

Appunti del corso di Fisica Teorica

Lezioni del Prof. Pierantonio Zanghì

Luca Biggio

Indice

1	Elettromagnetismo classico	4
1.1	Le equazioni di Maxwell nel vuoto, i campi e le sorgenti . . .	4
1.1.1	Equazioni delle onde dalle equazioni di Maxwell	5
1.1.2	Equazioni di Maxwell e loro soluzioni nel limite statico	6
1.2	Il teorema di Poynting e la conservazione dell'energia e dell'impulso per un sistema di particelle cariche e di campi elettromagnetici	9
1.2.1	Conservazione dell'energia	9
1.2.2	Conservazione dell'impulso	11
1.3	Teorema di Helmholtz	12
1.4	Equazioni di Maxwell nella rappresentazione dei potenziali . .	14
1.4.1	Trasformazioni di gauge	15
1.4.2	Gauge di Coulomb e gauge di Lorenz	16
1.5	Soluzione dell'equazione delle onde non omogenea	18
1.5.1	Prima strada: Doppia trasformata di Fourier	18
1.5.2	Seconda strada: funzioni di Green per l'equazione d'onda.	22
1.5.3	Le soluzioni ritardate per i campi	26
1.6	Formule di Liénard-Wiechert	28
1.6.1	Campi elettrico e magnetico	29
1.7	Radiazione elettromagnetica	36
1.7.1	Potenza irradiata da una carica puntiforme	36
1.7.2	Smorzamento radiativo: considerazioni introduttive . .	38
1.7.3	La forza di reazione radiativa dalla conservazione dell'energia	40
1.8	Campi elettromagnetici nel vuoto	46
1.8.1	Soluzione dell'equazione delle onde omogenea	46
1.9	Campo elettromagnetico come collezione di oscillatori armonici	48
1.10	Cavità rettangolare: separazione delle variabili	51
1.11	Analisi termodinamica della radiazione in una cavità	55
1.11.1	La legge di spostamento di Wien	57
1.12	La teoria di Planck	60
1.12.1	Catastrofe ultravioletta	60
1.12.2	La prima teoria di Planck	61
2	Meccanica quantistica ed elettromagnetismo	64
2.1	Oscillatore armonico quantistico	64
2.1.1	Formula di Planck ed energia di punto zero	67
2.2	Schema di Heisenberg	68
2.2.1	Rappresentazione di Heisenberg e meccanica classica .	69
2.2.2	Oscillatore armonico	70
2.3	Quantizzazione del campo elettromagnetico	71
2.3.1	Funzione di base complesse	73

2.4	Energia di punto zero ed effetto Casimir	74
2.5	Spazio di Fock e formalismo degli operatori di creazione e distruzione	80
2.5.1	Bosoni	80
2.6	Stati del campo elettromagnetico	81
2.6.1	Fotoni	81
2.6.2	Stati coerenti-Proprietà matematiche	82
2.6.3	Stati coerenti-Proprietà fisiche	86
2.7	Emissione spontanea	88
2.7.1	Coefficienti A e B di Einstein	88
2.7.2	Emissione spontanea	90
2.8	Rivelatori di fotoni	91
2.9	Funzioni di correlazione	97
2.9.1	Correlazioni al primo ordine: Interferenza	97

3 Esercizi **100**

1 Elettromagnetismo classico

1.1 Le equazioni di Maxwell nel vuoto, i campi e le sorgenti

Le equazioni che governano i fenomeni elettromagnetici sono le equazioni di Maxwell, che adottando le convenzioni del Sistema di Gauss assumono la forma,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Nelle equazioni di Maxwell è contenuta implicitamente l'equazione di continuità per le densità di carica e di corrente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.1.2)$$

Infatti, prendendo la divergenza dell'equazione di Ampere-Maxwell otteniamo:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) &= \frac{1}{c} \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) + \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{J} = \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{J} \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

da cui, utilizzando l'equazione di Gauss per il campo elettrico,

$$0 = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{J}, \quad (1.1.4)$$

si ritrova proprio la (1.1.2).

Essenziale per lo studio del moto delle particelle cariche è l'equazione della forza di Lorentz,

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.1.5)$$

Le equazioni di Maxwell rappresentano la base di tutti i fenomeni elettromagnetici classici. Combinato con l'equazione per la forza di Lorentz e la seconda legge del moto di Newton, questo insieme di quattro equazioni fornisce una descrizione completa della dinamica classica delle particelle cariche in interazione con il campo elettromagnetico.

A questo proposito Feynman afferma: *“Si hanno dapprima le equazioni di Maxwell, scritte tanto in forma distesa che in forma concisa, cioè matematica. Poi c'è la legge di conservazione della carica che in realtà è racchiusa nelle equazioni di Maxwell. Poi vi è la legge della forza, perché il fatto di conoscere tutto sui campi elettrici e magnetici non ci dice nulla finché non sappiamo come essi agiscono sulle cariche; così, invece, conoscendo \mathbf{E} e \mathbf{B} possiamo trovare la forza che agisce su un oggetto che ha carica q e si muove*

con velocità \mathbf{v} . Finalmente, conoscere la forza non dice nulla finché non si sa cosa succede quando una forza agisce su qualcosa: ci occorre la legge del moto, cioè che la forza è uguale alla derivata temporale dell'impulso. Gli effetti relativistici stessi vengono inclusi scrivendo che l'impulso è dato da $p = m_0 v / \sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Se si vuole essere proprio completi, si deve aggiungere ancora una legge, cioè la legge di gravitazione di Newton.

Abbiamo scalato una gran vetta. Siamo in cima al K-2, siamo quasi pronti per il Monte Everest, che è la meccanica quantistica”.

Osservazione sulla struttura delle equazioni di Maxwell.

Prendiamo la divergenza della terza e della seconda equazione di Maxwell:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \\ 0 &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{J} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E} - 4\pi\rho) = 0 \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Dove nella seconda relazione si è fatto uso dell'equazione di continuità (1.1.2). Dalla seconda e dalla terza abbiamo trovato la prima e la quarta derivate rispetto al tempo. Le vere equazioni dinamiche, dunque, sono la seconda e la terza le quali hanno la funzione di *propagare* le condizioni iniziali fissate dalle restanti due equazioni di Maxwell.

1.1.1 Equazioni delle onde dalle equazioni di Maxwell

Dalle equazioni di Maxwell, tramite semplici passaggi, si ricavano due equazioni delle onde non omogenee, una per \mathbf{E} e una per \mathbf{B} . Vediamo come ottenerle.

Equazione delle onde per \mathbf{E} . Partiamo derivando rispetto al tempo ambo i membri dell'equazione di Ampere-Maxwell

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} = \\ &= \frac{1}{c} \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Sostituendo nel primo addendo del membro di destra l'equazione di Faraday, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= -\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} = \\ &= -\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \Delta \mathbf{E} - \frac{4\pi}{c^2} \dot{\mathbf{J}} \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

e finalmente, utilizzando l'equazione di Gauss per eliminare il termine contenente $\nabla \cdot \mathbf{E}$, si ottiene

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E} = -4\pi \nabla \rho - \frac{4\pi}{c^2} \mathbf{J}} \quad (1.1.9)$$

Equazione delle onde per \mathbf{B} Partiamo derivando rispetto al tempo ambo i membri dell'equazione di Faraday

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = \\ &= -\frac{1}{c} \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

Sostituendo al membro di destra l'equazione di Ampere-Maxwell, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= -\frac{1}{c} \nabla \times (c \nabla \times \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{J}) = \\ &= -\nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) + \Delta \mathbf{B} + \frac{4\pi}{c} \nabla \times \mathbf{J} \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

e finalmente, utilizzando l'equazione per la divergenza di \mathbf{B} , si ottiene

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \nabla \times \mathbf{J}} \quad (1.1.12)$$

1.1.2 Equazioni di Maxwell e loro soluzioni nel limite statico

Se si considera il limite statico delle equazioni di Maxwell, ovvero il caso in cui sia ρ che \mathbf{J} non dipendono dal tempo e in cui si cercano soluzioni per \mathbf{E} e \mathbf{B} non dipendenti dal tempo, esse vengono modificate come segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \quad (1.1.13)$$

Come esercizio, ricaviamo le soluzioni per \mathbf{E} e per \mathbf{B} delle equazioni di Maxwell nel limite statico.

Preliminarmente osserviamo che la terza equazione implica che, nel caso statico, \mathbf{E} può essere espresso come gradiente di una funzione scalare ϕ :

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (1.1.14)$$

Applicando l'operatore divergenza ad ambo i membri dell'equazione (1.1.14) si ottiene la cosiddetta *Equazione di Poisson*:

$$-\Delta \phi = 4\pi \rho \quad (1.1.15)$$

Cerchiamo di risolvere questa equazione con il metodo di Fourier. A tal proposito è utile ricordare come cambia l'azione di alcuni operatori in seguito al passaggio allo spazio di Fourier. Nel box sottostante riportiamo alcune trasformazioni utili per i calcoli che seguono:

$$\begin{array}{l}
 \nabla \phi \longrightarrow i\mathbf{k}\phi_{\mathbf{k}} \\
 \nabla \cdot \mathbf{A} \longrightarrow i\mathbf{k} \cdot A_{\mathbf{k}} \\
 \nabla \times \mathbf{A} \longrightarrow i\mathbf{k} \times A_{\mathbf{k}} \\
 \Delta \phi = \nabla \cdot \nabla \phi \longrightarrow -k^2 \phi_{\mathbf{k}}
 \end{array}
 \tag{1.1.16}$$

Possiamo dunque apprezzare come l'equazione differenziale (1.1.15), nello spazio di Fourier si trasformi in un'equazione algebrica:

$$k^2 \phi_{\mathbf{k}} = 4\pi \rho_{\mathbf{k}} \tag{1.1.17}$$

da cui

$$\phi_{\mathbf{k}} = \underbrace{\frac{4\pi}{k^2}}_{G_{\mathbf{k}}} \rho_{\mathbf{k}} \tag{1.1.18}$$

A questo punto non ci resta che effettuare l'antitrasformata della funzione $\phi_{\mathbf{k}}$ trovata sopra. Per fare ciò ricordiamo che l'antitrasformata del prodotto di due funzioni definite nello spazio di Fourier corrisponde a un integrale di convoluzione tra le antitrasformate delle funzioni citate:

$$G_{\mathbf{k}} j_{\mathbf{k}} \longrightarrow G * j(\mathbf{x}) = \int d^3 \mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') j(\mathbf{x}') \tag{1.1.19}$$

Si avrà dunque che:

$$\phi(x) = \int d^3 \mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') \tag{1.1.20}$$

Calcoliamo a questo punto la funzione $G(\mathbf{x})$ effettuando l'antitrasformata della funzione corrispondente nello spazio di Fourier, nel nostro caso $G_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi}{k^2}$.

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \frac{4\pi}{k^2} = \\
 &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k^2 dk \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi e^{ikx \cos \theta} \frac{1}{k^2} = \\
 &= \frac{8\pi^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \int_0^\pi \sin \theta e^{ikx \cos \theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \left[- \int_1^{-1} e^{ikxu} du \right] = \tag{1.1.21} \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \left[\frac{e^{ikxu}}{ikx} \right]_{u=-1}^{u=1} = \frac{2}{\pi x} \int_0^\infty dk \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2ik} = \\
 &= \frac{2}{\pi x} \int_0^\infty dk \frac{\sin kx}{k} = \frac{2}{\pi x} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{x} = \frac{1}{|\mathbf{x}|}
 \end{aligned}$$

Adesso possiamo finalmente ricavare ϕ :

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (1.1.22)$$

o più semplicemente, con ovvia notazione,

$$\boxed{\phi = \int \frac{\rho}{r} dV} \quad (1.1.23)$$

Ricaviamo dunque il campo elettrico \mathbf{E} sfruttando la (1.1.14):

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = \int \frac{\rho\hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV \quad (1.1.24)$$

Facciamo due osservazioni. La prima riguarda la funzione G ; essa viene chiamata *funzione di Green*. In realtà, più precisamente, la nostra G è solo una possibile funzione di Green, infatti tali funzioni soddisfano la relazione:

$$\Delta'G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.1.25)$$

dove

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (1.1.26)$$

e la funzione F soddisfa l'equazione di Laplace entro il volume V :

$$\Delta'F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \quad (1.1.27)$$

Facendo uso del cosiddetto *Teorema di Green*:

$$\int_V (\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi) d^3x = \oint_S \left[\phi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\phi}{\partial n} \right] da \quad (1.1.28)$$

dove $\frac{\partial}{\partial n}$ indica la derivata normale alla superficie S , ϕ è proprio il potenziale scalare e $\psi = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ è facile ottenere la seguente relazione fondamentale:

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V \rho(\mathbf{x}')G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial\phi}{\partial n'} - \phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \right] da' \quad (1.1.29)$$

La libertà disponibile nella definizione (1.1.26) di G significa che possiamo fare in modo che l'integrale di superficie dipenda solo dal tipo scelto di condizioni al contorno.¹ Se la superficie S va all'infinito ed il campo elettrico su S decresce più rapidamente di r^{-1} allora l'integrale di superficie si annulla e ritroviamo il risultato (1.1.23).

La seconda osservazione riguarda la soluzione per \mathbf{B} in magnetostatica. È

¹Quindi a secondo che si abbia un problema di Dirichlet o un problema di Neumann.

semplice vedere che, sotto opportune condizioni² vale la seguente equazione per il potenziale vettore \mathbf{A} :

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (1.1.30)$$

È chiaro dalla nostra discussione dell'elettrostatica che la soluzione per \mathbf{A} nello spazio illimitato è:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (1.1.31)$$

A questo punto è immediato ricavare il campo magnetico,

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (1.1.32)$$

Utilizzando semplici formule di analisi vettoriale è possibile scrivere la (1.1.32) nel seguente modo:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' \quad (1.1.33)$$

1.2 Il teorema di Poynting e la conservazione dell'energia e dell'impulso per un sistema di particelle cariche e di campi elettromagnetici

È molto importante stabilire la forma delle leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso per i campi elettromagnetici. Iniziamo considerando la conservazione dell'energia, a cui ci si riferisce spesso come al *teorema di Poynting* (1884).

1.2.1 Conservazione dell'energia

Per una singola carica q la potenza spesa da parte dei campi elettromagnetici esterni \mathbf{E} e \mathbf{B} è $q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$,³ dove \mathbf{v} è la velocità della carica. Se abbiamo

²Dato che $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ il campo \mathbf{B} può essere scritto come

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

A questo punto riscrivendo l'equazione del rotore di \mathbf{B} in termini di \mathbf{A} si ottiene:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

oppure

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

Scegliendo adesso la gauge di Coulomb (che analizzeremo in seguito) si ottiene la (1.1.30)

³Tale espressione si ottiene facendo il prodotto scalare tra l'espressione per la forza di Lorentz e il vettore velocità \mathbf{v} . Ne consegue che il termine della forza di Lorentz contenente il campo magnetico $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ non dà contributi al prodotto scalare e dunque alla potenza.

una distribuzione continua di carica e di corrente, la potenza totale spesa da parte dei campi in un volume finito V è

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3x \quad (1.2.1)$$

Questa potenza rappresenta una conversione di energia elettromagnetica in energia meccanica o termica. Essa deve essere bilanciata da un decremento corrispondente dell'energia del campo elettromagnetico entro il volume V . Per mostrare esplicitamente questa legge di trasformazione, facciamo uso delle equazioni di Maxwell per esprimere la (1.2.1) in un altro modo. Facciamo dunque uso della legge di Ampere-Maxwell per eliminare \mathbf{J} :

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3x = \int_V \left[\frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] d^3x \quad (1.2.2)$$

Se ora utilizziamo l'identità vettoriale

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (1.2.3)$$

e la legge di Faraday, il membro di destra della (1.2.2) diventa

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3x = - \int_V \left[\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] d^3x \quad (1.2.4)$$

Indicando la densità totale di energia con

$$u = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \quad (1.2.5)$$

la (1.2.4) si può scrivere

$$- \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3x = \int_V \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right] d^3x \quad (1.2.6)$$

Poiché il volume V è arbitrario, si può porre questa equazione nella forma di una equazione differenziale di continuità, o legge di conservazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (1.2.7)$$

Il vettore \mathbf{S} che rappresenta un flusso di energia, è chiamato *vettore di Poynting*. Esso è dato da

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (1.2.8)$$

ed ha le dimensioni di (*energia/area* \times *tempo*). Il significato fisico delle forme integrale o differenziale (1.2.6) o (1.2.7) è che la derivata rispetto al tempo dell'energia elettromagnetica contenuta entro un certo volume, più l'energia che attraversa la superficie di confine del volume per unità di tempo,

è uguale al lavoro totale fatto dai campi sulle sorgenti entro il volume. Questo è equivalente a dire che l'energia si conserva.

Fino ad ora l'enfasi è andata sull'energia dei campi elettromagnetici. Il lavoro ($\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$) svolto per unità di tempo e per unità di volume dai campi è una conversione di energia elettromagnetica in energia meccanica o termica. Poiché la materia è in ultima analisi composta da particelle cariche (elettroni e nuclei atomici), possiamo pensare a questo tasso di conversione come alla derivata temporale dell'energia per unità di volume delle particelle cariche. Possiamo allora interpretare il teorema di Poynting per i campi microscopici (\mathbf{E}, \mathbf{B}) come l'affermazione della conservazione dell'energia del sistema combinato delle particelle e dei campi. Se indichiamo con E_{mecc} l'energia totale delle particelle entro il volume V ed assumiamo che nessuna particella esca dal volume, abbiamo

$$\frac{dE_{mecc}}{dt} = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3x \quad (1.2.9)$$

Il teorema di Poynting esprime allora la conservazione dell'energia per il sistema combinato nel seguente modo:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(E_{mecc} + E_{campo}) = - \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} da \quad (1.2.10)$$

dove l'energia totale del campo per unità di volume è

$$E_{campo} = \int_V u d^3x \quad (1.2.11)$$

1.2.2 Conservazione dell'impulso

La conservazione dell'impulso si può discutere in modo simile. Il calcolo esplicito è piuttosto lungo ma non particolarmente complicato, riportiamo dunque solo il risultato finale:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}_{mecc} + \mathbf{P}_{campo})_\alpha = \oint_S \sum_\beta T_{\alpha\beta} n_\beta da \quad (1.2.12)$$

dove \mathbf{n} è il versore ortogonale alla superficie chiusa S , diretto verso l'esterno, mentre $T_{\alpha\beta}$ è chiamato *tensore degli sforzi di Maxwell* ed è definito nel seguente modo:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} [E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B})] \quad (1.2.13)$$

Evidentemente, se la (1.2.12) rappresenta una legge di conservazione dell'impulso, allora $\sum_\beta T_{\alpha\beta} n_\beta$ è la α -esima componente del flusso di impulso per unità di superficie attraverso la superficie S entro il volume V . In altre parole, si tratta della forza per unità di superficie trasmessa attraverso

la superficie S ed agente sul sistema combinato di particelle e di campi all'interno del volume V . Si può pertanto usare l'equazione (1.2.12) per calcolare le forze agenti su corpi materiali immersi in campi elettromagnetici racchiudendo i corpi all'interno di una superficie chiusa S e sommando la forza elettromagnetica totale secondo il membro di destra della (1.2.12). La conservazione del momento angolare del sistema combinato di particelle e di campi si può discutere allo stesso modo visto per energia ed impulso.

1.3 Teorema di Helmholtz

Supponiamo di conoscere che la divergenza di una funzione vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ è uguale a una data funzione scalare $D(\mathbf{r})$:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = D \quad (1.3.1)$$

e che il rotore di $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ è una specificata funzione vettoriale $\mathbf{C}(\mathbf{r})$:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{C} \quad (1.3.2)$$

Conseguentemente, \mathbf{C} deve essere a divergenza nulla,

$$\nabla \cdot \mathbf{C} = 0 \quad (1.3.3)$$

poiché la divergenza del rotore è sempre zero. È possibile, sulla base di queste informazioni, determinare la funzione \mathbf{F} ? Se $D(\mathbf{r})$ e $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ vanno a zero abbastanza rapidamente all'infinito, la risposta è sì.

Affermiamo che

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \nabla \times \mathbf{W} \quad (1.3.4)$$

dove

$$U(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \frac{D(\mathbf{r}')}{r} d\tau' \quad (1.3.5)$$

e

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{r} d\tau'; \quad (1.3.6)$$

gli integrali sono su tutto lo spazio e $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Se \mathbf{F} è dato dalla (1.3.4), allora la sua divergenza è

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -\Delta U = -\frac{1}{4\pi} \int D \Delta \left(\frac{1}{r} \right) d\tau' = \int D(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau' = D(\mathbf{r}) \quad (1.3.7)$$

Dunque la divergenza va bene; vediamo se anche il rotore corrisponde.

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{W}) = -\Delta \mathbf{W} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{W}) \quad (1.3.8)$$

Ora

$$-\Delta \mathbf{W} = -\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{C} \Delta \left(\frac{1}{r} \right) d\tau' = \int \mathbf{C}(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau' = \mathbf{C}(\mathbf{r}) \quad (1.3.9)$$

Utilizzando l'integrazione per parti⁴ e osservando che le derivate di r rispetto alle coordinate *apostrofate* differiscono per un segno da quelle rispetto alle coordinate non *apostrofate*. Si ha dunque:

$$4\pi \nabla \cdot \mathbf{W} = \int \mathbf{C} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\tau' = - \int \mathbf{C} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) d\tau' = \int \frac{1}{r} \nabla' \cdot \mathbf{C} d\tau' - \oint \frac{1}{r} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{a} \quad (1.3.10)$$

Ma la divergenza di \mathbf{C} è zero e l'integrale di superficie (portato all'infinito) si annulla a condizione che \mathbf{C} vada a zero abbastanza rapidamente.

Ovviamente, la dimostrazione assume implicitamente che gli integrali nelle equazioni (1.3.5) e (1.3.6) convergano, altrimenti U e \mathbf{W} non avrebbero ragione d'essere. Nel limite di r' molto grande, dove $r \approx r'$, gli integrali assumono lo forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(r')}{r'} r'^2 dr' = \int_{-\infty}^{\infty} r' X(r') dr' \quad (1.3.11)$$

(X sta per D o \mathbf{C} , a seconda del caso). Ovviamente, $X(r')$ deve andare a zero per r' grande. In particolare la divergenza e il rotore di \mathbf{F} devono andare a zero più rapidamente di $\frac{1}{r^2}$ affinché la dimostrazione sia valida. (Incidentalmente, questo è più del necessario per assicurare che l'integrale di superficie nella (1.3.10) si annulli.)

Ora, assumendo che queste condizioni su $D(\mathbf{r})$ e $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ siano soddisfatte, la soluzione nell'equazione (1.3.4) è *unica*? La risposta è chiaramente *no*, in quanto se sommiamo a \mathbf{F} una qualsiasi funzione vettoriale il cui rotore e la cui divergenza siano nulli, il risultato ha ancora divergenza D e rotore \mathbf{C} . Tuttavia, si dimostra che non esiste una funzione che abbia sia rotore che divergenza nulli ovunque e che vada a zero all'infinito. Quindi, se imponiamo che $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ vada a zero per $r \rightarrow \infty$, allora la soluzione (1.3.4) è unica.⁵

⁴Consideriamo una funzione scalare f e una funzione vettoriale \mathbf{A} , si ha che:

$$\int_V f(\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau = - \int_V \mathbf{A} \cdot (\nabla f) d\tau + \oint_S f \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$$

⁵Di norma noi ci aspettiamo che i campi elettrico e magnetico vadano a zero a grandi distanze dalle cariche e dalle correnti che li generano, quindi questa non è una condizione irragionevole. Occasionalmente si incontrano problemi artificiali in cui le distribuzioni di carica e/o di corrente stesse si estendono all'infinito (fili infiniti o piani infiniti). In questi casi si deve ricorrere ad altri mezzi per stabilire l'esistenza e l'unicità delle soluzioni alle equazioni di Maxwell.

Possiamo finalmente enunciare il teorema di Helmholtz più rigorosamente:

Se la divergenza $D(\mathbf{r})$ e il rotore $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ di una funzione vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ sono specificati, e se entrambi vanno a zero più velocemente di $1/r^2$ per $r \rightarrow \infty$, e se $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ va a zero per $r \rightarrow \infty$, allora \mathbf{F} è definita univocamente da (1.3.4).

Il teorema di Helmholtz possiede un interessante corollario:

Ogni funzione vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ (differenziabile) che va a zero più velocemente di $1/r$ per $r \rightarrow \infty$ può essere espressa come il gradiente di uno scalare più il rotore di un vettore:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla \left(-\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{r} d\tau' \right) + \nabla \times \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{r} d\tau' \right) \quad (1.3.12)$$

Per esempio, in elettrostatica $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ e $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, quindi:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \left(\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} d\tau' \right) = -\nabla V \quad (1.3.13)$$

(dove V è il potenziale scalare), mentre in magnetostatica $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ e $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$, quindi:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left(\frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{r} d\tau' \right) = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.3.14)$$

1.4 Equazioni di Maxwell nella rappresentazione dei potenziali

L'ultima equazione di Maxwell mostra che la divergenza di \mathbf{B} è pari a zero:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.4.1)$$

Ne consegue che è possibile scrivere il campo magnetico \mathbf{B} in termini di un potenziale vettore \mathbf{A} :

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}} \quad (1.4.2)$$

Inserendo questa equazione nell'equazione di Faraday, otteniamo

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (1.4.3)$$

o

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \quad (1.4.4)$$

Dato che il rotore della quantità fra parentesi è zero, possiamo scrivere tale quantità come il gradiente di uno scalare:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad (1.4.5)$$

e infine,

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}} \quad (1.4.6)$$

La rappresentazione dei potenziali ((1.4.2) e (1.4.6)) soddisfa automaticamente le due equazioni di Maxwell omogenee. Se sostituiamo la (1.4.6) nella legge di Gauss per il campo elettrico, troviamo che

$$\Delta\phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -4\pi\rho \quad (1.4.7)$$

che rimpiazza l'equazione di Poisson (a cui si riduce nel caso statico). Inserendo (1.4.2) e (1.4.6) nella legge di Ampere-Maxwell otteniamo

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} - \frac{1}{c} \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \quad (1.4.8)$$

o, utilizzando l'identità vettoriale $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$, riarrangiando i termini

$$\left(\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (1.4.9)$$

Le equazioni (1.4.7) e (1.4.9) contengono tutta l'informazione nelle equazioni di Maxwell.

1.4.1 Trasformazioni di gauge

Le equazioni (1.4.7) e (1.4.9) sembrano complicate, ciò ci potrebbe indurre ad abbandonare la formulazione dei potenziali. Tuttavia, siamo riusciti a ridurre il numero di problemi da risolvere da sei (trovare \mathbf{E} e \mathbf{B}) a quattro (trovare ϕ e \mathbf{A}). Inoltre le equazioni (1.4.2) e (1.4.6) non definiscono univocamente i potenziali; siamo dunque liberi di imporre condizioni extra su ϕ e \mathbf{A} , senza alterare \mathbf{E} e \mathbf{B} .

Supponiamo di avere due coppie di potenziali, (ϕ, \mathbf{A}) e (ϕ', \mathbf{A}') , che corrispondono agli stessi campi elettrico e magnetico. Ci chiediamo per cosa differiscano. Scriviamo quindi

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \vec{\alpha} \quad \phi' = \phi + \beta \quad (1.4.10)$$

Dal momento che i due \mathbf{A} danno lo stesso \mathbf{B} , i loro rotori devono essere uguali, e quindi

$$\nabla \times \vec{\alpha} = \mathbf{0} \quad (1.4.11)$$

Possiamo allora scrivere $\vec{\alpha}$ come il gradiente di uno scalare:

$$\vec{\alpha} = \nabla \Lambda \quad (1.4.12)$$

I due potenziali, inoltre, forniscono lo stesso \mathbf{E} , quindi

$$\nabla \beta + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (1.4.13)$$

oppure

$$\nabla\left(\beta + \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right) = \mathbf{0} \quad (1.4.14)$$

Il termine tra parentesi è dunque indipendente dalla posizione (potrebbe, tuttavia, dipendere dal tempo); chiamiamolo $k(t)$:

$$\beta = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + k(t) \quad (1.4.15)$$

A questo punto, potremmo assorbire $k(t)$ in Λ , definendo una nuova Λ aggiungendo $\int_0^t k(t') dt'$ a quella vecchia. Questa operazione non modifica il gradiente di Λ ; semplicemente somma $k(t)$ a $\partial \Lambda / \partial t$. Segue che

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla \Lambda \\ \phi' &= \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \end{aligned}} \quad (1.4.16)$$

Queste operazioni su ϕ e su \mathbf{A} sono chiamate **trasformazioni di gauge**. Esse possono essere utilizzate per fissare la divergenza di \mathbf{A} in modo da rendere più maneggevoli le equazioni (1.4.7) e (1.4.9).⁶

1.4.2 Gauge di Coulomb e gauge di Lorenz

La gauge di Coulomb. Imponiamo che

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = 0} \quad (1.4.17)$$

Con questa scelta, l'equazione (1.4.7) diventa

$$\Delta \phi = -4\pi \rho \quad (1.4.18)$$

Si tratta dell'equazione di Poisson, che abbiamo già risolto ottenendo:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{r} d\tau' \quad (1.4.19)$$

Possiamo osservare un fatto molto curioso riguardo al potenziale scalare nella gauge di Coulomb: se muoviamo un elettrone nel nostro laboratorio, ovvero variamo la distribuzione di carica a un certo istante di tempo, il potenziale ϕ calcolato sulla luna risentirà istantaneamente di tale cambiamento. Questo fatto è in totale contrasto con la teoria della relatività speciale, la quale non consente a un segnale di viaggiare con velocità superiore a c . Il paradosso si risolve osservando che ϕ non è una quantità fisicamente misurabile; tutti gli

⁶Un altro modo di vedere le cose può essere il seguente. Per il corollario al teorema di Helmholtz, per fissare in modo univoco \mathbf{A} , è necessario fissare, oltre al suo rotore, anche la sua divergenza. Tale indeterminazione sulla divergenza di \mathbf{A} dà luogo alle trasformazioni di gauge.

uomini sulla luna possono misurare \mathbf{E} , che per essere calcolato necessita anche di \mathbf{A} in base all'equazione (1.4.6). Se è vero che ϕ riflette istantaneamente una variazione di ρ , ciò è falso per la combinazione $-\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$; \mathbf{E} cambierà solo dopo che l'informazione della variazione di ρ avrà impiegato un certo lasso di tempo per percorrere la distanza che separa il laboratorio dalla luna! Il vantaggio della gauge di Coulomb risiede nel fatto che il potenziale scalare è particolarmente semplice da calcolare; lo svantaggio è che per \mathbf{A} non vale lo stesso discorso. L'equazione differenziale per \mathbf{A} nella gauge di Coulomb si scrive

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \quad (1.4.20)$$

Il teorema di Helmholtz ci permette di affermare che, sotto opportune condizioni, un campo vettoriale può essere espresso mediante la somma di due campi vettoriali di cui uno a divergenza nulla e uno a rotore nullo. Per quanto riguarda il campo elettrico, dunque, possiamo scrivere:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp} \quad (1.4.21)$$

dove $\nabla \times \mathbf{E}_{\parallel} = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{E}_{\perp} = 0$. Dalle equazioni per i potenziali trovate nella gauge di Coulomb possiamo dedurre la forma di \mathbf{E}_{\parallel} e \mathbf{E}_{\perp} :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\parallel} &= -\nabla\phi \\ \mathbf{E}_{\perp} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.4.22)$$

Da queste equazioni vediamo esplicitamente che il campo elettrico complessivo non si propaga istantaneamente, poiché è il risultato della somma di due componenti, uno dei quali (\mathbf{E}_{\perp}), come vedremo meglio in seguito, tiene conto della velocità *finita* di propagazione della luce.

