^{(i)\dagger} \sigma^\mu \left(\partial - i \frac{e}{3} A - i \frac{g_W}{\cos \theta_W} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin^2 \theta_W}{3} \right) Z \right)_\mu d_L^{(i)} \\ &\quad + \frac{ig_W}{\sqrt{2}} \left[W_\mu^- \nu_L^{(i)\dagger} \sigma^\mu e_L^{(i)} + W_\mu^+ e_L^{(i)\dagger} \sigma^\mu \nu_L^{(i)} \right. \\ &\quad \left. + W_\mu^- u_L^{(i)\dagger} \sigma^\mu d_L^{(i)} + W_\mu^+ d_L^{(i)\dagger} \sigma^\mu u_L^{(i)} \right] \Big\} + \mathcal{L}_Y\end{aligned}\tag{3.10.9}$$

Per individuare il reale contenuto particellare della teoria, cioè in particolare identificare i campi asintotici corrispondenti alle particelle (con ciò parleremo del tutto impropriamente di quark asintotici che evidentemente non esistono dato il confinamento), dobbiamo diagonalizzare le matrici \mathbf{g} , \mathbf{F} e \mathbf{G} che sono proporzionali alle matrici di massa di Dirac degli spinori. Queste matrici non sono soggette ad alcun vincolo, quindi assumiamo per esse valori generici.

Una generica matrice quadrata \mathbf{X} può essere decomposta nella forma:

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{D} \mathbf{V} , \quad (3.10.10)$$

dove \mathbf{U} e \mathbf{V} sono matrici unitarie e \mathbf{D} è diagonale con autovalori positivi. \mathbf{U} e \mathbf{V} non sono univocamente determinate: esse possono essere moltiplicate a sinistra per la stessa matrice unitaria diagonale senza che la decomposizione venga meno.

Poniamo dunque

$$\frac{v}{\sqrt{2}} \mathbf{g} = \mathbf{U}_l^\dagger \mathbf{m} \mathbf{V}_l \quad , \quad \frac{v}{\sqrt{2}} \mathbf{F} = \mathbf{U}_u^\dagger \mathbf{M}_u \mathbf{V}_u \quad , \quad \frac{v}{\sqrt{2}} \mathbf{G} = \mathbf{U}_d^\dagger \mathbf{M}_d \mathbf{V}_d . \quad (3.10.11)$$

A questo punto definiamo gli spinori fisici e le generazioni fisiche secondo le trasformazioni:

$$\begin{aligned} N_L^{(i)} &= \sum_j \mathbf{V}_l \, {}_{ij} \nu_L^{(j)} & E_L^{(i)} &= \sum_j \mathbf{V}_l \, {}_{ij} e_L^{(j)} & U_L^{(i)} &= \sum_j \mathbf{V}_u \, {}_{ij} u_L^{(j)} \\ D_L^{(i)} &= \sum_j \mathbf{V}_d \, {}_{ij} d_L^{(j)} & E_R^{(i)} &= \sum_j \mathbf{U}_l \, {}_{ij} e_R^{(j)} & U_R^{(i)} &= \sum_j \mathbf{U}_u \, {}_{ij} u_R^{(j)} \\ D_R^{(i)} &= \sum_j \mathbf{U}_d \, {}_{ij} d_R^{(j)} . \end{aligned} \quad (3.10.12)$$

Sostituendo in (3.10.9) si vede subito che i termini delle prime 6 righe cambiano solo per la sostituzione degli spinori con i corrispondenti fisici, poiché in ogni termine lo spinore a destra e quello hermitiano coniugato a sinistra coinvolgono la stessa trasformazione unitaria; in particolare, questi termini rimangono diagonali rispetto alle generazioni, cioè coinvolgono spinori della stessa generazione. I termini in \mathcal{L}_Y vengono diagonalizzati per costruzione, mentre gli ultimi due termini dell'ultima riga di (3.10.9) cambiano in maniera sostanziale; isolandoli dal resto della densità lagrangiana abbiamo

$$\mathcal{L}_{CKM} = - \sum_{ij} \frac{g_W}{\sqrt{2}} \left(\mathbf{V}_{ij} W_\mu^- U_L^{(i)\dagger} \sigma^\mu D_L^{(j)} + \mathbf{V}_{ij}^* W_\mu^+ D_L^{(j)\dagger} \sigma^\mu U_L^{(i)} \right) , \quad (3.10.13)$$

dove la matrice \mathbf{V} è data da

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_u^\dagger \mathbf{V}_d . \quad (3.10.14)$$

