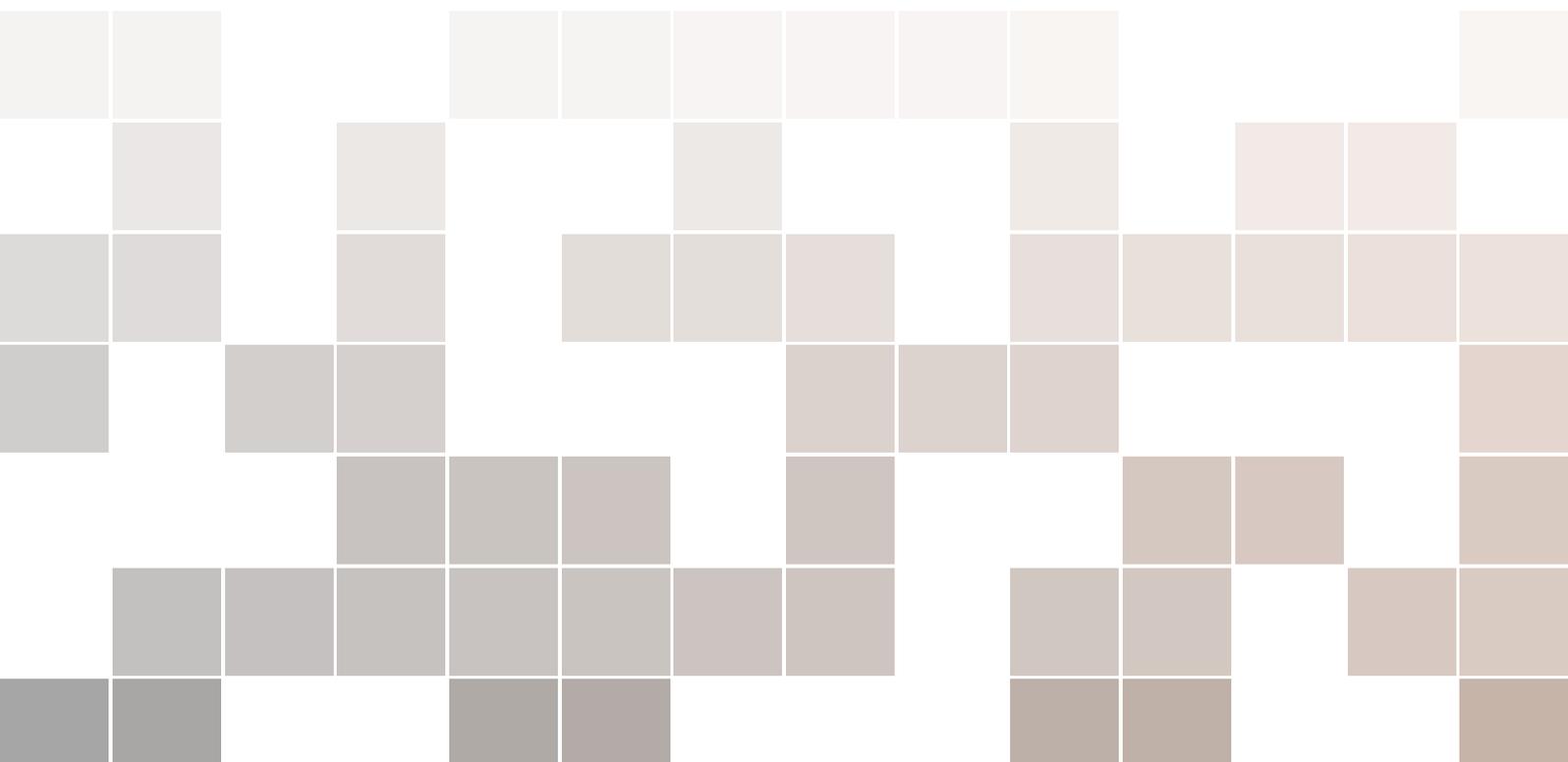


# Lezioni di Fisica Teorica

Nino Zanghì





# Indice

I	Complementi di Meccanica	
<b>1</b>	<b>Equazioni del moto</b> .....	<b>11</b>
<b>1.1</b>	<b>Funzione di Lagrange ed equazioni di Eulero-Lagrange</b>	<b>11</b>
1.1.1	Energia cinetica .....	12
1.1.2	Energia totale .....	13
<b>1.2</b>	<b>Funzione di Hamilton ed equazioni canoniche</b>	<b>14</b>
1.2.1	Equazioni di Hamilton .....	14
1.2.2	Esempi di equazioni del moto e di loro soluzioni .....	15
<b>1.3</b>	<b>Sistemi continui e campi locali</b>	<b>25</b>
1.3.1	Sistema continuo come limite di un sistema discreto .....	25
1.3.2	Il campo di Schrödinger .....	28
1.3.3	Flussi d'energia e quantità localmente conservate .....	30
1.3.4	Relazioni di dispersione .....	33
1.3.5	Formalismo hamiltoniano .....	34
<b>1.A</b>	<b>Appendice – Teorema spettrale e forme quadratiche*</b>	<b>34</b>
1.A.1	Autovalori e autovettori .....	34
1.A.2	Diagonalizzazione ed autovettori .....	35
1.A.3	Aggiunto di un operatore .....	36
1.A.4	Teorema spettrale per operatori autoaggiunti .....	37
1.A.5	Teorema di Sylvester .....	37
<b>2</b>	<b>Ruolo dell'azione in meccanica classica</b> .....	<b>39</b>
<b>2.1</b>	<b>Principio d'azione di Hamilton</b>	<b>39</b>
2.1.1	Principio d'azione per sistemi di particelle .....	39
2.1.2	Variazione dell'integrale d'azione .....	40

2.1.3	Principio d'azione ed equazioni canoniche	41
2.1.4	Moto geodetico*	44
2.1.5	Principio d'azione per campi locali	48
<b>2.2</b>	<b>Funzione principale e funzione caratteristica di Hamilton</b>	<b>49</b>
2.2.1	Variazioni infinitesime della funzione principale di Hamilton	50
2.2.2	Funzione caratteristica di Hamilton*	51
2.2.3	Metodo di Hamilton di integrazione delle equazioni del moto*	55
<b>2.3</b>	<b>Principio d'azione di Jacobi*</b>	<b>57</b>
2.3.1	Integrale d'azione di Jacobi	57
2.3.2	Abbandono del tempo assoluto	58
<b>2.4</b>	<b>Variazione seconda dell'integrale d'azione ed equazione di Jacobi*</b>	<b>58</b>
2.4.1	Equazione di Jacobi	60
<b>2.A</b>	<b>Appendice — Connessione affine e curvatura*</b>	<b>60</b>
2.A.1	Spazio tangente e varietà riemanniana	60
2.A.2	Trasporto parallelo di vettori	62
2.A.3	Connessione affine ed equazione geodetica	63
2.A.4	Derivata covariante e curvatura	65
<b>3</b>	<b>Trasformazioni canoniche*</b>	<b>67</b>
<b>3.1</b>	<b>Proposizione fondamentale della teoria delle trasformazioni canoniche</b>	<b>67</b>
3.1.1	Dimostrazione della proposizione fondamentale	69
3.1.2	Punto di vista attivo e passivo delle trasformazioni canoniche	71
<b>3.2</b>	<b>Proprietà di gruppo e trasformazioni canoniche infinitesime</b>	<b>71</b>
3.2.1	Prodotto di trasformazioni=somma dei generatori	73
3.2.2	La funzione principale di Hamilton come generatore del moto	73
<b>3.3</b>	<b>Parentesi di Poisson</b>	<b>74</b>
3.3.1	Parentesi di Poisson e costanti del moto	74
3.3.2	Parentesi di Poisson e trasformazioni canoniche	75
3.3.3	Equazioni canoniche in forma simplettica	75
<b>4</b>	<b>Simmetrie</b>	<b>79</b>
<b>4.1</b>	<b>Rotazioni e tensori</b>	<b>79</b>
4.1.1	Rotazioni	79
4.1.2	Tensori nello spazio euclideo	81
4.1.3	Simmetrie discrete: parità e inversione temporale	89
<b>4.2</b>	<b>Rotazioni e spinori</b>	<b>91</b>
4.2.1	Corrispondenza tra rotazioni e $SU(2)$	92
4.2.2	Spinori e loro significato geometrico	94
4.2.3	Inversione spaziale degli spinori	98
<b>4.3</b>	<b>Simmetrie continue e teorema di Noether per sistemi di particelle</b>	<b>98</b>
4.3.1	Non univocità della lagrangiana e invarianza debole dell'azione	99
4.3.2	Teorema di Noether e costanti del moto	101
4.3.3	Campi esterni	104
<b>4.4</b>	<b>Simmetrie continue e teorema di Noether per campi locali</b>	<b>105</b>
4.4.1	Simmetrie per campi locali	105
4.4.2	Teorema di Noether per campi locali	107