Riassumendo, nella gauge di Coulomb troviamo le seguenti equazioni per i potenziali:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\phi = -4\pi\rho \\ \Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \end{array} \right. \quad (1.4.23)$$

La gauge di Lorenz. Nella gauge di Lorenz si impone che

$$\left[\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} \right] \quad (1.4.24)$$

Questa scelta è finalizzata ad eliminare il termine di mezzo nell'equazione (1.4.9). Nella gauge di Lorenz le equazioni per i potenziali assumono la forma di equazioni delle onde non omogenee:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \Delta\phi = 4\pi\rho \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \end{array} \right. \quad (1.4.25)$$

1.5 Soluzione dell'equazione delle onde non omogenea

In questa sezione verranno mostrate due strade per risolvere l'equazione delle onde non omogenea; in entrambi i casi verrà fatto uso dell'analisi di Fourier.

1.5.1 Prima strada: Doppia trasformata di Fourier

Consideriamo la generica espressione dell'equazione delle onde non omogenea:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = 4\pi j \quad (1.5.1)$$

Facciamo la trasformata di Fourier doppia (rispetto al tempo e rispetto allo spazio) di ambo i membri della (1.5.1)

$$(-w^2 + c^2 k^2) \varphi_{\mathbf{k},w} = 4\pi c^2 j_{\mathbf{k},w} \quad (1.5.2)$$

dove

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{k},w} &= \int dt \int d^3x \varphi(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-wt)} \\ j_{\mathbf{k},w} &= \int dt \int d^3x j(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-wt)} \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

La (1.5.2) si può risolvere in φ

$$\varphi_{\mathbf{k},w} = \frac{-4\pi c^2 j_{\mathbf{k},w}}{w^2 - c^2 k^2} \quad (1.5.4)$$

oppure

$$\varphi_{\mathbf{k},w} = D_{\mathbf{k},w} j_{\mathbf{k},w} \quad (1.5.5)$$

dove

$$D_{\mathbf{k},w} = -\frac{4\pi c^2}{w^2 - c^2 k^2} \quad (1.5.6)$$

A questo punto, esattamente come abbiamo fatto nella risoluzione delle equazioni di Maxwell nel caso statico, calcoliamo l'antitrasformata di $\varphi_{\mathbf{k},w}$ facendo il prodotto di convoluzione delle antitrasformate dei due fattori presenti a secondo membro della (1.5.5).

Calcoliamo quindi l'antitrasformata di $D_{\mathbf{k},w}$:

$$\begin{aligned} D(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \int \frac{dw}{2\pi} D_{\mathbf{k},w} e^{-iwt} = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \underbrace{\int \frac{dw}{2\pi} \frac{(-4\pi c^2)}{w^2 - c^2 k^2} e^{-iwt}}_{D_{\mathbf{k},t}} \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

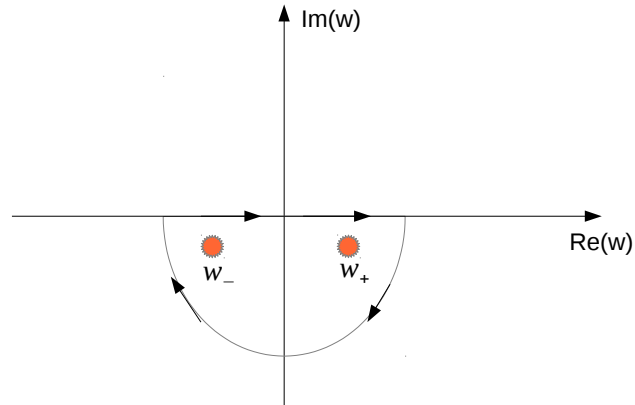
Focalizziamo l'attenzione sull'integrale $D_{\mathbf{k},t}$; per risolverlo riscriviamolo nel modo seguente:

$$\int \frac{dw}{2\pi} \frac{(-4\pi c^2)}{w^2 - c^2 k^2} e^{-iwt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{dw}{2\pi} \frac{(-4\pi c^2)}{(w + i\epsilon)^2 - c^2 k^2} e^{-iwt} \quad (1.5.8)$$

L'integrando ha due poli:

$$\begin{aligned} w_+ &= +ck - i\epsilon \\ w_- &= -ck - i\epsilon \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

Applichiamo, a questo punto, il teorema dei residui, scegliendo il percorso in figura



Con questa scelta del percorso di integrazione è facile vedere che l'integrale è non nullo solo per $t > 0$:

$$D_{\mathbf{k},t} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ -2c^2 (-2\pi i) (Res(w_+) + Res(w_-)) \right\} \quad (1.5.10)$$

Da cui si ottiene

$$D_{\mathbf{k},t} = 4\pi c \frac{\sin(ckt)}{k} \Theta(t) \quad (1.5.11)$$

dove $\Theta(t)$ è la funzione a gradino di Heaviside.

Facciamo un'osservazione importante. La nostra scelta di mettere i poli nel semipiano inferiore fornisce, come vedremo tra poco, la cosiddetta *soluzione ritardata*. Per chiarire cosa significhi, è utile pensare all'equazione delle onde non omogenea per il potenziale ϕ nella gauge di Lorenz. In questo caso vedremo che il valore del potenziale in un punto dello spazio \mathbf{x} a un certo tempo t dipende dalla sorgente valutata a un tempo $t - r/c$.

È interessante notare però che avremmo potuto spostare i poli nel semipiano superiore anziché in quello inferiore. Con tale scelta avremmo ottenuto una *soluzione anticipata*; in questo caso il potenziale valutato a un certo tempo t dipende dalla sorgente valutata a un tempo $t + r/c$ e quindi il potenziale dipende dallo stato della sorgente nel futuro. Questo viola il principio di causalità. L'esistenza di tale soluzione deriva proprio dalle equazioni di Maxwell, o meglio dalle equazioni delle onde che derivano dalle equazioni di Maxwell dato che, tali equazioni godono di una simmetria rispetto all'inversione temporale. Sebbene sembri naturale scartare questa soluzione per via della sua mancanza di senso fisico, esistono modelli come la cosiddetta *Teoria assorbitore-emettitore di Wheeler-Feynman* che tengono conto sia dei cosiddetti potenziali avanzati che dei potenziali ritardati riuscendo a costruire una teoria in accordo con il principio di causalità.

Torniamo al nostro calcolo

$$\begin{aligned}
D(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} D_{\mathbf{k},t} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (4\pi c) \frac{\sin(ckt)}{k} \Theta(t) = \\
&= \frac{c}{2\pi^2} \int d^3k e^{ikx \cos \theta} \frac{\sin(ckt)}{k} \Theta(t) = \frac{c}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi e^{ikx \cos \theta} \frac{\sin(ckt)}{k} \Theta(t) = \\
&= \frac{c}{\pi} \int_0^\infty dk k \sin(ckt) \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{ikx \cos \theta} \Theta(t) = \frac{2c}{\pi x} \int_0^\infty \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \sin(ckt) \Theta(t) dk = \\
&= \frac{2c}{\pi x} \int_0^\infty dk \sin(ckt) \sin(kx) \Theta(t) = \frac{2c}{\pi x} \int_0^\infty \frac{1}{2} (\cos(kx - kct) - \cos(kx + kct)) \Theta(t) dk = \\
&= \frac{2c}{\pi x} \left[\frac{\pi}{2} \delta(x - ct) - \frac{\pi}{2} \delta(x + ct) \right] \Theta(t) = \frac{1}{x} \delta\left(t - \frac{x}{c}\right) \Theta(t)
\end{aligned} \tag{1.5.12}$$

A questo punto, nota $D(\mathbf{x}, t)$ possiamo finalmente calcolare la soluzione ritardata:

$$\begin{aligned}
\varphi^{Ret}(\mathbf{x}, t) &= \int dt' \int d^3x' \frac{\delta(t - t' - r/c)}{r} \Theta(t - t') j(\mathbf{x}', t') \\
&= \int \frac{j(\mathbf{x}', t - r/c)}{r} d^3x' \equiv \int \frac{[j]}{r} dV
\end{aligned} \tag{1.5.13}$$

con $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ e $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$.

Funzione di gauge per trasformazioni dalla gauge di Coulomb a quella di Lorenz; potenziale vettore nella gauge di Coulomb In questo paragrafo intendiamo trovare la funzione di gauge Λ che fa passare dal gauge di Lorenz a quello di Coulomb, in formule

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_C &= \mathbf{A}_L + \nabla\Lambda \\ \phi_C &= \phi_L - \frac{1}{c} \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\end{aligned}\quad (1.5.14)$$

Per trovare la forma di Λ sfrutteremo i risultati ottenuti nella precedente sezione.

Dalla (1.5.14) si ha che

$$\phi_L - \phi_C = \frac{1}{c} \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\quad (1.5.15)$$

Noi però, a questo punto, conosciamo la forma esplicita sia di ϕ_C , sia di ϕ_L . La prima, infatti, è soluzione dell'equazione di Poisson, mentre la seconda è soluzione dell'equazione delle onde non omogenea. Le espressioni di ϕ_C e di ϕ_L sono le seguenti:

$$\begin{aligned}\phi_C(\mathbf{x}, t) &= \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{R} \\ \phi_L(\mathbf{x}, t) &= \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}', t - \frac{R}{c})}{R}\end{aligned}\quad (1.5.16)$$

Dunque, possiamo scrivere:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial\Lambda}{\partial t} = \phi_L - \phi_C = \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}', t - \frac{R}{c}) - \rho(\mathbf{x}', t)}{R}\quad (1.5.17)$$

Integrando rispetto al tempo ambo i membri, si ottiene

$$\Lambda(\mathbf{x}, t) = c \int d^3x' \frac{1}{R} \left[\int_{t_0}^{t - \frac{R}{c}} \rho(\mathbf{x}', t') dt' - \int_{t_0}^t \rho(\mathbf{x}', t') dt' \right] + \Lambda_0\quad (1.5.18)$$

che può essere scritta più compattamente come

$$c \int d^3x' \frac{1}{R} \left[\int_t^{t - \frac{R}{c}} \rho(\mathbf{x}', t') dt' \right] + \Lambda_0\quad (1.5.19)$$

Facendo il cambio di variabile $t' = t - \tau$ otteniamo

$$-c \int d^3x' \frac{1}{R} \left[\int_0^{\frac{R}{c}} \rho(\mathbf{x}', t - \tau) d\tau \right] + \Lambda_0\quad (1.5.20)$$

Il termine Λ_0 può essere, a priori, una funzione di \mathbf{x} , ma non del tempo. Per la verità, Λ_0 è al massimo una costante, come si può vedere dagli argomenti che seguono. La richiesta che $\nabla \cdot \mathbf{A}_C = 0$ porge l'equazione delle onde per Λ

$$\Delta\Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial\phi_C}{\partial t}\quad (1.5.21)$$

Il termine che contiene ρ nella (1.5.20) è la soluzione particolare di questa equazione. Il termine Λ_0 rappresenta una soluzione dell'equazione omogenea. Ma una tale soluzione è rappresentata esclusivamente da onde piane, dipendenti anche dal tempo. Una soluzione Λ_0 che non dipende dal tempo, evidentemente una soluzione dell'equazione di Laplace, può al massimo essere una costante se richiediamo che sia finita all'infinito.

Dal momento che conosciamo il potenziale scalare nella gauge di Coulomb ciò che rimane da fare è aggiungere il gradiente della (1.5.20) al potenziale vettore nella gauge di Lorenz per trovare \mathbf{A}_C . Il gradiente della (1.5.20) è

$$\nabla\Lambda = -c \int d^3x' \nabla \left(\frac{1}{R} \int_0^{\frac{R}{c}} \right) \rho(\mathbf{x}', t - \tau) d\tau \quad (1.5.22)$$

Le parentesi mettono in rilievo i termini che devono essere derivati dall'operatore gradiente. Il risultato di tale operazione è

$$\nabla\Lambda = \int d^3x' \left(-\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} \rho(\mathbf{x}', t - R/c) + \frac{c\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \int_0^{\frac{R}{c}} d\tau \rho(\mathbf{x}', t - \tau) \right) \quad (1.5.23)$$

Sommando a \mathbf{A}_L la (1.5.23) si ottiene

$$\mathbf{A}_C(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int d^3x' \left(\frac{1}{R} \left[\mathbf{J}(\mathbf{x}', t') - c\hat{\mathbf{R}}\rho(\mathbf{x}', t') \right]_{Ret} + \frac{c^2\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \int_0^{\frac{R}{c}} d\tau \rho(\mathbf{x}', t - \tau) \right) \quad (1.5.24)$$

Dove abbiamo utilizzato l'abbreviazione "ret" per indicare che la quantità dentro le parentesi quadre è da calcolare al tempo ritardato $t' = t - \frac{R}{c}$. La prima parte del potenziale vettore è la parte ritardata standard. La parte che comprende l'integrale su tutti i tempi t' da $t' = t - R/c$ a $t' = t$ rappresenta il prezzo che dobbiamo pagare per avere la semplice soluzione istantanea del potenziale scalare.

1.5.2 Seconda strada: funzioni di Green per l'equazione d'onda.

Partiamo dall'espressione generale dell'equazione delle onde non omogenea

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi j \quad (1.5.25)$$

dove $j(\mathbf{x}, t)$ è una distribuzione nota di sorgenti. Esattamente come in elettrostatica, per risolvere la (1.5.25) è utile trovare una funzione di Green. Consideriamo la situazione in cui non vi sono superfici di confine e procediamo con il rimuovere la dipendenza esplicita dal tempo tramite una trasformazione di Fourier rispetto alla frequenza. Supponiamo che $\varphi(\mathbf{x}, t)$ e $j(\mathbf{x}, t)$ ammettano le rappresentazioni in integrali di Fourier

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mathbf{x}, w) e^{-iwt} dw \\ j(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j(\mathbf{x}, w) e^{-iwt} dw \end{aligned} \quad (1.5.26)$$

con le trasformazioni inverse

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}, w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mathbf{x}, t) e^{iwt} dt \\ j(\mathbf{x}, w) &= \int_{-\infty}^{\infty} j(\mathbf{x}, t) e^{iwt} dt\end{aligned}\quad (1.5.27)$$

Quando si sostituiscono le rappresentazioni (1.5.26) nella (1.5.25), si trova che la trasformata di Fourier $\varphi(\mathbf{x}, w)$ soddisfa l'equazione d'onda non omogenea di Helmholtz

$$(\Delta + k^2)\varphi(\mathbf{x}, w) = -4\pi j(\mathbf{x}, w) \quad (1.5.28)$$

per ciascun valore di w . Qui $k = w/c$ è il numero d'onda associato alla frequenza w . L'equazione (1.5.28) è un'equazione ellittica alle derivate parziali simile all'equazione di Poisson, alla quale si riduce per $k = 0$. La funzione di Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ appropriata alla (1.5.28) soddisfa l'equazione non omogenea

$$(\Delta + k^2)G_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.5.29)$$

Se non vi sono superfici di confine, la funzione di Green può dipendere soltanto da $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, e deve essere in effetti a simmetria sferica, ossia deve dipendere soltanto da $R = |\mathbf{R}|$. Dalla forma dell'operatore laplaciano in coordinate sferiche⁷ è chiaro che $G_k(R)$ soddisfa

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2}(RG_k) + k^2 G_k = -4\pi\delta(R) \quad (1.5.30)$$

$RG_k(R)$ soddisfa in tutto lo spazio tranne che in $R = 0$ l'equazione omogenea

$$\frac{d^2}{dR^2}(RG_k) + k^2(RG_k) = 0 \quad (1.5.31)$$

con soluzione

$$RG_k(R) = Ae^{ikR} + Be^{-ikR} \quad (1.5.32)$$

Inoltre, la funzione delta nella (1.5.30) è rilevante solo per $R \rightarrow 0$. In questo limite l'equazione si riduce all'equazione di Poisson, perché $kR \ll 1$. Sappiamo allora dall'elettrostatica che la normalizzazione corretta è

$$\lim_{kR \rightarrow 0} G_k(R) = \frac{1}{R} \quad (1.5.33)$$

La soluzione generale per la funzione di Green è pertanto

$$G_k(R) = AG_k^{(+)}(R) + BG_k^{(-)}(R) \quad (1.5.34)$$

⁷L'equazione di Laplace nelle coordinate sferiche (r, θ, ϕ) si può scrivere nella forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}$$

dove

$$G_k^{(\pm)}(R) = \frac{e^{\pm ikr}}{R} \quad (1.5.35)$$

con $A + B = 1$. Con la convenzione della (1.5.26) per la dipendenza dal tempo, il primo termine nella (1.5.34) rappresenta un'onda sferica divergente che si propaga dall'origine, mentre la seconda rappresenta un'onda sferica convergente. La scelta di A e B nella (1.5.34) dipende dalle *condizioni al contorno nel tempo* che determinano il problema fisico. È intuitivamente ovvio che, se una sorgente è spenta fino ad un tempo $t = 0$ e poi inizia a funzionare, la funzione di Green appropriata è il primo termine nella (1.5.34), corrispondente ad onde irraggiate dalla sorgente a partire dal momento in cui inizia a funzionare. Una tale descrizione è certamente corretta e conveniente, ma non è né unica né necessaria. Assegnando opportunamente l'ampiezza dell'onda negli istanti iniziale e finale, è possibile utilizzare il secondo termine della (1.5.34), anziché il primo, per descrivere l'azione della sorgente.

Per comprendere i comportamenti differenti nel tempo associati a $G_k^{(+)}$ e $G_k^{(-)}$, dobbiamo costruire le corrispondenti funzioni di Green dipendenti dal tempo che soddisfano

$$\left(\Delta_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G^{(\pm)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') \quad (1.5.36)$$

Usando la (1.5.27), vediamo che il termine di sorgente per la (1.5.28) è

$$-4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{i\omega t'} \quad (1.5.37)$$

Le soluzioni sono pertanto $G_k^{(\pm)}(R) e^{i\omega t'}$. Per la (1.5.26), le funzioni di Green dipendenti dal tempo sono

$$G^{(\pm)}(R, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm i\omega\tau}}{R} \cdot e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (1.5.38)$$

Dove $\tau = t - t'$ è il tempo relativo che compare nella (1.5.36). La funzione di Green per lo spazio illimitato è pertanto una funzione solamente della distanza relativa R e del tempo relativo τ fra la sorgente e il punto di osservazione. Per un mezzo non dispersivo per cui $k = \frac{\omega}{c}$, l'integrale nella (1.5.38) è una funzione delta. Le funzioni di Green sono

$$G^{(\pm)}(R, \tau) = \frac{1}{R} \delta\left(\tau \mp \frac{R}{c}\right) \quad (1.5.39)$$

oppure, più esplicitamente

$$\boxed{G^{(\pm)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \frac{\delta\left(t' - \left[t \mp \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right]\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}} \quad (1.5.40)$$

La funzione di Green $G^{(+)}$ è chiamata *funzione di Green ritardata* perché esibisce il comportamento causale associato ad una perturbazione ondulatoria. L'argomento della funzione delta mostra che un effetto osservato ad un punto \mathbf{x} all'istante t è causato dall'azione di una sorgente a distanza R in un istante precedente o ritardato $t' = t - \frac{R}{c}$. La differenza temporale R/c è semplicemente il tempo di propagazione della perturbazione da un punto all'altro. Analogamente $G^{(-)}$ è chiamata *funzione di Green anticipata*. Gli integrali particolari dell'equazione d'onda non omogenea (1.5.25) sono

$$\varphi^{(\pm)}(\mathbf{x}, t) = \int \int G^{(\pm)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') j(\mathbf{x}', t') d^3 x' dt' \quad (1.5.41)$$

Per determinare un problema fisico assegnato può essere necessario aggiungere ad entrambe queste soluzioni una soluzione dell'equazione omogenea. Consideriamo una distribuzione di sorgenti $j(\mathbf{x}', t')$ che sia localizzata nello spazio e nel tempo. Essa è differente da zero solo per un intervallo temporale limitato attorno a $t' = 0$. Si possono identificare due situazioni limite. Nella prima si assume che per $t \rightarrow -\infty$ vi sia un'onda φ_{inc} che soddisfa l'equazione d'onda omogenea. Quest'onda si propaga nel tempo e nello spazio; la sorgente si accende e genera le sue proprie onde. La soluzione completa a tutti i tempi per questa situazione è chiaramente

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi_{inc}(\mathbf{x}, t) + \int \int G^{(+)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') j(\mathbf{x}', t') d^3 x' dt' \quad (1.5.42)$$

La presenza di $G^{(+)}$ assicura che nel lontano passato, prima che la sorgente venga attivata, non vi sono contributi all'integrale. È presente soltanto l'onda assegnata φ_{inc} . La seconda situazione è quella per cui a tempi lontani nel futuro ($t \rightarrow \infty$) venga assegnata l'onda φ_{usc} , una soluzione nota dell'equazione d'onda omogenea. La soluzione completa a tutti i tempi è allora

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi_{usc}(\mathbf{x}, t) + \int \int G^{(-)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') j(\mathbf{x}', t') d^3 x' dt' \quad (1.5.43)$$

La funzione di Green anticipata garantisce ora l'assenza di qualsiasi segnale dalla sorgente una volta che questa sia stata spenta (tali segnali sono per definizione contenuti in φ_{usc}).

La situazione fisica più comune è descritta dalla (1.5.42) con $\varphi_{inc} = 0$. Essa viene a volte scritta sostituendo esplicitamente la funzione di Green (1.5.40):

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{[j(\mathbf{x}', t')]_{rit}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \quad (1.5.44)$$

La parentesi quadra [...] *rit* significa che il tempo t' deve essere calcolato all'istante ritardato $t' = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}$.

1.5.3 Le soluzioni ritardate per i campi

Utilizzando le soluzioni ritardate (1.5.44) per le equazioni d'onda (1.4.25), si ottiene

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}, t) &= \int d^3x' \frac{1}{R} [\rho(\mathbf{x}', t')]_{rit} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{1}{R} [\mathbf{J}(\mathbf{x}', t')]_{rit}\end{aligned}\quad (1.5.45)$$

dove abbiamo definito $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, con $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. Queste soluzioni sono state ottenute per la prima volta da Lorenz. In linea di principio si possono calcolare i campi elettrico e magnetico da queste due equazioni, ma è spesso utile possedere soluzioni integrali ritardate per i campi stessi in termini delle sorgenti.

Consideriamo, dunque, le equazioni (1.1.9) e (1.1.12):

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E} &= -4\pi \nabla \rho - \frac{4\pi}{c^2} \mathbf{J} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \nabla \times \mathbf{J}\end{aligned}$$

Dai risultati della sezione precedente, si possono scrivere immediatamente le soluzioni ritardate (1.5.44) per i campi nelle forme preliminari

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' \frac{1}{R} \left[-\nabla' \rho - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t'} \right]_{rit} \quad (1.5.46)$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{1}{R} \left[\nabla' \times \mathbf{J} \right]_{rit} \quad (1.5.47)$$

Estraendo dagli integrali ritardati le derivate parziali relative allo spazio, queste espressioni preliminari si possono trasformare in una forma che mostra esplicitamente il limite statico e le correzioni ad esso. Vi è una sottigliezza perché $\nabla' [f]_{rit} \neq [\nabla f]_{rit}$. Il significato di ∇' entro le parentesi ritardate è quello di un gradiente spaziale in \mathbf{x}' a t' fissato; il significato all'esterno delle parentesi ritardate è quello di un gradiente spaziale rispetto a \mathbf{x} e t fissati. Poiché $[f(\mathbf{x}', t')]_{rit} = f(\mathbf{x}', t - R/c)$, è necessario tenere conto della dipendenza da \mathbf{x}' dovuta a R quando si fa agire l'operatore gradiente dall'esterno.

Esplicitamente abbiamo

$$[\nabla' \rho]_{rit} = \nabla' [\rho]_{rit} - \left[\frac{\partial \rho}{\partial t'} \right]_{rit} \nabla' (t - R/c) = \nabla' [\rho]_{rit} - \frac{\hat{\mathbf{R}}}{c} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t'} \right]_{rit} \quad (1.5.48)$$

e

$$\begin{aligned}[\nabla' \times \mathbf{J}]_{rit} &= \nabla' \times [\mathbf{J}]_{rit} + \left[\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t'} \right]_{rit} \times \nabla' (t - R/c) = \\ &= \nabla' \times [\mathbf{J}]_{rit} + \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t'} \right]_{rit} \times \hat{\mathbf{R}}\end{aligned}\quad (1.5.49)$$

Se si sostituiscono queste espressioni nelle forme preliminari delle soluzioni e si effettua un'integrazione per parti sul primo termine (gradiente o rotore) in ciascun caso, si giunge a

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' \left\{ \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} [\rho(\mathbf{x}', t')]_{rit} + \frac{\hat{\mathbf{R}}}{cR} \left[\frac{\partial \rho(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} \right]_{rit} - \frac{1}{c^2 R} \left[\frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} \right]_{rit} \right\} \quad (1.5.50)$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int d^3x' \left\{ [\mathbf{J}(\mathbf{x}', t')]_{rit} \times \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} + \left[\frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} \right]_{rit} \times \frac{\hat{\mathbf{R}}}{cR} \right\} \quad (1.5.51)$$

Se le densità di carica e di corrente sono indipendenti dal tempo queste espressioni si riducono alle familiari espressioni statiche. I termini contenenti le derivate temporali ed il tempo ritardato producono la generalizzazione al caso di sorgenti dipendenti dal tempo. Questi due risultati, a volte chiamati sono chiamati *generalizzazioni di Jefimenko delle leggi di Coulomb e di Biot-Savart*.

Notiamo di passaggio che, poiché gli integrandi si devono vedere come funzioni di \mathbf{x} , \mathbf{x}' e t , con $t' = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$, le derivate temporali negli integrandi hanno la seguente proprietà

$$\left[\frac{\partial f(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} \right]_{rit} = \frac{\partial}{\partial t} [f(\mathbf{x}', t')]_{rit} \quad (1.5.52)$$

Questa relazione semplifica la particolarizzazione delle formule di Jefimenko alle *espressioni di Heaviside-Feynman per i campi di una carica puntiforme*. Cpn $\rho(\mathbf{x}', t') = q\delta[\mathbf{x}' - \mathbf{r}_0(t')]$ e $\mathbf{J}(\mathbf{x}', t') = \rho\mathbf{v}(t')$, le (1.5.50) e (1.5.51) particolarizzano a

$$\mathbf{E} = q \left\{ \left[\frac{\hat{\mathbf{R}}}{\kappa R^2} \right]_{rit} + \frac{\partial}{c\partial t} \left[\frac{\hat{\mathbf{R}}}{\kappa R} \right]_{rit} - \frac{\partial}{c^2\partial t} \left[\frac{\mathbf{v}}{\kappa R} \right]_{rit} \right\} \quad (1.5.53)$$

e

$$\mathbf{B} = \frac{q}{c} \left\{ \left[\frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{R}}}{\kappa R^2} \right]_{rit} + \frac{\partial}{c\partial t} \left[\frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{R}}}{\kappa R} \right]_{rit} \right\} \quad (1.5.54)$$

R è qui la distanza fra la posizione della carica ed il punto di osservazione; $\hat{\mathbf{R}}$ è un versore lungo la congiungente la carica con il punto di osservazione; \mathbf{v} è la velocità della carica; $\kappa = 1 - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{R}}/c$ è un fattore di ritardo. È importante osservare che vi è ora una differenza tra $\partial[\dots]_{rit}/\partial t$ e $[\partial\dots/\partial t]_{rit}$ perché $\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{r}_0(t')$, dove \mathbf{r}_0 è la posizione della carica. I campi sono funzioni di \mathbf{x} e t , con $t' = t - |\mathbf{x} - \mathbf{r}_0(t')|/c$. L'espressione di Feynman per il campo elettrico è

$$\mathbf{E} = q \left\{ \left[\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right]_{rit} + \frac{[R]_{rit}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right]_{rit} + \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} [\hat{\mathbf{R}}]_{rit} \right\} \quad (1.5.55)$$

mentre l'espressione di Heaviside per il campo magnetico è

$$\mathbf{B} = \frac{q}{c} \left\{ \left[\frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{R}}}{\kappa^2 R^2} \right]_{rit} + \frac{1}{c[R]_{rit}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{R}}}{\kappa} \right]_{rit} \right\} \quad (1.5.56)$$

L'equivalenza di queste due coppie di espressioni si può dimostrare con un po di algebra.

1.6 Formule di Liénard-Wiechert

Come abbiamo visto, le soluzioni ritardate per i potenziali scalare e vettore delle equazioni delle onde non omogenee sono, nella gauge di Lorenz:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t'_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t'_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

dove $t'_r = t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ è il tempo ritardato.

Per una carica puntiforme in movimento la cui traiettoria è data come una funzione del tempo da $\mathbf{r}_s(t')$, le densità di carica e di corrente si scrivono come segue

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}', t') &= q\delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_s(t')) \\ \mathbf{J}(\mathbf{r}', t') &= q\mathbf{v}_s(t')\delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_s(t')) \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

dove δ^3 è la delta di Dirac tridimensionale e $\mathbf{v}_s(t')$ è la velocità della carica puntiforme.

Sostituendo nelle espressioni dei potenziali si ha

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{q\delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_s(t'_r))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int \frac{q\mathbf{v}_s(t'_r)\delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_s(t'_r))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

Questi integrali sono difficili da calcolare nella loro forma attuale, quindi li riscriveremo rimpiazzando t'_r con t' e integrando sulla distribuzione delta $\delta(t' - t'_r)$:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \int \int \frac{q\delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_s(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t' - t'_r) dt' d^3\mathbf{r}' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int \int \frac{q\mathbf{v}_s(t')\delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_s(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t' - t'_r) dt' d^3\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

Ora, scambiamo l'ordine di integrazione:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \int \int \frac{\delta(t' - t'_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} q\delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_s(t')) d^3\mathbf{r}' dt' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int \int \frac{\delta(t' - t'_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} q\mathbf{v}_s(t')\delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_s(t')) d^3\mathbf{r}' dt' \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

L'azione della delta comporta che, nell'integrando $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_s(t')$. Osserviamo che t'_r è una funzione di \mathbf{r}' , dunque la prima integrazione fissa anche $t_r = t_r(\mathbf{r}_s(t'), t')$.

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}, t) &= \int q \frac{\delta(t' - t'_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t')|} dt' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int q \mathbf{v}_s(t') \frac{\delta(t' - t'_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t')|} dt'\end{aligned}\quad (1.6.6)$$

Il tempo ritardato t'_r è una funzione del punto (\mathbf{r}, t) e della traiettoria della sorgente $\mathbf{r}_s(t')$ e quindi dipende da t' . Per calcolare questo integrale, ricordiamo la seguente identità

$$\delta(f(t')) = \sum_i \frac{\delta(t' - t_i)}{|f'(t_i)|} \quad (1.6.7)$$

dove ogni t_i è uno zero di f . Poiché c'è solo un tempo ritardato t_r per ogni data coordinata spazio temporale (\mathbf{r}, t) e ogni traiettoria della sorgente $\mathbf{r}_s(t')$, abbiamo:

$$\begin{aligned}\delta(t' - t'_r) &= \frac{\delta(t' - t_r)}{\left. \frac{\partial}{\partial t'} (t' - t'_r) \right|_{t'=t_r}} = \frac{\delta(t' - t_r)}{\left. \frac{\partial}{\partial t'} (t' - (t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t')|)) \right|_{t'=t_r}} = \\ &= \frac{\delta(t' - t_r)}{1 + \frac{1}{c} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t')) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t')| \cdot (-\mathbf{v}_s(t')) \big|_{t'=t_r}} = \frac{\delta(t' - t_r)}{1 - \vec{\beta}_s \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|}\end{aligned}\quad (1.6.8)$$

dove $\vec{\beta}_s = \frac{\mathbf{v}_s}{c}$ e \mathbf{r}_s sono valutati al tempo ritardato, e abbiamo usato l'identità $|\mathbf{x}'| = \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}$. Finalmente, risolvendo l'integrale, siamo in grado di scrivere l'espressione dei *potenziali di Liénard-Wiechert*:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}, t) &= \left(\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s| (1 - \vec{\beta}_s \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|)} \right)_{t_r} = \left(\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s| (1 - \mathbf{n} \cdot \vec{\beta}_s)} \right)_{t_r} \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \left(\frac{q \mathbf{v}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s| (1 - \vec{\beta}_s \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|)} \right)_{t_r} = \left(\frac{q \vec{\beta}_s}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s| (1 - \mathbf{n} \cdot \vec{\beta}_s)} \right)_{t_r}\end{aligned}\quad (1.6.9)$$

dove $\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|}$.