Tenendo conto dei commenti circa la definizione delle matrici nel secondo membro, possiamo concludere che la matrice \mathbf{V} è definita a meno della moltiplicazione a destra e a sinistra di due diverse matrici unitarie diagonali; cioè:

$$\mathbf{V}_{ij} \sim e^{i(\varphi_i - \varphi_j)} \mathbf{V}_{ij} . \quad (3.10.15)$$

Considerando che una matrice unitaria $N \times N$ è individuata da N^2 parametri, vediamo che la \mathbf{V} dipende effettivamente da $N^2 - 2N + 1$ (quelli di \mathbf{V} meno le $2N - 1$ differenze fra $2N$ fasi φ_i),

cioè 4, parametri. Una matrice unitaria reale è ortogonale ed è individuata da $\frac{N^2-N}{2}$; questo fa capire che degli N^2 parametri di \mathbf{V} , $\frac{N^2+N}{2}$ sono fasi. In base a (3.10.14) queste fasi si riducono a $\frac{N^2-3N}{2} + 1$ cioè nel nostro caso a 1.

Abbiamo osservato nel capitolo precedente che i parametri complessi in una lagrangiana si accompagnano a una violazione della simmetria per la riflessione del tempo (T). Questo, peraltro, viene normalmente osservata come riflessione di parità accompagnata dallo scambio particella-antiparticella (PC) perché un teorema fondamentale della teoria dei campi quantistici ne garantisce l'invarianza per le riflessioni combinate PCT. Ci si aspetta che le violazioni della simmetria PC osservate nella fisica delle particelle siano riconducibili all'esistenza di questo fattore di fase non nullo.

Tornando alla densità lagrangiana spinoriale che riscriviamo in funzione dei bosoni vettori, oltre che degli spinori, fisici, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_S = & i \sum_i \left\{ N_L^{(i)\dagger} \sigma^\mu \partial_\mu N_L^{(i)} + E_R^{(i)\dagger} \bar{\sigma}^\mu (\partial - ieA)_\mu E_R^{(i)} + E_L^{(i)\dagger} \sigma^\mu (\partial - ieA)_\mu E_L^{(i)} \right. \\
& + U_R^{(i)\dagger} \bar{\sigma}^\mu \left(\partial + \frac{2ieA}{3} \right)_\mu U_R^{(i)} + U_L^{(i)\dagger} \sigma^\mu \left(\partial + \frac{2ieA}{3} \right)_\mu U_L^{(i)} \\
& + D_R^{(i)\dagger} \bar{\sigma}^\mu \left(\partial - \frac{ieA}{3} \right)_\mu D_R^{(i)} + D_L^{(i)\dagger} \sigma^\mu \left(\partial - \frac{ieA}{3} \right)_\mu D_L^{(i)} \\
& + im^{(i)} \left(1 + \frac{H}{v} \right) [E_R^{(i)\dagger} E_L^{(i)} + E_L^{(i)\dagger} E_R^{(i)}] \\
& + iM_u^{(i)} \left(1 + \frac{H}{v} \right) [U_R^{(i)\dagger} U_L^{(i)} + U_L^{(i)\dagger} U_R^{(i)}] + iM_d^{(i)} \left(1 + \frac{H}{v} \right) [D_R^{(i)\dagger} D_L^{(i)} + D_L^{(i)\dagger} D_R^{(i)}] \\
& + i \frac{g_W}{\cos \theta_W} Z_\mu \left[\frac{1}{2} N_L^{(i)\dagger} \sigma^\mu N_L^{(i)} - \left(\frac{1}{2} - \sin^2 \theta_W \right) E_L^{(i)\dagger} \sigma^\mu E_L^{(i)} + \sin^2 \theta_W E_R^{(i)\dagger} \bar{\sigma}^\mu E_R^{(i)} \right. \\
& \quad + \left(\frac{1}{2} - \frac{2 \sin^2 \theta_W}{3} \right) U_L^{(i)\dagger} \sigma^\mu U_L^{(i)} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin^2 \theta_W}{3} \right) D_L^{(i)\dagger} \sigma^\mu D_L^{(i)} \\
& \quad \left. - \frac{2 \sin^2 \theta_W}{3} U_R^{(i)\dagger} \bar{\sigma}^\mu U_R^{(i)} + \frac{\sin^2 \theta_W}{3} D_R^{(i)\dagger} \bar{\sigma}^\mu D_R^{(i)} \right] \\
& \left. + \frac{ig_W}{\sqrt{2}} [W_\mu^- N_L^{(i)\dagger} \sigma^\mu E_L^{(i)} + W_\mu^+ E_L^{(i)\dagger} \sigma^\mu N_L^{(i)}] \right\} + \mathcal{L}_{CKM} \tag{3.10.16}
\end{aligned}$$