<b>4.5</b>	<b>Invarianza di gauge</b>	<b>111</b>
4.5.1	Invarianza locale di gauge	112
4.5.2	Equazione di Pauli e fattore giromagnetico dell'elettrone	113
4.5.3	Invarianza di gauge ed equazione di Pauli	113
4.5.4	Effetto Aharonov-Bohm	115
4.5.5	L'elettromagnetismo come manifestazione di un fattore di fase non integrabile*	118
<b>5</b>	<b>Invarianza relativistica</b>	<b>123</b>
<b>5.1</b>	<b>Sistemi inerziali, prima legge di Newton e trasformazioni di Lorentz</b>	<b>123</b>
5.1.1	Spaziotempo di Minkowski	124
5.1.2	Particella libera	126
5.1.3	Moto geodetico in relatività generale	129
<b>5.2</b>	<b>Trasformazioni di Lorentz e tensori</b>	<b>129</b>
5.2.1	Rapidità	129
5.2.2	Il gruppo di Lorentz e il gruppo di Poincaré	132
5.2.3	Tensori nello spazio di Minkowski	134
<b>5.3</b>	<b>Trasformazioni di Lorentz e spinori</b>	<b>142</b>
5.3.1	Corrispondenza tra trasformazioni di Lorentz e $SL(2, \mathbb{C})$	142
5.3.2	Spinore come 4-vettore di tipo luce	144
5.3.3	Inversione spaziale e chiralità	145
<b>6</b>	<b>Campi relativistici</b>	<b>147</b>
<b>6.1</b>	<b>Operazioni differenziali e integrali su campi tensoriali</b>	<b>147</b>
6.1.1	Operazioni differenziali	147
6.1.2	Operazioni integrali	149
<b>6.2</b>	<b>Campo scalare</b>	<b>150</b>
6.2.1	Proprietà del campo scalare	150
6.2.2	La funzione principale di Hamilton di una particella come campo scalare	152
<b>6.3</b>	<b>Campo di Maxwell</b>	<b>153</b>
6.3.1	Tensore elettromagnetico	153
6.3.2	Tensore energia-impulso	160
6.3.3	Interazione tra campo e particelle	165
6.3.4	Interazione tra campi	165
6.3.5	Il campo di Maxwell come "curvatura"*	165
6.3.6	Il campo di Yang-Mills*	165
<b>6.4</b>	<b>Campo di Einstein*</b>	<b>165</b>
<b>6.5</b>	<b>Campo di Dirac</b>	<b>165</b>
6.5.1	Equazione di Weyl	166
6.5.2	Equazione di Dirac	168
6.5.3	Algebra di Dirac	170
6.5.4	Simmetrie e leggi di conservazione	171
6.5.5	Il problema delle soluzioni di energia negativa	172
<b>6.6</b>	<b>Anti-particelle classiche*</b>	<b>173</b>
<b>7</b>	<b>Sistemi lineari classici</b>	<b>175</b>
<b>7.1</b>	<b>Teoria classica delle piccole oscillazioni</b>	<b>175</b>
7.1.1	Piccole oscillazioni di un sistema di particelle	175

7.1.2	Soluzione delle piccole oscillazioni = diagonalizzazione della matrice dinamica	177
7.1.3	C'è ancora qualcosa da dire sull'oscillatore armonico?	188
7.1.4	Forma complessa delle equazioni canoniche*	189
<b>7.2</b>	<b>Analisi in modi normali del campo scalare</b>	<b>190</b>
7.2.1	Un singolo modo di un campo libero è un oscillatore armonico	190
7.2.2	Energia e impulso di un modo normale	192
7.2.3	Campo libero come insieme di oscillatori indipendenti	195
7.2.4	Analisi in modi normali in una scatola = analisi di Fourier	196
7.2.5	Campo scalare con sorgente esterna	199
<b>7.3</b>	<b>Analisi in modi normali del campo di Maxwell</b>	<b>205</b>
7.3.1	Campo elettromagnetico libero	205
7.3.2	Campo elettromagnetico in una cavità	208
7.3.3	Dominio di validità del modello matematico di cavità elettromagnetica	211
7.3.4	Cavità metallica di forma rettangolare	212
7.3.5	Densità dei modi normali	214
<b>7.4</b>	<b>Campo elettromagnetico generato da sorgenti esterne</b>	<b>215</b>
7.4.1	Struttura delle equazioni di Maxwell	216
<b>7.5</b>	<b>La transizione verso la meccanica quantistica</b>	<b>218</b>
7.5.1	Distribuzione spettrale della radiazione in una cavità	218
7.5.2	Termodinamica della radiazione	219
7.5.3	Le leggi di Wien, Rayleigh-Jeans e Planck	221
7.5.4	Coefficienti $A$ e $B$ di Einstein	222
<b>8</b>	<b>Ruolo dell'azione in meccanica quantistica*</b>	<b>225</b>
<b>8.1</b>	<b>Propagatore quantistico</b>	<b>225</b>
<b>8.2</b>	<b>Integrale sui cammini di Dirac-Feynman</b>	<b>226</b>
<b>8.3</b>	<b>Calcolo di propagatori mediante il metodo di Feynman</b>	<b>227</b>

## II

## Seconda Quantizzazione

<b>9</b>	<b>Sistemi lineari quantistici</b>	<b>231</b>
<b>9.1</b>	<b>L'oscillatore armonico quantistico</b>	<b>231</b>
9.1.1	Operatori di creazione e distruzione	231
9.1.2	Rappresentazione di Heisenberg	232
9.1.3	Operatore di Weyl	237
9.1.4	Stati coerenti	239
<b>9.2</b>	<b>Piccole oscillazioni quantistiche e la nozione di fonone</b>	<b>242</b>
9.2.1	Due modi normali	242
9.2.2	Sistema con un numero finito di modi normali	245
9.2.3	Sistema con un numero infinito di modi normali	246
<b>9.3</b>	<b>Risposta lineare, formula di Kubo e rappresentazione interazione</b>	<b>246</b>
9.3.1	Formula di Kubo	248
9.3.2	Rappresentazione interazione ed effetto di una perturbazione all'ordine più basso	248
9.3.3	Serie di Dyson*	249