1.6.1 Campi elettrico e magnetico

Siamo ora nelle condizioni di calcolare i campi elettrico e magnetico di una carica puntiforme in moto arbitrario, utilizzando i potenziali di Liénard-Wiechert scritti nella forma seguente:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{qc}{(rc - \vec{r} \cdot \mathbf{v}_s)} \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mathbf{v}_s}{c} \phi(\mathbf{r}, t)\end{aligned}\quad (1.6.10)$$

(con $\vec{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_s$ e dove tutte le quantità sono calcolate nel tempo ritardato t_r) e le equazioni per \mathbf{E} e \mathbf{B} :

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.6.11)$$

Le operazioni di derivazione sono però intricate, perché

$$\vec{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t_r) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_s = \dot{\mathbf{r}}_s(t_r) \quad (1.6.12)$$

sono entrambe calcolate al tempo ritardato, e t_r , definito implicitamente dall'equazione

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t_r)| = c(t - t_r), \quad (1.6.13)$$

è esso stesso una funzione di \mathbf{r} e di t . Iniziamo dal gradiente di ϕ :

$$\nabla\phi = \frac{-qc}{(rc - \vec{r} \cdot \mathbf{v}_s)^2} \nabla(rc - \vec{r} \cdot \mathbf{v}_s) \quad (1.6.14)$$

Siccome $r = c(t - t_r)$,

$$\nabla r = -c\nabla t_r \quad (1.6.15)$$

Per il secondo termine fra parentesi, applicando una nota relazione vettoriale⁸ si ha

$$\nabla(\vec{r} \cdot \mathbf{v}_s) = (\vec{r} \cdot \nabla)\mathbf{v}_s + (\mathbf{v}_s \cdot \nabla)\vec{r} + \vec{r} \times (\nabla \times \mathbf{v}_s) + \mathbf{v}_s \times (\nabla \times \vec{r}) \quad (1.6.16)$$

Valutiamo ciascuno di questi termini.

$$\begin{aligned} (\vec{r} \cdot \nabla)\mathbf{v}_s &= \left(r_x \frac{\partial}{\partial x} + r_y \frac{\partial}{\partial y} + r_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{v}_s(t_r) = \\ &= r_x \frac{d\mathbf{v}_s}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} + r_y \frac{d\mathbf{v}_s}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} + r_z \frac{d\mathbf{v}_s}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} = \\ &= \mathbf{a}_s(\vec{r} \cdot \nabla t_r) \end{aligned} \quad (1.6.17)$$

dove $\mathbf{a}_s \equiv \dot{\mathbf{v}}_s$ è l'*accelerazione* della particella al tempo ritardato. Ora

$$(\mathbf{v}_s \cdot \nabla)\vec{r} = (\mathbf{v}_s \cdot \nabla)\mathbf{r} - (\mathbf{v}_s \cdot \nabla)\mathbf{r}_s \quad (1.6.18)$$

e

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_s \cdot \nabla)\mathbf{r} &= \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}) = \\ &= v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}} + v_z\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{v}_s \end{aligned} \quad (1.6.19)$$

⁸Date due funzioni vettoriali \mathbf{A} e \mathbf{B} , si ha

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

mentre

$$(\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{r}_s = \mathbf{v}_s (\mathbf{v}_s \cdot \nabla t_r) \quad (1.6.20)$$

(stesso ragionamento della (1.6.17)). Proseguiamo con il terzo termine:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v}_s &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} = \\ &= \left(\frac{dv_z}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} - \frac{dv_y}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{dv_x}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} - \frac{dv_z}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{dv_y}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} - \frac{dv_x}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} = \\ &= -\mathbf{a}_s \times \nabla t_r \end{aligned} \quad (1.6.21)$$

Infine

$$\nabla \times \vec{\mathbf{r}} = \nabla \times \mathbf{r} - \nabla \times \mathbf{r}_s \quad (1.6.22)$$

ma $\nabla \times \mathbf{r} = 0$, mentre, analogamente all'equazione (1.6.21),

$$\nabla \times \mathbf{r}_s = -\mathbf{v}_s \times \nabla t_r \quad (1.6.23)$$

Inserendo tutti questi termini nell'equazione (1.6.16), e utilizzando la regola $BAC - CAB$ per riscrivere il triplo prodotto vettoriale, si ottiene

$$\begin{aligned} \nabla(\vec{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_s) &= \mathbf{a}_s(\vec{\mathbf{r}} \cdot \nabla t_r) + \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_s(\mathbf{v}_s \cdot \nabla t_r) - \vec{\mathbf{r}} \times (\mathbf{a}_s \times \nabla t_r) + \mathbf{v}_s \times (\mathbf{v}_s \times \nabla t_r) = \\ &= \mathbf{v}_s + (\vec{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{a}_s - v_s^2) \nabla t_r \end{aligned} \quad (1.6.24)$$

Mettendo insieme le equazioni (1.6.15) e (1.6.24), abbiamo

$$\nabla \phi = \frac{qc}{(rc - \vec{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_s)^2} [\mathbf{v}_s + (c^2 - v_s^2 + \vec{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{a}_s) \nabla t_r] \quad (1.6.25)$$

Per completare il calcolo, dobbiamo conoscere ∇t_r . Ciò può essere fatto rielaborando la (1.6.15)

$$\begin{aligned} -c \nabla t_r &= \nabla r = \nabla \sqrt{\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}} = \frac{1}{2\sqrt{\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}}} \nabla(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}) = \\ &= \frac{1}{r} [(\vec{\mathbf{r}} \cdot \nabla) \vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \vec{\mathbf{r}})] \end{aligned} \quad (1.6.26)$$

Ma

$$(\vec{\mathbf{r}} \cdot \nabla) \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}} - \mathbf{v}_s (\vec{\mathbf{r}} \cdot \nabla t_r) \quad (1.6.27)$$

(stessa idea dell'equazione (1.6.18)), mentre, come abbiamo già visto

$$\nabla \times \vec{\mathbf{r}} = (\mathbf{v}_s \times \nabla t_r) \quad (1.6.28)$$

Quindi

$$-c \nabla t_r = \frac{1}{r} [\vec{\mathbf{r}} - \mathbf{v}_s (\vec{\mathbf{r}} \cdot \nabla t_r) + \vec{\mathbf{r}} \times (\mathbf{v}_s \times \nabla t_r)] = \frac{1}{r} [\vec{\mathbf{r}} - (\vec{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_s) \nabla t_r] \quad (1.6.29)$$

e quindi

$$\nabla t_r = \frac{-\vec{r}}{rc - \vec{r} \cdot \mathbf{v}_s} \quad (1.6.30)$$

Includendo questi risultati nella (1.6.25), possiamo concludere

$$\nabla \phi = \frac{qc}{(rc - \vec{r} \cdot \mathbf{v}_s)^3} [(rc - \vec{r} \cdot \mathbf{v}_s) \mathbf{v}_s - (c^2 - v_s^2 + \vec{r} \cdot \mathbf{a}_s) \vec{r}] \quad (1.6.31)$$

Un calcolo molto simile porge

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{qc}{(rc - \vec{r} \cdot \mathbf{v}_s)^3} \left[(rc - \vec{r} \cdot \mathbf{v}_s) (-\mathbf{v}_s + r\mathbf{a}_s/c) + \frac{r}{c} (c^2 - v_s^2 + \vec{r} \cdot \mathbf{a}_s) \mathbf{v}_s \right] \quad (1.6.32)$$

Combinando questi risultati, e introducendo il vettore

$$\mathbf{u} \equiv c\hat{r} - \mathbf{v}_s \quad (1.6.33)$$

troviamo

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\mathbf{r}}{(\vec{r} \cdot \mathbf{u})^3} [(c^2 - v_s^2) \mathbf{u} + \vec{r} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a}_s)]} \quad (1.6.34)$$

Inoltre,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{c} \nabla \times (\phi \mathbf{v}_s) = \frac{1}{c} [\phi (\nabla \times \mathbf{v}_s) - \mathbf{v}_s \times (\nabla \phi)] \quad (1.6.35)$$

Abbiamo già calcolato sia $\nabla \times \mathbf{v}_s$ che $\nabla \phi$; mettendole insieme,

$$\nabla \times \mathbf{A} = -\frac{q}{(\mathbf{u} \cdot \vec{r})^3} \vec{r} \times [(c^2 - v_s^2) \mathbf{v}_s + (\vec{r} \cdot \mathbf{a}_s) \mathbf{v}_s + (\vec{r} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{a}_s] \quad (1.6.36)$$

La quantità tra parentesi quadre è molto simile a quella nella (1.6.34), la quale può essere riscritta, utilizzando la regola $BAC - CAB$, come $[(c^2 - v_s^2) \mathbf{u} + (\vec{r} \cdot \mathbf{a}_s) \mathbf{u} + (\vec{r} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{a}_s]$; la principale differenza è che abbiamo \mathbf{v}_s invece di \mathbf{u} nei primi due termini. In verità, siccome il tutto è moltiplicato vettorialmente per \vec{r} , possiamo rimpiazzare \mathbf{v}_s con \mathbf{u} senza problemi. Segue che

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{r} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)} \quad (1.6.37)$$

Evidentemente *il campo magnetico di una carica puntiforme è sempre perpendicolare al campo elettrico, e al vettore dal punto ritardato.*

Il primo termine in \mathbf{E} (il termine che comprende $(c^2 - v_s^2) \mathbf{u}$) va a zero come l'inverso del quadrato della distanza dalla particella. Se la velocità e l'accelerazione della particella sono entrambe zero, solo questo termine sopravvive e si riduce al noto risultato di elettrostatica

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (1.6.38)$$

Per questa ragione, il primo termine in \mathbf{E} è spesso chiamato **campo coulombiano generalizzato**. (Poiché non dipende dall'accelerazione è a volte

chiamato anche **campo di velocità**.) Il secondo termine (quello che comprende $\vec{r} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a}_s)$) va a zero come l'inverso della prima potenza della distanza r e dunque è dominante a grandi distanze. Come vedremo, esso è il termine responsabile della radiazione elettromagnetica; per questo motivo è chiamato **campo di radiazione**, oppure, dato che è proporzionale ad a , **campo di accelerazione**. La stessa terminologia si applica al campo magnetico.

Campi elettrico e magnetico di una carica in moto a velocità costante. Partiamo sostituendo $\mathbf{a}_s = 0$ nell'equazione (1.6.34),

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\Gamma(c^2 - v_s^2)\mathbf{u}}{(\vec{r} \cdot \mathbf{u})^3} \quad (1.6.39)$$

In questo caso, sapendo che $\mathbf{r}_s = \mathbf{v}_s t$,

$$\mathbf{r}\mathbf{u} = c\vec{r} - \mathbf{r}\mathbf{v}_s = c(\mathbf{r} - \mathbf{v}_s t_r) - c(t - t_r)\mathbf{v}_s = c(\mathbf{r} - \mathbf{v}_s t) \quad (1.6.40)$$

Ricaviamo ora l'espressione esplicita del tempo ritardato che ci servirà nei calcoli successivi.

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{v}_s t_r|^2 &= c^2(t - t_r)^2 \\ \rightarrow r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_s t_r + v_s^2 t_r^2 &= c^2(t^2 - 2t t_r + t_r^2) \\ \rightarrow t_r &= \frac{(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_s) \pm \sqrt{(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_s)^2 + (c^2 - v_s^2)(r^2 - c^2 t^2)}}{c^2 - v_s^2} \end{aligned} \quad (1.6.41)$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \mathbf{u} &= r c - \vec{r} \cdot \mathbf{v}_s = r(c - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_s) = \\ &= c^2(t - t_r) \left[1 - \frac{\mathbf{v}_s \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{v}_s t_r)}{c \cdot c(t - t_r)} \right] = c^2(t - t_r) - \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{r} + v_s^2 t_r = \\ &= \left[(c^2 t - \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{r}) - (c^2 - v_s^2) t_r \right] = \\ &= \sqrt{(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_s)^2 + (c^2 - v_s^2)(r^2 - c^2 t^2)} \equiv \sqrt{I} \end{aligned} \quad (1.6.42)$$

Osserviamo che I può essere riscritto in un'altra forma

$$\begin{aligned} I &= c^4 t^2 - 2c^2 t(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_s) + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_s)^2 + c^2 r^2 - c^4 t^2 - v_s^2 r^2 + v_s^2 c^2 t^2 = \\ &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_s)^2 + (c^2 - v_s^2) r^2 + c^2 (v_s t)^2 - 2c^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_s t) \text{ inseriamo } \mathbf{v}_s t = \mathbf{r} - \mathbf{R} \\ &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_s)^2 + (c^2 - v_s^2) r^2 + c^2 (r^2 + R^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}) - 2c^2 (r^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{R}) = \\ &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_s)^2 - r^2 v_s^2 + c^2 R^2 \end{aligned} \quad (1.6.43)$$

Dove $R \equiv \mathbf{r} - \mathbf{v}_s t$ è il vettore che va dalla posizione *attuale* della particella a \mathbf{r} . Ma

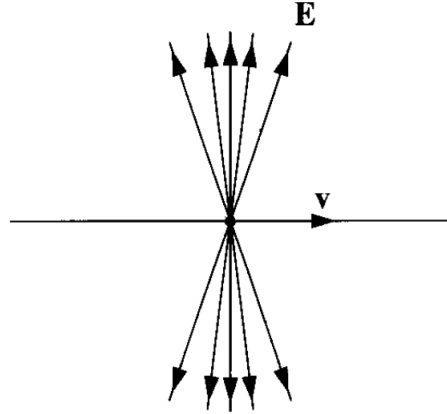
$$\begin{aligned}
(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_s)^2 - r^2 v_s^2 &= ((\mathbf{R} + \mathbf{v}_s t) \cdot \mathbf{v}_s)^2 - (\mathbf{R} + \mathbf{v}_s t)^2 v_s^2 = \\
&= (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_s)^2 + v_s^4 t^2 + 2(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_s) v_s^2 t - R^2 v_s^2 - 2(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_s) t v_s^2 - v_s^2 t^2 v_s^2 = \\
&= (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_s)^2 - R^2 v_s^2 = \\
&= R^2 v_s^2 \cos^2 \theta - R^2 v_s^2 = -R^2 v_s^2 (1 - \cos^2 \theta) = \\
&= -R^2 v_s^2 \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{1.6.44}$$

Dove θ è l'angolo tra \mathbf{R} e \mathbf{v}_s . Quindi

$$I = -R^2 v_s^2 \sin^2 \theta + c^2 R^2 = c^2 R^2 \left(1 - \frac{v_s^2}{c^2} \sin^2 \theta \right) \tag{1.6.45}$$

Possiamo finalmente concludere che

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q(1 - v_s^2/c^2)}{(1 - \frac{v_s^2}{c^2} \sin^2 \theta)^{3/2}} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \tag{1.6.46}$$



Osserviamo che \mathbf{E} è diretto lungo la linea che va dall'*attuale* posizione della particella al punto di osservazione. Questa è una straordinaria coincidenza, siccome il segnale proviene dalla posizione *ritardata*. Per via del $\sin^2 \theta$ al denominatore, il campo di una carica in moto a velocità paragonabili a quella della luce, è schiacciato nella direzione perpendicolare al moto. Nei due versi in direzione parallela al moto \mathbf{E} è attenuato di un fattore $(1 - v_s^2/c^2)$ rispetto al campo di una carica ferma; nella direzione perpendicolare è invece aumentato di un fattore $1/\sqrt{1 - v_s^2/c^2}$.

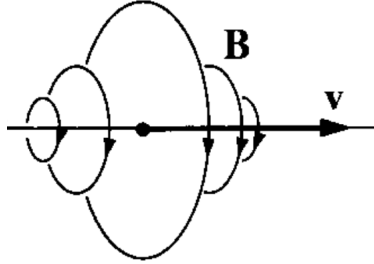
Per quanto riguarda \mathbf{B} , abbiamo

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}_s t_r}{r} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{v}_s t) + (t - t_r) \mathbf{v}_s}{r} = \frac{\mathbf{R}}{r} + \frac{\mathbf{v}_s}{c} \tag{1.6.47}$$

e quindi

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E} = \frac{1}{c}(\mathbf{v}_s \times \mathbf{E}) \quad (1.6.48)$$

Il campo \mathbf{B} gira attorno alla carica, come mostrato in figura.



I campi di una carica in moto a velocità costante ((1.6.46) e (1.6.48)) furono ottenuti per la prima volta da Oliver Heaviside nel 1888. Quando $v_s^2 \ll c^2$ i campi si riducono a

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{q}{R^2} \hat{\mathbf{R}}; \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{q}{c} \frac{(\mathbf{v}_s \times \hat{\mathbf{R}})}{R^2} \quad (1.6.49)$$

La prima è essenzialmente la legge di Coulomb, e la seconda è la legge di Biot-Savart per una carica puntiforme.

1.7 Radiazione elettromagnetica

1.7.1 Potenza irradiata da una carica puntiforme

Nella precedente sessione abbiamo derivato i campi elettrico e magnetico di una carica puntiforme q in moto arbitrario ((1.6.34) e (1.6.37)):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\mathbf{r}}{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u})^3} [(c^2 - v_s^2)\mathbf{u} + \hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a}_s)] \quad (1.7.1)$$

dove $\mathbf{u} = c\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{v}_s$, e

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1.7.2)$$

Il primo termine nella (1.7.1) è il campo di velocità, mentre il secondo (con il triplo prodotto vettore) è il campo di accelerazione.

Il vettore di Poynting è

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E})] = \frac{c}{4\pi}[E^2\hat{\mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}] \quad (1.7.3)$$

Tuttavia, non tutto questo flusso di energia costituisce *radiazione*; una parte consiste infatti in energia che la particella trasporta con sé mentre è in movimento. L'energia irradiata è un qualcosa che si separa dalla carica e che si propaga verso l'infinito. Per calcolare la potenza totale irradiata da una particella al tempo t_r , consideriamo una sfera di raggio r , centrata nella posizione della carica (al tempo t_r), attendiamo per un intervallo

$$t - t_r = \frac{r}{c} \quad (1.7.4)$$

in modo che la radiazione possa raggiungere la superficie sferica, e in quel momento integriamo il vettore di Poynting su tutta la superficie. Ora, l'area della sfera è proporzionale a r^2 , dunque tutti i termini in \mathbf{S} che vanno come $1/r^2$ porteranno a soluzioni finite, ma i termini che vanno come $1/r^3$ o $1/r^4$ non daranno contributi nel limite di $r \rightarrow \infty$. Per questa ragione soltanto i campi di accelerazione rappresentano vera radiazione (da cui il nome **campi di radiazione**):

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{q\mathbf{r}}{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u})^3} [\hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a}_s)] \quad (1.7.5)$$

\mathbf{E}_{rad} è perpendicolare a $\hat{\mathbf{r}}$, così il secondo termine nella (1.7.3) si annulla

$$\mathbf{S}_{\text{rad}} = \frac{c}{4\pi} E_{\text{rad}}^2 \hat{\mathbf{r}} \quad (1.7.6)$$

Se la carica è istantaneamente a riposo (al tempo t_r), allora $\mathbf{u} = c\hat{\mathbf{r}}$ e

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{c^2 r} [\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{a}_s)] = \frac{q}{c^2 r} [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{a}_s)\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{a}_s] \quad (1.7.7)$$

In questo caso

$$\mathbf{S}_{\text{rad}} = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{q}{c^2 r} \right)^2 \left[a_s^2 - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{a}_s)^2 \right] \hat{\mathbf{r}} = \frac{q^2 a_s^2}{4\pi c^3} \left(\frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) \hat{\mathbf{r}} \quad (1.7.8)$$

dove θ è l'angolo tra $\hat{\mathbf{r}}$ e \mathbf{a}_s . La potenza totale irradiata è⁹

$$P = \oint \mathbf{S}_{\text{rad}} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q^2 a_s^2}{4\pi c^3} \int \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (1.7.9)$$

o

$$P = \frac{2q^2 a_s^2}{3c^3} \quad (1.7.10)$$

Questa è la cosiddetta **formula di Larmor**. La potenza irradiata per unità di angolo solido è

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} a_s^2 \sin^2 \theta \quad (1.7.11)$$

Sebbene abbiamo derivato questa formula assumendo che $v_s = 0$, le equazioni (1.7.10) e (1.7.11) sono valide, con buona approssimazione, fintanto che $v_s \ll c$.

Scattering Thomson. Un elettrone libero che viene investito da un'onda elettromagnetica accelera sotto l'effetto del campo elettrico e, di conseguenza, emette radiazione verso direzioni anche diverse dalla direzione dell'onda incidente. Se la frequenza ν dell'onda è tale che $h\nu \ll m_e c^2$, il processo di diffusione può essere esaminato da un punto di vista classico. Immaginiamo per semplicità che l'onda sia piana e monocromatica, di frequenza $\omega = 2\pi\nu$, e che la carica, costretta ad oscillare con la medesima frequenza, subisca uno spostamento molto più piccolo della lunghezza d'onda $\lambda = \frac{c}{\omega}$. La potenza emessa è ricavabile dalla formula di Larmor assumendo che l'accelerazione sia provocata dalla forza elettrica

$$\mathbf{F} = e\mathcal{E}_0 \sin(\omega t) \quad (1.7.12)$$

Poiché l'accelerazione quadratica media è $e^2 \mathcal{E}_0^2 / 2m_e^2$, applicando le equazioni (1.7.10) e (1.7.11), si trovano rispettivamente la potenza totale media e la potenza media per unità di angolo solido

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d^2 E}{dt d\Omega} \right\rangle &= \frac{e^4 \mathcal{E}_0^2}{8\pi m_e^2 c^3} \sin^2 \theta \\ \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle &= \frac{e^4 \mathcal{E}_0^2}{3m_e^2 c^3} \end{aligned} \quad (1.7.13)$$

dove θ è l'angolo formato dalla direzione di polarizzazione \mathcal{E}_0 (e quindi dell'accelerazione $\dot{\mathbf{v}}_s$) e la direzione di osservazione $\hat{\mathbf{r}}$. Nei processi di diffusione viene generalmente introdotto il concetto di *sezione d'urto*, definita come

⁹

$$\int_0^\pi \sin^3(x) dx = \frac{1}{12} [\cos(3x) - 9\cos(x)] \Big|_0^\pi = \frac{4}{3}$$

rapporto tra la potenza diffusa e il flusso incidente. In particolare, la sezione d'urto differenziale per la radiazione che viene diffusa entro l'angolo solido $d\Omega$ è:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{\text{Potenza diffusa / angolo solido}}{\text{Potenza incidente / unità di area}} \right] \quad (1.7.14)$$

Poiché nel nostro caso il flusso dell'onda piana polarizzata è $\frac{c}{8\pi}\mathcal{E}_0^2$ (eguale, cioè, alla media nel tempo del corrispondente vettore di Poynting), si ha:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{m_e^2 c^4} \sin^2 \theta = r_0^2 \sin^2 \theta} \quad (1.7.15)$$

Si noti come la dimensione naturale associata alla sezione d'urto sia proprio il raggio classico dell'elettrone $r_0 = e^2/m_e c^2$.

1.7.2 Smorzamento radiativo: considerazioni introduttive

I problemi di elettrodinamica sono normalmente divisi in due classi: una nella quale le sorgenti di carica e di corrente sono assegnate e si calcolano i campi elettromagnetici risultanti, e l'altra nella quale i campi elettromagnetici esterni sono assegnati e si calcolano i moti di particelle cariche o le correnti. I due tipi di problema si presentano occasionalmente in forma combinata, ma la trattazione è per passi: prima si determina il moto della particella carica nel campo esterno, trascurando l'emissione di radiazione; poi si calcola la radiazione prendendo la traiettoria come distribuzione assegnata di sorgente. È evidente che questo modo di affrontare i problemi di elettrodinamica può avere una validità solo approssimata. Il moto di particelle cariche in campi di forze esterne implica necessariamente l'emissione di radiazione quando le cariche sono accelerate. La radiazione emessa sottrae energia, impulso e momento angolare e dunque *deve* influenzare il moto successivo delle particelle cariche. Il moto delle sorgenti di radiazione è quindi determinato in parte anche dalla natura dell'emissione. Una trattazione completa deve includere la reazione della radiazione sul moto delle sorgenti.

Per quale motivo la nostra discussione dell'elettrodinamica è potuta proseguire così a lungo prima di affrontare questo aspetto? Per quale motivo tutte le soluzioni calcolate in questo modo apparentemente sbagliato risultano aderenti ai risultati sperimentali? Una parziale risposta alla prima domanda giace nella seconda. Effettivamente ci sono moltissimi problemi di elettrodinamica che possono essere affrontati con un errore trascurabile facendo riferimento alle due categorie definite all'inizio del paragrafo. La parte restante della della risposta alla prima domanda sta nel fatto che un trattamento classico completamente soddisfacente degli effetti reattivi della radiazione non esiste. Le difficoltà che si incontrano in questo problema vanno a toccare uno degli aspetti più fondamentali della fisica, la natura delle particelle elementari. Benché si possano dare delle soluzioni parziali,

utili in un dominio limitato, il problema fondamentale resta irrisolto. Cerchiamo ora di stabilire un criterio che renda conto delle condizioni tali per cui così tanti problemi di elettrodinamica possano essere affrontati trascurando gli effetti reattivi della radiazione. Se un campo di forze esterne induce un'accelerazione di grandezza tipica a su una particella di carica e e per un tempo T , l'energia irradiata è dell'ordine di

$$E_{\text{irr}} \sim \frac{2e^2 a^2 T}{3c^2} \quad (1.7.16)$$

grazie alla formula di Larmor (1.7.10). Se questa energia persa in radiazione è trascurabile rispetto ad un'energia E_0 caratteristica del problema, ci possiamo aspettare che gli effetti della reazione di radiazione siano trascurabili. Se però $E_0 \leq E_{\text{irr}}$, gli effetti di radiazione diventeranno apprezzabili. Il criterio per il regime in cui gli effetti radiativi non sono importanti si può quindi esprimere come

$$E_{\text{irr}} \ll E_0 \quad (1.7.17)$$

La specificazione dell'energia rilevante E_0 richiede una certa attenzione. Distinguiamo due situazioni apparentemente differenti, una nella quale la particella è inizialmente in quiete ed è soggetta alla forza applicata solo per l'intervallo finito di tempo T , ed una nella quale la particella è continuamente accelerata, per esempio in un moto quasi-periodico con qualche frequenza caratteristica ω_0 . Per la particella inizialmente in quiete, un'energia tipica è chiaramente l'energia cinetica dopo il periodo di accelerazione. Pertanto

$$E_0 \sim m(aT)^2 \quad (1.7.18)$$

Il criterio (1.7.17) per la trascurabilità degli effetti radiativi diventa allora

$$\frac{2}{3} \frac{e^2 a^2 T}{c^3} \ll m a^2 T^2 \quad (1.7.19)$$

oppure

$$T \gg \frac{2}{3} \frac{e^2}{m c^3} \quad (1.7.20)$$

È utile definire un *tempo caratteristico* per questa relazione:

$$\tau = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m c^3} \quad (1.7.21)$$

La conclusione è allora che per tempi T lunghi rispetto a τ , gli effetti radiativi sono trascurabili. Questi effetti modificano il moto in modo apprezzabile solo quando la forza è applicata in modo improvviso e per un tempo $\tau \sim T$. È utile notare che il tempo caratteristico più lungo per particelle cariche si ha per gli elettroni e che il suo valore è $\tau = 6,26 \times 10^{-24} \text{s}$. Questo tempo è dell'ordine di quello impiegato dalla luce per percorrere 10^{-15}m . Ci si

aspetta quindi che gli effetti radiativi abbiano un ruolo cruciale solo per fenomeni su tali scale di distanze o di tempi.

Se il moto della particella carica è quasi-periodico con un'ampiezza tipica d ed una frequenza caratteristica w_0 , si può identificare E_0 con l'energia meccanica del moto, dell'ordine di

$$E_0 \sim mw_0^2 d^2 \quad (1.7.22)$$

Le accelerazioni sono tipicamente $a \sim w_0^2 d$, e l'intervallo di tempo è $T \sim (1/w_0)$. Di conseguenza il criterio (1.7.17) è

$$\frac{2e^2 w_0^4 d^2}{3c^3 w_0} \ll mw_0^2 d^2 \quad (1.7.23)$$

oppure

$$w_0 \tau \ll 1 \quad (1.7.24)$$

Poiché w_0^{-1} è un tempo associato al moto meccanico, vediamo nuovamente che, se l'intervallo di tempo meccanico rilevante è lungo a confronto con il tempo caratteristico τ , gli effetti di reazione radiativa sul moto saranno trascurabili.

Gli esempi riportati mostrano che gli effetti reattivi della radiazione sul moto di una particella carica sono presumibilmente importanti solo se le forze esterne sono tali da modificare apprezzabilmente il moto su tempi dell'ordine di τ o su distanze dell'ordine di $c\tau$. Questo è un criterio generale nell'ambito dell'elettrodinamica classica. Per moti meno violenti, gli effetti radiativi sono tanto piccoli da risultare trascurabili sul moto a breve termine.

1.7.3 La forza di reazione radiativa dalla conservazione dell'energia

Sorge a questo punto la questione di come indicare gli effetti reattivi della radiazione nelle equazioni del moto di una particella carica. Iniziamo con un semplice argomento di plausibilità basato sulla conservazione dell'energia per una particella carica non relativistica.

Se si trascura l'emissione di radiazione, una particella carica di massa m e carica e soggetta alla forza esterna \mathbf{F}_{est} , si muove secondo le equazioni del moto di Newton:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{est}} \quad (1.7.25)$$

Poiché la particella è accelerata, essa emette della radiazione con una potenza data dalla formula di Larmor

$$P(t) = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (\dot{\mathbf{v}})^2 \quad (1.7.26)$$

Per tenere conto di questa perdita di energia per radiazione ed i suoi effetti sul moto della particella, modifichiamo l'equazione di Newton aggiungendo

una forza di reazione radiativa \mathbf{F}_{rad} :

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{est}} + \mathbf{F}_{\text{rad}} \quad (1.7.27)$$

Benché non conosciamo a questo punto \mathbf{F}_{rad} , possiamo vedere alcuni requisiti che essa deve soddisfare: \mathbf{F}_{rad} deve

- (1) annullarsi se $\dot{\mathbf{v}} = 0$, poiché in tal caso non vi è radiazione;
- (2) essere proporzionale ad e^2 , perché (a) la potenza totale irradiata è proporzionale ad e^2 e (b) il segno della carica non può entrare nei risultati radiativi;
- (3) dipendere effettivamente dal tempo caratteristico τ (1.7.21), perché è l'unico parametro rilevante a disposizione.