Si vede abbastanza chiaramente che, con l'eccezione del neutrino, gli spinori sono particelle di Dirac, cioè la loro lagrangiana libera coincide, modulo la scelta della massa con quella dell'elettrone nella teoria Dirac; possiamo dunque riscrivere (3.10.16) usando i tetra-spinori invece che le loro componenti R e L ; per semplicità di notazione invece di usare il simbolo Ψ useremo le stesse lettere che, con gli indici R/L abbiamo usato qui sopra per le componenti. La stessa operazione può essere estesa al neutrino che però deve essere corredato del proiettore L cioè verrà indicato come $\frac{1-\gamma_5}{2} N^{(i)}$. Nel seguito ometteremo questo proiettore nella parte libera della densità lagrangiana, mantenendolo invece nell'interazione. Questo equivale a mettere in gioco un neutrino R che però non interagisce, col vantaggio di utilizzare anche per il neutrino, come per tutti gli altri spinori, ciascuno con la sua massa, il propagatore di Dirac (3.1.43).

Con questa notazione si ha:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_S = & \sum_i \left\{ i\bar{N}^{(i)} \gamma^\mu \partial_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} N^{(i)} \right. \\
& + i\bar{E}^{(i)} \gamma^\mu (\partial - ieA)_\mu E^{(i)} - m^{(i)} \left(1 + \sqrt{\sqrt{2}G_F H} \right) \bar{E}^{(i)} E^{(i)} \\
& + i\bar{U}^{(i)} \gamma^\mu \left(\partial + \frac{2ieA}{3} \right)_\mu U^{(i)} - M_u^{(i)} \left(1 + \sqrt{\sqrt{2}G_F H} \right) \bar{U}^{(i)} U^{(i)} \\
& + i\bar{D}^{(i)} \gamma^\mu \left(\partial - \frac{ieA}{3} \right)_\mu D^{(i)} - M_d^{(i)} \left(1 + \sqrt{\sqrt{2}G_F H} \right) \bar{D}^{(i)} D^{(i)} \\
& + M_Z \sqrt{\sqrt{2}G_F} \left[\bar{E}^{(i)} \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} - 2\sin^2 \theta_W - \frac{1}{2}\gamma_5 \right) E^{(i)} \right. \\
& - \bar{N}^{(i)} \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} N^{(i)} - \bar{U}^{(i)} \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{4\sin^2 \theta_W}{3} - \frac{1}{2}\gamma_5 \right) U^{(i)} \\
& \left. + \bar{D}^{(i)} \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{2\sin^2 \theta_W}{3} - \frac{1}{2}\gamma_5 \right) D^{(i)} \right] Z_\mu \\
& - M_Z \sqrt{\frac{G_F}{\sqrt{2}}} \cos \theta_W \left[W_\mu^- \bar{N}^{(i)} \gamma^\mu (1-\gamma_5) E^{(i)} + W_\mu^+ \bar{E}^{(i)} \gamma^\mu (1-\gamma_5) N^{(i)} \right] \left. \right\} \\
& - \sum_{ij} M_Z \sqrt{\frac{G_F}{\sqrt{2}}} \cos \theta_W \left[\mathbf{V}_{ij} W_\mu^- \bar{U}^{(i)} \gamma^\mu (1-\gamma_5) D^{(j)} + \mathbf{V}_{ij}^* W_\mu^+ \bar{D}^{(j)} \gamma^\mu (1-\gamma_5) U^{(i)} \right],
\end{aligned} \tag{3.10.17}$$

Si noti che qui sopra abbiamo distinto i quark e i leptoni con la stessa carica semplicemente indicandone la generazione; i nomi effettivamente usati sono però: *elettrone* per $E^{(1)}$, μ per $E^{(2)}$ e τ per $E^{(3)}$. Per i quark invece: *up* per $U^{(1)}$, *charm* per $U^{(2)}$, e *top* per $U^{(3)}$, inoltre *down* per $D^{(1)}$, *strange* per $D^{(2)}$ e *bottom* per $D^{(3)}$. La parametrizzazione più usata per la matrice \mathbf{V} conduce a una forma approssimata dovuta a Wolfenstein:

$$\mathbf{V} \simeq \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.10.18}$$

dove λ è il seno dell'angolo di Cabibbo e vale $0,221 \pm 0,003$ e A è mal conosciuto ma dell'ordine di 1. L'intensità della violazione di CP dovrebbe essere collegata a η .