<b>10</b>	<b>Campo di Klein-Gordon quantistico</b>	<b>253</b>
<b>10.1</b>	<b>Il campo scalare reale</b>	<b>253</b>
10.1.1	Analogo quantistico del modo normale della corda	253
10.1.2	Sviluppo del campo in modi normali	254
10.1.3	Hamiltoniano e impulso	255
10.1.4	Spazio degli stati	256
<b>10.2</b>	<b>Relazioni di commutazione e propagatore di Feynman</b>	<b>257</b>
10.2.1	Relazioni di commutazione del campo	257
10.2.2	Propagatore di Feynman	258
<b>11</b>	<b>Campo di Maxwell quantistico</b>	<b>261</b>
<b>11.1</b>	<b>Il campo elettromagnetico come sistema quantistico</b>	<b>261</b>
11.1.1	Seconda quantizzazione del campo di Maxwell	262
11.1.2	Effetto Casimir	262
<b>11.2</b>	<b>Rudimenti di ottica quantistica</b>	<b>266</b>
11.2.1	Emissione stimolata	266
11.2.2	Emissione spontanea	268
11.2.3	Rivelatori di fotoni	269
11.2.4	Funzioni di correlazione e interferenza	273
<b>12</b>	<b>Formalismo di seconda quantizzazione</b>	<b>277</b>
<b>12.1</b>	<b>Seconda quantizzazione del campo di Schrödinger</b>	<b>277</b>
12.1.1	Sistema a numero indefinito di bosoni non relativistici non interagenti tra loro	278
12.1.2	Sistema a numero indefinito di fermioni non relativistici non interagenti tra loro	282
<b>12.2</b>	<b>Intermezzo: teoria cinetica ed entropia di Boltzmann</b>	<b>291</b>
12.2.1	Descrizione cinetica	291
12.2.2	Microstati e Macrostati	291
12.2.3	Spazio degli stati associato ad una celletta nello spazio delle fasi	292
12.2.4	Entropia di Boltzmann	293
12.2.5	Regime classico	294
12.2.6	Distribuzione di equilibrio	294
<b>12.3</b>	<b>Operatori in seconda quantizzazione</b>	<b>294</b>
12.3.1	Seconda quantizzazione di operatori a singola particella	294
12.3.2	Seconda quantizzazione di operatori a più particelle	299
<b>12.4</b>	<b>Dinamica di bosoni e fermioni</b>	<b>300</b>
12.4.1	Particelle in campo esterno	301
12.4.2	Collegamento con la meccanica statistica	302
12.4.3	Interazione tra particelle	304
<b>12.5</b>	<b>Quasi-particelle e buche per un sistema di fermioni</b>	<b>304</b>
12.5.1	Raggio della sfera di Fermi per $N$ particelle non interagenti in un volume $V$	305
12.5.2	Hamiltoniano libero e suo stato fondamentale	305
12.5.3	Quasi-particelle negative e positive	307
12.5.4	Effetto dell'interazione	308
12.5.5	Particelle e anti-particelle	309

<b>12.6</b>	<b>Interazione tra fermioni mediata da bosoni</b>	<b>309</b>
12.6.1	Hamiltoniano del modello . . . . .	309
12.6.2	Hamiltoniano di interazione . . . . .	310
12.6.3	Ampiezza di transizione . . . . .	311
<b>13</b>	<b>Campo di Dirac e campi quantistici relativistici . . . . .</b>	<b>313</b>

# Complementi di Meccanica

<b>1</b>	<b>Equazioni del moto</b> .....	<b>11</b>
1.1	Funzione di Lagrange ed equazioni di Eulero-Lagrange	
1.2	Funzione di Hamilton ed equazioni canoniche	
1.3	Sistemi continui e campi locali	
1.A	Appendice – Teorema spettrale e forme quadratiche*	
<b>2</b>	<b>Ruolo dell'azione in meccanica classica</b> .....	<b>39</b>
2.1	Principio d'azione di Hamilton	
2.2	Funzione principale e funzione caratteristica di Hamilton	
2.3	Principio d'azione di Jacobi*	
2.4	Variazione seconda dell'integrale d'azione ed equazione di Jacobi*	
2.A	Appendice – Connessione affine e curvatura*	
<b>3</b>	<b>Trasformazioni canoniche*</b> .....	<b>67</b>
3.1	Proposizione fondamentale della teoria delle trasformazioni canoniche	
3.2	Proprietà di gruppo e trasformazioni canoniche infinitesime	
3.3	Parentesi di Poisson	
<b>4</b>	<b>Simmetrie</b> .....	<b>79</b>
4.1	Rotazioni e tensori	
4.2	Rotazioni e spinori	
4.3	Simmetrie continue e teorema di Noether per sistemi di particelle	
4.4	Simmetrie continue e teorema di Noether per campi locali	
4.5	Invarianza di gauge	
<b>5</b>	<b>Invarianza relativistica</b> .....	<b>123</b>
5.1	Sistemi inerziali, prima legge di Newton e trasformazioni di Lorentz	
5.2	Trasformazioni di Lorentz e tensori	
5.3	Trasformazioni di Lorentz e spinori	
<b>6</b>	<b>Campi relativistici</b> .....	<b>147</b>
6.1	Operazioni differenziali e integrali su campi tensoriali	
6.2	Campo scalare	
6.3	Campo di Maxwell	
6.4	Campo di Einstein*	
6.5	Campo di Dirac	
6.6	Anti-particelle classiche*	
<b>7</b>	<b>Sistemi lineari classici</b> .....	<b>175</b>
7.1	Teoria classica delle piccole oscillazioni	
7.2	Analisi in modi normali del campo scalare	
7.3	Analisi in modi normali del campo di Maxwell	
7.4	Campo elettromagnetico generato da sorgenti esterne	
7.5	La transizione verso la meccanica quantistica	
<b>8</b>	<b>Ruolo dell'azione in meccanica quantistica*</b> .....	<b>225</b>
8.1	Propagatore quantistico	
8.2	Integrale sui cammini di Dirac-Feynman	
8.3	Calcolo di propagatori mediante il metodo di Feynman	



# 1. Equazioni del moto

## 1.1 Funzione di Lagrange ed equazioni di Eulero-Lagrange

Ricordiamo che un sistema meccanico è specificato ad ogni istante di tempo dalla sua configurazione, cioè la collezione  $q = (q_1, \dots, q_n, \dots, q_r)$  delle coordinate di posizione e dalla collezione  $\dot{q} = dq/dt = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, \dots, \dot{q}_r)$  delle componenti della velocità;  $r$  è il numero di gradi di libertà del sistema.

Il principio di minima azione di Hamilton che formuleremo nel prossimo capitolo è formulato con l'ausilio di una funzione  $L$ , chiamata *funzione di Lagrange* o *lagrangiana*, che dipende dalla configurazione  $q$  e dalla velocità  $\dot{q}$ ,  $L = L(q, \dot{q})$ .<sup>1</sup> La forma più comune per  $L$ , è la differenza  $L = T - V$  tra l'energia cinetica  $T$  e l'energia potenziale  $V$ . L'esempio standard per l'energia cinetica è  $T = m\dot{q}^2/2$ , dove  $m$  è la massa.

Le equazioni di Newton sono scritte in termini dell'*impulso canonico*  $p$  così definito:<sup>2</sup>

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}. \quad (1.1)$$

L'impulso specifica lo stato del moto del sistema allo stesso modo della velocità  $\dot{q}$ . In particolare, se  $L$  è una funzione quadratica non degenere di  $\dot{q}$ , c'è una semplice trasformazione lineare invertibile che collega  $p$  e  $\dot{q}$ . Quando  $L = T - V$  e  $T = m\dot{q}^2/2$ , si ha  $p = m\dot{q}$  in accordo con la (1.1). L'impulso canonico  $p$  deve essere distinto dalla velocità, anche se in molti sistemi siano proporzionali tra loro come nel caso semplice appena visto. Si osservi che se la lagrangiana non è della forma  $T - V$ , non è detto che l'impulso canonico coincida con l'*impulso meccanico*  $m\dot{v}$ . D'ora in poi, la quantità definita dalla (1.1) sarà chiamata semplicemente "impulso".