Determiniamo la forma di \mathbf{F}_{rad} richiedendo che il lavoro eseguito da questa forza sulla particella nell'intervallo di tempo $t_1 < t < t_2$ sia uguale all'opposto dell'energia irradiata nello stesso tempo. L'energia sarà allora conservata, almeno sull'intervallo (t_1, t_2) . Con il risultato di Larmor, questa richiesta è

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} dt \quad (1.7.28)$$

Il secondo integrale si può integrare per parti, ottenendo

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt - \frac{2e^2}{3c^3} (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}) \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (1.7.29)$$

Se il moto è periodico o tale che $(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}) = 0$ in $t = t_1$ e $t = t_2$, possiamo scrivere

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{F}_{\text{rad}} - \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} \right) \cdot \mathbf{v} dt = 0 \quad (1.7.30)$$

È quindi possibile identificare la forza di reazione radiativa:

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} = m\tau \ddot{\mathbf{v}} \quad (1.7.31)$$

L'equazione del moto modificata è allora

$$\boxed{m(\dot{\mathbf{v}} - \tau \ddot{\mathbf{v}}) = \mathbf{F}_{\text{est}}} \quad (1.7.32)$$

L'equazione (1.7.32) è talvolta chiamata *equazione del moto di Abraham-Lorentz*. La si può considerare come un'equazione che include in modo approssimato e mediato nel tempo gli effetti reattivi dell'emissione di radiazione. L'equazione soffre di un serio problema dovuto al fatto che è al secondo ordine nel tempo, anziché del primo, e dunque non è conforme ai ben noti requisiti per un'equazione dinamica del moto. Questa difficoltà è

resa manifesta dall'esistenza di soluzioni di fuga. Se la forza esterna è zero, è chiaro che la (1.7.32) ammette le due possibili soluzioni

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \begin{cases} 0 \\ \mathbf{a}e^{t/\tau} \end{cases} \quad (1.7.33)$$

dove \mathbf{a} è l'accelerazione in $t = 0$. Soltanto la prima soluzione è ragionevole, ed il metodo di derivazione della (1.7.32) mostra che la seconda soluzione è inaccettabile, perché $(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}) \neq 0$ in t_1 e t_2 . È chiaro che l'equazione è utile soltanto quando il termine di reazione radiativa è una piccola correzione. Tale correzione si può allora trattare come una perturbazione che causa delle modifiche molto piccole, o molto lente, dello stato di moto della particella. Si può ottenere un'alternativa alla (1.7.32) usando l'equazione del moto di ordine zero, $m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{est}}$, per stimare il termine di reazione radiativa. L'equazione risultante

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{est}} + \tau \frac{\mathbf{F}_{\text{est}}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{est}} + \tau \left[\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{est}}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{F}_{\text{est}} \right] \quad (1.7.34)$$

è una buona equazione del moto senza soluzioni di fuga o comportamenti acausali. Essa è un'alternativa ragionevole all'equazione di Abraham-Lorentz per il dominio classico di effetti radiativi piccoli.

La derivazione della forza di reazione radiativa che abbiamo riportato, benché plausibile, non è certamente né rigorosa né basata su principi fondamentali. Il problema è quello di descrivere in modo soddisfacente la reazione sulla particella carica del suo stesso campo di radiazione. Ogni discussione sistematica deve pertanto considerare la struttura della distribuzione di carica della particella e del suo auto-campo. Abraham (1903) e Lorentz (1904) affrontarono per la prima volta questo problema cercando di produrre un modello puramente elettromagnetico di particella carica.

Larghezza di riga e spostamento dei livelli di un oscillatore radiante. Gli effetti della reazione radiativa sono della massima importanza nel comportamento dettagliato dei sistemi atomici. Benché una discussione completa richieda il formalismo piuttosto elaborato dell'elettrodinamica quantistica, le caratteristiche qualitative appaiono già da una trattazione classica. Consideriamo come esempio tipico una particella carica in una dimensione legata da una forza di richiamo lineare con costante elastica $k = mw_0^2$. In assenza di smorzamento radiativo, la particella oscilla con ampiezza costante alla frequenza caratteristica w_0 . Quando si includono gli effetti radiativi l'ampiezza dell'oscillazione diminuisce gradualmente perché l'energia associata al moto viene convertita in energia radiante. Questo è l'analogo classico dell'emissione spontanea nella quale un atomo esegue una transizione da uno stato eccitato ad uno stato di energia inferiore con l'emissione di un fotone.

Se indichiamo lo spostamento della particella carica dalla posizione di equilibrio con $x(t)$ e $\mathbf{F}_{\text{est}} = -mw_0^2x$, la (1.7.34) diventa

$$m\ddot{x} = -mw_0^2x - mw_0^2\tau\dot{x} \quad (1.7.35)$$

In virtù del decadimento dell'ampiezza, assumiamo una soluzione della forma

$$x(t) = x_0e^{-\alpha t} \quad (1.7.36)$$

dove α deve avere una parte reale positiva ed una parte immaginaria vicina ad w_0 se gli effetti dello smorzamento sono piccoli. L'ansatz si riduce ad un'equazione quadratica per α ,

$$\alpha^2 - \tau w_0^2 \alpha + w_0^2 = 0 \quad (1.7.37)$$

le cui radici sono

$$\alpha = \frac{1}{2}w_0^2\tau \pm iw_0\sqrt{1 - (w_0\tau/2)^2} \approx \frac{1}{2}w_0^2\tau \pm i(w_0 - \frac{1}{8}w_0^3\tau^2) \quad (1.7.38)$$

Nell'ultima espressione abbiamo sviluppato la parte reale fino all'ordine τ^2 . La parte reale di α è $\Gamma/2$, dove Γ è nota come *costante di decadimento* e la variazione Δw da w_0 nella parte immaginaria è nota come *spostamento di livello*:

$$\Gamma = w_0^2\tau \quad \Delta w = -\frac{1}{8}w_0^3\tau^2 \quad (1.7.39)$$

Si potrebbe obiettare che può essere incauto conservare termini di ordine τ^2 nella soluzione di un'equazione che è un'approssimazione valida solo per τ piccoli. In effetti, se si utilizza l'equazione di Abraham-Lorentz (1.7.32) anziché la (1.7.34), l'equazione cubica risultante per α fornisce, all'ordine τ^2 , la stessa Γ , ma

$$[\Delta w]_{A-L} \approx -\frac{5}{8}w_0^3\tau^2 \quad (1.7.40)$$

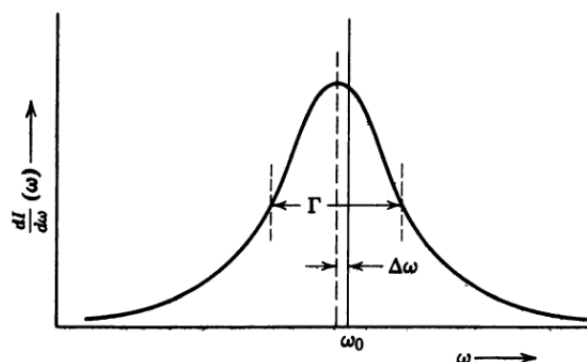
Il messaggio importante qui è che lo spostamento di livello classico Δw è di un ordine superiore in $w_0\tau$ rispetto alla costante di decadimento Γ . L'energia dell'oscillatore decresce esponenzialmente come $e^{-\Gamma t}$ a causa dello smorzamento radiativo. Questo significa che la radiazione emessa appare come un treno di onde con una lunghezza effettiva dell'ordine di c/Γ . Un tale impulso finito di radiazione non può essere esattamente monocromatico ma contiene uno spettro di frequenze che copre un intervallo dell'ordine di Γ . La forma esatta dello spettro di frequenza si ottiene dal quadrato della trasformata di Fourier del campo elettrico o dell'accelerazione. Trascurando un transiente iniziale (di durata τ), l'ampiezza dello spettro è quindi proporzionale a

$$E(w) \propto \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{iwt} dt = \frac{1}{\alpha - iw} \quad (1.7.41)$$

L'energia irradiata nell'intervallo unitario di frequenze è pertanto

$$\frac{dI(\omega)}{d\omega} = I_0 \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0 - \Delta\omega)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (1.7.42)$$

dove I_0 è l'energia totale irradiata. Questa distribuzione spettrale è chiamata *forma di riga risonante*. La larghezza della distribuzione a metà del massimo dell'intensità è chiamata *semi-altezza* o *larghezza di riga* ed è uguale a Γ .



In figura è riportata una simile riga spettrale. A causa degli effetti radiativi la riga viene *allargata* e *spostata* in frequenza.

La larghezza di riga classica per gli oscillatori elettronici è, quando espressa in termini di lunghezza d'onda, una costante universale:

$$\Delta\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega_0} \Gamma = 2\pi c\tau = 1,2 \times 10^{-14} \text{ angstrom} \quad (1.7.43)$$

In meccanica quantistica le larghezze naturali delle righe spettrali sono variabili. Per stabilire un legame con la trattazione classica, la larghezza di riga quanto-meccanica si scrive a volte nella forma

$$\Gamma_q = f_{ij} \Gamma \quad (1.7.44)$$

dove f_{ij} è l'intensità di oscillatore della transizione ($i \rightarrow j$). Le intensità di oscillatore variano considerevolmente, essendo a volte vicine all'unità per transizioni intense ad un singolo elettrone ad a volte molto più piccole. Per le transizioni ottiche si ha $\lambda \sim 4 - 8 \times 10^3$ angstrom. Pertanto $\Delta\lambda/\lambda \leq 3,5 - 1,5 \times 10^{-8}$ e $\omega_0\tau = O(10^{-8})$.

Lo spostamento classico $\Delta\omega$ del livello è più piccolo della larghezza di riga Γ per un fattore $\omega_0\tau \ll 1$ ma in meccanica quantistica (e sperimentalmente) non è così. La ragione è che nella teoria quantistica vi è un meccanismo differente per lo spostamento del livello, benché esso abbia ancora a che fare con il campo elettromagnetico. Anche in assenza di fotoni, il campo di radiazione quantizzato possiede valori di aspettazione non nulli per i *quadrati* delle intensità dei campi elettromagnetici (fluttuazioni del vuoto). Questi

campi fluttuanti (assieme con le fluttuazioni del campo elettro-positronico) interagiscono con la particella producendo uno spostamento nella sua energia. Lo spostamento quanto-meccanico del livello di un oscillatore è dell'ordine di

$$\frac{\Delta w_q}{w_0} \sim w_0 \tau \log\left(\frac{mc^2}{\hbar w_0}\right) \quad (1.7.45)$$

da confrontare con lo spostamento classico dovuto all'emissione di radiazione

$$\frac{|\Delta w_c|}{w_0} \sim (w_0 \tau)^2 \quad (1.7.46)$$

Si vede quindi che lo spostamento quanto-meccanico del livello è confrontabile con la larghezza di riga, o persino più grande. Il piccolo spostamento radiativo dei livelli energetici degli atomi è stato osservato per la prima volta da Lamb nel 1947 ed è chiamato in suo onore *Lamb shift*.

1.8 Campi elettromagnetici nel vuoto

Abbiamo visto che, solo una parte dei campi elettromagnetici è in grado di propagarsi nello spazio infinitamente lontano dalle sorgenti che la hanno generata; questa parte dei campi è proprio la cosiddetta *radiazione elettromagnetica*. Si potrebbe pensare, allora, di descrivere la radiazione elettromagnetica attraverso le equazioni di Maxwell in cui, però, non si tenga conto di sorgenti, trattando così la radiazione come un'entità indipendente. Consideriamo allora le equazioni di Maxwell nel vuoto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (1.8.1)$$

Da queste è immediato ricavare le equazioni delle onde omogenee per \mathbf{E} e per \mathbf{B}

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} &= 0 \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1.8.2)$$

La prossima sezione è dedicata proprio alla soluzione dell'equazione delle onde omogenea.

1.8.1 Soluzione dell'equazione delle onde omogenea

Le equazioni delle onde omogenee possono essere risolte agevolmente mediante le trasformazioni di Fourier:

$$\begin{aligned} f(t, \mathbf{x}) &= \int \frac{d^3k dw}{(2\pi)^4} f(w, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - iwt} \\ f(w, \mathbf{k}) &= \int d^3x dt f(t, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + iwt} \end{aligned} \quad (1.8.3)$$

Se sottoponiamo le equazioni delle onde omogenee (1.8.2) a queste trasformazioni, otteniamo

$$\left(k^2 - \frac{w^2}{c^2} \right) \psi(w, \mathbf{k}) = 0 \quad (1.8.4)$$

(dove ψ può rappresentare una qualsiasi componente di \mathbf{E} o di \mathbf{B}). Evidentemente, la soluzione ψ deve annullarsi per tutti i valori di (w, \mathbf{k}) , eccetto per quelli per i quali il fattore $k^2 - (w/c)^2 = 0$. Possiamo dunque scrivere

$$\psi(w, \mathbf{k}) = 2\pi c_+(\mathbf{k}) \delta(w - kc) + 2\pi c_-(\mathbf{k}) \delta(w + kc) \quad (1.8.5)$$

dove $c_{\pm} \in C$ sono funzioni complesse arbitrarie del vettore d'onda \mathbf{k} . Sostituendo questa rappresentazione nella trasformata inversa, otteniamo la soluzione generale dell'equazione delle onde omogenea scalare:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(c_+(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - ckt)} + c_-(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + ckt)} \right) \quad (1.8.6)$$

In altre parole *la soluzione generale dell'equazione delle onde omogenea si ottiene mediante una sovrapposizione lineare di onde piane elementari* $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} \mp ckt)}$ dove ogni onda è pesata da un coefficiente arbitrario $c_{\pm}(\mathbf{k})$.

Osserviamo che le soluzioni trovate per l'equazione delle onde non sono tutte soluzioni delle equazioni di Maxwell. A questo proposito riconsideriamo le espressioni (1.6.34) e (1.6.37); se analizziamo solo i campi di accelerazione possiamo notare che \mathbf{E} e \mathbf{B} sono entrambi perpendicolari a $\hat{\mathbf{r}}$ e sono anche perpendicolari tra loro. Questa è una conseguenza della natura *trasversa* della radiazione elettromagnetica. Osserviamo, inoltre, che il modulo di \mathbf{E} è uguale al modulo di \mathbf{B} .¹⁰ Una delle immediate conseguenze della natura trasversa della radiazione elettromagnetica, risiede nel fatto che sono disponibili solo *due* stati di polarizzazione per ogni direzione di radiazione. Questo significa che dobbiamo scegliere soltanto due vettori unitari ortogonali entrambi perpendicolari a $\hat{\mathbf{r}}$, e dobbiamo esprimere i nostri campi di radiazione esclusivamente in termini di componenti lungo questi due vettori unitari.

Di conseguenza, le soluzioni trovate all'equazione delle onde omogenea, dovranno rispettare i requisiti sopra esposti che caratterizzano i campi di radiazione.

¹⁰Possiamo vedere la natura trasversa dei campi di radiazione e il fatto che i campi elettrici e magnetici hanno lo stesso modulo anche facendo la trasformata di Fourier delle equazioni di Maxwell nel vuoto

1.9 Campo elettromagnetico come collezione di oscillatori armonici

Furono Rayleigh e Jeans i primi che compresero che il campo elettromagnetico può essere visto come una collezione di oscillatori armonici. Questa analogia ci consentirà di applicare i ben noti risultati di meccanica quantistica elementare per descrivere il ben più complicato problema del campo elettromagnetico quantistico. La dinamica di un singolo oscillatore armonico unidimensionale è governata dall'Hamiltoniana:

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{mw^2q^2}{2} \quad (1.9.1)$$

Le equazioni del moto per la posizione e la quantità di moto di un oscillatore armonico possiedono la stessa forma sia nella teoria classica sia nella teoria quantistica:

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{p(t)}{m} \quad \frac{dp(t)}{dt} = -mw^2q(t) \quad (1.9.2)$$

Le soluzioni di queste equazioni descrivono oscillazioni armoniche di frequenza w

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 \cos(wt) + (p_0/mw) \sin(wt) \\ p(t) &= -mwq_0 \sin(wt) + p_0 \cos(wt) \end{aligned} \quad (1.9.3)$$

Una descrizione completa di un oscillatore armonico multidimensionale può essere ottenuta in termini di modi normali. La trasformazione ai modi normali porta a una decomposizione dell'Hamiltoniana del sistema in una somma sui modi normali stessi

$$H = \sum_k \left(\frac{p_k^2}{2m} + \frac{mw_k^2q_k^2}{2} \right) \quad (1.9.4)$$

Quindi, ogni modo può essere visto come un sistema separato, un oscillatore armonico unidimensionale con frequenza caratteristica w_k , non interagente con gli altri oscillatori.

Le equazioni di Maxwell nel vuoto assumono la forma (eq. (1.8.1)):

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (1.9.5)$$

Le equazioni di Maxwell conducono all'equazione d'onda per il campo elettrico \mathbf{E}

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.9.6)$$

e alla stessa equazione per il campo \mathbf{B} . La soluzione di queste equazioni ottenuta per separazione delle variabili assume la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = a(t)\mathbf{u}(\mathbf{r}) \quad (1.9.7)$$

dove $a(t)$ soddisfa l'equazione armonica

$$\frac{d^2}{dt^2}a(t) + w^2a(t) = 0 \quad (1.9.8)$$

e $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ soddisfa l'equazione di Helmholtz

$$(\Delta + (w/c)^2)\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.9.9)$$

Senza entrare nel dettaglio matematico, noi assumeremo che esista un set completo di funzioni vettoriali $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$, chiamate funzioni modali (*mode functions*), che soddisfano l'equazione di Helmholtz

$$(\Delta + (w_k/c)^2)\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.9.10)$$

la condizione di divergenza nulla $\nabla \cdot \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = 0$, le condizioni di ortonormalità

$$\int d^3r \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_l(\mathbf{r}) = \delta_{kl} \quad (1.9.11)$$

e anche le opportune condizioni al contorno. In moltissimi casi di interesse fisico questo set di funzioni esiste.

Considerato il set di funzioni $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$, possiamo espandere il campo $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, per ogni tempo t , in una serie

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \sum_k p_k(t)\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) \quad (1.9.12)$$

Il segno meno è puramente convenzionale. La stessa procedura può essere ripetuta per il campo magnetico \mathbf{B} con un differente set completo $\mathbf{v}_k(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_k q_k(t)\mathbf{v}_k(\mathbf{r}) \quad (1.9.13)$$

Le equazioni di Maxwell sono soddisfatte se le funzioni $p_k(t)$ e $q_k(t)$ obbediscono alle equazioni del moto per gli oscillatori armonici

$$\frac{dq_k(t)}{dt} = p_k(t), \quad \frac{dp_k(t)}{dt} = -w_k^2 q_k(t) \quad (1.9.14)$$

e le funzioni $\mathbf{v}_k(\mathbf{r})$ sono legate alle $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$ dalla formule

$$\mathbf{v}_k(\mathbf{r}) = c\nabla \times \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) \quad (1.9.15)$$

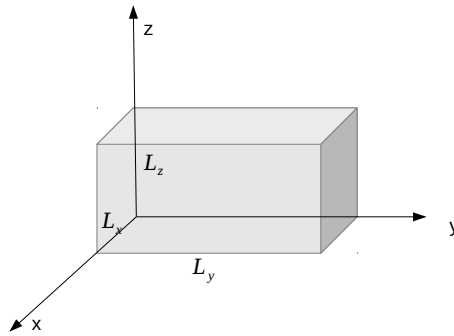
Calcoliamo adesso l'energia totale dei campi

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) dV = \frac{1}{8\pi} (\langle \mathbf{E}, \mathbf{E} \rangle + \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle) = \\
&= \frac{1}{8\pi} \left[\sum_{\alpha\beta} p_\alpha(t) p_\beta(t) \langle \mathbf{u}_\alpha, \mathbf{u}_\beta \rangle + \sum_{\alpha\beta} q_\alpha(t) q_\beta(t) \langle \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta \rangle \right] = \\
&= \frac{1}{8\pi} \left[\sum_{\alpha} p_\alpha^2(t) + \sum_{\alpha\beta} q_\alpha(t) q_\beta(t) c^2 \langle \nabla \times \mathbf{u}_\alpha, \nabla \times \mathbf{u}_\beta \rangle \right] = \\
&= \frac{1}{8\pi} \left[\sum_{\alpha} p_\alpha^2(t) + \sum_{\alpha\beta} q_\alpha(t) q_\beta(t) c^2 \langle \mathbf{u}_\alpha, \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_\beta) \rangle \right] = \\
&= \frac{1}{8\pi} \left[\sum_{\alpha} p_\alpha^2(t) + \sum_{\alpha\beta} q_\alpha(t) q_\beta(t) c^2 \langle \mathbf{u}_\alpha, -\Delta \mathbf{u}_\beta \rangle \right] = \tag{1.9.16} \\
&= \frac{1}{8\pi} \left[\sum_{\alpha} p_\alpha^2(t) + \sum_{\alpha\beta} q_\alpha(t) q_\beta(t) c^2 \langle \mathbf{u}_\alpha, \frac{w_\alpha^2}{c^2} \mathbf{u}_\beta \rangle \right] = \\
&= \frac{1}{8\pi} \sum_{\alpha} p_\alpha^2 + w_\alpha^2 q_\alpha^2 = \\
&= \sum_{\alpha} \frac{(p_\alpha/\sqrt{4\pi})^2}{2} + w_\alpha^2 \frac{(q_\alpha/\sqrt{4\pi})^2}{2} = \\
&= \sum_{\alpha} \frac{P_\alpha^2}{2} + w_\alpha^2 \frac{Q_\alpha^2}{2}
\end{aligned}$$

Questo risultato mostra che il campo elettromagnetico in un dato volume può essere visto come una somma di oscillatori armonici indipendenti.

1.10 Cavit  rettangolare: separazione delle variabili

Il pi  semplice esempio di set completo di funzioni dei modi si ricava dall'analisi di una cavit  rettangolare a pareti conduttrici.



In questo caso le funzioni $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$ possono essere espresse in termini di funzioni trigonometriche.

Il fatto che la cavit  abbia pareti conduttrici si traduce in determinate condizioni al contorno che discendono dalle caratteristiche dei campi elettromagnetici. Tali condizioni sono

$$\boxed{\begin{array}{l} E_{\parallel} = 0; \qquad B_{\perp} = 0, \\ \text{rispetto a tutte le superfici interne alla cavit } \end{array}} \quad (1.10.1)$$

Per ogni componente del campo elettrico ($i = x, y, z$) cerchiamo soluzioni all'equazione di Helmholtz

$$\left(\Delta + \frac{w^2}{c^2}\right)u_i = 0 \quad (1.10.2)$$

del tipo

$$u_i = X_i(x)Y_i(y)Z_i(z) \quad (1.10.3)$$

Sostituendo la (1.10.3) in (1.10.2), si trova

$$X_i''Y_iZ_i + X_iY_i''Z_i + X_iY_iZ_i'' + \frac{w^2}{c^2}X_iY_iZ_i = 0 \quad (1.10.4)$$

da cui

$$\frac{X_i''}{X} + \frac{Y_i''}{Y} + \frac{Z_i''}{Z} = -\frac{w^2}{c^2} \quad (1.10.5)$$

Questa equazione può essere soddisfatta solo se

$$\begin{aligned} \frac{X_i''}{X} &= -k_x^2 \\ \frac{Y_i''}{Y} &= -k_y^2 \\ \frac{Z_i''}{Z} &= -k_z^2 \end{aligned} \quad (1.10.6)$$

con $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = w^2/c^2$. Le soluzioni generali sono dunque della forma

$$\begin{aligned} u_i(x, y, z) &= [A_i \cos(k_x x) + B_i \sin(k_x x)] \times [C_i \cos(k_y y) + D_i \sin(k_y y)] \times \\ &\times [E_i \cos(k_z z) + F_i \sin(k_z z)] \end{aligned} \quad (1.10.7)$$

Osserviamo che, in generale, dovremmo indicizzare con un indice i le costanti k_x, k_y, k_z , ma si trova facilmente che k_{x_i} è lo stesso per tutti gli $i = x, y, z$. Stesso discorso vale ovviamente per k_y e k_z .

Applichiamo adesso alla soluzione trovata le nostre condizioni al contorno (1.10.1). Otteniamo

$$u_x = 0 \text{ in } \begin{cases} y = 0, y = L_y \\ z = 0, z = L_z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E_x = 0 \\ C_x = 0 \end{cases} e \begin{cases} k_y = \frac{n\pi}{L_y}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ k_z = \frac{l\pi}{L_z}, \quad l = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (1.10.8)$$

$$u_y = 0 \text{ in } \begin{cases} x = 0, x = L_x \\ z = 0, z = L_z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_y = 0 \\ E_y = 0 \end{cases} e \begin{cases} k_x = \frac{m\pi}{L_x}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \\ k_z = \frac{l\pi}{L_z}, \quad l = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (1.10.9)$$

$$u_z = 0 \text{ in } \begin{cases} x = 0, x = L_x \\ y = 0, y = L_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_z = 0 \\ C_z = 0 \end{cases} e \begin{cases} k_x = \frac{m\pi}{L_x}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \\ k_y = \frac{n\pi}{L_y}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (1.10.10)$$

Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= [A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x)] \sin(k_y y) \sin(k_z z) \\ u_y(x, y, z) &= \sin k_x x [C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y)] \sin(k_z z) \\ u_z(x, y, z) &= \sin(k_x x) \sin(k_y y) [E \cos(k_z z) + F \sin(k_z z)] \end{aligned} \quad (1.10.11)$$

Le soluzioni trovate, devono anche soddisfare le equazioni di Maxwell. La legge di Gauss impone che la divergenza del campo elettrico nel vuoto sia nulla:

$$\begin{aligned} &k_x [-A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x)] \sin(k_y y) \sin(k_z z) + \\ &+ k_y \sin k_x x [-C \sin(k_y y) + D \cos(k_y y)] \sin(k_z z) + \\ &+ k_z \sin(k_x x) \sin(k_y y) [-E \sin(k_z z) + F \cos(k_z z)] = 0 \end{aligned} \quad (1.10.12)$$

Questa equazione deve essere soddisfatta per tutti i punti all'interno della cavità rettangolare; in particolare deve essere valida in $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Vediamo subito che nei luoghi dei punti associati a $(x = 0, yz)$ e $(x, y = 0, z)$ e $(x, y, z = 0)$ l'equazione sopra porge $B = D = F = 0$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= A \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \\ u_y(x, y, z) &= C \sin k_x x \cos(k_y y) \sin(k_z z) \\ u_z(x, y, z) &= E \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \end{aligned} \quad (1.10.13)$$

Sembrerebbe che i gradi di libertà del campo ricavato siano tre. Se però riappliciamo il teorema della divergenza, otteniamo

$$(-k_x A - k_y C - k_z E) \sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z = 0 \quad (1.10.14)$$

da cui

$$k_x A + k_y C + k_z E = 0 \quad (1.10.15)$$

Definendo i vettori $\mathbf{a} = (A, C, E)$ e $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$, deve valere la seguente relazione

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (1.10.16)$$

Osserviamo allora che i gradi di libertà non sono tre ma sono due; in altri termini il campo è rappresentato da due stati di polarizzazione.

Quanti modi normali ci sono tra w e $w + dw$?

Rispondiamo a questa domanda restringendoci al caso di cavità cubica, ovvero imponiamo che

$$L_x = L_y = L_z = L \quad (1.10.17)$$

Siccome si ha che

$$|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2w\pi}{2\pi c} = \frac{w}{c} = \frac{\pi}{L} \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = \frac{\pi}{L} m \quad (1.10.18)$$

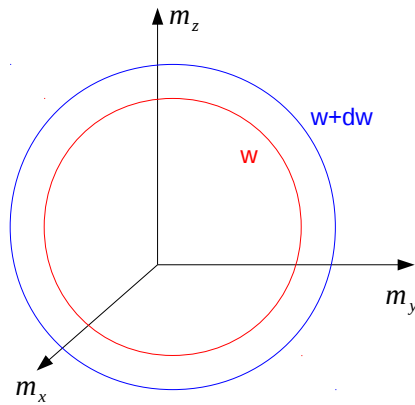
da cui

$$\frac{wL}{\pi c} = m \quad (1.10.19)$$

Per trovare il numero dN_w di modi normali che sono compresi tra le frequenze w e $w + dw$, calcoliamo il volume dello spazio compreso tra le due sfere in figura,

$$dN_w = \frac{2 \times 4\pi m^2 dm}{8} \quad (1.10.20)$$

il 2 al numeratore tiene conto dei due stati di polarizzazione indipendenti, mentre l'8 al denominatore è dovuto al fatto che gli m_i sono tutti interi maggiori di zero e quindi il volume da calcolare è situato nel primo ottante.



Quindi si ha

$$dN_w = \frac{2 \times 4\pi m^2 dm}{8} = \pi m^2 dm = \pi \frac{w^2 L^2 L}{\pi^2 c^2 \pi c} dw = \frac{L^3}{\pi^2 c^3} w^2 dw \quad (1.10.21)$$

e infine possiamo ricavare il numero di modi compresi tra w e $w + dw$ per unità di volume

$$\frac{dN_w}{V} = \frac{w^2 dw}{\pi^2 c^3} \quad (1.10.22)$$

La densità di modi normali sarà data dalla seguente espressione

$$\boxed{\rho_w = \frac{w^2}{\pi^2 c^3}} \quad (1.10.23)$$

oppure, imponendo che $\rho_w dw = \rho_\nu d\nu$,

$$\boxed{\rho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}} \quad (1.10.24)$$

Questa quantità ci sarà utile nel seguito.

1.11 Analisi termodinamica della radiazione in una cavità

Richiami sul corpo nero. La legge di Kirchhoff.

È noto che un corpo incandescente emette luce, e dunque radiazione elettromagnetica. Ricordiamo che, come è ben noto, lo spettro di un corpo incandescente (intensità in funzione della frequenza, o della lunghezza d'onda) ha la forma grossomodo di una campana asimmetrica, con un decadimento maggiormente piccato dalla parte delle alte frequenze. Ricordiamo anche che, come il più semplice modello di gas è il gas perfetto, così l'esempio ideale di corpo incandescente è il cosiddetto corpo nero, ovvero un corpo che assorbe tutta la radiazione che incide su di esso. Il motivo è legato ad una fondamentale legge stabilita da Kirchhoff, il quale aveva introdotto i classici procedimenti della termodinamica nello studio della radiazione elettromagnetica, in relazione al potere emissivo “ e ” e potere assorbente “ a ” di un corpo. Se $e(\nu, T)d\nu$ è la quantità di energia raggiante, appartenente all'intervallo di frequenza tra ν e $\nu + d\nu$, che viene emessa, per unità di tempo, dall'unità di superficie del corpo, alla temperatura T , allora e viene chiamato potere emissivo del corpo. Invece si dice potere assorbente a di un corpo il rapporto tra la quantità di energia assorbita e quella incidente sul corpo. In particolare, in base alle leggi della termodinamica, nel 1859 Kirchhoff aveva dedotto che il rapporto tra potere emissivo e potere assorbente relativi a una frequenza ν alla temperatura T è uguale per tutti i corpi, ed è dunque della forma

$$\frac{e}{a} = \mathcal{E}(\nu, T) = \mathcal{E}_\nu(T) \quad (1.11.1)$$

dove \mathcal{E} è una *funzione universale della temperatura e della frequenza*.

Per definizione si dice *corpo nero* un corpo che assorbe completamente la radiazione incidente, ovvero che ha potere assorbente pari a uno, per cui cioè $a = 1$. Pertanto, la funzione universale $\mathcal{E}_\nu(T)$ rappresenta il potere emissivo di un corpo nero.

A proposito del corpo nero così si esprime Fermi nel suo libro *Fisica Atomica*: “*Osserviamo che la realizzazione più perfetta di una superficie nera è data da un piccolo foro che immetta in una grande cavità; infatti la luce che penetra nella cavità attraverso al foro deve subire numerose riflessioni sulle pareti interne della cavità prima di potere uscire dal foro di accesso e viene assorbita quasi completamente in queste riflessioni multiple. È questa la ragione per cui l'imboccatura di una grotta oppure la porta di una chiesa o di una grande sala appaiono nere a chi la vede dall'esterno.*”

Naturalmente, se all'interno della cavità è presente della radiazione, questa potrà essere emessa attraverso il foro, come un gas che fuoriesca da un recipiente bucato. La radiazione elettromagnetica entro una cavità può dunque essere pensata come una qualche specie di sostanza avente certe sue proprietà termodinamiche specifiche che la caratterizzano, allo stesso modo in cui certe altre proprietà specifiche caratterizzano macroscopicamente, dal punto di vista termodinamico, ad esempio la “sostanza” gas perfetto.