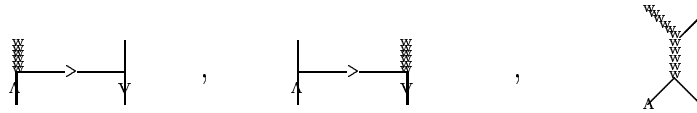
Per quel che riguarda le regole di Feynman, i propagatori sono ottenuti dalla (3.1.43) inserendo i valori corrispondenti delle masse. Anche i vertici sono simili a quello dell'elettrodinamica (3.1.45) salvo la sostituzione della carica e con le costanti che appaiono in (3.10.17) ed, eventualmente, la matrice γ_μ con $\gamma_\mu \gamma_5$ o $\gamma_\mu(1-\gamma_5)$ secondo quanto risulta in (3.10.17).

Infine gli accoppiamenti del generico spinore S di massa M_S con l' H è descritto da:

$$\alpha \text{ --- } \perp \text{ --- } \beta \quad \leftrightarrow \quad -M_S \sqrt{\sqrt{2}G_F} \delta_\beta^\alpha. \tag{3.10.19}$$

A titolo di esempio calcoliamo l'ampiezza invariante per l'annichilazione di una coppia *up-antidown* in W_+ e H . Non essendoci accoppiamenti a 4 gambe che coinvolgono gli spinori, i

diagrammi sono solo di tipo H e precisamente:



$$(3.10.20)$$

Indicando con u , p_u e \bar{d} , p_d spinori di polarizzazioni e tetra-impulsi dei quark, con p_H il tetra-impulso dell' H e ϵ il vettore di polarizzazione del W_+ , abbiamo le ampiezze:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) g_W \sqrt{\sqrt{2} G_F} \left[m_d \bar{d} \frac{\gamma \cdot (p_H - p_d) + m_d}{(p_H - p_d)^2 - m_d^2} \gamma \cdot \epsilon \frac{1 - \gamma_5}{2} u \right. \\ & + m_u \bar{d} \gamma \cdot \epsilon \frac{1 - \gamma_5}{2} \frac{\gamma \cdot (p_u - p_H) + m_u}{(p_u - p_H)^2 - m_u^2} u \\ & \left. + M_W \bar{d} \frac{\gamma \cdot \epsilon - \frac{\gamma \cdot (p_u + p_d) \epsilon \cdot (p_u + p_d)}{M_W^2}}{(p_u + p_d)^2 - M_W^2} \frac{1 - \gamma_5}{2} u \right]. \end{aligned} \quad (3.10.21)$$

Se poniamo per semplicità $M_Z = 80 \text{ GeV}/c^2$ e assumiamo, per esempio, $M_H = 120 \text{ GeV}/c^2$, calcolando l'ampiezza in soglia e nel centro di massa, troviamo che i primi due termini in parentesi quadra sono trascurabili per la piccolezza delle masse dei quark, rimane solo il contributo del terzo termine che da:

$$\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) g_W \sqrt{\sqrt{2} G_F} M_W \bar{d} \frac{\gamma \cdot \epsilon}{(M_W + M_H)^2 - M_W^2} \frac{1 - \gamma_5}{2} u. \quad (3.10.22)$$

Il secondo termine al numeratore non contribuisce perché il vettore di polarizzazione del W a riposo è puramente spaziale.

Appendice A

Evoluzione del campo libero a grandi tempi

Per fissare le idee consideriamo in modo esplicito il caso di una soluzione a frequenza negativa:

$$F(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d\vec{p} \frac{\phi(\vec{p})}{\sqrt{2E_p}} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-E_p t)} \equiv \int d\vec{p} \psi(\vec{p}) e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-E_p t)} , \quad (\text{A.0.1})$$

dove ϕ è una combinazione lineare di funzioni di pacchetto sufficientemente regolari (tipicamente gaussiane). A grandi tempi e per fissato \vec{r} l'integrale tende a zero più velocemente di qualunque potenza perché l'energia è strettamente nell'origine; pertanto l'integrale sugli impulsi del corrispondente fattore di fase si media a zero. Tuttavia, variando \vec{r} insieme al tempo, è possibile individuare una regione dello spazio degli impulsi in cui il fattore di fase è stazionario; questa regione fornisce il contributo dominante all'integrale nel limite cercato. Poniamo dunque $\vec{r} = \vec{v}t$ e consideriamo il limite a grandi tempi e \vec{v} costante:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int d\vec{p} \psi(\vec{p}) e^{i(\vec{p}\cdot\vec{v}-E_p)t} . \quad (\text{A.0.2})$$