<sup>1</sup>Assumiamo per semplicità che la funzione di Lagrange non dipenda esplicitamente dal tempo.

<sup>2</sup>In componenti,

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}, \quad n = 1, \dots, r.$$

Useremo spesso questo trucco di scrivere le equazioni come se il sistema avesse un solo grado di libertà, lasciando al lettore il compito di estendere il loro significato a sistemi con più gradi di libertà.

La forma classica delle equazioni di Newton è

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial q}. \quad (1.2)$$

Le equazioni Eulero-Lagrange sono

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (1.3)$$

Questa formula combina le due precedenti relazioni (1.1) e (1.2) per il caso particolare  $L = T - V$ , ma ha validità generale. Se è nota la funzione di Lagrange di un determinato sistema meccanico, le equazioni Eulero-Lagrange danno i rapporti tra accelerazioni, velocità e posizioni, sono cioè le equazioni del moto del sistema.

### 1.1.1 Energia cinetica

I sistemi newtoniani sono i sistemi fondamentali dal punto di vista fisico. Per un tale sistema l'energia cinetica in coordinate cartesiane è una forma quadratica delle velocità:

$$T = \frac{1}{2} (\dot{q}, \dot{q}) \quad (1.4)$$

dove

$$(\dot{q}, \dot{q}) = \sum_i m_i |\dot{q}_i|^2$$

Risulta utile sviluppare il formalismo senza far riferimento a questa specifica forma quadratica e considerare una generica forma quadratica non degenere

$$T = \frac{1}{2} (\dot{q}, g(q) \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{ij} g_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (1.5)$$

dove  $g_{ij}(q)$  sono gli elementi della matrice  $g = g(q)$  che si assume simmetrica e definita positiva ed è quindi una *metrica*, equivalentemente caratterizzata dal quadrato dell'*elemento di linea*

$$d^2 = (dq, g dq) = \sum_i m_i g_{ij} dq_i dq_j. \quad (1.6)$$

$d$  è la distanza tra la configurazione  $q$  e la configurazione infinitamente vicina  $q + dq$ . In termini di  $d$  possiamo scrivere l'energia cinetica come

$$T = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \right)^2. \quad (1.7)$$

In altre parole, possiamo sempre scrivere l'energia cinetica come l'energia cinetica di un punto materiale di massa unitaria in uno spazio  $r$ -dimensionale con una metrica non necessariamente euclidea (un tale spazio è detto "varietà riemanniana").

Una funzione di Lagrange della forma  $L = T - V$ , con  $T$  dato dalla (1.5) e  $V$  indipendente dalla velocità sarà detta *funzione di Lagrange standard*.

### 1.1.2 Energia totale

La conservazione dell'energia per sistema isolati o in campo esterno è un pilastro della meccanica. Tuttavia l'“energia” è una nozione che deve essere *definita* nel contesto lagrangiano (così come è stato *definito* l'impulso mediante la (1.1)). Si definisce *energia* la seguente espressione

$$\mathcal{E} = p\dot{q} - L, \quad (1.8)$$

dove

$$p\dot{q} = \sum_n p_n \dot{q}_n$$

Che questa è una buona definizione segue dai seguenti fatti:

- (a) se  $L$  non dipende dal tempo, cioè il sistema è *conservativo*,  $\mathcal{E}$  rimane costante lungo qualsiasi traiettoria;
- (b) se  $L = T - V$ , con  $T$  funzione quadratica delle velocità, allora  $\mathcal{E} = T + V$ , cioè  $\mathcal{E}$  è la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale totali del sistema.

Questi fatti sono mostrati in un qualunque manuale di meccanica, ma sono anche presentati qui come problemi per lo studente che volesse fare un ripasso.

**Problema 1.1** Mostrare che se  $L$  non dipende esplicitamente dal tempo, allora

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$$

lungo una *soluzione delle equazioni del moto*  $q = q(t)$ .

*Suggerimento.* Lungo una soluzione delle equazioni del moto  $q = q(t)$

$$\left. \frac{dL}{dt} \right|_{\text{sol}} = \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} = \dot{p}\dot{q} + p\ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} (p\dot{q}) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

**Problema 1.2** Mostrare che se  $L = T - V$ , con  $T$  funzione quadratica delle velocità, allora

$$\mathcal{E} = T + V$$

*Suggerimento.*

$$\mathcal{E} = p\dot{q} - T + V.$$

Ma

$$p\dot{q} = \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n = \sum_n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n = 2T, \quad (1.9)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee.<sup>3</sup>

*Costanti del moto.* L'energia  $\mathcal{E}$  di un sistema conservativo è l'esempio paradigmatico di costante del moto. In generale, una funzione  $C = C(q, \dot{q})$  è una *costante del moto* se il valore di  $C$  rimane costante in funzione del tempo quando i suoi argomenti  $q$  e  $\dot{q}$  vengono sostituiti da una soluzione delle equazioni del moto.

<sup>3</sup>Una funzione di  $n$  variabili  $f(x_1, \dots, x_n)$  è omogenea di grado  $k$  se  $f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \dots, x_n)$ . Per una tale funzione vale il teorema di Eulero:

$$\sum_i^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = k f(x_1, \dots, x_n)$$

## 1.2 Funzione di Hamilton ed equazioni canoniche

Come abbiamo già sottolineato, se  $L$  è una funzione quadratica non degenera di  $\dot{q}$ , c'è una semplice trasformazione lineare invertibile che collega  $p$  e  $\dot{q}$ . Per lagrangiane più generali assumiamo che continui a valere l'invertibilità della (1.1) e che quindi si possa esprimere  $\dot{q}$  in funzione di  $p$  ed eventualmente di  $q$ ,

$$\dot{q} = \dot{q}(q, p). \quad (1.10)$$

Allora lo stato del sistema può essere descritto equivalentemente in termini della coppia  $(q, p)$  invece della coppia  $(q, \dot{q})$ . In particolare, possiamo riguardare l'energia data dalla (1.8) come funzione di  $q$  e  $p$ . La funzione così ottenuta è la funzione di Hamilton del sistema:

$$H = H(q, p) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}), \quad (1.11)$$

dove ogni occorrenza di  $\dot{q}$  deve essere sostituita dalla (1.10). I punti  $(q, p)$  sono detti punti di fase e la loro totalità forma lo *spazio delle fasi*.

### 1.2.1 Equazioni di Hamilton

L'importanza della funzione di Hamilton sta nel fatto che le equazioni del moto per le variabili  $(q, p)$  sono

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (1.12a)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (1.12b)$$

Queste sono le *equazioni di Hamilton*, anche dette *equazioni canoniche* del moto: un insieme di  $2r$  equazioni differenziali del primo ordine equivalente alle equazioni di Eulero-Lagrange (che sono  $r$  equazioni del secondo ordine).

Le equazioni canoniche si ricavano facilmente, osservando che, dal punto di vista matematico, la (1.11) definisce  $H(q, p)$  come trasformata di Legendre di  $L(q, \dot{q})$ . Allora, procedendo come in termodinamica, differenziamo ambo i membri della (1.11),

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial p} dp &= \dot{q} dp + p d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q} dq - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} = \dot{q} dp + p d\dot{q} - \dot{p} dq - p d\dot{q} \\ &= \dot{q} dp - \dot{p} dq, \end{aligned}$$

da cui, per confronto dei differenziali, seguono le equazioni (1.12).

La conservazione dell'energia nella meccanica lagrangiana segue dal fatto che la funzione di Lagrange  $L$  non dipende esplicitamente sul tempo; analogamente, la conservazione dell'energia in meccanica hamiltoniana richiede che  $\partial H/\partial t = 0$  e questa è la caratterizzazione di sistema conservativo in meccanica hamiltoniana. Il valore di  $H(p, q)$  rimane costante lungo qualsiasi traiettoria. Questo valore costante, denotato  $E$  come prima, caratterizza la (iper-)superficie di energia costante  $H(p, q) = E$  su cui si muove il punto di fase.