Funzioni di stato della termodinamica del corpo nero: l'energia interna e la pressione.

La prima funzione di stato che si considera è l'energia interna, che qui denotiamo con \mathcal{U} , per la quale si ammette che valga

$$\mathcal{U}(T, V) = Vu(T) \quad (1.11.2)$$

dove la funzione $u(T)$ può essere chiamata *densità di energia* (rispetto al volume), ovvero energia per unità di volume. Si noti bene che questa è un'ipotesi tutt'altro che ovvia per una sostanza termodinamica. Infatti, ad esempio il gas perfetto è addirittura caratterizzato dal fatto che l'energia interna, pur essendo proporzionale alla massa del gas, è indipendente dal volume in cui il gas è contenuto.¹¹ La seconda relazione è quella che prende il posto dell'equazione di stato del gas perfetto, $pV = NRT$ (dove N è il numero di moli). Nel caso del corpo nero tale relazione viene rimpiazzata da

$$p = \frac{u(T)}{3} \quad (1.11.3)$$

È questa infatti la relazione che era stata sostanzialmente stabilita teoricamente da Maxwell sulla base delle sue equazioni per il campo elettromagnetico.

Relazione tra potere emissivo e densità di energia A fissata temperatura, si considera non soltanto la densità di energia u ma anche la sua "componente" spettrale di frequenza ν , che denoteremo con u_ν . Ricordiamo che intuitivamente $u_\nu d\nu$ è l'energia (per unità di volume) contenuta nell'intervallo $(\nu, \nu + d\nu)$ di frequenza. Si ha dunque

$$u(T) = \int_0^\infty u_\nu(T) d\nu \quad (1.11.4)$$

Tenendo conto che i campi si propagano alla velocità della luce c Kirchhoff stabilì che tra il potere emissivo $\mathcal{E}_\nu(T)$ (la quantità effettivamente osservata) del corpo nero e la "componente" u_ν vale la semplice relazione di proporzionalità

$$\mathcal{E}_\nu(T) = \frac{c}{4} u_\nu(T) \quad (1.11.5)$$

La componente u_ν è la quantità concretamente studiata da Boltzmann, Wien, Planck, in relazione allo spettro del corpo nero.

¹¹Questa forma dell'energia interna è dimostrata da Planck, e sarebbe dovuta unicamente al fatto che la luce si propaga con velocità finita. Comunque, la si potrebbe ritenere ragionevole come proprietà valida per ogni campo (e quindi in particolare per il campo elettromagnetico), perché per i campi l'energia totale risulta essere l'integrale di una densità di energia locale (funzione del posto). Se si ha omogeneità, ovvero la densità non dipende dal posto (come dovrebbe avvenire all'equilibrio termico), si ha allora immediatamente la (1.11.2).

La legge di Stefan-Boltzmann.

Il primo grande risultato teorico dopo il teorema di Kirchhoff del 1859, fu ottenuto nel 1884 da Boltzmann, che dimostrò la formula che era stata precedentemente stabilita sperimentalmente da Stefan. Secondo tale “*legge di Stefan-Boltzmann*” la potenza (energia per unità di tempo) emessa da un “corpo nero” alla temperatura T cresce come la quarta potenza di T . Equivalentemente, in virtù della relazione tra potere emissivo e densità di energia u , si ha

$$\boxed{u(T) = \sigma T^4} \quad (1.11.6)$$

La dimostrazione è una immediata conseguenza dei primi due principi della termodinamica, applicata al “fluido elettromagnetico”, il quale è caratterizzato dalle due funzioni di stato sopra illustrate, l’energia interna \mathcal{U} (1.11.2), e la pressione p (1.11.3). Il procedimento originale di Boltzmann, non è banale da seguirsi; seguiamo qui la incredibilmente semplice esposizione di Planck. Basta ricordare la relazione $dU = \delta Q - pdV$ che esprime il primo principio, e quella che connette calore ed entropia alla luce del secondo principio, $dS = \delta Q/T$, dalle quali segue immediatamente

$$dS = \frac{dU + pdV}{T} \quad (1.11.7)$$

Sostituendo le relazioni $U = Vu$ e $p = u/3$, per la funzione $S(T, V)$ si ottiene immediatamente (usando $dU = Vdu + udV$)

$$dS = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} dT + \frac{4}{3} \frac{u}{T} dV \quad (1.11.8)$$

Ma S è una funzione di stato, e dunque dS un differenziale esatto. Pertanto le due derivate seconde miste devono essere uguali, e si deve avere (come immediatamente si verifica)

$$\frac{du}{dT} = \frac{4u}{T} \quad (1.11.9)$$

Questa è una equazione differenziale del primo ordine nella funzione incognita $u(T)$, che ha evidentemente come soluzione proprio la (1.11.6) con una costante arbitraria σ , come si vede subito o come può comunque essere immediatamente verificato.

1.11.1 La legge di spostamento di Wien

Un grande passo venne poi compiuto da Wien nel 1896. Si osservava che al variare della temperatura le isoterme del corpo nero avevano tutte una forma alquanto simile, l’aspetto caratteristico essendo che al crescere della temperatura le curve u_ν vs ν (delle specie di campane con una pendenza decisamente più grande dalla parte delle alte frequenze) si alzavano (in accordo col fatto che l’area sottesa deve crescere come T^4 secondo la legge di

Stefan–Boltzmann), ed inoltre il picco si spostava verso destra, precisamente secondo la legge $\lambda_{\max}T = \text{cost}$ o equivalentemente

$$\nu_{\max} = \text{cost } T \quad (1.11.10)$$

Le curve parevano dunque potersi ricondurre tutte ad una unica curva mediante un opportuno riscaldamento. Questo riscaldamento fu determinato da Wien con un argomento teorico che da una parte faceva uso della seconda legge della termodinamica (come già avveniva nei procedimenti di Kirchhoff e di Boltzmann), e dall'altra parte si rifaceva ad un argomento che oggi chiameremmo di teoria dei sistemi dinamici. Questo riguardava i cosiddetti *invarianti adiabatici*, particolarmente studiati da Helmholtz (1821–1894) e Boltzmann.

Gli invarianti adiabatici sono sostanzialmente variabili dinamiche che non soltanto sono praticamente costanti del moto fino a tempi sufficientemente lunghi, ma hanno inoltre la proprietà di mantenere il loro valore inalterato anche quando si varia lentamente un parametro. L'esempio più classico è quello delle piccole oscillazioni del pendolo di cui venga fatta variare lentamente la frequenza (si pensi ad esempio di allungare lentamente la corda a cui il pendolo è sospeso). In tal caso si mostra che, al variare della frequenza ν col tempo, varia anche l'energia E . Si dimostra però che fino a tempi lunghi resta sostanzialmente inalterato il valore del rapporto $I \equiv E/\nu$. L'invariante adiabatico I ha evidentemente le dimensioni di una azione, energia per tempo, come la costante di Planck.

Termodinamica di un oscillatore armonico.

Un oscillatore armonico corrisponde a un punto materiale di massa m non relativistica in moto in un dimensione in un potenziale $V = (1/2)mw^2x^2$. Può essere descritto da una Lagrangiana $L(x, \dot{x}) = (1/2)m\dot{x}^2 - (1/2)mw^2x^2$, e da luogo a un'oscillazione armonica $x = (2U/mw)^{1/2} \cos(\omega t + \phi)$ a energia U e frequenza angolare w . Conseguentemente a una lenta variazione della frequenza angolare w , l'energia divisa per la frequenza angolare U/w è una costante e quindi la variazione di energia del sistema è $dU = (U/w)dw$ e il lavoro dW eseguito dal sistema sull'agente esterno responsabile della variazione di frequenza angolare è

$$dW = -(U/w)dw \quad (1.11.11)$$

Se un oscillatore armonico è debolmente accoppiato a un termostato a temperatura T , allora scambierà energia con il bagno termico. All'equilibrio con il termostato, l'oscillatore armonico a frequenza w avrà un'energia media $U(w, T)$. Quindi l'oscillatore forma un sistema adatto a una descrizione con gli usuali metodi della termodinamica.

Derivazione della dipendenza funzionale corrispondente alla legge di spostamento di Wien.

Quando l'oscillatore è all'equilibrio termico, immerso in un bagno a temperatura T , esso avrà un'energia (media) $U(w, T)$ e un'entropia $S(w, T)$ che dipenderanno dalla temperatura T e dalla frequenza w . Utilizzando l'equazione (1.11.11), applicando le leggi della termodinamica all'oscillatore si ha

$$dQ = TdS(T, w) = dU(T, w) - (U/w)dw \quad (1.11.12)$$

Questa può essere riscritta come

$$T \left[\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_w dT + \left(\frac{\partial S}{\partial w} \right)_T dw \right] = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_w dT + \left(\frac{\partial U}{\partial w} \right)_T dw - \frac{U}{w} dw \quad (1.11.13)$$

Siccome le variabili w e T sono indipendenti, abbiamo

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_w = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_w, \quad T \left(\frac{\partial S}{\partial w} \right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial w} \right)_T - \frac{U}{w} \quad (1.11.14)$$

Derivando la prima equazione rispetto a w e la seconda rispetto a T si ottiene

$$T \frac{\partial^2 S}{\partial w \partial T} = \frac{\partial^2 U}{\partial w \partial T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial w} \right)_T + T \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial w} = \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial w} - \frac{1}{w} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_w \quad (1.11.15)$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda così da eliminare le derivate seconde, otteniamo

$$\left(\frac{\partial S}{\partial w} \right)_T = -\frac{1}{w} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_w \quad (1.11.16)$$

Oppure

$$\left(\frac{\partial S}{\partial w} \right)_T = -\frac{T}{w} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_w \quad (1.11.17)$$

la cui soluzione generale è

$$S(w, T) = g(w/T) \quad (1.11.18)$$

dove g è una funzione arbitraria della singola variabile w/T . D'altra parte se usiamo la seconda equazione della (1.11.14), dalla (1.11.16) otteniamo

$$\left(\frac{\partial U}{\partial w} \right)_T - \frac{U}{w} = -\frac{T}{w} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_w \quad (1.11.19)$$

che ha come soluzione generale

$$U(w, T) = wf(w/T) \quad (1.11.20)$$

dove f è una funzione arbitraria della variabile w/T .

Abbiamo visto che la radiazione in una cavità può essere rappresentata

come una collezione di oscillatori armonici; ricordando l'equazione (1.10.23) avremo che

$$u_w = U \rho_w \quad (1.11.21)$$

dove U è l'energia media associata al singolo oscillatore. Sostituendo otteniamo la *legge di spostamento di Wien*¹²

$$\boxed{u_w = w^3 f_1(w/T)} \quad (1.11.22)$$

o, in termini di lunghezza d'onda

$$u_\lambda = u_w \left| \frac{dw}{d\lambda} \right| = \lambda^{-5} f_2(\lambda T) \quad (1.11.23)$$

o ancora in termini di frequenza

$$u_\nu = \nu^3 f_3(\nu/T) \quad (1.11.24)$$

1.12 La teoria di Planck

1.12.1 Catastrofe ultravioletta

Consideriamo l'equazione per le densità spettrale di energia:

$$u_w = \rho_w U \quad (1.12.1)$$

Se ora ricordiamo il risultato dell'equazione (1.10.23), possiamo scrivere

$$u_w = \frac{w^2}{\pi^2 c^3} U \quad (1.12.2)$$

oppure, secondo la (1.10.24)

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U \quad (1.12.3)$$

Il teorema di equipartizione della meccanica statistica classica implica che il valor medio dell'energia di un singolo oscillatore armonico all'equilibrio termodinamico è uguale kT , dove k è la costante di Boltzmann; questo ci permette di calcolare la densità spettrale di energia della radiazione termica attraverso la (1.12.1):

$$u_w = \left(\frac{w^2}{\pi^2 c^3} \right) kT \quad (1.12.4)$$

¹²Se sostituissimo l'espressione esplicita di U fornita dalla meccanica quantistica troveremmo che la legge di Wien è verificata. Inoltre potremmo osservare che il massimo della funzione u_w ricorre per $w_{max} = \text{cost} \times T$; in altre parole le isoterme della densità di energia presentano un massimo che cambia linearmente al variare della temperatura.

La (1.12.4) è chiamata *distribuzione di Rayleigh-Jeans*. La densità di energia elettromagnetica totale

$$u = \int_0^{\infty} u_w(w)dw \quad (1.12.5)$$

viola la legge di Stephan-Boltzmann. Inoltre la (1.12.5) diverge se utilizziamo come u_w la (1.12.4) dando luogo alla cosiddetta *catastrofe ultravioletta*.

La meccanica classica, in particolare il teorema di equipartizione dell'energia, sembra non funzionare.

1.12.2 La prima teoria di Planck

Pochi anni dopo aver dimostrato la (1.11.22), Wien propose la seguente distribuzione

$$u_\lambda = \alpha \lambda^{-5} e^{-\beta/\lambda T} \quad (1.12.6)$$

dove α e β sono costanti; Wien non fornì una dimostrazione rigorosa, ciò nonostante il risultato che aveva proposto era in buon accordo con le misure sperimentali condotte in quel periodo. La distribuzione di Wien trovò una giustificazione più solida proprio nei lavori di Planck.

Planck propose una derivazione della distribuzione di Wien (1.12.6) fondata su considerazioni termodinamiche di carattere generale e sull'*assunzione* che l'entropia di una collezione di oscillatori dipenda solo dalla loro energia totale. Un risultato importante fu la seguente relazione tra l'entropia S e l'energia media U di un oscillatore elementare in equilibrio termico con della radiazione a temperatura T :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = -\frac{A}{U} \quad (1.12.7)$$

dove per un dato oscillatore A è costante. Da questa equazione e dalla relazione generale $\partial S/\partial U = 1/T$ segue che

$$U = B e^{-1/AT} \quad (1.12.8)$$

dove B è un'altra costante che, come A può dipendere dalla frequenza di un certo oscillatore. Questo risultato, insieme alla (1.12.3), porge la densità spettrale di energia della radiazione

$$u_\nu = f(\nu) e^{-1/AT} \quad (1.12.9)$$

dove $f(\nu)$ è una funzione ν . La legge di spostamento di Wien (1.11.24) implica che $f(\nu)$ e A sono proporzionali a ν^3 e a ν^{-1} rispettivamente, sicché

$$u_\nu = C \nu^3 e^{-D\nu/T} \quad (1.12.10)$$

o

$$u_\lambda = \alpha \lambda^{-5} e^{-\beta/\lambda T} \quad (1.12.11)$$

che è la distribuzione di Wien.

La distribuzione di Wien, tuttavia, si dimostrò errata nel momento in cui si poté estendere le misure ad alte lunghezze d'onda. In particolare, i dati indicavano che u_ν era proporzionale a T per piccole ν e larghe T . Planck riuscì a trovare una formula con questo comportamento a piccole frequenze e che approssimava la distribuzione di Wien per grandi ν . Per piccole ν e grandi T , il risultato sperimentale $u_\nu \propto T$ e l'equazione (1.12.3) implicano $U \propto T$ e quindi, siccome $\partial S/\partial U = T^{-1}$, $\partial^2 S/\partial U^2 \propto U^{-2}$ e $S \propto \log U$. D'altra parte la (1.12.7) conduce alla distribuzione di Wien che è corretta per grandi ν e piccole T . Planck propose l'interpolazione

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{-A}{U(B+U)} \quad (A, B \text{ costanti}) \quad (1.12.12)$$

Utilizzando nuovamente la relazione $\partial S/\partial U = T^{-1}$, l'equazione (1.12.3) e la legge di spostamento di Wien si può ottenere dalla (1.12.12) la densità spettrale di energia

$$u_\lambda = \frac{\alpha \lambda^{-5}}{e^{\beta/\lambda T} - 1} \quad (\alpha, \beta \text{ costanti}) \quad (1.12.13)$$

Questa formula si rivelò essere in accordo con tutti i dati sperimentali.

Al fine di fornire una giustificazione fisica plausibile del suo risultato Planck incominciò quelle che lui stesso in seguito avrebbe descritto come *alcune fra le settimane del più estenuante lavoro della mia vita*. Il culmine di quel lavoro fu la nascita della meccanica quantistica.

Il ragionamento di Planck può essere esposto superficialmente come segue. Consideriamo N oscillatori di frequenza ν ed energia totale $U_N = NU = P\epsilon$ dove P è un intero molto grande e ϵ è un qualche elemento finito di energia. L'entropia $S_N = NS = k \log W_N$, dove W_N è il numero di modi in cui i P elementi di energia possono essere distribuiti fra gli N oscillatori. Se $N = P = 2$. per esempio, allora le differenti partizioni dell'energia tra i due oscillatori sono $(2\epsilon, 0)$, (ϵ, ϵ) e $(0, 2\epsilon)$ se si assume che gli elementi di energia siano indistinguibili. Sotto questa assunzione abbiamo, in generale,

$$W_N = \frac{(N-1+P)!}{P!(N-1)!} \quad (1.12.14)$$

che è il numero di modi in cui P palle indistinguibili possono essere piazzate in N scatole distinte. L'approssimazione di Stirling ($\log M! \approx M \log M - M$ per grandi M) allora porge, per $N, P \gg 1$,

$$\begin{aligned} S &= \frac{k}{N} \log \frac{(N-1+P)!}{P!(N-1)!} \\ &\approx k \left[\left(1 + \frac{P}{N}\right) \log \left(1 + \frac{P}{N}\right) - \frac{P}{N} \log \frac{P}{N} \right] \\ &= k \left[\left(1 + \frac{U}{\epsilon}\right) \log \left(1 + \frac{U}{\epsilon}\right) - \frac{U}{\epsilon} \log \frac{U}{\epsilon} \right] \end{aligned} \quad (1.12.15)$$

Quindi

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T} = \frac{k}{\epsilon} \log\left(1 + \frac{\epsilon}{U}\right) \quad (1.12.16)$$

o

$$U = \frac{\epsilon}{e^{\epsilon/KT} - 1} \quad (1.12.17)$$

per l'energia media di ciascun oscillatore. L'eccellente accordo tra la (1.12.13) e gli esperimenti, insieme all'equazione (1.12.3), suggeriscono che ϵ sia inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda, o direttamente proporzionale alla frequenza dell'oscillatore

$$\epsilon = h\nu \quad (1.12.18)$$

Allora

$$\frac{h\nu}{e^{h\nu/KT} - 1} \quad (1.12.19)$$

e la (1.12.3) implica

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3/c^3}{e^{h\nu/KT} - 1} \quad (1.12.20)$$

per la densità spettrale di energia della radiazione. In funzione di w la (1.12.20) assume la forma

$$u_w = \frac{\hbar w^2}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar w/KT} - 1} \quad (1.12.21)$$

L'espressione (1.12.15) per S soddisfa l'equazione (1.12.12) con $A = k$ e $B = \epsilon$. Una volta ricavata la (1.12.15) si trova subito la (1.12.13) per la densità spettrale di energia. Il grande successo della (1.12.13) nel fittare i dati sperimentali portò Planck a compiere quello che lui stesso definì un *atto di disperazione* necessario per derivare la (1.12.15).

Uno degli aspetti più peculiari del lavoro di Planck fu il modo in cui conteggiò il numero di modi in cui P elementi di energia possono essere distribuiti fra N oscillatori. La sua procedura di conteggio era in totale disaccordo con i metodi statistici classici nel suo considerare gli elementi di energia come fondamentalmente *indistinguibili*. Da una parte Planck stava seguendo Boltzmann considerando ugualmente probabili tutte le combinazioni, dall'altra però il suo modo di contare il numero di combinazioni era radicalmente differente. I suoi elementi di energia obbedivano a quella che molto tempo dopo verrà riconosciuta come *statistica di Bose-Einstein*.

Un altro aspetto rivoluzionario (non-classico) del calcolo di Planck, è sicuramente il significato fisico che viene attribuito agli elementi di energia ϵ , e la relazione (1.12.18) tra ϵ e la frequenza ν di un oscillatore. La quantizzazione dell'energia nel lavoro di Planck è un'ipotesi assolutamente fondamentale. Se consideriamo il limite per $\epsilon \rightarrow 0$ nell'equazione (1.12.16), allora $\partial S/\partial U \rightarrow k/U$ e $\partial^2 S/\partial U^2 \rightarrow -k/U^2$, che porta alla distribuzione di Rayleigh-Jeans.

2 Meccanica quantistica ed elettromagnetismo

2.1 Oscillatore armonico quantistico

Un oscillatore armonico è un oggetto che è descritto da un'energia potenziale quadratica, che produce una forza di richiamo che si oppone a qualsiasi spostamento da una posizione di equilibrio e che è proporzionale allo spostamento stesso. L'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico unidimensionale è

$$H = \frac{1}{2M}P^2 + \frac{Mw^2}{2}Q^2 \quad (2.1.1)$$

dove P è l'impulso, Q è la posizione, M è la massa e w è la frequenza di oscillazione.

Lo spettro dell'Hamiltoniana (2.1.1) può essere ottenuto algebricamente, utilizzando solo la relazione di commutazione

$$[Q, P] = i\hbar \quad (2.1.2)$$

e l'hermiticità degli operatori Q e P :

$$P = P^\dagger \quad Q = Q^\dagger \quad (2.1.3)$$

Per prima cosa introduciamo degli operatori posizione e impulso adimensionali

$$q = \left(\frac{Mw}{\hbar}\right)^{1/2} Q \quad (2.1.4)$$

$$p = \left(\frac{1}{M\hbar w}\right)^{1/2} P \quad (2.1.5)$$

che soddisfano la relazione di commutazione

$$[q, p] = i \quad (2.1.6)$$

In termini di queste nuove variabili l'Hamiltoniana diventa

$$H = \frac{1}{2}\hbar w(p^2 + q^2) \quad (2.1.7)$$

Introduciamo inoltre i seguenti due operatori

$$a = \frac{q + ip}{\sqrt{2}} \quad (2.1.8)$$

$$a^\dagger = \frac{q - ip}{\sqrt{2}} \quad (2.1.9)$$

È evidente dalla (2.1.3) che questi due operatori sono l'uno l'hermitiano coniugato dell'altro. Dalla (2.1.6) segue che

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (2.1.10)$$

L'Hamiltoniana (2.1.7) può essere riscritta in diversi modi equivalenti

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2} \hbar \omega (aa^\dagger + a^\dagger a) = \\
 &= \hbar \omega \left(aa^\dagger - \frac{1}{2} \right) = \\
 &= \hbar \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

l'ultima di queste si rivela essere la più utile. Il problema di trovare gli autovalori di H viene ridotto a trovare lo spettro di

$$N = a^\dagger a \tag{2.1.12}$$

Utilizzando l'identità operatoriale, $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$, e la (2.1.10), otteniamo le seguenti relazioni di commutazione

$$\begin{aligned}
 [N, a] &= -a \\
 [N, a^\dagger] &= a^\dagger
 \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Lo spettro di N può essere calcolato facilmente mediante queste relazioni. Consideriamo $N|\nu\rangle = \nu|\nu\rangle$, con $\langle\nu|\nu\rangle \neq 0$. Allora dalle (2.1.13) segue che

$$Na|\nu\rangle = a(N-1)|\nu\rangle = (\nu-1)a|\nu\rangle \tag{2.1.14}$$

Quindi $a|\nu\rangle$ è un autovettore di N con autovalore $\nu-1$, con la condizione che $a|\nu\rangle \neq 0$. La norma al quadrato di questo vettore è

$$(\langle\nu|a^\dagger)(a|\nu\rangle) = \langle\nu|N|\nu\rangle = \nu\langle\nu|\nu\rangle \tag{2.1.15}$$

La norma deve essere maggiore o uguale a zero, pertanto $\nu \geq 0$, e quindi un autovalore non può essere negativo. Applicando l'operatore a ripetutamente, sembrerebbe che si possa costruire una sequenza arbitrariamente lunga di autovettori aventi come autovalori $\nu-1, \nu-2, \nu-3, \dots$. Ma questo si porrebbe in contraddizione con il fatto che un autovalore deve essere non negativo. Questa contraddizione può essere evitata solo se la sequenza termina con il valore $\nu=0$, siccome $a|0\rangle = 0$ è il vettore nullo e ulteriori applicazioni di a non producono nuovi vettori.

Dalle (2.1.13) segue che

$$Na^\dagger|\nu\rangle = a^\dagger(N+1)|\nu\rangle = (\nu+1)a^\dagger|\nu\rangle \tag{2.1.16}$$

La norma al quadrato del vettore $a^\dagger|\nu\rangle$ è

$$(\langle\nu|a)(a^\dagger|\nu\rangle) = \langle\nu|(N+1)|\nu\rangle = (\nu+1)\langle\nu|\nu\rangle \tag{2.1.17}$$

che non è mai nulla poiché $\nu \geq 0$. Quindi $a^\dagger|\nu\rangle$ è un autovettore di N con autovalore $\nu+1$. Applicando più volte l'operatore a^\dagger , possiamo costruire una

sequenza illimitata di autovettori, ognuno dei quali con un autovalore più grande di un'unità dell'autovalore dell'autovettore precedente. La sequenza ha inizio con l'autovalore $\nu = 0$. Quindi lo spettro di N è costituito dagli interi non negativi, $\nu = n$.

Gli autovettori ortonormali di N verranno denotati con $|n\rangle$:

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.18)$$

Abbiamo già mostrato che $a^\dagger|n\rangle$ è proporzionale a $|n+1\rangle$, e quindi possiamo scrivere $a^\dagger|n\rangle = C_n|n+1\rangle$. Il fattore di proporzionalità C_n può essere ottenuto dalla norma di questo vettore

$$|C_n|^2 = (\langle n|a)(a^\dagger|n\rangle) = n+1 \quad (2.1.19)$$

Quindi $|C_n| = (n+1)^{1/2}$. La fase del vettore $|n+1\rangle$ è arbitraria poiché il vettore è definito dalla sola (2.1.18). Quindi siamo liberi di scegliere la sua fase in modo tale che C_n sia reale e positivo:

$$a^\dagger|n\rangle = (n+1)^{1/2}|n+1\rangle \quad (2.1.20)$$

Da questo risultato segue che

$$|n\rangle = (n!)^{-1/2}(a^\dagger)^n|0\rangle \quad (2.1.21)$$

Dalla (2.1.20) e dalla ortonormalità degli autovettori, otteniamo gli elementi di a^\dagger ,

$$\langle n'|a^\dagger|n\rangle = (n+1)^{1/2}\delta_{n',n+1} \quad (2.1.22)$$

Poiché a è l'aggiunto di a^\dagger , i suoi elementi di matrice devono essere ottenuti mediante la trasposizione dell'equazione precedente, e possono essere scritti come

$$\langle n'|a|n\rangle = n^{1/2}\delta_{n',n-1} \quad (2.1.23)$$

Segue che

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= n^{1/2}|n-1\rangle, & (n \neq 0), \\ a|0\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

Infine osserviamo che gli autovalori e gli autovettori dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico sono

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \quad (2.1.25)$$

con $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

2.1.1 Formula di Planck ed energia di punto zero

Consideriamo un oscillatore armonico in contatto con un termostato a temperatura T . Dal formalismo dell'insieme canonico, si ricavano le seguenti equazioni per la funzione di partizione Z e per l'energia media U del sistema considerato

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} \quad \text{con } \beta = 1/k_B T \quad (2.1.26)$$

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \quad (2.1.27)$$

Per l'oscillatore armonico, pertanto, si ha

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(n+1/2)\hbar\omega} = e^{-\beta\hbar\omega/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n} = \\ &= e^{-\beta\hbar\omega/2} \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

Per l'energia media abbiamo

$$U = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega e^{-\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \quad (2.1.29)$$

Sostituiamo adesso queste espressioni nella (1.12.1), ricordando la (1.10.23)

$$u_w = U \rho_w = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \left(\frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.1.30)$$

Abbiamo ritrovato la distribuzione di Planck (1.12.21) più un termine aggiuntivo della forma

$$u_w^{(0)} = \frac{1}{2} \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \quad (2.1.31)$$

La presenza di un tale termine aggiuntivo comporta che la densità di energia totale della radiazione elettromagnetica sia infinita!

Quello che possiamo fare è ridefinire l'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico in modo da eliminare questa energia di punto zero:

$$\begin{aligned} H' &= H - \langle 0|H|0 \rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega(aa^\dagger + a^\dagger a) - \frac{1}{2}\hbar\omega = \\ &= \frac{1}{2}\hbar\omega(2a^\dagger a + 1) - \frac{1}{2}\hbar\omega = \\ &= \hbar\omega a^\dagger a = \hbar\omega N \end{aligned} \quad (2.1.32)$$

La nuova Hamiltoniana è detta *ordinata secondo Wick*, l'operatore di creazione a^\dagger appare sulla sinistra dell'operatore di distruzione a . La nuova Hamiltoniana ordinata secondo Wick è denotata con $:H:$

$$:H := \frac{1}{2}\hbar\omega(aa^\dagger + a^\dagger a) := \hbar\omega a^\dagger a \quad (2.1.33)$$

In altre parole, all'interno del simbolo $\langle \cdot | \cdot \rangle$ possiamo commutare a e a^\dagger . Dal momento che l'energia di punto zero è intimamente connessa con la non commutatività di a e a^\dagger , la procedura di ordinamento secondo Wick elimina qualsiasi contributo dell'energia di punto zero. Questo è particolarmente ragionevole nel caso dell'Hamiltoniana di un campo, siccome il termine di punto zero ha l'effetto di aggiungere un termine di energia costante che può essere eliminato ridefinendo semplicemente lo zero dell'energia. Inoltre, questa energia costante nell'Hamiltoniana commuta con a e a^\dagger e quindi non può avere effetti sulla dinamica di un sistema quantistico descritto dalle equazioni di Heisenberg del moto¹³.

Tuttavia permangono dei problemi; in relatività generale lo zero dell'energia non è arbitrario. Inoltre, come vedremo, è possibile attribuire effetti misurabili sperimentalmente, come la forza di Casimir e il Lamb shift, a *variazioni* dell'energia di punto zero.

2.2 Schema di Heisenberg

Un risultato significativo della meccanica classica è che l'evoluzione temporale $q(t) \rightarrow q(t+dt), p(t) \rightarrow p(t+dt)$ è una successione di trasformazioni canoniche infinitesime. Esiste un risultato analogo in meccanica quantistica: *l'evoluzione temporale del sistema in meccanica quantistica è una trasformazione unitaria*:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |\psi(0)\rangle \quad (2.2.1)$$

Infatti la (2.2.1) è la soluzione formale dell'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad |\psi(t)\rangle|_{t=0} = |\psi(0)\rangle \quad (2.2.2)$$

Inoltre assumendo che H sia autoaggiunto (hermitiano), la trasformazione $e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$ è unitaria. In generale i valori medi delle osservabili evolvono nel tempo; questo fatto è rappresentabile in due modi equivalenti. Infatti data l'osservabile σ possiamo scrivere:

1) $\langle \psi(t) | \sigma | \psi(t) \rangle = \langle U(t)\psi(0) | \sigma | U(t)\psi(0) \rangle$ dove $U(t)$ è la funzione d'onda che evolve con il tempo. Questa descrizione è detta *schema (o rappresentazione) di Schrödinger*. Schematicamente si ha $i\hbar \dot{\psi} = H\psi \rightarrow \psi(t) = U(t)\psi(0)$

2) $\langle \psi(0) | U^\dagger(t)\sigma U(t) | \psi(0) \rangle = \langle \psi(0) | \sigma(t) | \psi(0) \rangle$ con $\sigma(t) = U^\dagger(t)\sigma U(t)$ dove è l'operatore (osservabile) di cui si cerca il valor medio che evolve con il tempo. Ci proponiamo adesso di ricavare l'equazione che corrisponde, in questa rappresentazione, all'equazione di Schrödinger nello schema omonimo.

¹³Vedi prossima sezione.