La condizione di stazionarietà della fase è:

$$\vec{v} = \frac{\partial}{\partial \vec{p}} E_p = \frac{\vec{p}}{E_p} , \quad (\text{A.0.3})$$

che si risolve in \vec{p} ed E_p dando:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} , \quad E = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} . \quad (\text{A.0.4})$$

Sviluppando la fase fino al secondo ordine in $\vec{q} \equiv \vec{p} - \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}$ si ha:

$$\vec{p} \cdot \vec{v} - E_p = -\sqrt{1-v^2} \left[m - \frac{1}{2m} (q^2 - (\vec{q} \cdot \vec{v})^2) \right] + O(q^3) , \quad (\text{A.0.5})$$

e quindi asintoticamente l'integrale diventa:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int d\vec{p} \psi(\vec{p}) e^{i(\vec{p} \cdot \vec{v} - E_p)t} &= e^{-im\sqrt{1-v^2}t} \psi\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right) \int d\vec{q} e^{-i\sqrt{1-v^2}q^2 - \frac{(\vec{q} \cdot \vec{v})^2}{2m}t} \\ &= \left(\frac{2\pi m}{it}\right)^{\frac{3}{2}} (1-v^2)^{-\frac{5}{4}} e^{-im\sqrt{1-v^2}t} \psi\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.0.6})$$

Un altro limite interessante calcolabile direttamente col metodo del punto sella è:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int d\vec{p} e^{-\frac{(\vec{p} - \vec{k})^2}{\sigma^2}} e^{\pm iE_p t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\pm imt - \frac{k^2}{2\sigma^2}} \left(\pm \frac{2\pi im}{t}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{A.0.7})$$

Appendice B

La diffusione da parte di una densità esterna

Un'applicazione interessante e relativamente semplice delle nostre formule (2.5.12) o (2.5.19) consiste nel calcolo delle ampiezze di scattering nel modello con interazione:

$$I = \frac{g(x)}{2} \phi^2(x) . \quad (\text{B.0.1})$$

In questo modello l'equazione del campo è lineare e la funzione $g(x)$ svolge un ruolo analogo al potenziale nell'equazione di Schrödinger. In questo modello la (2.5.19) è risolta da:

$$\begin{aligned} S [\phi^{(as)}] &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int d^4x g(x) \phi^{(as)}(x) \left((\Delta * g)^n \phi^{(as)} \right) (x) \\ &\equiv -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int d^4x \prod_{i=1}^n dy_i g(x) \phi^{(as)}(x) \Delta(x - y_1) g(y_1) \Delta(y_1 - y_2) g(y_2) \\ &\quad \cdots \Delta(y_{n-1} - y_n) g(y_n) \phi^{(as)}(y_n) . \end{aligned} \quad (\text{B.0.2})$$

Dato che S è quadratico in $\phi^{(as)}(x)$ i processi possibili coinvolgono alternativamente l'annichilazione di due particelle, o la formazione di una coppia dal vuoto o lo scattering di una particella. Se ci limitiamo a considerare l'ampiezza al primo ordine in g abbiamo evidentemente:

$$S [\phi^{(as)}] = -\frac{1}{2} \int dx g(x) \left(\phi^{(as)}(x) \right)^2 , \quad (\text{B.0.3})$$

e quindi l'ampiezza di scattering:

$$S_{\vec{p} \rightarrow \vec{k}}[g] = - \int dx g(x) \frac{e^{i(k-p) \cdot x}}{2(2\pi)^3 \sqrt{E_p E_k}} \equiv -\pi \frac{\tilde{g}(p-k)}{\sqrt{E_p E_k}} . \quad (\text{B.0.4})$$