*Flusso hamiltoniano.* Le equazioni di Hamilton possono essere considerate come la definizione di un campo vettoriale nello spazio delle fasi,

$$v_H(q, p) = \left( \frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right) \quad (1.13)$$

che definisce un flusso nello spazio delle fasi. Per un sistema conservativo, il flusso di fase può essere riguardato come il flusso di un fluido incompressibile. Questo è il *teorema di Liouville*, che segue immediatamente dall'osservazione che il campo vettoriale  $v_H$  ha divergenza nulla (esercizio).

### 1.2.2 Esempi di equazioni del moto e di loro soluzioni

**Box 1.1 — Sistema newtoniano.** Un sistema di  $N$  punti materiali di masse  $m_1, \dots, m_N$  ha  $3N$  gradi di libertà, configurazione  $q = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  ed è descritto dalla funzione di Lagrange

$$L = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$$

dove  $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  è l'energia potenziale. Gli impulsi sono

$$p = \frac{\partial L}{\partial q} = (m_1 \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, m_N \dot{\mathbf{r}}_N)$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange coincidono con le usuali equazioni di Newton

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\nabla_i V$$

La corrispondente funzione di Hamilton è

$$H = \sum_i^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$$

Le equazioni canoniche che ne derivano

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} = \frac{\mathbf{p}_i}{m_i}, \quad \dot{\mathbf{p}}_i = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} = -\nabla_i V$$

conducono (ovviamente) alle stesse equazioni del moto.

Il problema di trovare le soluzioni delle equazioni del moto per un potenziale realistico come il potenziale gravitazionale newtoniano o il potenziale coulombiano è una sfida alla fisica teorica che dura da più di 300 anni. Tutto lo sviluppo della meccanica teorica — la teoria delle trasformazioni canoniche e la teoria di Hamilton-Jacobi — è stato mirato alla risoluzione di questo problema. Ci sono tonnellate di libri e articoli al riguardo e il problema non è ancora risolto; per esempio, non disponiamo ancora di un'analisi completa che spieghi la stabilità del sistema solare (anche se molti passi avanti sono stati fatti negli ultimi cinquant'anni). Quando  $N$  è molto grande, lo studio delle soluzioni è facilitato dall'uso di metodi statistici, come compresero, tra gli altri, Maxwell, Boltzmann e Gibbs. Ma anche in questo caso, non disponiamo ancora di una spiegazione soddisfacente delle transizioni di fase, come l'acqua che diventa ghiaccio.

**Box 1.2 — Oscillatore armonico.** Quest'esempio è arcinoto e la sua soluzione è nota da più di 300 anni. Rivediamolo comunque come propedeutico ad esempi più avanzati.

L'equazione del moto per un semplice oscillatore armonico di massa  $m$  e costante di richiamo  $k$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.14}$$

segue dalla funzione di Lagrange

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{\kappa q^2}{2} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2, \quad (1.15)$$

come si vede facilmente, in quanto

$$\dot{p} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} m\dot{q} = m\ddot{q} \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -m\omega_0^2 q. \quad (1.16)$$

Equivalentemente, l'equazione del moto segue dalla funzione di Hamilton

$$H = p\dot{q} - L = p \frac{p}{m} - \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2 \quad (1.17)$$

le cui equazioni canoniche

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega_0^2 q,$$

coincidono con le equazioni del moto (1.14).

Le le equazioni del moto hanno la ben nota soluzione

$$q(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (1.18)$$

dove le costanti  $A$  e  $B$  sono determinate dalle condizioni

$$q' = q(t'), \quad \dot{q} = \dot{q}(t')$$

ad un qualche tempo  $t'$ . Imponendo queste condizioni, si ottiene

$$q(t) = \cos[\omega_0(t-t')] q' + \frac{\sin[\omega_0(t-t')]}{\omega_0} \dot{q}' \quad (1.19)$$

È importante osservare che per quanto usualmente si parli di *condizioni iniziali*, per un sistema conservativo non c'è nulla che privilegi un dato orientamento del tempo: nell'equazione precedente nulla cambia se le condizioni  $q'$  e  $\dot{q}'$  sono fissate ad un tempo  $t''$  nel futuro di  $t$ : *la forma delle soluzioni è la stessa sia per condizioni iniziali  $q', \dot{q}'$  sia per condizioni finali  $q'', \dot{q}''$ .*

Equivalentemente, nel formalismo hamiltoniano abbiamo le soluzioni

$$q(t) = \cos(\omega_0 t) q + \frac{\sin(\omega_0 t)}{m\omega_0} p \quad (1.20a)$$

$$p(t) = -m\omega_0 \sin(\omega_0 t) q + \cos(\omega_0 t) p \quad (1.20b)$$

dove adesso per semplicità abbiamo scelto condizioni “iniziali”  $q = q(0)$  e  $p = p(0)$  per  $t = 0$ .

Infine, usiamo questo esempio per illustrare una caratteristica generale dei sistemi hamiltoniani conservativi, che *il flusso hamiltoniano è assimilabile al movimento di un fluido incomprimibile nello spazio delle fasi*. A tal fine, calcoliamo il determinante

giacobiano della trasformazione nello spazio delle fasi definita dalla (1.20). La matrice jacobiana è

$$\frac{\partial(q(t), p(t))}{\partial(q, p)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q(t)}{\partial q} & \frac{\partial q(t)}{\partial p} \\ \frac{\partial p(t)}{\partial q} & \frac{\partial p(t)}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \frac{\sin(\omega_0 t)}{m\omega_0} \\ -m\omega_0 \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}$$

e come si vede facilmente il suo determinante è 1:

$$\left| \frac{\partial(q(t), p(t))}{\partial(q, p)} \right| = 1. \quad (1.21)$$

Questa condizione vale in generale per tutti i sistemi hamiltoniani conservativi. Essa garantisce l'incomprimibilità del fluido hamiltoniano o, equivalentemente, l'invarianza del volume di una regione dello spazio delle fasi quando questa viene trasformata in una nuova regione dall'evoluzione temporale. Sia infatti  $A_t$  la regione ottenuta facendo evolvere tutti i punti di una regione  $A$  per un lasso di tempo  $t$ . Allora

$$\text{Vol}(A_t) = \int_{A_t} dq(t) dp(t) = \int_A \left| \frac{\partial(q(t), p(t))}{\partial(q, p)} \right| dq dp = \int_A dq dp = \text{Vol}(A)$$

Questa proprietà generale dei sistemi hamiltoniani conservativi fu riconosciuta da Boltzmann e Gibbs come la base della meccanica statistica.

**Box 1.3 — Sistema non conservativo: oscillatore armonico forzato.** Questo è un problema di media difficoltà che è utile considerare perché di grande importanza in molti problemi avanzati. Ha applicazioni particolari in elettrodinamica classica e quantistica perché il campo elettromagnetico può essere rappresentato come un insieme di oscillatori armonici forzati.

Supponiamo che l'oscillatore armonico del box 1.2 sia guidato da una forza esterna  $f(t)$  dipendente dal tempo. Allora la funzione di Lagrange è

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 + f(t)q. \quad (1.22)$$

L'equazione di Eulero-Lagrange è

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \ddot{q} = \frac{\partial L}{\partial q} = -m \omega_0^2 q + f(t)$$

cioè,

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = \frac{1}{m} f(t) \equiv j(t) \quad (1.23)$$

Nel formalismo hamiltoniano, questa equazione si ricava dalla funzione di Hamilton

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 - f(t)q$$

Si osservi che

$$\frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1.24)$$

che è la relazione generale per sistemi la cui funzione di Lagrange ha una dipendenza esplicita dal tempo.