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = \frac{d}{dt}(U^\dagger)\sigma U + U^\dagger \frac{\partial\sigma}{\partial t}U + U^\dagger\sigma \frac{dU}{dt} \quad (2.2.3)$$

dove

$$\frac{d}{dt}U(t) = e^{\frac{-iHt}{\hbar}} \left(\frac{-iH}{\hbar} \right) \quad (2.2.4)$$

e

$$\frac{d}{dt}U^\dagger(t) = e^{\frac{+iHt}{\hbar}} \left(\frac{+iH}{\hbar} \right) \quad (2.2.5)$$

(L'Hamiltoniana non dipende dal tempo per via della conservazione dell'energia)

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = \left(\frac{iH}{\hbar} \right) U^\dagger\sigma U + U^\dagger\sigma \left(\frac{-iH}{\hbar} \right) U + U^\dagger \frac{\partial\sigma}{\partial t}U \quad (2.2.6)$$

E, dato che $[H, U] = 0$ abbiamo

$$\boxed{\frac{d}{dt}\sigma(t) = \frac{1}{i\hbar}[\sigma(t), H] + \frac{\partial\sigma(t)}{\partial t}} \quad (2.2.7)$$

dove il secondo termine è presente se l'operatore dipende esplicitamente dal tempo. La (2.2.7) è nota come *equazione di Heisenberg*.

Osservazione: Si noti la stretta somiglianza con le equazioni canoniche classiche scritte in termini di parentesi di Poisson

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} \quad (2.2.8)$$

La descrizione dell'evoluzione temporale di un sistema in meccanica quantistica appena descritta è chiamata *schema (o rappresentazione) di Heisenberg*. Nello schema di Heisenberg, lo stato non evolve col tempo, l'operatore varia col tempo.

2.2.1 Rappresentazione di Heisenberg e meccanica classica

L'analogia formale tra teoria classica e teoria quantistica è particolarmente rilevante nella rappresentazione di Heisenberg. Il moto di un sistema quantistico, proprio come il moto di un sistema classico, viene descritto nella rappresentazione di Heisenberg come l'evoluzione delle variabili dinamiche associate al sistema stesso.

Consideriamo un sistema quantistico che possieda un analogo classico, e confrontiamo il moto dei due sistemi. A ogni quantità fisica del sistema classico corrisponde una quantità fisica del sistema quantistico. L'unica differenza risiede nel fatto che le quantità fisiche del sistema classico sono quantità che obbediscono alle regole dell'algebra ordinaria, mentre le loro analoghe quantistiche obbediscono alle regole dell'algebra non commutativa.

Ma, se consideriamo un caso in cui sia possibile identificare le espressioni dell'algebra non commutativa con quelle dell'algebra ordinaria, allora le equazioni del moto delle quantità quantistiche saranno identiche a quelle delle loro analoghe classiche. Infatti, le equazioni di Heisenberg per le variabili q_1, q_2, \dots, q_N e p_1, p_2, \dots, p_N si scrivono

$$\begin{aligned}\frac{dq_i}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [q_i, H] = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [p_i, H] = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}\quad (2.2.9)$$

Per ottenere queste espressioni, si sono utilizzate le relazioni di commutazione fondamentali tra le q e le p insieme alle equazioni $[p_i, A] = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial A}{\partial q_i}$ e $[q_i, A] = i\hbar \frac{\partial A}{\partial p_i}$.

Il sistema di equazioni (2.2.9) è formalmente identico alle equazioni canoniche di Hamilton in meccanica classica.

2.2.2 Oscillatore armonico

Consideriamo un oscillatore armonico lineare, $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{mw^2}{2}x^2$. L'Hamiltoniana nella rappresentazione di Heisenberg è:

$$H_H = U^\dagger H(x, p)U = H(U^\dagger x U, U^\dagger p U) = \frac{p_H^2}{2m} + \frac{mw^2}{2}x_H^2 \quad (2.2.10)$$

L'equazione di evoluzione si ottiene considerando la (2.2.7), tenendo conto che in questo caso gli operatori non dipendono esplicitamente dal tempo. Dovremo dunque calcolare i commutatori:

$$i\hbar \dot{p} = [p, H] = \frac{1}{2}mw^2[p, x^2] = \frac{1}{2}mw^2(-i\hbar 2x) = \frac{\hbar}{i}mw^2x \quad (2.2.11)$$

da cui

$$\dot{p} = -mw^2x \quad (2.2.12)$$

e

$$i\hbar \dot{x} = [x, H] = \frac{1}{2m}[x, p^2] = \frac{1}{2m}2pi\hbar \quad (2.2.13)$$

da cui

$$m\dot{x} = p \quad (2.2.14)$$

A questo punto derivando rispetto al tempo ambo i membri della (2.2.12) otteniamo:

$$\ddot{p} = -mw^2\dot{x} \quad (2.2.15)$$

da cui, sostituendo nella equazione precedente la (2.2.14) si ottiene

$$\ddot{p} + w^2p = 0 \quad (2.2.16)$$

Analogamente otteniamo:

$$\ddot{x} + w^2 x = 0 \quad (2.2.17)$$

La soluzione di queste equazioni è identica, nella forma, a quella classica:

$$x_H(t) = x(0) \cos(wt) + \frac{p(0)}{mw} \sin(wt) \quad (2.2.18)$$

$$p_H(t) = p(0) \cos(wt) - mw x(0) \sin(wt) \quad (2.2.19)$$

2.3 Quantizzazione del campo elettromagnetico

Come abbiamo visto in precedenza, il campo elettromagnetico contenuto in un determinato volume può essere trattato come una collezione di oscillatori armonici indipendenti. Si ha infatti che l'energia della radiazione assume la forma

$$H = \sum_m \frac{(p_m/\sqrt{4\pi})^2}{2} + w_m^2 \frac{(q_m/\sqrt{4\pi})^2}{2} \quad (2.3.1)$$

mentre l'Hamiltoniana per un insieme di oscillatori armonici, ognuno dei quali avente massa unitaria, è

$$H_{osc} = \sum_m \frac{1}{2} (P_m^2 + w_m^2 Q_m^2) \quad (2.3.2)$$

dove le Q_m sono le coordinate e $P_m = \frac{dq_m}{dt}$ sono gli impulsi o le velocità. Le q_m e le p_m sono legate dalle equazioni (1.9.14):

$$\frac{dq_m(t)}{dt} = p_m(t), \quad \frac{dp_m(t)}{dt} = -w_m^2 q_m(t) \quad (2.3.3)$$

Considerando la seconda equazione delle (2.3.3), allora la (2.3.1) assume la forma (2.3.2) se è verificata l'identificazione

$$Q_m \leftrightarrow \frac{p_m}{2w_m\sqrt{\pi}} \quad (2.3.4)$$

D'altra parte, se utilizziamo la prima equazione nella (2.3.3), allora la (2.3.1) assume ancora la forma (2.3.2) se è verificata l'identificazione alternativa

$$Q_m \leftrightarrow \frac{q_m}{2\sqrt{\pi}} \quad (2.3.5)$$

La strategia consiste nell'utilizzare le espressioni note per gli operatori dell'oscillatore armonico per dedurre gli operatori appropriati per il campo elettromagnetico.

L'ambiguità tra le due identificazioni presentate può essere facilmente risolta.

L'operatore Hamiltoniano per un sistema di oscillatori indipendenti è della forma

$$H = \sum_m \hbar\omega \left(a_m^\dagger a_m + \frac{1}{2} \right) \quad (2.3.6)$$

dove gli operatori a_m^\dagger e a_m , soddisfano la relazione di commutazione

$$[a_{m'}, a_m^\dagger] = \delta_{m',m} \quad (2.3.7)$$

Assumeremo che questa forma sia valida anche per l'Hamiltoniana per i modi del campo elettromagnetico. Utilizzando (2.1.4), (2.1.5), (2.1.8), e (2.1.9), la posizione e l'impulso per gli oscillatori sono

$$Q_m = \left(\frac{\hbar}{2\omega_m} \right)^{1/2} (a_m^\dagger + a_m) \quad (2.3.8)$$

$$P_m = i \left(\frac{\hbar\omega_m}{2} \right)^{1/2} (a_m^\dagger - a_m) \quad (2.3.9)$$

Entrambe le identificazioni (2.3.4) e (2.3.5) ci possono fornire espressioni per gli operatori campo elettrico e campo magnetico. Ma quale scelta è quella giusta?

Caso 1. Se scegliamo la (2.3.4), otteniamo

$$p_m = (2\omega_m\sqrt{\pi})Q_m = (2\pi\hbar\omega_m)^{1/2}(a_m^\dagger + a_m) \quad (2.3.10)$$

L'operatore campo elettrico, ottenuto dalla (2.3.4) è allora

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = - \sum_m (2\pi\hbar\omega_m)^{1/2} \{a_m^\dagger(t) + a_m(t)\} \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) \quad (2.3.11)$$

Osserviamo che $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ adesso è un *campo operatoriale*; ciò equivale a dire che un operatore campo elettrico è definito in ogni punto dello spazio-tempo (\mathbf{x}, t) . La coordinata spaziale \mathbf{x} non è un operatore. La dipendenza temporale di questi operatori è da interpretarsi nel senso della pittura di Heisenberg.

Caso 2. Se scegliamo la (2.3.5), allora otteniamo $q_m = (2\sqrt{\pi})Q_m$. Allora dalla prima delle (2.3.3) segue che

$$\begin{aligned} p_m(t) &= \frac{dq_m}{dt} = (2\sqrt{\pi}) \frac{dQ_m}{dt} = \\ &= (2\sqrt{\pi})P_m = i(2\pi\hbar\omega_m)^{1/2}(a_m^\dagger - a_m) \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

In questo modo il campo elettrico assume la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_m -i(2\pi\hbar\omega_m)^{1/2} \{a_m^\dagger(t) - a_m(t)\} \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) \quad (2.3.13)$$

Il conflitto apparente tra le (2.3.11) e (2.3.13) viene risolto facilmente. L'equazione di Heisenberg (2.2.7) del moto per l'operatore a_m è

$$\frac{d}{dt}a_m = \frac{i}{\hbar}[H, a_m(t)] = -iw_m a_m(t) \quad (2.3.14)$$

La sua soluzione è $a_m(t) = a_m e^{-iw_m t}$. Analogamente, otteniamo $a_m^\dagger(t) = a_m^\dagger e^{iw_m t}$. Per via di questa semplice dipendenza temporale degli operatori di creazione e distruzione, è evidente che la (2.3.13) differisce dalla (2.3.11) solo nella fase dei modi. Dato che la fase iniziale è arbitraria, non vi è alcuna differenza fisica significativa tra il primo e il secondo caso. Nel primo caso il campo elettrico è analogo alla posizione dell'oscillatore. Nel secondo caso è analogo al suo impulso. Siccome l'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico è simmetrica rispetto alla posizione e all'impulso, i due casi conducono allo stesso risultato fisico.

D'ora in avanti considereremo solo il primo caso e la (2.3.11) sarà la forma appropriata per l'operatore campo elettrico. La forma corrispondente dell'operatore campo magnetico si trova dalla (1.9.15)

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = - \sum_m ic \left(\frac{2\pi\hbar}{w_m} \right)^{1/2} \{a_m^\dagger(t) - a_m(t)\} \nabla \times \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) \quad (2.3.15)$$

2.3.1 Funzione di base complesse

Siccome i campi elettrici e magnetici sono reali, è naturale scegliere funzioni di base $\mathbf{u}_m(\mathbf{x})$ reali, come abbiamo fatto sopra. Tuttavia, a volte è conveniente usare funzioni di base complesse.

Per poterle introdurre è necessario che, per ogni frequenza, ci siano due funzioni modali indipendenti. Per la frequenza w_k denotiamo le due funzioni modali come $\mathbf{c}_k(\mathbf{x})$ e $\mathbf{s}_k(\mathbf{x})$ ($k > 0$). Denotiamo i corrispondenti operatori di creazione con a_c^\dagger e a_s . Definiamo quindi una funzione modale complessa,

$$\mathbf{e}_k(\mathbf{x}) = [\mathbf{c}_k(\mathbf{x}) + i\mathbf{s}_k(\mathbf{x})] \sqrt{\frac{1}{2}} \quad (k > 0) \quad (2.3.16)$$

cosicché $\mathbf{c}_k(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_k(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_k^*(\mathbf{x}))$ e $\mathbf{s}_k(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_k(\mathbf{x}) - \mathbf{e}_k^*(\mathbf{x}))/i$. È conveniente definire

$$\mathbf{e}_{-k}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_k^*(\mathbf{x}) = [\mathbf{c}_k(\mathbf{x}) - i\mathbf{s}_k(\mathbf{x})] \sqrt{\frac{1}{2}} \quad (k > 0) \quad (2.3.17)$$

Gli esempi più comuni di queste funzioni sono $\mathbf{c}_k(\mathbf{x}) = (2/\Omega)^{1/2} \mathbf{u} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$, $\mathbf{s}_k(\mathbf{x}) = (2/\Omega)^{1/2} \mathbf{u} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$, e $\mathbf{e}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{u} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} / \sqrt{\Omega}$, dove \mathbf{u} è un vettore di polarizzazione, e Ω è il volume sul quale le funzioni sono normalizzate. La restrizione $k > 0$ è da interpretare come la restrizione del vettore \mathbf{k} a un semi-spazio, siccome la sostituzione di \mathbf{k} con $-\mathbf{k}$ non fornisce funzioni modali

indipendenti.

A meno del fattore numerico $-(2\pi\hbar w_k)^{1/2}$, il contributo delle due funzioni modali all'operatore campo elettrico è

$$\begin{aligned} & (a_c^\dagger + a_c)\mathbf{c}_k(\mathbf{x}) + (a_s^\dagger + a_s)\mathbf{s}_k(\mathbf{x}) = \\ & = \mathbf{e}_k(\mathbf{x})\left(\frac{a_c^\dagger - ia_s^\dagger}{\sqrt{2}} + \frac{a_c - ia_s}{\sqrt{2}}\right) + \mathbf{e}_k^*(\mathbf{x})\left(\frac{a_c^\dagger + ia_s^\dagger}{\sqrt{2}} + \frac{a_c + ia_s}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

Risulta conveniente definire

$$a_k^\dagger = \frac{a_c^\dagger + ia_s^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad a_{-k}^\dagger = \frac{a_c^\dagger - ia_s^\dagger}{\sqrt{2}} \quad (2.3.19)$$

da cui segue che

$$a_k = \frac{a_c - ia_s}{\sqrt{2}}, \quad a_{-k} = \frac{a_c + ia_s}{\sqrt{2}} \quad (2.3.20)$$

Allora (2.3.18) diventa

$$\begin{aligned} & (a_c^\dagger + a_c)\mathbf{c}_k(\mathbf{x}) + (a_s^\dagger + a_s)\mathbf{s}_k(\mathbf{x}) = \\ & = (a_k^\dagger + a_{-k})\mathbf{e}_k^*(\mathbf{x}) + (a_{-k}^\dagger + a_k)\mathbf{e}_k(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Definendo $w_{-k} = w_k$ possiamo estendere il dominio di k anche a valori negativi e riscrivere la (2.3.11) come

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = - \sum_{\mathbf{k}} (2\pi\hbar w_k)^{1/2} \{a_k^\dagger(t)\mathbf{e}_k^*(\mathbf{x}) + a_k(t)\mathbf{e}_k(\mathbf{x})\} \quad (2.3.22)$$

2.4 Energia di punto zero ed effetto Casimir

L'operatore Hamiltoniano (2.3.6) per il campo elettromagnetico ha la forma di un oscillatore armonico per ogni modo del campo. Come abbiamo dimostrato, il livello più basso di energia per un oscillatore armonico è $\frac{1}{2}\hbar w$. Come abbiamo visto, dato che ci sono infiniti modi di frequenza arbitrariamente alta in ogni volume finito, segue che in volumi finiti ci sarà un'energia di punto zero infinita. Questa conclusione non è soddisfacente. Al fine di ottenere qualche informazione in più riguardo agli effetti di questa energia di punto zero, analizziamo il problema di una cavità rettangolare contenente radiazione elettromagnetica la cui frequenza è minore di una determinata *frequenza di cut-off* w_c . Le componenti delle funzioni modali $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ per una cavità di dimensioni $L_x \times L_y \times L_z$, sono date dalla (1.10.13):

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= A_x \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \\ u_y(x, y, z) &= A_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \\ u_z(x, y, z) &= A_z \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Queste possono essere indicizzate da un vettore d'onda \mathbf{k} le cui componenti sono

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L_x}, \quad k_y = \frac{n_y \pi}{L_y}, \quad k_z = \frac{n_z \pi}{L_z} \quad (2.4.2)$$

con n_x, n_y, n_z interi non negativi. La frequenza del modo k -esimo è $w_k = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$. Almeno due interi su tre devono essere diversi da zero, altrimenti la funzione modale si annullerebbe in tutte le sue componenti. Le ampiezze delle tre componenti della (2.4.1) sono legate, come abbiamo visto dalla relazione

$$A_x k_x + A_y k_y + A_z k_z = 0 \quad (2.4.3)$$

Questa condizione può essere scritta come $\mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = 0$, da cui è evidente che ci sono solo due polarizzazioni (direzioni di \mathbf{A}) linearmente indipendenti per ogni \mathbf{k} , e quindi ci sono due modi indipendenti per ogni insieme di interi positivi (n_x, n_y, n_z). Se uno degli interi è zero, è chiaro dalla (2.4.1) che due delle componenti di $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ si annullano, e quindi c'è solo un modo in questo caso eccezionale.

Se le dimensioni della cavità sono estese, i valori permessi di \mathbf{k} approssimano un continuo, pertanto dalla (2.1.31) (ricordando che $u_w dw = u_k dk$ e che $k = w/c$) si ha che la *densità di energia di punto zero* su tutti i modi di frequenza minore di w_c è data da

$$u^{(0)} = \frac{\hbar c k_c^4}{8\pi^2} \quad (2.4.4)$$

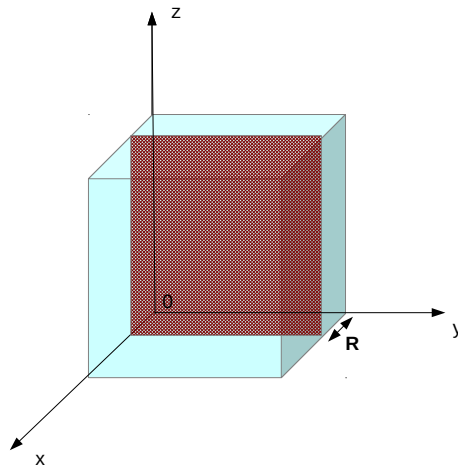
con $k_c = 2\pi/\lambda_c = w_c/c$. Il fattore k_c^4 indica che questa densità di energia è dominata dai modi di alta frequenza, e bassa lunghezza d'onda. Come abbiamo anticipato, siccome molti esperimenti misurano solo differenze di energia, e non energie assolute, spesso si risolve il problema dell'energia di punto zero semplicemente omettendola, rimpiazzando l'Hamiltoniana (2.3.2) con

$$H = \sum_m \hbar w_m a_m^\dagger a_m \quad (2.4.5)$$

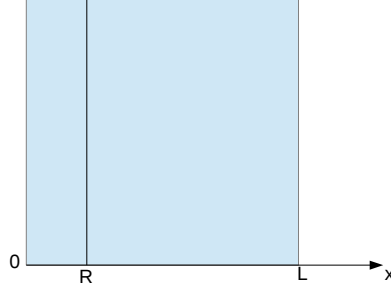
Un fenomeno che dipende dall'energia assoluta è la gravitazione, dal momento che tutte le forme di massa-energia agiscono come sorgenti gravitazionali. Ovviamente una densità di energia infinita non è accettabile, ma c'è motivo di credere che gli effetti quanto-gravitazionali possano condurre a una lunghezza d'onda minima per tutti i campi non maggiore della lunghezza d'onda di Planck, $(\hbar G/c^3)^{1/2} = 1.6 \times 10^{-33} \text{ cm}$. Secondo la teoria della relatività generale, la geometria dell'universo sarebbe curva se la densità di massa dell'universo superasse $\rho_c \approx 5 \times 10^{-30} \text{ g/cm}^3$. La densità di massa conosciuta è più piccola di questa di un fattore 10 o 20, ma alcune persone sostengono che la materia oscura possa portare questo valore a superare ρ_c . Supponiamo che l'energia di punto zero sia responsabile per questa massa mancante. Una lunghezza d'onda, $\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}$, potrebbe essere stimata uguagliando $\rho_c c^2$ alla

(2.4.4), ottenendo $\lambda_c \approx 0.02\text{cm}$. Niente da fare, questo valore è troppo più grande per una lunghezza d'onda minima.

Sebbene queste riflessioni suggeriscano che l'energia di punto zero del campo elettromagnetico non possa essere reale, un problema proposto da Casimir (1948) porta alla conclusione opposta. Consideriamo una grande cavità di dimensioni $L \times L \times L$ circondata da pareti conduttrici. Una piastra conduttrice viene inserita a una distanza R da una delle facce yz ($R \ll L$).



La nuova condizione al contorno in $x = R$ altera l'energia di ciascun modo del campo. Seguendo Casimir, calcoliamo la variazione di energia come una funzione di R .



Denotiamo con W_x l'energia elettromagnetica dentro una cavità lunga X nella direzione x . La variazione nell'energia dovuta all'inserimento della piastra in $x = R$ sarà

$$\Delta W = W_R + W_{L-R} - W_L \quad (2.4.6)$$

Ognuno di questi termini è infinito ma la differenza risulta essere finita. Ogni modo ha un'energia di punto zero pari a $\frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{1}{2}\hbar ck$, e l'energia totale è la somma delle energie di punto zero di tutti i modi. Se le dimensioni della cavità sono molto grandi, possiamo rimpiazzare le somme su modi discreti con integrali. Quindi abbiamo

$$W_L = \underbrace{\frac{2L^3}{\pi^3}}_{2[\Delta k_i]^{-3}} \int \int \int_0^\infty \frac{1}{2} \hbar ck dk_x dk_y dk_z \quad (2.4.7)$$

$$W_{L-R} = \frac{2(L-R)L^2}{\pi^3} \int \int \int_0^\infty \frac{1}{2} \hbar ck dk_x dk_y dk_z \quad (2.4.8)$$

con $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$. Il fatto che k_x sia una grandezza discreta deve essere tenuto in considerazione per il calcolo di W_R (dato che $R \ll L$), quindi abbiamo

$$W_R = \sum_{n=0}^{\infty} 2\theta_n \frac{L^2}{\pi^2} \int \int_0^\infty \frac{1}{2} \hbar ck dk_y dk_z \quad (2.4.9)$$

con $k = \sqrt{(n\pi/R)^2 + k_y^2 + k_z^2}$, e $\theta_n = 1$ se $n > 0$, $\theta_n = \frac{1}{2}$ se $n = 0$. Il fattore θ_n va incluso poiché ci sono due stati di polarizzazione per $n > 0$ ma solo

uno per $n = 0$.

Poiché la somma e gli integrali sono divergenti è necessario introdurre una funzione di *cut-off*, $f(k/k_c)$, avente le proprietà

$$f\left(\frac{k}{k_c}\right) \rightarrow 1, \quad k \ll k_c \quad (2.4.10)$$

$$f\left(\frac{k}{k_c}\right) \rightarrow 0, \quad k \gg k_c \quad (2.4.11)$$

Non si tratta solo di un artificio matematico. Per frequenze sufficientemente alte ($w \gg ck_c$), una piastra metallica cessa di essere un conduttore, e non influenza il campo elettromagnetico. Quindi la piastra a $x = R$ non ha effetti sulle energie ad alte frequenze, e quindi queste non danno contributo a ΔW . La forma esplicita di $f(k/k_c)$, e il valore di k_c dipendono dalla natura del materiale, tuttavia questi dettagli non modificano ΔW nell'approssimazione al primo ordine.

Mettendo insieme i risultati sopra, abbiamo

$$\Delta W = \hbar c \frac{L^2}{\pi^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n g\left(\frac{n\pi}{R}\right) - \frac{R}{\pi} \int_0^{\infty} g(k_x) dk_z \right\} \quad (2.4.12)$$

dove

$$g(k_x) = \int \int_0^{\infty} k f\left(\frac{k}{k_c}\right) dk_y dk_z \quad (2.4.13)$$

e $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$. L'espressione integrale per $g(k_x)$ può essere semplificata effettuando alcune sostituzioni. Innanzitutto introduciamo $\kappa = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$ e utilizziamo coordinate polari nel piano yz , per ottenere

$$g(k_x) = \underbrace{\frac{4\pi}{8}}_{\text{Integrazione sul primo ottante}} \int_0^{\infty} \sqrt{k_x^2 + \kappa^2} f\left(\frac{\sqrt{k_x^2 + \kappa^2}}{k_c}\right) \kappa d\kappa \quad (2.4.14)$$

Adesso introduciamo le variabili adimensionali n e α al posto di $k_x = \frac{n\pi}{R}$ e $\kappa = \frac{\alpha\pi}{R}$:

$$g(k_x) = \frac{\pi}{2} \frac{\pi^3}{R^3} \int_0^{\infty} \sqrt{n^2 + \alpha^2} f\left(\frac{\pi\sqrt{n^2 + \alpha^2}}{Rk_c}\right) \alpha d\alpha \quad (2.4.15)$$

Infine sostituiamo $w = n^2 + \alpha^2$, $dw = 2\alpha d\alpha$, e otteniamo

$$g(k_x) = \frac{\pi^4 F(n)}{4R^3} \quad (2.4.16)$$

con

$$F(n) = \int_{n^2}^{\infty} \sqrt{w} f\left(\frac{\pi\sqrt{w}}{Rk_c}\right) dw \quad (2.4.17)$$

Quindi la (2.4.12) diventa

$$\Delta W = \frac{\hbar c L^2 \pi^4}{4\pi^2 R^3} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n F(n) - \int_0^{\infty} F(n) dn \right\} \quad (2.4.18)$$

La somma discreta nell'espressione (2.4.18) è una comune approssimazione numerica dell'integrale, conosciuta come approssimazione trapezoidale. La differenza tra la somma e l'integrale può essere stimata per mezzo della *formula di Eulero-Maclaurin*,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n F(n) - \int_0^{\infty} F(n) dn = \frac{-1}{6 \times 2!} F'(0) + \frac{1}{30 \times 4!} F'''(0) - \dots \quad (2.4.19)$$

Dalla (2.4.17), otteniamo

$$\begin{aligned} F'(n) &= -2n^2 f\left(\frac{\pi n}{Rk_c}\right), \\ F''(n) &= -4nf\left(\frac{\pi n}{Rk_c}\right) - 2n^2 f'\left(\frac{\pi n}{Rk_c}\right) \left(\frac{\pi}{Rk_c}\right), \\ F'''(n) &= -4f\left(\frac{\pi n}{Rk_c}\right) - 8nf'\left(\frac{\pi n}{Rk_c}\right) \left(\frac{\pi}{Rk_c}\right) - 2n^2 f''\left(\frac{\pi n}{Rk_c}\right) \left(\frac{\pi}{Rk_c}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

Per via della (2.4.10), abbiamo che $F'(0) = 0$ e $F'''(0) = -4$. Quindi la variazione dell'energia di punto zero dovuta alla piastra conduttrice inserita in $x = R$ è

$$\Delta W = -\hbar c \frac{\pi^2 L^2}{720 R^3} \quad (2.4.21)$$

È chiaro dal calcolo appena svolto che i contributi delle derivate di ordine maggiore omessi dalla (2.4.19) saranno proporzionali a qualche potenza di $1/Rk_c$, e quindi il risultato (2.4.21) sarà valido ammesso che $Rk_c \gg 1$.

Nel limite $L \rightarrow \infty$, la variazione di energia produce una forza per unità di area tra le piastre conduttrici in $x = 0$ e $x = R$:

$$F = -\frac{1}{L^2} \frac{\partial \Delta W}{\partial R} = -\frac{\hbar c \pi^2}{240 R^4} \quad (2.4.22)$$

Il segno meno indica che *la forza è attrattiva*. Misure sperimentali, anche piuttosto recenti, hanno confermato la predizione teorica di Casimir. Questi risultati indicano che la nozione di energia di punto zero non è spuria, e non può essere scartata. Siamo di fronte a un enigma non ancora risolto: un'energia di punto zero infinita non è sensata, ma parti finite di essa permettono di predire risultati sperimentali.

2.5 Spazio di Fock e formalismo degli operatori di creazione e distruzione

I vettori ortonormali delle basi dello spazio degli stati per sistemi di molte particelle identiche (conosciuto come *spazio di Fock*) sono rappresentati da: lo stato di vuoto, $|0\rangle$; un set completo di vettori di stato di singola particella, $\{|\phi_a\rangle : (\alpha = 1, 2, 3, \dots)\}$ dove l'indice a è un'abbreviazione per tutti i numeri quantici necessari per specificare un determinato stato; un set completo di stati a due particelle; un set completo di stati a tre particelle e così via. Tuttavia, questi set completi di stati di più particelle contengono *esclusivamente* vettori della simmetria di permutazione corretta (saranno stati simmetrici o antisimmetrici a seconda che le particelle siano bosoni o fermioni).

Nel seguito studieremo la costruzione dello spazio di Fock per bosoni, ovvero particelle il cui spin è un intero multiplo di \hbar e che sono descritti solo da stati simmetrici.

2.5.1 Bosoni

Per i bosoni non è valido il principio di esclusione di Pauli che caratterizza gli stati fermionici, pertanto è possibile costruire stati di più particelle in cui un singolo orbitale è occupato da più particelle, o, in altre parole, due o più particelle possono essere descritte dagli stessi numeri quantici. Quindi, mentre per i fermioni possiamo caratterizzare gli stati antisimmetrici semplicemente specificando gli orbitali occupati, nel caso dei bosoni dobbiamo anche specificare il grado di occupazione di ciascun orbitale. Se i vettori di base degli stati a singola particella consistono in un set di orbitali $\{|\phi_a\rangle : (\alpha = 1, 2, 3, \dots)\}$, possiamo denotare un vettore di uno stato a più bosoni come $|n_1, n_2, n_3, \dots\rangle$ dove l'intero positivo n_α è il numero di occupazione dell'orbitale ϕ_α .

Adesso definiamo l'*operatore di creazione* con le seguenti proprietà

$$\begin{aligned} a_\alpha^\dagger |0\rangle &= |\phi_\alpha\rangle = |0, 0, \dots, n_\alpha = 1, 0, \dots\rangle, \\ a_\alpha^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots\rangle &\propto |n_1, n_2, \dots, n_\alpha + 1, \dots\rangle \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Dato che questi vettori sono simmetrici rispetto a permutazioni di particelle, si deve avere $a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger = a_\beta^\dagger a_\alpha^\dagger$. È facile mostrare che l'operatore aggiunto $a_\alpha = (a_\alpha^\dagger)^\dagger$, agisce come un *operatore di distruzione*, con le proprietà

$$\begin{aligned} a_\alpha |\phi_\alpha\rangle &= |0\rangle, \\ a_\alpha |n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots\rangle &\propto |n_1, n_2, \dots, n_\alpha - 1, \dots\rangle, \quad (n_\alpha > 0), \\ a_\alpha |n_1, n_2, \dots, n_\alpha = 0, \dots\rangle &= |0\rangle \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Il fattore di proporzionalità non specificato in queste espressioni è fissato dalla richiesta che il prodotto $a_\alpha^\dagger a_\alpha$ rappresenti l'*operatore numero* per l'orbitale

α :

$$a_\alpha^\dagger a_\alpha |n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots\rangle = n_\alpha |n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots\rangle \quad (2.5.3)$$

Quindi dalla relazione

$$(\langle n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots | a_\alpha^\dagger (a_\alpha |n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots\rangle)) = n_\alpha \quad (2.5.4)$$

otteniamo

$$a_\alpha |n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots\rangle = (n_\alpha)^{1/2} |n_1, n_2, \dots, n_\alpha - 1, \dots\rangle \quad (2.5.5)$$

(Il fattore di fase arbitrario è stato posto uguale a 1.) Si dimostra facilmente che

$$a_\alpha^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots\rangle = (n_\alpha + 1)^{1/2} |n_1, n_2, \dots, n_\alpha + 1, \dots\rangle \quad (2.5.6)$$

Dalle (2.5.6) e (2.5.5) deduciamo la relazione di commutazione

$$a_\alpha a_\beta^\dagger - a_\beta^\dagger a_\alpha = \delta_{\alpha\beta} I \quad (2.5.7)$$

Osserviamo che gli operatori di creazione e distruzione per bosoni sono matematicamente isomorfi agli operatori scaletta per un oscillatore armonico.