Mentre l'ampiezza di annichilazione di una coppia con impulsi p_1 e p_2 è:

$$S_{\vec{p}_1, \vec{p}_2 \rightarrow 0}[g] = -\pi \frac{\tilde{g}(p_1 + p_2)}{\sqrt{E(p_1) E(p_2)}} , \quad (\text{B.0.5})$$

e quella per la produzione di una coppia con impulsi k_1 e k_2 è:

$$S_{0 \rightarrow \vec{k}_1, \vec{k}_2}[g] = -\pi \frac{\tilde{g}(-k_1 - k_2)}{\sqrt{E(k_1)E(k_2)}} . \quad (\text{B.0.6})$$

Consideriamo a questo punto la possibilità che:

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) , \quad (\text{B.0.7})$$

con:

$$\theta(x_2^0 - x_1^0)g_1(x)g_2(x) = g_1(x)g_2(x) , \quad (\text{B.0.8})$$

cioè l'azione di g_1 precede quella di g_2 e calcoliamo il contributo all'ampiezza di scattering dovuto all'azione combinata di g_1 e g_2 all'ordine minimo rispettivo. Questo si ottiene considerando il termine al secondo ordine in g nella (B.0.2) e isolando il contributo bilineare cioè:

$$S_{1,2} \equiv \int d^4x g_1(x)\phi^{(as)}(x) \left(\Delta * g_2\phi^{(as)} \right) (x) \\ \int dx_1 dx_2 g_1(x_1)\phi^{(as)}(x_1)\Delta(x_1 - x_2)g_2(x_2)\phi^{(as)}(x_2) . \quad (\text{B.0.9})$$

Sostituendo:

$$\phi^{(as)}(x) = \frac{e^{ik \cdot x}}{\sqrt{2E_k}(2\pi)^3} + \frac{e^{-ip \cdot x}}{\sqrt{2E(p)}(2\pi)^3} , \quad (\text{B.0.10})$$

e tenendo conto della (B.0.8) e della (2.4.6) si ha:

$$S_{1,2} = \frac{\pi^2}{\sqrt{E_p E_k}} \int \frac{d\vec{q}}{E(q)} [\tilde{g}_1(q - k)\tilde{g}_2(p - q) + \tilde{g}_1(q + p)\tilde{g}_2(-k - q)] \\ = \int d\vec{q} [S_{\vec{q} \rightarrow \vec{k}}[g_1]S_{\vec{p} \rightarrow \vec{q}}[g_2] + S_{\vec{p}, \vec{q} \rightarrow 0}[g_1]S_{0 \rightarrow \vec{q}, \vec{k}}[g_2]] , \quad (\text{B.0.11})$$

che mostra la fattorizzazione del processo nello scattering da g_2 seguito da quello da g_1 e nella creazione di una coppia con impulsi k e q da parte dei g_2 seguita dall'annichilazione della coppia con impulsi q e p da parte di g_1 secondo, appunto, l'ordine causale.

Appendice C

Le matrici di Dirac

Le matrici di Dirac soddisfano le relazioni di anticommutazione

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2I g_{\mu\nu}. \quad (\text{C.0.1})$$

Esse implicano immediatamente che

$$(\gamma_\mu)^2 = I; \quad \text{Tr } \gamma_\mu \gamma_\nu = 4 g_{\mu\nu}. \quad (\text{C.0.2})$$

Si definisce

$$\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\frac{i}{4!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma. \quad (\text{C.0.3})$$

È immediato verificare che la matrice γ_5 ha le seguenti proprietà:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0; \quad \gamma_5^2 = I. \quad (\text{C.0.4})$$

Questo implica che la traccia del prodotto di un numero dispari di matrici γ è nulla. Infatti

$$\gamma_\mu = -\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_5, \quad (\text{C.0.5})$$

e quindi

$$\begin{aligned} \text{Tr } \gamma_{\mu_1} \cdots \gamma_{\mu_{2n+1}} &= (-1)^{2n+1} \text{Tr } (\gamma_5 \gamma_{\mu_1} \gamma_5) \cdots (\gamma_5 \gamma_{\mu_{2n+1}} \gamma_5) \\ &= -\text{Tr } \gamma_{\mu_1} \cdots \gamma_{\mu_{2n+1}}, \end{aligned} \quad (\text{C.0.6})$$

dove, nel secondo passaggio, si è usata la proprietà di ciclicità della traccia.