Adesso risolviamo l'equazione del moto (1.23). La soluzione  $q(t)$  è la somma di una soluzione dell'equazione omogenea, data dalla (1.18), e di una soluzione particolare  $u(t)$ :

$$q(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + u(t) \quad (1.25)$$

Troviamo la soluzione particolare  $u(t)$  con il metodo della trasformata di Fourier utilizzando le convenzioni

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega, \quad (1.26)$$

$$f_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (1.27)$$

L'equazione (1.23) per  $u$  in trasformata di Fourier diventa

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)u_{\omega} = j_{\omega} \quad (1.28)$$

che fornisce immediatamente

$$u_{\omega} = \frac{-j_{\omega}}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (1.29)$$

Introducendo la funzione

$$G_{\omega} = \frac{-1}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (1.30)$$

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega \quad (1.31)$$

e utilizzando il teorema di convoluzione, si ottiene la seguente rappresentazione della soluzione  $u(t)$ :

$$u(t) = G \star j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau G(t - \tau) j(\tau) \quad (1.32)$$

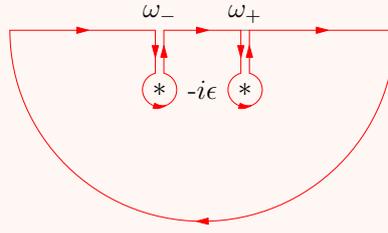
Si osservi che la funzione  $G$ , per come è stata definita, soddisfa l'equazione

$$\ddot{G} + \omega_0^2 G = \delta(t) \quad (1.33)$$

ed è nota come *funzione di Green* dell'equazione (1.23). Questa funzione rappresenta la risposta del sistema ad una forza esterna impulsiva.

Resta da determinare la formula esplicita per  $G(t)$ . A tal fine, calcoliamo l'integrale (1.31) usando il metodo dei residui. Notiamo subito che la funzione integranda ha poli  $\omega_{\pm} = \pm\omega_0$  sull'asse reale per cui, affinché l'integrale sia ben definito, occorre deformare il

cammino lungo l'asse reale in un cammino nel piano complesso che escluda le singolarità. Per esempio, potremmo considerare il cammino



Allora  $G_\omega$  è analitica nel semi-piano superiore e quindi  $G(t)$  è nulla per  $t < 0$ . L'integrale per  $t > 0$  si risolve chiudendo il cammino nel semipiano inferiore e applicando il teorema dei residui. La funzione cercata è la somma dei contributi dei due poli. Per ragioni che saranno chiare tra breve chiamiamo  $G^{\text{ret}}(t)$  questa funzione, anziché  $G(t)$ .

Il contributo dovuto al residuo in  $\omega_+$  è

$$\Delta^+ = \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-2\pi i) \text{Res} \left[ \frac{-e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2}, \omega_0 - i\epsilon \right] = i \frac{e^{-i\omega_0 t}}{2\omega_0}.$$

Procedendo in maniera analoga, si trova che il contributo dovuto al residuo in  $\omega_-$  è

$$\Delta^- = -i \frac{e^{i\omega_0 t}}{2\omega_0}$$

Allora

$$G^{\text{ret}}(t) = [\Delta^+(t) + \Delta^-(t)] \vartheta(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \vartheta(t) \quad (1.34)$$

dove la funzione a scalino di Heaviside  $\vartheta(t)$  ( $=1$  per  $t > 0$  e  $=0$  per  $t < 0$ ), assicura che  $G^{\text{ret}}(t)$  è nulla per  $t < 0$ . Questa funzione è detta *funzione di Green ritardata*.

Combinando il risultato ottenuto con la (1.32), otteniamo la soluzione particolare

$$u^{\text{ret}}(t) = \int_{-\infty}^{-\infty} d\tau G^{\text{ret}}(t-\tau) j(\tau) = \int_{-\infty}^t \frac{\sin \omega_0(t-\tau)}{\omega_0} j(\tau) d\tau \quad (1.35)$$

che inseriamo nella (1.25):

$$q(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \int_{-\infty}^t \frac{\sin \omega_0(t-\tau)}{\omega_0} j(\tau) d\tau$$

Adesso imponiamo le condizioni ad un qualche tempo  $t'$ :

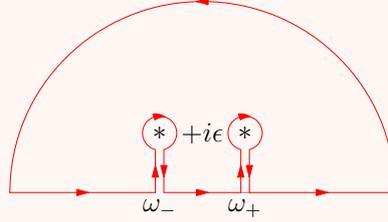
$$q(t') = q' \quad \dot{q}(t') = \dot{q}'$$

assumendo che la forza esterna sia nulla per  $t \leq t'$ . Allora otteniamo immediatamente

$$q(t) = \cos[\omega_0(t-t')] q' + \frac{\sin[\omega_0(t-t')]}{\omega_0} \dot{q}' + \int_{t'}^t \frac{\sin[\omega_0(t-\tau)]}{\omega_0} j(\tau) d\tau \quad (1.36)$$

Si osservi che lo stato del sistema al tempo  $t$  dipende solo dai valori della forza esterna nel passato di  $t$ . Abbiamo cioè quello che è di solito chiamato un comportamento causale: l'“effetto”  $q(t)$  non precede la “causa”  $j(t)$ .

Ritorniamo adesso all'ambiguità nella scelta della deformazione del cammino. Invece della deformazione che abbiamo usato sopra, potremmo considerare



Adesso  $G_\omega$  è analitica nel semipiano inferiore e quindi  $G(t)$  è nulla per  $t > 0$ . Questa funzione è detta *funzione di Green anticipata* ed è denotata  $G^{\text{adv}}$ . L'integrale per  $t < 0$  si risolve chiudendo il cammino nel semipiano superiore. Applicando il teorema dei residui, si ottiene

$$G^{\text{adv}}(t) = [\Delta^+(-t) + \Delta^-(-t)] \vartheta(-t) = -\frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \vartheta(-t) = G^{\text{ret}}(-t) \quad (1.37)$$

che fornisce la soluzione particolare

$$u^{\text{adv}}(t) = \int_{-\infty}^{-\infty} d\tau G^{\text{ret}}(t - \tau) j(\tau) = -\int_t^{\infty} \frac{\sin \omega_0(t - \tau)}{\omega_0} j(\tau) d\tau \quad (1.38)$$

che è diversa dalla (1.35). Assumiamo che  $j(t) = 0$  per qualche tempo  $t''$  nel futuro di  $t$ . Allora questa soluzione particolare esprime lo stato del sistema ad un dato tempo  $t$  in funzione dei valori della forza nel futuro di  $t$ : il comportamento causale è invertito. Allora per la soluzione completa avremo

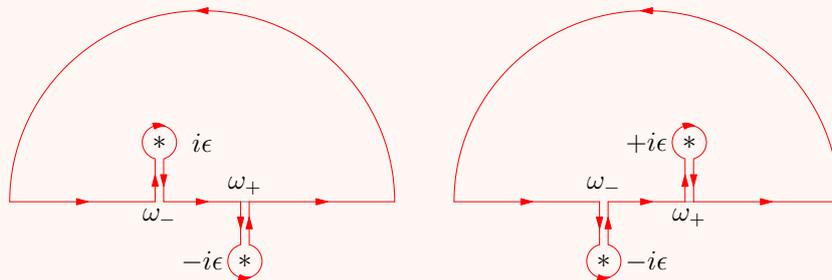
$$q(t) = \cos[\omega_0(t - t'')] q'' + \frac{\sin[\omega_0(t - t'')]}{\omega_0} \dot{q}'' - \int_t^{t''} \frac{\sin \omega_0(t - \tau)}{\omega_0} j(\tau) d\tau \quad (1.39)$$

dove adesso lo stato al tempo  $t$  è espresso in termini dello stato  $q''$ ,  $\dot{q}''$  ad un tempo  $t''$  nel futuro di  $t$ . Concludiamo che (1.36) e (1.39) sono rappresentazioni equivalenti dello stato al tempo  $t$ : la prima in termini di dati nel passato di  $t$ , la seconda in termini di dati nel futuro di  $t$ . Queste due rappresentazioni sono collegate tra loro dall'operazione di inversione temporale

$$\mathbb{T} : t \rightarrow -t, \quad t'' \rightarrow -t'', \quad q \rightarrow q, \quad \dot{q} \rightarrow -\dot{q}, \quad j(t) \rightarrow j(-t) \quad (1.40)$$