2.6 Stati del campo elettromagnetico

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto che il campo elettromagnetico può essere descritto in termini di modi normali, ognuno dei quali è dinamicamente equivalente a un oscillatore armonico. Quindi il campo elettromagnetico è equivalente a set infinito e numerabile di oscillatori armonici indipendenti, e uno stato del campo elettromagnetico può essere specificato in termini degli stati dei vari modi.

2.6.1 Fotoni

L'Hamiltoniana dell' m -esimo modo del campo elettromagnetico è $H_m = \hbar\omega_m(a_m^\dagger a_m + \frac{1}{2})$. I suoi autovettori, indicati con $|n_m\rangle$ con $n_m = 0, 1, 2, \dots$, sono gli autovettori dell'operatore numero $N = a_m^\dagger a_m$. L'Hamiltoniana del campo è la somma delle Hamiltoniane dei modi, e i suoi autovettori sono della forma

$$|\{n\}\rangle \equiv |n_1, n_2, \dots, n_m, \dots\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \dots \otimes |n_m\rangle \otimes \dots \quad (2.6.1)$$

Questa espressione è formalmente analoga a quella per i vettori di stato per un sistema di bosoni, che abbiamo analizzato nella sezione precedente. Quindi l' m -esimo modo di questo stato può essere visto come contenente n_m *fotoni*.

In uno stato con un numero di fotoni definito, i campi elettrici e magnetici

sono indefiniti e fluttuanti. Un calcolo banale, utilizzando l'operatore (2.3.11), mostra che il campo elettrico medio è nullo in un autostato del numero di fotoni

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle n_1, n_2, \dots, n_m, \dots | \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) | n_1, n_2, \dots, n_m, \dots \rangle = 0 \quad (2.6.2)$$

La media del quadrato del campo elettrico è

$$\begin{aligned} \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle &= 2\pi\hbar \sum_m \sum_n (w_m w_n)^{1/2} \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}_n \langle (a_m^\dagger + a_m)(a_n^\dagger + a_n) \rangle = \\ &= 2\pi\hbar \sum_m w_m |\mathbf{u}_m(\mathbf{x})|^2 \langle n_m | (a_m^\dagger + a_m)^2 | n_m \rangle = \\ &= \sum_m 2\pi\hbar w_m |\mathbf{u}_m(\mathbf{x})|^2 (2n_m + 1) \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

La somma su tutti i modi è infinita. Se $n_m = 0$ per tutti gli m , si ottiene lo stato di vuoto, con l'energia di punto zero infinita che abbiamo discusso nelle sezioni precedenti.

Questo problema di divergenza delle somme può spesso essere accantonato (ma non risolto) riconoscendo che un particolare esperimento associa al campo elettromagnetico solo una ristretta banda di frequenze.

2.6.2 Stati coerenti-Proprietà matematiche

Gli autovettori del numero fotonico formano una base ortonormale completa per lo spazio degli stati, ma ovviamente non tutti gli stati del campo elettromagnetico sono necessariamente autostati degli operatori numero di fotoni. È possibile definire autovettori del campo elettrico, ma le fluttuazioni del campo magnetico sarebbero illimitate in tali stati. Ben più utili sono gli *stati coerenti*, in cui le fluttuazioni dei campi elettrico e magnetico sono ugualmente piccole.

Per iniziare trattiamo un singolo modo del campo elettromagnetico. Il singolo modo ha massa unitaria, frequenza angolare w , operatori di creazione e distruzione a^\dagger e a , e stato fondamentale $|0\rangle$, con la proprietà

$$a|0\rangle = 0 \quad (2.6.4)$$

Nello stato fondamentale, gli operatori posizione ed impulso hanno media nulla

$$\langle 0|Q|0\rangle = \langle 0|P|0\rangle = 0 \quad (2.6.5)$$

mentre le varianze soddisfano la relazione di indeterminazione di Heisenberg ($\Delta_Q \Delta_P \geq \frac{\hbar}{2}$) come un'uguaglianza

$$\langle 0|Q^2|0\rangle \langle 0|P^2|0\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \quad (2.6.6)$$

Introduciamo ora il seguente operatore unitario

$$D(z) = \exp(za^\dagger - z^*a) \quad (2.6.7)$$

dove z è un parametro complesso il cui significato risulterà chiaro in seguito. Utilizzando le relazioni (2.3.8) e (2.3.9), possiamo esprimere $D(z)$ in termini degli operatori posizione ed impulso dell'oscillatore armonico:

$$\begin{aligned} D(z) &= \exp\{(Re(z))(a^\dagger - a) + i(Im(z))(a^\dagger + a)\} = \\ &= \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(p_0Q - q_0P)\right\} = \\ &= D(q_0, p_0) \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

dove

$$q_0 = \left(\frac{2\hbar}{w}\right)^{1/2} Re(z) \quad (2.6.9)$$

$$p_0 = (2\hbar w)^{1/2} Im(z) \quad (2.6.10)$$

Nel seguito faremo uso delle notazioni $D(z)$ e $D(q_0, p_0)$ interscambiabilmente. L'operatore $D(q_0, p_0)$ è un *operatore di traslazione nello spazio delle fasi*, con le proprietà

$$D(q_0, p_0)QD^{-1}(q_0, p_0) = Q - q_0I \quad (2.6.11)$$

$$D(q_0, p_0)PD^{-1}(q_0, p_0) = P - p_0I \quad (2.6.12)$$

Queste relazioni si derivano immediatamente dall'identità

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \dots \quad (2.6.13)$$

La relazione precedente si dimostra facilmente come segue.

Consideriamo la funzione $f(x) = e^{xA} B e^{-xA}$ ed espandiamola in serie di Taylor intorno all'origine

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \dots \quad (2.6.14)$$

Si ha che $f(0) = B$, mentre $f'(x) = A f(x) - f(x) A = [A, f(x)]$, da cui $f'(0) = [A, B]$, e ancora $f''(x) = [A, f'(x)] = [A, [A, f(x)]]$, da cui $f''(0) = [A, [A, B]]$. Sostituendo nella (2.6.14) si ottiene la (2.6.13).

Sostituendo $A = (i/\hbar)(p_0Q - q_0P)$ e $B = Q$, otteniamo la (2.6.11). Sostituendo $B = P$, otteniamo la (2.6.12).

I vettori di stato coerente sono ottenuti traslando lo stato fondamentale di un oscillatore nello spazio delle fasi,

$$|z\rangle = D(z)|0\rangle \quad (2.6.15)$$

dove $z = (w/2\hbar)^{1/2}q_0 + i(1/2\hbar w)^{1/2}p_0$ può essere un qualsiasi numero complesso. Poiché l'operatore $D(z)$ è unitario, è chiaro che $\langle z|z\rangle = \langle 0|0\rangle = 1$. La posizione media in uno stato coerente è

$$\begin{aligned}\langle z|Q|z\rangle &= \langle 0|D^\dagger(z)QD(z)|0\rangle = \langle 0|D^{-1}(z)QD(z)|0\rangle = \\ &= \langle 0|D(-z)QD^{-1}(-z)|0\rangle = \\ &= \langle 0|(Q + q_0I)|0\rangle = \\ &= q_0\end{aligned}\tag{2.6.16}$$

Analogamente, abbiamo che

$$\langle z|P|z\rangle = p_0\tag{2.6.17}$$

Possiamo dire che le distribuzioni complessive di probabilità di posizione ed impulso sono quelle dello stato fondamentale, traslate dall'origine dello spazio delle fasi al punto (q_0, p_0) .

I vettori di stato coerente sono autovettori dell'operatore di distruzione. Per mostrare questo fatto facciamo agire $D(z)$ sulla (2.6.4):

$$\begin{aligned}0 &= D(z)a|0\rangle = \\ &= D(z)aD^{-1}(z)D(z)|0\rangle = \\ &= (a - zI)|z\rangle\end{aligned}\tag{2.6.18}$$

Quindi abbiamo

$$a|z\rangle = z|z\rangle\tag{2.6.19}$$

Dal momento che a non è Hermitiano, l'autovalore z non è necessariamente reale, e l'autovettore è solo un ket. L'equazione duale è

$$\langle z|a^\dagger = z^*\langle z|\tag{2.6.20}$$

Segue che una qualsiasi funzione degli operatori di creazione e di distruzione che sia ordinata secondo Wick, può essere banalmente calcolata in uno stato coerente

$$\langle z|f(a^\dagger)g(a)|z\rangle = f(z^*)g(z)\tag{2.6.21}$$

Uno stato coerente $|z\rangle$ può essere espanso in termini degli autovettori numero $\{|n\rangle\}$ per mezzo della cosiddetta *identità di Baker-Hausdorff*:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}\tag{2.6.22}$$

Dimostriamo questa identità. Sia $g(x) = e^{xA}e^{xB}$; allora $g'(x) = Ag(x) + e^{xA}Be^{xB} = (A + e^{xA}Be^{-xA})g(x) = (A + f(x))g(x)$, dove $f(x)$ è la stessa funzione utilizzata per dimostrare la (2.6.13). Giungiamo quindi alla seguente equazione differenziale per g :

$$g'(x) = (A + B + [A, B]x)g(x)\tag{2.6.23}$$

da cui

$$g(x) = e^{\{(A+B)x + \frac{1}{2}[A,B]x^2\}} = e^{xA} e^{xB} \quad (2.6.24)$$

ovvero

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-1/2[A,B]} \quad (2.6.25)$$

Dalla (2.6.25) segue che

$$D(z) \equiv e^{za^\dagger - z^*a} = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) e^{za^\dagger} e^{-z^*a} \quad (2.6.26)$$

Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} |z\rangle &= D(z)|0\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) e^{za^\dagger} e^{-z^*a}|0\rangle = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) e^{za^\dagger}|0\rangle, \quad (\text{usando } a|0\rangle = 0), \quad (2.6.27) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle \end{aligned}$$

e, ricordando che $|n\rangle = (n!)^{-1/2} (a^\dagger)^n |0\rangle$, otteniamo l'espansione desiderata

$$\boxed{|z\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_n \frac{z^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle} \quad (2.6.28)$$

Il set di vettori di stato coerente $\{|z\rangle\}$ può essere utilizzato come base, ma le sue proprietà sono sensibilmente differenti da quelle dei normali insiemi ortonormali. Sebbene anche per i vettori di stato coerente sia valida la solita normalizzazione, $\langle z|z\rangle = 1$, essi *non sono ortogonali*. Utilizzando la (2.6.28) deduciamo che

$$\begin{aligned} \langle z|z'\rangle &= \exp\left[-\frac{1}{2}(|z|^2 + |z'|^2)\right] \sum_n \sum_m \langle n|m\rangle \frac{(z^*)^n (z')^m}{(n!m!)^{1/2}} = \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}(|z|^2 + |z'|^2) + z^*z'\right] \end{aligned} \quad (2.6.29)$$

Il valore assoluto del prodotto scalare è

$$|\langle z|z'\rangle| = \exp\left(-\frac{1}{2}|z - z'|^2\right) \quad (2.6.30)$$

da cui vediamo che, sebbene due stati coerenti non siano ortogonali, l'overlap fra i due è molto piccolo se si trovano ragionevolmente distanti nel piano complesso z .

I vettori di stato coerente obbediscono a una *relazione di completezza*,

$$\frac{1}{\pi} \int |z\rangle \langle z| d^2z = I \quad (2.6.31)$$

dove I è l'operatore identità. L'integrazione è su tutta l'area del piano complesso z . Se $z = x + iy$, allora $d^2z = dx dy = r d\theta dr$. Per dimostrare la (2.6.31), utilizziamo nuovamente l'espansione (2.6.28):

$$\begin{aligned}
\int |z\rangle\langle z| d^2z &= \int \exp(-|z|^2) \sum_n \sum_m |n\rangle\langle m| \frac{z^n (z^*)^m}{(n!m!)^{1/2}} d^2z = \\
&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp(-r^2) \sum_n \sum_m |n\rangle\langle m| \frac{r^{n+m}}{(n!m!)^{1/2}} e^{i(n-m)\theta} r d\theta dr = \\
&= 2\pi \sum_n |n\rangle\langle n| \int_0^\infty \exp(-r^2) \frac{r^{2n+1}}{n!} dr = \\
&= \pi \sum_n |n\rangle\langle n| = \pi I
\end{aligned} \tag{2.6.32}$$

che prova la relazione di completezza. Per mezzo di questa relazione, possiamo esprimere un vettore arbitrario $|\psi\rangle$ come una combinazione lineare di un set $\{|z\rangle\}$:

$$|\psi\rangle = I|\psi\rangle = \pi^{-1} \int |z\rangle\langle z|\psi\rangle d^2z \tag{2.6.33}$$

2.6.3 Stati coerenti-Proprietà fisiche

Uno stato coerente per il campo elettromagnetico si ottiene specificando uno stato coerente per ogni oscillatore del campo. Quindi il vettore di stato coerente sarà della forma

$$|\{z\}\rangle \equiv |z_1, z_2, \dots, z_m, \dots\rangle = |z_1\rangle \otimes |z_2\rangle \otimes \dots \otimes |z_m\rangle \otimes \dots \tag{2.6.34}$$

È parametrizzato da una sequenza infinita numerabile di numeri complessi. L'operatore campo elettrico (2.3.11) nella pittura di Heisenberg può essere scritto come

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = - \sum_m (2\pi\hbar\omega_m)^{1/2} \{a_m^\dagger e^{i\omega_m t} + a_m e^{-i\omega_m t}\} \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) \tag{2.6.35}$$

dove la dipendenza temporale è stata spostata dagli operatori di creazione e di distruzione, in fattori espliciti. Segue dalla (2.6.21) che il campo elettrico medio in uno stato coerente (2.6.34) è

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \rangle &= \langle \{z\} | \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) | \{z\} \rangle = \\
&= \sum_m (2\pi\hbar\omega_m)^{1/2} \{z_m^* e^{i\omega_m t} + z_m e^{-i\omega_m t}\} \mathbf{u}_m(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{2.6.36}$$

Questa è esattamente la stessa forma dell'espansione in modi normali della soluzione classica delle equazioni di Maxwell; il parametro z_m rappresenta l'ampiezza di un modo del campo classico. Tuttavia, va precisato che, nonostante la somiglianza, uno stato coerente di un campo elettromagnetico

quantizzato non è equivalente a un campo classico. L'equazione (2.6.36) descrive solo il valor medio del campo nello stato coerente; bisogna tenere conto anche delle fluttuazioni quantistiche. Uno stato coerente fornisce una buona descrizione del campo elettromagnetico prodotto da un laser. Abbiamo già visto che ci sono fluttuazioni di punto zero non nulle di un modo del campo nel suo stato fondamentale ($|n=0\rangle = |z=0\rangle$), e che la somma di queste fluttuazioni su tutti i modi porta a un valore quadratico medio infinito. Per evitare questa complicazione, calcoliamo le fluttuazioni di un singolo modo del campo. Utilizziamo la notazione $\mathbf{E}_m(\mathbf{x}, t)$ per indicare l' m -esimo termine dell'operatore (2.6.35). La media del quadrato del campo è

$$\begin{aligned} \langle |\mathbf{E}_m(\mathbf{x}, t)|^2 \rangle &= \langle z_m | \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{E}_m | z_m \rangle = \\ &= \langle \{ (a_m^\dagger)^2 e^{i2w_m t} + (a_m)^2 e^{-i2w_m t} + \\ &+ a_m^\dagger a_m + a_m a_m^\dagger \} | z_m \rangle 2\pi \hbar w_m |\mathbf{u}_m(\mathbf{x})|^2 = \\ &= \{ (z_m^*)^2 e^{i2w_m t} + (z_m)^2 e^{-i2w_m t} + z_m^* z_m + (z_m^* z_m + 1) \} \times \\ &\times 2\pi \hbar w_m |\mathbf{u}_m(\mathbf{x})|^2 \end{aligned} \quad (2.6.37)$$

Il valore quadratico medio delle fluttuazioni è

$$\begin{aligned} \langle \Delta(\mathbf{E}_m)^2 \rangle &= \langle |\mathbf{E}_m(\mathbf{x}, t)|^2 \rangle - \langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \rangle^2 = \\ &= 2\pi \hbar w_m |\mathbf{u}_m(\mathbf{x})|^2 \end{aligned} \quad (2.6.38)$$

Il risultato trovato è indipendente da z_m , ed è uguale al valore quadratico medio delle fluttuazioni nello stato fondamentale. Potevamo aspettarci questo risultato, dal momento che lo stato coerente si ottiene mediante una traslazione dello stato fondamentale nello spazio delle fasi. Il rapporto tra la deviazione standard delle fluttuazioni e il campo medio, $\langle \Delta(\mathbf{E}_m)^2 \rangle^{1/2} / \langle |\mathbf{E}_m| \rangle$, è di ordine $|z_m|^{-1}$, e quindi tale rapporto diventa trascurabile nel limite di grandi ampiezze, $|z_m| \rightarrow \infty$. In questo modo otteniamo il limite classico.

La distribuzione del numero di fotoni per ogni modo in uno stato coerente può essere determinata direttamente dall'espansione (2.6.28), dalla quale otteniamo

$$\boxed{\text{Prob}(n|z) = |\langle n|z \rangle|^2 = \frac{|z|^{2n} e^{-|z|^2}}{n!}} \quad (2.6.39)$$

La probabilità di trovare un numero totale n di fotoni nel campo è governata dalla *distribuzione di Poisson*. Le medie $\langle n \rangle$ e $\langle n^2 \rangle$ possono essere ottenute dalle note proprietà della distribuzione di Poisson.

Tuttavia noi le calcoleremo direttamente dagli operatori quanto-meccanici. Il numero medio di fotoni contenuto in un modo del campo in uno stato coerente è

$$\langle n \rangle = \langle z | a^\dagger a | z \rangle = z^* z = |z|^2 \quad (2.6.40)$$

La media di n^2 è

$$\begin{aligned}
\langle n^2 \rangle &= \langle z | a^\dagger a a^\dagger a | z \rangle = \\
&= z^* \langle z | a a^\dagger | z \rangle z = \\
&= |z|^2 \langle z | (a^\dagger a + 1) | z \rangle = \\
&= |z|^2 (|z|^2 + 1)
\end{aligned} \tag{2.6.41}$$

Quindi la varianza nel numero di fotoni di questo modo è

$$\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = |z|^2 \tag{2.6.42}$$

Le fluttuazioni dei campi in uno stato coerente sono le più piccole possibile. Osserviamo che ciò comporta una fluttuazione nel numero di fotoni, e che il valore della fluttuazione del numero di fotoni aumenta all'aumentare dell'ampiezza z del campo. Tuttavia, la fluttuazione relativa del numero di fotoni è

$$\frac{\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle^{1/2}}{\langle n \rangle} = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\langle n \rangle^{1/2}} \tag{2.6.43}$$

che diventa piccola nel limite di grandi ampiezze (limite classico).

2.7 Emissione spontanea

2.7.1 Coefficienti A e B di Einstein

Immaginiamo un recipiente contenente atomi, N_a dei quali nello stato più basso (ψ_a) e N_b nello stato più alto (ψ_b). Sia A il rate di emissione spontanea, cosicché il numero di particelle che abbandonano lo stato più alto tramite questo processo, nell'unità di tempo, è pari a $N_b A$.

Si dimostra che il rate di transizione per emissione stimolata risulta proporzionale alla densità di energia del campo elettromagnetico: $B_{ba} u_w$; il numero di particelle che abbandonano lo stato più alto tramite questo meccanismo, per unità di tempo, è $N_b B_{ba} u_w$. Il rate di assorbimento è similmente proporzionale a u_w , chiamiamolo $B_{ab} u_w$; il numero di particelle per unità di tempo che raggiungono lo stato più alto è dunque $N_a B_{ab} u_w$. Detto ciò, allora,

$$\frac{dN_b}{dt} = -N_b A - N_b B_{ba} u_w + N_a B_{ab} u_w \tag{2.7.1}$$

Supponiamo che questi atomi siano in equilibrio termico con il campo, di modo che il numero di particelle in ogni livello sia costante. In questo caso $\frac{dN_b}{dt} = 0$ e dunque si ha

$$u_w = \frac{A}{(N_a/N_b) B_{ab} - B_{ba}} \tag{2.7.2}$$

D'altra parte, sappiamo dalla meccanica statistica elementare che il numero di particelle con energia E , in equilibrio termico a temperatura T , è proporzionale al *fattore di Boltzmann* $e^{-\frac{E}{k_B T}}$, dunque

$$\frac{N_a}{N_b} = \frac{e^{-\frac{E_a}{k_B T}}}{e^{-\frac{E_b}{k_B T}}} = e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \quad (2.7.3)$$

e quindi

$$u_\omega = \frac{A}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} B_{ab} - B_{ba}} \quad (2.7.4)$$

Ma la formula di Planck della radiazione di corpo nero fornisce la densità di energia della radiazione termica

$$u_\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \quad (2.7.5)$$

Mettendo a confronto le due espressioni concludiamo che

$$B_{ab} = B_{ba} \quad (2.7.6)$$

e

$$A = \frac{\omega^3 \hbar}{\pi^2 c^3} B_{ba} \quad (2.7.7)$$

L'equazione (2.7.6) conferma nuovamente qualcosa che già sapevamo: Il rate di trasmissione per emissione stimolata è lo stesso per l'assorbimento. L'equazione (2.7.7) porge il rate di emissione spontanea in termini del rate di emissione stimolata (noto), infatti¹⁴

$$B_{ba} = \frac{4\pi^2}{3\hbar^2} |\mathbf{D}|^2 \quad (2.7.8)$$

dove

$$\mathbf{D} \equiv q \langle \psi_b | \mathbf{r} | \psi_a \rangle \quad (2.7.9)$$

e quindi il rate di emissione spontanea è

$$\boxed{A = \frac{4\pi\omega^3 |\mathbf{D}|^2}{3\pi\hbar c^3}} \quad (2.7.10)$$

¹⁴Questo risultato si può ricavare dalla teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo in meccanica quantistica.

2.7.2 Emissione spontanea

Il fenomeno dell'emissione spontanea emerge naturalmente da un modello in cui sia l'atomo che il campo elettromagnetico sono trattati come sistemi quanto-meccanici.

L'Hamiltoniana del nostro sistema è della forma

$$H = H_{at} + H_{em} + H_{int} \quad (2.7.11)$$

Qui H_{at} è l'Hamiltoniana dell'atomo, e H_{em} è l'Hamiltoniana del campo elettromagnetico (2.3.6). Questi due operatori commutano dal momento che operano su diversi gradi di libertà. Se non ci fosse interazione tra l'atomo e il campo, gli stati stazionari del sistema sarebbero della forma $|\psi\rangle = |\text{atomo}\rangle \otimes |\text{campo}\rangle$, che è un autovettore sia di H_{at} che di H_{em} . Tuttavia il termine di interazione H_{int} non commuta con H_{at} e con H_{em} , quindi un prodotto di autovettori di H_{at} e H_{em} non è autovettore di H e non rappresenta uno stato stazionario.

Limiteremo la nostra trattazione alla cosiddetta *approssimazione di dipolo*, che è valida ogniqualvolta la lunghezza d'onda della radiazione è molto maggiore del diametro dell'atomo. Quindi considereremo il seguente operatore di interazione:

$$H_{int} \approx H_D = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.7.12)$$

dove \mathbf{D} è l'operatore momento di dipolo dell'atomo, e \mathbf{E} è l'operatore campo elettrico (2.6.35) calcolato nella posizione dell'atomo.

Nel seguito calcoleremo il rate di transizione spontanea all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni utilizzando la regola d'oro di Fermi

$$R_s = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | H_{int} | \psi_i \rangle|^2 n(\epsilon_f) \quad (2.7.13)$$

Questa formula si ricava sotto l'assunzione che la perturbazione agisca per un certo tempo T , prendendo poi il limite per $T \rightarrow \infty$. Possiamo pensare di poterla utilizzare per un'interazione che è sempre presente e non può essere accesa o spenta. Il fattore $n(\epsilon_f)$ è la densità di stati finali per unità di energia. Il nostro sistema include il campo elettromagnetico, i cui stati sono continui, e l'atomo i cui stati sono discreti, quindi $n(\epsilon_f)$ sarà la densità di stati fotonici. Se i modi del campo sono confinati dentro una cavità di volume V , ci sarà un valore permesso \mathbf{k} in una porzione dello spazio dei k il cui volume è $(2\pi)^3/V$.¹⁵ Quindi la densità di stati fotonici per unità di energia è

$$n(\epsilon_f) = 2 \times V(2\pi)^{-3} \times 4\pi k^2 \times \frac{dk}{d\epsilon} = \frac{V\omega^2}{\pi^2 \hbar c^3} \quad (2.7.14)$$

¹⁵Questo fatto si verifica facilmente per una cavità cubica con condizioni al contorno periodiche, ma il risultato è indipendente dalla forma e dalle particolari condizioni al contorno.

Il fattore 2 iniziale tiene conto dei due stati di polarizzazione. Abbiamo introdotto la frequenza angolare $w = ck$, e l'energia del fotone $\epsilon = \hbar w$.

Consideriamo come stato iniziale $|\psi_i\rangle = |i\rangle \otimes |0\rangle$, dove $|i\rangle$ è lo stato iniziale atomico, e $|0\rangle$ è lo stato a zero fotoni del campo elettromagnetico. Lo stato finale nella formula (2.7.13) sarà della forma $|\psi_f\rangle = |f\rangle \otimes |n_m = 1\rangle$, dove $|f\rangle$ è lo stato finale dell'atomo, e $|n_m = 1\rangle$ è uno stato a singolo fotone tale che la condizione $\epsilon_i - \epsilon_f = \hbar w$ di conservazione dell'energia sia soddisfatta.¹⁶ Quindi l'elemento di matrice al quadrato è

$$|\langle\psi_f|H_{int}|\psi_i\rangle|^2 = 2\pi\hbar w |\langle f|\mathbf{D}\cdot\mathbf{u}_m|i\rangle|^2 \quad (2.7.15)$$

e quindi

$$R_s = \frac{4w^3}{\hbar c^3} |\langle f|\mathbf{D}|i\rangle|^2 \frac{V}{3} |\mathbf{u}_m|^2 \quad (2.7.16)$$

Il fattore 1/3 proviene dalla media angolare di $(\mathbf{D}\cdot\mathbf{u}_m)^2$. Se le funzioni modali $\mathbf{u}_m(\mathbf{x})$ sono onde piane, come è appropriato per un atomo che irradia nello spazio vuoto, allora abbiamo $|\mathbf{u}_m|^2 = V^{-1}$. Allora il rate di emissione spontanea diviene

$$R_s = \frac{4w^3}{3\hbar c^3} |\langle f|\mathbf{D}|i\rangle|^2 \quad (2.7.17)$$

Quindi il calcolo di Einstein basato sull'intuizione si rivela in accordo con la moderna teoria quantistica dei campi.

2.8 Rivelatori di fotoni

Essenzialmente, un rivelatore fotoelettrico consiste in un atomo che può essere ionizzato dall'assorbimento di un fotone. In questa sezione calcoleremo la probabilità di ionizzazione al primo ordine in teoria delle perturbazioni; scriviamo l'Hamiltoniana del sistema come

$$H = H_0 + V \quad (2.8.1)$$

dove

$$H_0 = H_{at} + H_{em} \quad (2.8.2)$$

è la somma delle Hamiltoniane dell'atomo isolato e del campo elettromagnetico. Per descrivere la loro interazione, utilizziamo l'approssimazione di dipolo,

$$V = -\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} \quad (2.8.3)$$

che è stata discussa nella sezione precedente.

A questo punto è conveniente introdurre la cosiddetta *rappresentazione*

¹⁶La condizione di conservazione dell'energia è implicita nella (2.7.13) ed appare esplicitamente nella sua derivazione.

interazione, che si ottiene dalla rappresentazione di Schrödinger per mezzo della trasformazione unitaria

$$\begin{aligned} |\Psi_I(t)\rangle &= e^{iH_0t/\hbar}|\Psi(t)\rangle, \\ V_I(t) &= e^{iH_0t/\hbar}V e^{-iH_0t/\hbar} = -\mathbf{D}_I(t) \cdot \mathbf{E}_I(t) \end{aligned} \quad (2.8.4)$$

È semplice dimostrare che l'equazione cui obbediscono gli stati nella rappresentazione interazione è

$$V_I(t)|\Psi_I(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\Psi_I(t)\rangle \quad (2.8.5)$$

infatti

$$\begin{aligned} V_I(t)|\Psi_I(t)\rangle &= e^{iH_0t/\hbar}V e^{-iH_0t/\hbar}e^{iH_0t/\hbar}|\Psi(t)\rangle = \\ &= e^{iH_0t/\hbar}V|\Psi(t)\rangle = e^{iH_0t/\hbar}(H - H_0)|\Psi(t)\rangle = \\ &= e^{iH_0t/\hbar}(i\hbar) \frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle - e^{iH_0t/\hbar}H_0|\Psi(t)\rangle = \\ &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\Psi_I(t)\rangle + e^{iH_0t/\hbar}H_0|\Psi(t)\rangle - e^{iH_0t/\hbar}H_0|\Psi(t)\rangle = \\ &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\Psi_I(t)\rangle \end{aligned} \quad (2.8.6)$$

È quindi evidente che questa trasformazione focalizza l'attenzione sugli effetti dell'interazione.