L'espressione delle matrici γ può essere cambiata mediante una ridefinizione dei tetra-spinori tramite una trasformazione unitaria:

$$\psi' = U \psi; \quad \gamma'_\mu = U \gamma_\mu U^\dagger; \quad U^\dagger U = I. \quad (\text{C.0.7})$$

Questo consente di provare immediatamente che

$$\gamma'_\mu{}^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0. \quad (\text{C.0.8})$$

Infatti, si verifica direttamente che questa proprietà vale in una particolare rappresentazione delle matrici γ , ad esempio quella introdotta nel capitolo 3.1:

$$\gamma_\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \bar{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.0.9})$$

In una qualunque altra rappresentazione si ha

$$\gamma'_\mu{}^\dagger = U \gamma_\mu^\dagger U^\dagger = U \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 U^\dagger = \gamma'_0 \gamma'_\mu \gamma'_0. \quad (\text{C.0.10})$$

La matrice γ_5 è hermitiana:

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5. \quad (\text{C.0.11})$$

In particolare si usa spesso la cosiddetta rappresentazione standard, utile per calcoli alle basse energie, in cui

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} . \quad (\text{C.0.12})$$

Appendice D

Gradi di libertà non fisici nei campi vettoriali

Consideriamo la parte bilineare nel campo vettoriale nella lagrangiana del modello di Higgs abeliano con il gauge-fixing di 't Hooft. Come si è visto nel capitolo 3.4, si ha

$$\mathcal{L}_0(A) = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}e^2 v^2 A_\mu A^\mu. \quad (\text{D.0.1})$$

Come osservato, questa lagrangiana coincide con la lagrangiana libera per quattro campi scalari reali A_0, A_1, A_2, A_3 con massa ev , eccetto che per il segno del termine relativo a A_0 . In questa appendice mostreremo che questo segno induce l'esistenza di stati a norma negativa, che quindi vanno eliminati dallo spettro fisico.

Procedendo come nel caso del campo scalare, si ottiene una espressione del campo libero in termini di operatori di creazione e distruzione, a partire dalla quale è possibile effettuare la quantizzazione utilizzando l'analogia con l'oscillatore armonico. Tale espressione è

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2E_k}} \sum_{\lambda=0}^3 [a_k^{(\lambda)} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) e^{-ikx} + a_k^{\dagger(\lambda)} \epsilon_\mu^{(\lambda)*}(k) e^{ikx}], \quad (\text{D.0.2})$$

dove

$$E_k = \sqrt{|\vec{k}|^2 + e^2 v^2}. \quad (\text{D.0.3})$$

Per ciascun valore di k , i tetra-vettori $\epsilon^{(\lambda)}(k)$ possono essere definiti nel sistema di quiete, in cui $k = (ev, 0)$ come i versori dei quattro assi coordinati:

$$\epsilon^{(0)}(ev, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon^{(1)}(ev, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon^{(2)}(ev, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon^{(3)}(ev, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.0.4})$$

Le corrispondenti espressioni nel generico sistema di riferimento possono essere ottenute semplicemente effettuando una opportuna trasformazione di Lorentz; in particolare, si ottiene

$$\sum_{\lambda=0}^3 \frac{\epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda)*}}{\epsilon^{(\lambda)} \cdot \epsilon^{(\lambda)*}} = g_{\mu\nu}. \quad (\text{D.0.5})$$

Inoltre, $\epsilon_\mu^{(0)}(k) = k_\mu/(ev)$; per questa ragione, la componente del campo vettoriale che corrisponde a $\lambda = 0$ è proporzionale alla tetra-divergenza di un campo scalare, e dunque descrive un grado di libertà con spin 0.

Definiamo ora i momenti coniugati ad A_μ a partire dalla densità lagrangiana:

$$\pi^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}_0(A)}{\partial \partial_0 A_\nu} = -\partial_0 A^\nu. \quad (\text{D.0.6})$$

Troviamo

$$\pi^\nu(x) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\sqrt{E_k} d^3 k}{\sqrt{2}} \sum_{\lambda=0}^3 \left[a_k^{(\lambda)} \epsilon^{(\lambda)\nu}(k) e^{-ikx} - a_k^{\dagger(\lambda)} \epsilon^{(\lambda)*\nu}(k) e^{ikx} \right]. \quad (\text{D.0.7})$$

Si verifica direttamente che le regole di quantizzazione canoniche

$$[A_\mu(t, \vec{x}), \pi^\nu(t, \vec{x}')] = i \delta_\mu^\nu \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (\text{D.0.8})$$

si esprimono in termini degli operatori di creazione e distruzione nel modo seguente:

$$[a_k^{(\lambda)}, a_q^{\dagger(\lambda')}] = -g^{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q}) \quad (\text{D.0.9})$$

$$[a_k^{(\lambda)}, a_q^{(\lambda')}] = [a_k^{\dagger(\lambda)}, a_q^{\dagger(\lambda')}] = 0. \quad (\text{D.0.10})$$