Da quanto abbiamo visto si trae anche un'importante morale riguardo all'ambiguità nella scelta della deformazione del cammino nel piano complesso, che è la seguente: *diverse deformazioni corrispondono a diverse condizioni al contorno e a diverse condizioni al contorno corrispondono diverse funzioni di Green.*

Alla luce di questa osservazione, notiamo che ci sono altre due possibilità di deformazione del cammino da considerare:



Queste deformazioni, tuttavia, generano funzioni complesse e quindi non svolgono alcun ruolo in fisica classica. Sono invece molto importanti in meccanica quantistica. La funzione di Green associata alla deformazione a sinistra è

$$G^F(t) = \Delta^+(t)\vartheta(t) - \Delta^-(t)\vartheta(-t) \quad (1.41)$$

ed è nota come *propagatore di Feynman*.

**Box 1.4 — Catena armonica.** Consideriamo una catena di  $N$  punti materiali di massa  $m$ , collegati da molle di identica costante di richiamo  $k$  e di lunghezza di equilibrio  $a$ . La lagrangiana in funzione degli scostamenti  $q_n$  dalle posizioni di equilibrio è

$$L = \sum_n \frac{1}{2} m \dot{q}_n^2 - \frac{1}{2} k (q_{n+1} - q_n)^2, \quad (1.42)$$

Poiché

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = m \ddot{q}_n \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial q_n} = k(q_{n+1} - q_n) - k(q_n - q_{n-1}) = k(q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1})$$

le equazioni di Eulero-Lagrange sono:

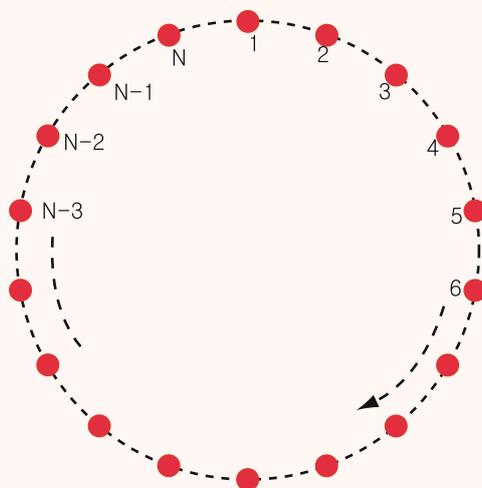
$$m \ddot{q}_n = k(q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}) \quad (1.43)$$

Queste equazioni del moto vanno supplementate da condizioni al contorno per il primo e l'ultimo punto della catena. Per esempio, la catena può essere vincolata ai due estremi, sono cioè assegnate condizioni di Dirichlet,



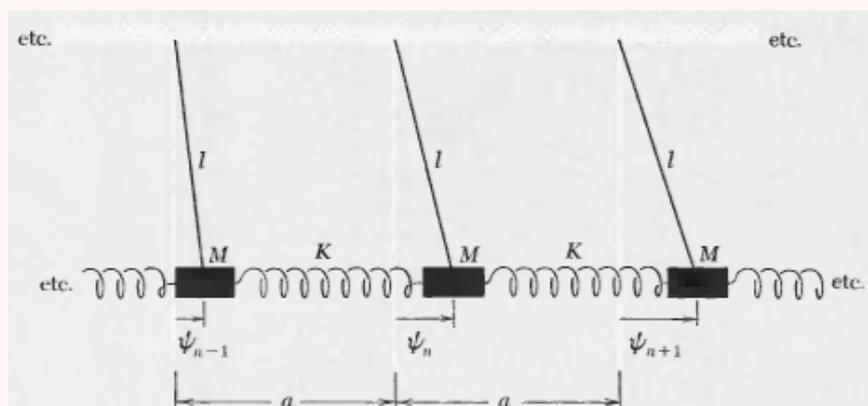
oppure la catena è disposta su un anello di circonferenza  $L_0 = Na$  cosicché  $q_{n+N} = q_n$ ;

in questo caso si hanno condizioni periodiche, come mostrato nella figura sotto.



Le condizioni periodiche sono utili quando si vuole studiare il limite  $L_0 \rightarrow \infty$  (limite termodinamico) e si vuole partire da un sistema finito privo di effetti di bordo.

**Box 1.5 — Catena di pendoli accoppiati.** Consideriamo il sistema descritto nella figura sotto (tratta dalla Fisica di Berkeley, vol. III)



A parte le notazioni, è la catena armonica in cui ciascuna massa è soggetta al potenziale esterno

$$V(q_n) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 q_n^2$$

dove  $\omega_0^2 = g/l$  (frequenza del pendolo). È quindi descritto dalla funzione di Lagrange

$$L = \sum_n \frac{1}{2} m \dot{q}_n^2 - \frac{1}{2} k (q_{n+1} - q_n)^2 - \frac{1}{2} m \omega_0^2 q_n^2, \quad (1.44)$$

che fornisce le equazioni del moto:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = m \ddot{q}_n = \frac{\partial L}{\partial q_n} = k(q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}) - m \omega_0^2 q_n \quad (1.45)$$

**Box 1.6 — Particella carica in campi elettrici e magnetici magnetici.** Questo esempio è importante dal punto di vista della fisica e costituisce l'esempio paradigmatico di funzione di Lagrange non standard, cioè non della forma  $T - V$ , con  $V$  indipendente dalla velocità. In questo caso  $V$  dipende dalla velocità. Inoltre l'esempio illustra che non sempre l'impulso canonico è uguale all'impulso meccanico o quantità di moto.

Partiamo da quel che sappiamo. La legge che stabilisce come i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  agiscono su una carica  $q$ , variandone la sua quantità di moto  $\mathbf{P}$ , è data dalla forza di Lorentz

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right). \quad (1.46)$$

Lo schema dinamico è completo se si specifica la relazione tra  $\mathbf{P}$  e la velocità  $\mathbf{v}$ . La relazione Newtoniana è  $\mathbf{v} = \mathbf{P}/m$ , dove  $m$  è la massa della particella.

A questo punto è utile richiamare le nozioni di base dell'elettromagnetismo. Le leggi che stabiliscono come le cariche  $\rho$  e le correnti  $\mathbf{J}$  generano i campi elettrici e magnetici sono le *equazioni di Maxwell*, che, nel sistema di Gauss razionalizzato (o sistema di Heaviside), si scrivono così:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (1.47a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.47b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.47c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (1.47d)$$

dove  $c$  è la velocità della luce nel vuoto. La 1.47b stabilisce che deve esistere un campo  $\mathbf{A}$ , detto *potenziale vettore*, tale che

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.48a)$$

Sostituendo 1.48a nella 1.47c, si ottiene

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Deve quindi esistere un campo scalare  $\varphi$ , detto *potenziale scalare*, tale che

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.48b)$$

È importante osservare che un campo è determinato dalla sua divergenza e dal suo rotore e poiché la (1.48a) vincola solo il rotore di  $\mathbf{A}$ , la sua divergenza è arbitraria e la possiamo scegliere a nostro piacimento. Tale libertà di scelta è di solito chiamata *libertà di gauge* e le trasformazioni di  $\mathbf{A}$  e  $\varphi$  che non modificano i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono chiamate *trasformazioni di gauge*. Queste trasformazioni sono della forma (esercizio)

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (1.49)$$

e la funzione  $\Lambda = \Lambda(\mathbf{r}, t)$  è detta *funzione di gauge*.