Siccome i due termini che formano H_0 commutano, abbiamo

$$\mathbf{E}_I(t) = e^{iH_0t/\hbar}\mathbf{E}e^{-iH_0t/\hbar} = e^{iH_{em}t/\hbar}\mathbf{E}e^{-iH_{em}t/\hbar} \quad (2.8.7)$$

dove H_{em} è dato dalla (2.3.2). Quindi l'operatore $\mathbf{E}_I(t)$ descritto in rappresentazione interazione è lo stesso operatore descritto nella (2.3.11) in rappresentazione di Heisenberg. Analogamente l'operatore momento di dipolo atomico è

$$\mathbf{D}_I(t) = e^{iH_0t/\hbar}\mathbf{D}e^{-iH_0t/\hbar} = e^{iH_{at}t/\hbar}\mathbf{D}e^{-iH_{at}t/\hbar} \quad (2.8.8)$$

Siano $|a\rangle$ e $|b\rangle$ gli autovettori di H_{at} con autovalori energetici ϵ_a e ϵ_b rispettivamente. Allora l'elemento di matrice dell'operatore dipolo elettrico è

$$\langle b|\mathbf{D}_I(t)|a\rangle = e^{i\omega_{ba}t}\langle b|\mathbf{D}|a\rangle \quad (2.8.9)$$

dove $\hbar\omega_{ba} = \epsilon_b - \epsilon_a$ e $\langle b|\mathbf{D}|a\rangle$ è l'elemento di matrice in rappresentazione di Schrödinger. Dalla (2.8.5) segue che la dipendenza temporale del vettore di stato è data da

$$\begin{aligned} |\Psi_I(t)\rangle &= |\Psi_I(0)\rangle + (i\hbar)^{-1} \int_0^t V_I(t')|\Psi_I(t')\rangle dt' \\ &\approx |\Psi_I(0)\rangle + (i\hbar)^{-1} \int_0^t V_I(t')|\Psi_I(0)\rangle dt' \end{aligned} \quad (2.8.10)$$

dove la prima riga è esatta, mentre la seconda è corretta al primo ordine in V . Assumiamo che a $t = 0$ il rivelatore atomico sia preparato in uno stato non correlato con lo stato del campo elettromagnetico, quindi il vettore di stato iniziale del sistema è

$$|\Psi_I(0)\rangle = |a\rangle \otimes |\psi_i\rangle \equiv |a; \psi_i\rangle \quad (2.8.11)$$

Siccome il nostro obiettivo consiste nel misurare qualcosa che riguarda il campo, dobbiamo ammettere che lo stato iniziale del campo $|\psi_i\rangle$ sia arbitrario. Sia $|b; \psi_f\rangle \equiv |b\rangle \otimes |\psi_f\rangle$ un possibile stato finale, ortogonale a $|a; \psi_i\rangle$. L'ampiezza di transizione a questo stato finale, al primo ordine, è

$$\begin{aligned} \langle b; \psi_f | \Psi_I(t) \rangle &= (i\hbar)^{-1} \int_0^t \langle b; \psi_f | V_I(t') | a; \psi_i \rangle dt' = \\ &= -(i\hbar)^{-1} \int_0^t e^{i w_{ba} t'} \langle b | \mathbf{D} | a \rangle \langle \psi_f | \mathbf{E}(t') | \psi_i \rangle dt' \end{aligned} \quad (2.8.12)$$

Da qui in avanti, omettiamo l'indice I per l'operatore campo elettrico, dato che è esattamente lo stesso operatore della precedente sezione. L'operatore campo elettrico (2.6.35) è costituito da due parti,

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}^{(-)}(t) + \mathbf{E}^{(+)}(t) \quad (2.8.13)$$

dove

$$\mathbf{E}^{(-)}(t) = \sum_m (2\pi\hbar w_m)^{1/2} \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) a_m^\dagger e^{i w_m t} \quad (2.8.14)$$

$$\mathbf{E}^{(+)}(t) = \sum_m (2\pi\hbar w_m)^{1/2} \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) a_m e^{-i w_m t} \quad (2.8.15)$$

La prima parte ($\mathbf{E}^{(-)}(t)$) è detta componente a *frequenza negativa*, mentre la seconda ($\mathbf{E}^{(+)}(t)$), componente a *frequenza positiva*. È evidente che l'ampiezza di transizione (2.8.12) contiene la componente di Fourier del campo alla frequenza w_{ba} . Se l'atomo avesse solo due stati, si comporterebbe come un rivelatore unicamente a questa frequenza particolare. In un vero rivelatore fotoelettrico, lo stato iniziale $|a\rangle$ è lo stato fondamentale dell'atomo, e lo stato finale $|b\rangle$ dell'atomo ionizzato è in un continuo, quindi abbiamo $w_{ba} > 0$. L'integrale nella (2.8.12) sarà dominato dalle componenti del campo elettrico di frequenza vicina a w_{ba} . Il contributo delle componenti a frequenza negativa dell'operatore campo elettrico all'integrando sono funzioni di t' rapidamente oscillanti e il loro contributo netto all'integrale è molto piccolo. In ogni misurazione ottica il tempo di osservazione sarà molto più lungo del periodo di oscillazione della radiazione, ovvero $w_{ba} t \gg 1$, è quindi una buona approssimazione trascurare il contributo delle frequenze negative dalla (2.8.12). Pertanto solo la componente a frequenza positiva (operatore di distruzione) dell'operatore campo elettrico contribuisce significativamente alla probabilità di ionizzazione. Questo fatto può essere interpretato pensando

che un atomo nel suo stato fondamentale può solo assorbire radiazione, annichilendo un fotone, ma non può emettere un fotone. Quindi rimpiazziamo l'operatore campo elettrico $\mathbf{E}(t)$ con la sua componente di frequenza positiva $\mathbf{E}^{(+)}(t)$:

$$\langle b; \psi_f | \Psi_I(t) \rangle = -(i\hbar)^{-1} \int_0^t e^{iw_{ba}t'} \sum_{\nu=1}^3 \langle b | D_\nu | a \rangle \langle \psi_f | E_\nu^{(+)}(t') | \psi_i \rangle dt' \quad (2.8.16)$$

Il quadrato dell'ampiezza (2.8.16) da la probabilità di transizione verso un certo stato particolare del sistema (atomo+campo). Ciò che sarà rivelato sarà, però, solo lo stato dell'atomo, non del campo, dato che è solo tramite i suoi effetti sulla materia che noi possiamo ottenere informazioni sul campo. Quindi sommiamo la probabilità di transizione su tutti gli stati finali del campo. Sia $M(b)$ la probabilità che un fotoelettrone, eccitato allo stato b , sia registrato dagli strumenti di misura. (Questo fattore tiene conto delle amplificazioni necessarie e dell'elettronica che noi non stiamo considerando.) Allora la probabilità al tempo t che un tale evento sia avvenuto e sia stato registrato dal nostro apparato è

$$P_b(t) = M(b) \sum_f |\langle b; \psi_f | \Psi_I(t) \rangle|^2 \quad (2.8.17)$$

Questa è la probabilità che una transizione $a \rightarrow b$ sia avvenuta e sia stata registrata, indipendentemente dallo stato finale del campo. La dipendenza di questa probabilità dal campo elettromagnetico si manifesta chiaramente attraverso la quantità

$$\begin{aligned} & \sum_f \langle \psi_f | E_\mu^{(+)}(t'') | \psi_i \rangle^* \langle \psi_f | E_\nu^{(+)}(t') | \psi_i \rangle = \\ & = \sum_f \langle \psi_i | E_\mu^{(-)}(t'') | \psi_f \rangle \langle \psi_f | E_\nu^{(+)}(t') | \psi_i \rangle = \\ & = \langle \psi_i | E_\mu^{(-)}(t'') E_\nu^{(+)}(t') | \psi_i \rangle \end{aligned} \quad (2.8.18)$$

Dove abbiamo usato la relazione $[E_\mu^{(+)}]^\dagger = E_\mu^{(-)}$. Un *rivelatore a banda larga* non è in grado di discriminare il particolare stato finale b dell'elettrone, dunque la probabilità che esso sia stato registrato nel tempo t è

$$P(t) = \int P_b n(\epsilon_b) d\epsilon_b \quad (2.8.19)$$

dove $n(\epsilon_b)$ è la densità di stati disponibile al fotoelettrone di energia $\epsilon_b = \epsilon_a + \hbar w_{ba}$. Combinando (2.8.16), (2.8.17), e (2.8.18), possiamo scrivere la *probabilità di rivelazione* come

$$P(t) = \int_0^t \int_0^t \sum_\mu \sum_\nu s_{\nu\mu}(t' - t'') \langle E_\mu^{(-)}(t'') E_\nu^{(+)}(t') \rangle dt' dt'' \quad (2.8.20)$$

Tale probabilità coinvolge una funzione che caratterizza il rivelatore, e una funzione che dipende dallo stato del campo elettrico.

Le caratteristiche del rivelatore sono sintetizzate nella *funzione di sensibilità*,

$$s_{\nu\mu}(t' - t'') = \int M(b) \hbar^{-2} \langle b | D_\nu | a \rangle \langle b | D_\mu | a \rangle^* e^{i w_{ba}(t' - t'')} n(\epsilon_b) d\epsilon_b \quad (2.8.21)$$

la quale determina la selettività del rivelatore rispetto alla frequenza e alla polarizzazione della radiazione.

Lo stato del campo entra in gioco attraverso la *funzione di correlazione* $\langle E_\mu^{(-)}(t'') E_\nu^{(+)}(t') \rangle$. Se lo stato iniziale del campo è lo stato puro $|\psi_i\rangle$, come è stato assunto fino a ora, la funzione di correlazione è

$$\langle E_\mu^{(-)}(t'') E_\nu^{(+)}(t') \rangle = \langle \psi_i | E_\mu^{(-)}(t'') E_\nu^{(+)}(t') | \psi_i \rangle \quad (2.8.22)$$

Se lo stato iniziale del campo non è uno stato puro, ma è descritto da un operatore di stato della forma $\rho_{em} = \sum_i w_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$, allora la funzione di correlazione sarà

$$\langle E_\mu^{(-)}(t'') E_\nu^{(+)}(t') \rangle = \text{Tr} \{ \rho_{em} E_\mu^{(-)}(t'') E_\nu^{(+)}(t') \} \quad (2.8.23)$$

La forma generale (2.8.20) della probabilità di rivelazione è valida indipendentemente dalla natura dello stato del campo. Dato che $E_\nu^{(+)}(t')$ contiene solo operatori di distruzione, la funzione di correlazione del campo si annullerà nello stato di vuoto. Più in generale, non conterrà alcun contributo dalle fluttuazioni di punto zero di ciascun modo del campo che si trovi nel suo stato fondamentale.¹⁷

È evidente dalla (2.8.20) che la probabilità di assorbire un fotone a un certo istante t non dipende solamente dal campo al tempo t , bensì dai campi considerati in un qualche intervallo di tempo che dipende dalla natura dell'apparato di misura. Se l'integrando della (2.8.21) fosse indipendente dalla frequenza (o dall'energia), fatta eccezione per il fattore $e^{i w_{ba}(t' - t'')}$, allora la funzione di sensibilità $s_{\nu\mu}(t' - t'')$ sarebbe proporzionale a $\delta(t' - t'')$, e la probabilità non coinvolgerebbe più la correlazione di campi a due tempi diversi. Questo limite ideale è rigorosamente impossibile poiché, come anticipato prima, solo le frequenze positive ($w_{ba} > 0$) corrispondono all'assorbimento di fotoni, e tutte le frequenze da $-\infty$ a $+\infty$ sarebbero necessarie per formare una delta funzione del tempo. Tuttavia, nella pratica, questa limitazione può essere spesso sorvolata. Scriviamo la funzione di sensibilità (2.8.21) come

$$s_{\nu\mu}(t' - t'') = \int e^{i w_{ba}(t' - t'')} s_{\nu\mu}(w) dw \quad (2.8.24)$$

¹⁷Notare che questo non equivale a dire che le fluttuazioni di punto zero non hanno effetti fisici, ma solo che questi non possono essere rivelati dall'assorbimento di fotoni.

dove $s_{\nu\mu}(w)$ è chiamata *funzione risposta in frequenza del rivelatore*. Allora la probabilità di rivelazione (2.8.20) può essere scritta come

$$P(t) = \sum_{\mu} \sum_{\nu} \int_0^t dt' \int dw s_{\nu\mu}(w) \int_0^t e^{iw_{ba}(t'-t'')} \langle E_{\mu}^{(-)}(t'') E_{\nu}^{(+)}(t') \rangle dt'' \quad (2.8.25)$$

Solitamente l'integrale più a destra sarà apprezzabilmente maggiore di zero solo su determinati range di frequenza, che chiamiamo *larghezza di banda* della radiazione. Solo i valori di $s_{\nu\mu}(w)$ su tale larghezza di banda potranno influenzare il valore di $P(t)$. Quindi, se la risposta in frequenza del detector è pressoché costante sulla larghezza di banda della radiazione, possiamo rimpiazzare $s_{\nu\mu}(w)$ con un valore costante $s_{\nu\mu}$, e formalmente estendere l'integrazione su w da $-\infty$ a $+\infty$. È chiaro che tutto ciò è equivalente a sostituire la funzione di sensibilità $s_{\nu\mu}(t' - t'')$ con $s_{\nu\mu}\delta(t' - t'')$. Con questa approssimazione, otteniamo un *rate di rivelazione* (probabilità per unità di tempo) uguale a

$$R(t) \equiv \frac{dP(t)}{dt} = \sum_{\mu} \sum_{\nu} s_{\nu\mu} \langle E_{\mu}^{(-)}(t) E_{\nu}^{(+)}(t) \rangle \quad (2.8.26)$$

che dipende esclusivamente dalla funzione di correlazione del campo elettrico a un singolo tempo. È importante ricordare che questa espressione, è valida solo nell'ipotesi che la larghezza di banda del rivelatore sia più grande della larghezza di banda della radiazione.

Rivelazione di n fotoni Possiamo generalizzare l'analisi svolta nelle pagine precedenti per trattare la rivelazione di n fotoni in n diversi punti spazio-temporali. Senza entrare nei dettagli, dovrebbe essere chiaro che questo comporta che si debbano considerare le componenti a frequenza positiva del campo elettrico nelle posizioni degli n atomi differenti che costituiscono il nostro rivelatore ideale, e l'ampiezza di transizione includerà $\langle \psi_f | E^{(+)}(\mathbf{x}_n, t_n) \dots E^{(+)}(\mathbf{x}_1, t_1) | \psi_i \rangle$. (Per semplicità omettiamo gli indici di polarizzazione.) Quando si eleva al quadrato e si somma su tutti gli stati finali del campo questa ampiezza, avremo

$$\begin{aligned} & \sum_f \langle \psi_i | E^{(-)}(\mathbf{x}_1, t_1) \dots E^{(-)}(\mathbf{x}_n, t_n) | \psi_f \rangle \langle \psi_f | E^{(+)}(\mathbf{x}_n, t_n) \dots E^{(+)}(\mathbf{x}_1, t_1) | \psi_i \rangle = \\ & = \langle \psi_i | E^{(-)}(\mathbf{x}_1, t_1) \dots E^{(-)}(\mathbf{x}_n, t_n) E^{(+)}(\mathbf{x}_n, t_n) \dots E^{(+)}(\mathbf{x}_1, t_1) | \psi_i \rangle \end{aligned} \quad (2.8.27)$$

Quindi la probabilità di rivelare n fotoni in coincidenza (o in coincidenza ritardata) è direttamente in relazione con funzioni di correlazione del campo elettrico di ordine più alto.

2.9 Funzioni di correlazione

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto che la probabilità di assorbire uno o più fotoni è determinata da certe correlazioni del campo elettromagnetico. Adesso definiremo le funzioni di correlazione del campo in termini generali, e mostreremo quanto esse siano utili in diversi esperimenti di ottica. È conveniente adottare una notazione abbreviata, scrivendo $E_\mu(\mathbf{x}_n, t_n) = E(x_n)$. Da adesso x_n contiene informazioni riguardo a variabili spaziali, temporali e di polarizzazione (\mathbf{x}_n, t_n, μ) . Definiamo la *funzione di correlazione di grado n* come

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{2n}) &= \\ &= \langle E^{(-)}(x_1) \cdots E^{(-)}(x_n) E^{(+)}(x_{n+1}) \cdots E^{(+)}(x_{2n}) \rangle \end{aligned} \quad (2.9.1)$$

Nella precedente sezione è stato mostrato che la probabilità di rivelare un fotone in ognuno dei punti spazio-temporali x_1, \dots, x_n è proporzionale alla funzione di correlazione diagonale $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_n, \dots, x_1)$ con il fattore di proporzionalità dipendente dalla sensibilità del rivelatore. Se i nostri metodi di misura del campo elettromagnetico consistono solo nel conteggio di fotoni, allora le funzioni di correlazione diagonale rappresentano le uniche quantità misurabili. Tuttavia, se possiamo campionare e combinare i campi da due o più punti spazio-temporali, allora l'interferenza tra di loro ci permette, in effetti, di misurare funzioni di correlazione non diagonali.

2.9.1 Correlazioni al primo ordine: Interferenza

Il rate di rivelazione di fotoni (di una certa polarizzazione non indicata esplicitamente nella notazione) nel punto spazio-temporale $x = (\mathbf{x}, t)$ è proporzionale a

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x; x) &= \langle E^{(-)}(\mathbf{x}, t) E^{(+)}(\mathbf{x}, t) \rangle = \\ &= \sum_n \sum_m 2\pi\hbar(w_n w_m)^{1/2} u_n(\mathbf{x}) u_m(\mathbf{x}) e^{i(w_n - w_m)t} \langle a_n^\dagger a_m \rangle \end{aligned} \quad (2.9.2)$$

La forma spaziale della figura di interferenza è data dal prodotto delle funzioni modali, $u_n(\mathbf{x}) u_m(\mathbf{x})$, ed è la stessa della teoria elettromagnetica classica. Tuttavia, l'ampiezza della figura di interferenza rispecchia lo stato quantistico attraverso la quantità $\langle a_n^\dagger a_m \rangle$. Ovviamente affinché si verifichi interferenza devono essere eccitati almeno due modi.

Un modello semplice ma molto utile consiste nel considerare due modi di onda piana. In questo modello, gli unici modi eccitati sopra lo stato fondamentale sono $e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}}$ e $e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}}$, con $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = w/c$. Dato che i modi del campo nel loro stato fondamentale non contribuiscono alla probabilità di rivelazione dei fotoni; dobbiamo considerare solo quei termini degli operatori di campo che

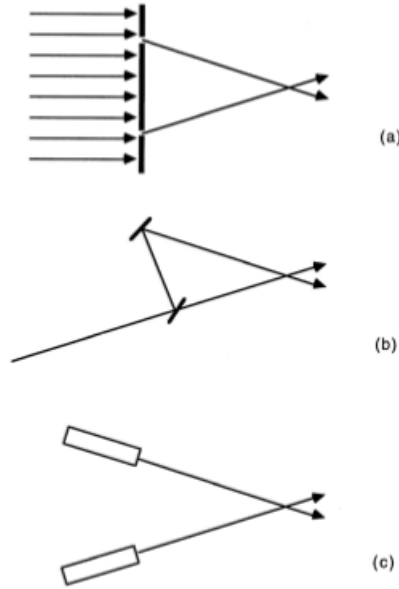
corrispondono a modi eccitati. Quindi possiamo sostituire

$$\begin{aligned} E^{(+)}(\mathbf{x}, t) &= C(a_1 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} + a_2 e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}}) e^{-i\omega t} = \\ E^{(-)}(\mathbf{x}, t) &= C(a_1^\dagger e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} + a_2^\dagger e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}}) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.9.3)$$

dove diverse costanti sono state inglobate nel fattore C . Il rate di rivelazione per questo modello sarà proporzionale a

$$\begin{aligned} G^{(1)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, t) &= C^2 \{ \langle a_1^\dagger a_1 \rangle + \langle a_2^\dagger a_2 \rangle + \\ &+ \langle a_1^\dagger a_2 \rangle e^{-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} + \langle a_2^\dagger a_1 \rangle e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \} = \\ &C^2 \{ \langle a_1^\dagger a_1 \rangle + \langle a_2^\dagger a_2 \rangle + \\ &+ 2|\langle a_1^\dagger a_2 \rangle| \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x} - \phi] \} \end{aligned} \quad (2.9.4)$$

dove la fase ϕ proviene da $\langle a_1^\dagger a_2 \rangle = |\langle a_1^\dagger a_2 \rangle| e^{i\phi}$. Alcune realizzazioni sperimentali del modello a due onde piane sono mostrati in figura.



Nella figura più in alto che descrive la diffrazione da doppia fenditura, i modi del campo sulla destra sarebbero in realtà onde cilindriche, ma lontano dalle fessure possono essere localmente approssimate da onde piane. In tutte e tre le figure, il modello non è applicabile a tutti i punti dello spazio, ma rappresenta una valida approssimazione locale nella regione in cui i due fasci si sovrappongono. Secondo la (2.9.4), il rate di rivelazione può variare periodicamente nello spazio nella direzione di $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$, che corrisponde con la direzione verticale nella figura.

Esempio (i): Stato a singolo fotone.

Consideriamo un vettore di stato per il campo elettromagnetico della forma

$$|\Psi_1\rangle = \alpha|1, 0\rangle + \beta|0, 1\rangle, \quad (|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1), \quad (2.9.5)$$

dove il vettore $|1, 0\rangle = a_1^\dagger|0\rangle$ descrive un fotone nel modo 1 e $|0, 1\rangle = a_2^\dagger|0\rangle$ descrive un fotone nel modo 2. Il vettore di stato $|\Psi_1\rangle$ è un autovettore dell'operatore numero totale di fotoni $N = \sum_m a_m^\dagger a_m$, anche se il numero di fotoni in ogni modo è indefinito. È possibile anche scrivere $|\Psi_1\rangle = b^\dagger|0\rangle$, dove l'operazione di creazione è $b^\dagger = \alpha a_1^\dagger + \beta a_2^\dagger$. Calcolando la (2.9.4) per lo stato $|\Psi_1\rangle$, otteniamo una probabilità di rivelazione dei fotoni proporzionale a

$$G^{(1)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, t) = C^2\{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\text{Re}[\beta^* \alpha e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}}]\} \quad (2.9.6)$$

La figura di interferenza, che si presenta con la stessa forma di quella dell'ottica classica, esiste anche per uno stato a singolo fotone. Ovviamente la figura di interferenza non può essere osservata rivelando un singolo fotone. Dobbiamo eseguire un insieme di misurazioni, preparare lo stato e rivelare il fotone in ogni ripetizione, e la distribuzione statistica dei fotoni rivelati assumerà la forma di una figura di interferenza.

Esempio (ii): Stato a doppio fotone.

Consideriamo adesso il vettore di stato

$$|\Psi_2\rangle = \alpha|2, 0\rangle + \beta|1, 1\rangle + \gamma|0, 2\rangle, \quad (|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1), \quad (2.9.7)$$

dove i tre vettori componenti descrivono due fotoni nel modo 1, un fotone in ogni modo, e due fotoni nel modo 2, rispettivamente. Calcolando (2.9.4) per questo vettore di stato, otteniamo una probabilità di rivelazione proporzionale a

$$G^{(1)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, t) = C^2 \left\{ |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + 2\text{Re}[\sqrt{2}(\beta^* \alpha + \gamma^* \beta) e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}}] \right\} \quad (2.9.8)$$

La figura di interferenza è generalmente simile a quella dell'Esempio (i); ci sono, però, due casi particolari che richiedono la nostra attenzione. Per $\alpha = \gamma = 0, \beta = 1$, ovvero nel caso in cui vi sia esattamente un fotone in ogni modo, non c'è interferenza. Per $\beta = 0, \alpha \neq 0, \gamma \neq 0$ la figura di interferenza scompare nuovamente.

Esempio (iii): Fasci laser indipendenti.

Il campo elettromagnetico prodotto da un laser a singolo modo, è descritto da un vettore di stato coerente $|z_m\rangle$. Lo stato del campo prodotto da due fasci laser che si intersecano, è quindi descritto dal vettore di stato

$$|\Psi\rangle = |z_1\rangle \otimes |z_2\rangle \quad (2.9.9)$$

Questa espressione è appropriata poiché i laser sono indipendenti, e ogni laser eccita un modo del campo. L'equazione (2.9.4) può facilmente essere valutata facendo uso della (2.6.21), ottenendo

$$G^{(1)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, t) = C^2 \{|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\text{Re}[z_2^* z_1 e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}}]\} \quad (2.9.10)$$

Questo risultato è derivabile assumendo che le frequenze dei laser siano uguali. Se consideriamo la possibilità che le loro frequenze possano essere diverse, allora l'esponenziale dipendente dalle variabili spaziali dovrebbe essere moltiplicato per il fattore dipendente dal tempo $e^{-i(w_1 - w_2)t}$. Sebbene possiamo avere $w_1 - w_2 = 0$ in media, le due frequenze saranno soggette a oscillazioni indipendenti casuali, che produrranno variazioni casuali nella figura di interferenza. Quindi la figura di interferenza può essere osservata solo se un numero sufficiente di fotoni può essere raccolto prima che il fattore di fase $e^{-i(w_1 - w_2)t}$ vari troppo. L'interferenza tra due fasci laser indipendenti è stata osservata utilizzando tecniche sperimentali molto sofisticate.

A pagina 9 del suo libro, Dirac afferma, “*Each photon then interferes only with itself. Interference between two different photons never occurs.*” Esaminiamo l'affermazione di Dirac alla luce dei tre esempi riportati sopra. L'interferenza nello stato a singolo fotone è chiaramente compatibile con la frase di Dirac. L'assenza di interferenza nello stato a due fotoni $|1, 1\rangle$ è ancora consistente con il fatto che l'interferenza non si verifica tra due differenti fotoni. Ma cosa dire riguardo all'esempio (iii), che sembra implicare la presenza dell'interferenza tra i fotoni provenienti da due laser diversi? In questo caso l'affermazione di Dirac perde di significato. In sostanza, non sono i fotoni che interferiscono, né con se stessi né con altri fotoni, ma piuttosto la figura di interferenza è dovuta al campo elettromagnetico. Ricordiamo che sono proprio i campi elettrici e magnetici le variabili dinamiche fondamentali della teoria, e sono questi (e non le posizioni e gli impulsi dei fotoni) che sono rappresentati da operatori quanto-meccanici. Il fotone entra nella teoria come una quantità secondaria, in particolare come un'eccitazione elementare del campo. Siamo di fronte a un esempio in cui viene enfatizzata l'importanza primaria dei campi, e in cui non è d'aiuto considerare il campo semplicemente come un flusso di particelle.

3 Esercizi

Esercizio 1

Mostrare che dalle definizioni microscopiche di densità di carica e di

corrente

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}, t) &= \sum_i q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{Q}_i(t)) \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &= \sum_i q_i \mathbf{V}_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{Q}_i(t))\end{aligned}\quad (3.0.1)$$

segue l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (3.0.2)$$

Esercizio 2

Mostrare che dalle equazioni di Maxwell segue l'equazione di continuità.

Esercizio 3

Mostrare che, nel limite statico (ρ e \mathbf{J} non dipendenti dal tempo), si ottengono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \end{array} \right. \quad (3.0.3)$$

Esercizio 4

Ricavare dalle equazioni di Maxwell nel limite statico:

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV \quad (3.0.4)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^2} dV \quad (3.0.5)$$

con $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$.

Esercizio 5

Considerando la relazione relativistica $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{m^2 + p^2/c^2}}$ tra \mathbf{p} e \mathbf{v} , mostrare che la carica q ha, in un campo elettrico costante, la seguente legge oraria:

$$x(t) = \frac{mc^2}{qE} \left(\sqrt{1 + (qEt/mc)^2} - 1 \right) \quad (3.0.6)$$

sapendo che $\mathbf{E} = E\hat{i}$, $\mathbf{Q}(0) = 0$, $\dot{\mathbf{Q}}(0) = \mathbf{V}(0) = 0$.

Esercizio 6

Dimostrare il teorema di Poynting

Esercizio 7

Mostrare perché dalla (1.4.19), non segue che una variazione della carica nel laboratorio può cambiare *istantaneamente* il campo elettrico sulla luna.

Esercizio 8

Ricavare le equazioni generali (indipendenti dalla scelta della gauge) per i potenziali scalare e vettore.

Esercizio 9

Ricavare le equazioni per i potenziali scalare e vettore nella gauge di Lorenz.

Esercizio 10

Mostrare che le trasformazioni

$$\begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \\ \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \end{cases} \quad (3.0.7)$$

non cambiano \mathbf{E} e \mathbf{B} .

Esercizio 10(bis)

Trovare la funzione di gauge Λ che fa passare dal gauge di Lorenz a quello di Coulomb

$$\begin{cases} \mathbf{A}_C = \mathbf{A}_L + \nabla\Lambda \\ \phi_C = \phi_L - \frac{1}{c} \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \end{cases} \quad (3.0.8)$$

Esercizio 11

Ricavare le equazioni delle onde non omogenee per i campi elettrico e magnetico.

Esercizio 12

Ricavare \mathbf{E} e \mathbf{B} dalle equazioni per i potenziali nella gauge di Lorenz.

Esercizio 13

Svolgere l'integrale

$$D(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi^3)} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} 4\pi c \frac{\sin(ckt)}{k} \quad (3.0.9)$$

che emerge durante la risoluzione dell'equazione delle onde non omogenea.

Esercizio 14

Scrivere la trasformata di Fourier temporale delle equazioni di Maxwell e ricavare:

$$\mathbf{E}_w = \int \left\{ \frac{\rho_w \hat{\mathbf{r}}}{r^2} e^{iwr/c} - \frac{iw\rho_w \hat{\mathbf{r}}}{cr} e^{iwr/c} + \frac{iw\mathbf{J}_w}{c^2 r} e^{iwr/c} \right\} dV \quad (3.0.10)$$

Esercizio 15

Ricavare \mathbf{B} , dalle formule di Lienard-Wiechert, nel caso di moto a velocità costante nella direzione \hat{x} .

Esercizio 16

Dimostrare che il campo elettrico in una scatola è descrivibile come una collezione di oscillatori armonici indipendenti.

Esercizio 17

Risolvere il problema del campo elettromagnetico in una cavità rettangolare utilizzando il metodo di separazione delle variabili. (Ricavare (1.10.13).)

Esercizio 18

Ricavare la distribuzione di Planck, sostituendo la U dell'oscillatore armonico quantistico nell'equazione

$$u_w = U \rho_w \quad (3.0.11)$$

con ρ_w dato dalla (1.10.23).

Esercizio 19

Verificare che la distribuzione di Planck soddisfa la legge di Stefan-Boltzmann e ricavare il valore di σ .

Esercizio 20

Verificare che, per gli operatori introdotti nelle (2.3.19) e (2.3.20), vale

$$[a_k, a_k^\dagger] = 1 \quad (3.0.12)$$

Esercizio 21

Risolvere l'equazione di Klein-Gordon

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \mu^2 \right) \varphi = 0 \quad (3.0.13)$$

Esercizio 22

Calcolare valor medio e varianza dell'operatore campo elettrico rispetto alla base del numero di fotoni.

Esercizio 23

Mostrare che l'operatore definito dalla (2.6.7) è unitario.

Esercizio 24

Mostrare che

$$\begin{aligned} D(q_c, p_c) \hat{q} D^{-1}(q_c, p_c) &= \hat{q} - q_c I \\ D(q_c, p_c) \hat{p} D^{-1}(q_c, p_c) &= \hat{p} - p_c I \end{aligned} \quad (3.0.14)$$

Esercizio 25

Dimostrare la seguente relazione

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \dots \quad (3.0.15)$$

Esercizio 26

Data la relazione

$$\mathcal{H} = \mathcal{C} \oplus \mathcal{C}^3 \oplus \mathcal{S}(\mathcal{C}^3 \otimes \mathcal{C}^3) \oplus \dots, \quad (3.0.16)$$

dimostrare la seconda somma diretta.

Esercizio 27

Dimostrare che per gli stati coerenti valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \langle z' | z \rangle &\neq 0 \\ \lim_{|z-z'| \rightarrow \infty} \langle z' | z \rangle &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.0.17)$$

e

$$\frac{1}{\pi} \int |z\rangle \langle z| d^2 z = I \quad (3.0.18)$$

Esercizio 28

Calcolare la varianza dell'operatore campo elettrico su uno stato coerente:

$$\text{Var}\left(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) | (z_\alpha)\right) \quad (3.0.19)$$

Esercizio 29

Dato lo stato coerente $|z\rangle = D(z)|0\rangle$, ricavare come evolve nel tempo lo stato

$$\psi_z(x) = \langle x | z \rangle \quad (3.0.20)$$

Esercizio 30

Dimostrare che in rappresentazione interazione si ottengono gli stessi valori medi che si ottengono in rappresentazione di Schrödinger e di Heisenberg.

Esercizio 31

Dimostrare che, in rappresentazione interazione, vale la seguente equazione

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_I(t)\rangle = V_I(t) |\psi_I(t)\rangle \quad (3.0.21)$$

Esercizio 32

Trovare, se esistono, i valori dei parametri α , β , γ , per cui non c'è interferenza nel caso di stato a doppio fotone

$$|\Psi_2\rangle = \alpha|2, 0\rangle + \beta|1, 1\rangle + \gamma|0, 2\rangle, \quad (|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1), \quad (3.0.22)$$

Esercizio 33

Trattare il caso di interferenza tra due fasci laser indipendenti:

$$|\Psi\rangle = |z_1\rangle \otimes |z_2\rangle \quad (3.0.23)$$

sia nel caso in cui abbiano la stessa frequenza $w = w_1 = w_2$, sia nel caso in cui abbiano due diverse frequenze.