Infatti,

$$\begin{aligned} [A_\mu(t, \vec{x}), \pi^\nu(t, \vec{x}')] &= \frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3 k d^3 q \sqrt{\frac{E_q}{E_k}} \sum_{\lambda, \lambda'=0}^3 \quad (\text{D.0.11}) \\ &\left\{ e^{-i(E_k+E_q)t} e^{i(\vec{k}\vec{x}+\vec{q}\vec{x}')} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \epsilon^{(\lambda')\nu}(q) [a_k^{(\lambda)}, a_q^{(\lambda')}] \right. \\ &\quad - e^{-i(E_k-E_q)t} e^{i(\vec{k}\vec{x}-\vec{q}\vec{x}')} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \epsilon^{(\lambda')*\nu}(q) [a_k^{(\lambda)}, a_q^{\dagger(\lambda')}] \\ &\quad + e^{i(E_k-E_q)t} e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\vec{q}\vec{x}')} \epsilon_\mu^{(\lambda)*}(k) \epsilon^{(\lambda')\nu}(q) [a_k^{(\lambda)}, a_q^{\dagger(\lambda')}] \\ &\quad \left. - e^{i(E_k+E_q)t} e^{-i(\vec{k}\vec{x}+\vec{q}\vec{x}')} \epsilon_\mu^{(\lambda)*}(k) \epsilon^{(\lambda')*\nu}(q) [a_k^{\dagger(\lambda)}, a_q^{\dagger(\lambda')}] \right\}. \end{aligned}$$

Sostituendo le (D.0.9,D.0.10), eq. (D.0.11) diventa

$$[A_\mu(t, \vec{x}), \pi^\nu(t, \vec{x}')] = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3 k \sum_{\lambda, \lambda'=0}^3 g^{\lambda\lambda'} \left[e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \epsilon^{(\lambda')*\nu}(k) + e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \epsilon_\mu^{(\lambda)*}(k) \epsilon^{(\lambda')\nu}(k) \right]. \quad (\text{D.0.12})$$

Poiché

$$g^{\lambda\lambda'} = \frac{\delta^{\lambda\lambda'}}{\epsilon^{(\lambda)} \cdot \epsilon^{(\lambda)*}} \quad (\text{D.0.13})$$

si ha infine

$$[A_\mu(t, \vec{x}), \pi^\nu(t, \vec{x}')] = i \delta_\mu^\nu \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (\text{D.0.14})$$

Consideriamo ora uno stato di singola particella ottenuto a partire dagli stati con polarizzazione $\lambda = 0$:

$$|\vec{k}\rangle = \int d^3p f_k(p) a_p^{\dagger(0)}|0\rangle, \quad (\text{D.0.15})$$

dove $|0\rangle$ è lo stato di vuoto, e $f_k(p)$ una funzione di pacchetto centrata intorno a $\vec{p} = \vec{k}$. Utilizzando la (D.0.9), si trova

$$\begin{aligned} \langle \vec{k} | \vec{k} \rangle &= \int d^3p d^3p' f_k(p) f_k^*(p') \langle 0 | a_{p'}^{(0)} a_p^{\dagger(0)} | 0 \rangle \\ &= -\langle 0 | 0 \rangle \int d^3p |f_k(p)|^2. \end{aligned} \quad (\text{D.0.16})$$

Gli stati generati dagli operatori corrispondenti a $\lambda = 0$ sono pertanto stati a norma negativa, e dunque vanno eliminati dallo spettro fisico. Ciò può essere ottenuto richiedendo che, per gli stati fisici,

$$\epsilon(k) \cdot k = 0; \quad \epsilon(k) \cdot \epsilon^*(k) = -1. \quad (\text{D.0.17})$$

Appendice E

Nota bibliografica

Non conosciamo testi su cui le regole di Feynman per le ampiezze di diffusione siano ricavate direttamente nell'approssimazione semiclassica; un testo di riferimento per la trattazione completa è:

Itzykson, Zuber: *Quantum Field Theory* Mc Graw-Hill.

Per la teoria elettrodebole, la QCD e relative applicazioni si consigliano:

Perkins: *Introduction to High Energy Physics* Addison-Wesley.

e

Ellis, Stirling, Webber: *QCD and Collider Physics* Cambridge Univ. Press.