Ritorniamo al problema dai partenze. La funzione di Lagrange di una particella carica che interagisce con i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  è scritta in termini dei potenziali  $\varphi$  e  $\mathbf{A}$  ed è

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - q\varphi + \frac{q}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} \quad (1.50)$$

Verifichiamo che le equazioni di Eulero-Lagrange sono proprio l'equazione di Lorentz:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A} \quad (1.51)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = -q\nabla\varphi + \frac{q}{c}\nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) = -q\nabla\varphi + \frac{q}{c}\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} \quad (1.52)$$

dove nella seconda equazione abbiamo usato l'identità vettoriale

$$\nabla(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{A}) = \hat{\mathbf{n}}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + (\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla)\mathbf{A}, \quad \text{per } \hat{\mathbf{n}} \text{ non dipendente da } \mathbf{r}.$$

Ora, derivando ambo i membri della (1.51), si ottiene

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\ddot{\mathbf{r}} + \frac{q}{c}\frac{d\mathbf{A}}{dt} = m\ddot{\mathbf{r}} + \frac{q}{c}\left[\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}\right], \quad (1.53)$$

dove nel secondo passaggio abbiamo calcolato la derivata rispetto al tempo lungo la traiettoria, cioè

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \equiv \frac{d\mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t)}{dt} = \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t)}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \cdot \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t)}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}.$$

Infine, uguagliando la (1.52) e la (1.53), otteniamo le equazioni di Eulero-Lagrange

$$m\ddot{\mathbf{r}} + \frac{q}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{q}{c}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} = -q\nabla\varphi + \frac{q}{c}\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}$$

ossia,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q \underbrace{\left(-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)}_{\mathbf{E}} + \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\underbrace{(\nabla\times\mathbf{A})}_{\mathbf{B}},$$

che è proprio l'equazione di Lorentz (1.46).

La (1.50) è l'esempio paradigmatico di funzione di Lagrange con un potenziale dipendente dalla velocità per cui viene meno l'usuale uguaglianza di impulso canonico e impulso meccanico proprio delle lagrangiane standard. Infatti, l'impulso canonico definito dalla (1.51) differisce dall'impulso meccanico o quantità di moto  $\mathbf{p}_{\text{mecc}} = m\mathbf{v}$ , in quanto

$$\mathbf{p}_{\text{can}} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A} = \mathbf{p}_{\text{mecc}} + \frac{q}{c}\mathbf{A} \quad (1.54)$$

Si osservi che mentre l'impulso meccanico  $\mathbf{p}_{\text{mecc}}$  è una quantità fisica, l'impulso canonico  $\mathbf{p}_{\text{can}}$  è convenzionale perchè dipende dalla scelta di un gauge (come lo è la scelta di un sistema di riferimento per descrivere i fenomeni fisici). In altre parole, se trasformiamo  $\mathbf{A}$  e  $\varphi$  secondo la (1.49),  $\mathbf{p}_{\text{can}}$  si trasforma in un nuovo impulso canonico  $\mathbf{p}'_{\text{can}}$  che è altrettanto legittimo quanto quello di partenza, poiché le trasformazioni (1.49) non hanno contenuto fisico, ma riflettono semplicemente la libertà di scelta che abbiamo nel

descrivere i campi elettrici e magnetici in termini dei potenziali (in meccanica quantistica la situazione è più complicata).

Passiamo ora alla formulazione hamiltoniana. La funzione di Hamilton data dalla (1.11) è

$$H = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_{\text{can}} - L = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_{\text{can}} - \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + q\varphi - \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$$

Usiamo la (1.54) per eliminare  $\mathbf{v}$ , ottenendo

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{m} \left( \mathbf{p}_{\text{can}} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \mathbf{p}_{\text{can}} - \frac{1}{2} m \frac{1}{m^2} \left( \mathbf{p}_{\text{can}} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 + q\varphi - \frac{q}{c} \frac{1}{m} \left( \mathbf{p}_{\text{can}} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{m} \mathbf{p}_{\text{can}}^2 - \frac{q}{mc} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_{\text{can}} - \frac{1}{2m} \mathbf{p}_{\text{can}}^2 + \frac{q}{mc} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_{\text{can}} - \frac{q^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2 + q\varphi - \frac{q}{mc} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_{\text{can}} + \frac{q^2}{mc^2} \mathbf{A}^2 \\ &= \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p}_{\text{can}}^2 - 2 \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_{\text{can}} + \frac{q^2}{c^2} \mathbf{A}^2 \right) + q\varphi \end{aligned}$$

Quindi,

$$H = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p}_{\text{can}} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 + q\varphi = \frac{\mathbf{p}_{\text{mecc}}^2}{2m} + q\varphi \quad (1.55)$$

L'ultima uguaglianza rende conto del fatto che le forze magnetiche non compiono lavoro e quindi non contribuiscono all'energia totale.

### 1.3 Sistemi continui e campi locali

Per sistema continuo, si intende un sistema la cui configurazione  $q$  è data, anziché dalla collezione discreta  $(q_1, \dots, q_n, \dots, q_r)$ , da una collezione continua  $q = (q_{\mathbf{x}})$  dove  $\mathbf{x}$  varia in una regione dello spazio. In altre parole la configurazione è un campo  $\phi = \phi(\mathbf{x})$ . Per la sua evoluzione temporale scriveremo  $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$  e per la sua "velocità" scriveremo indifferentemente

$$\dot{\phi} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial t} \equiv \partial_t \phi$$

Il caso più semplice è  $\phi(x)$  a valori scalari (questo è il caso, per esempio, di un campo di pressione) e incominceremo da questo.

#### 1.3.1 Sistema continuo come limite di un sistema discreto

È conveniente (ma ovviamente non necessario!), concepire un sistema continuo come limite continuo di un sistema discreto. Per amore di concretezza, consideriamo la catena armonica del box 1.4 e studiamone il limite continuo. La catena armonica consiste in  $N$  punti materiali di massa  $m \equiv \delta m$  (lieve cambio di notazioni rispetto all'esempio), collegati da molle di identica costante di richiamo  $k$ . La lunghezza di equilibrio delle molle è  $a \equiv \delta x$ , cosicché a riposo la catena ha lunghezza  $L_0 = N\delta x$ . La funzione di Lagrange è  $L = T - V$  con

$$T = \frac{1}{2} \sum_n \delta m \dot{q}_n^2 \quad \text{e} \quad V = \frac{1}{2} \sum_n k (q_{n+1} - q_n)^2$$

Poniamo  $x = n\delta x$ , per cui lo scostamento dall'equilibrio della massa  $n$  può essere riscritto come  $q_n(t) = \phi(x, t)$  e prendiamo il limite continuo  $N \rightarrow \infty$ ,  $\delta x \rightarrow 0$ , tenendo fissati

$$L_0 = N\delta x, \quad \mu = \frac{\delta m}{\delta x}, \quad \tau = k\delta x.$$

Allora abbiamo

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_n \frac{\delta m}{\delta x} \dot{q}_n^2 \delta x \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \int \mu \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 dx \\ V &= \frac{1}{2} \sum_n k\delta x \frac{[\phi(x + \delta x) - \phi(x)]^2}{(\delta x)^2} \delta x \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \int \tau \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx \end{aligned}$$

dov le integrazioni sono su un intervallo  $[x', x'']$  di lunghezza  $L_0$ ;  $\mu$  e  $\tau$  sono, rispettivamente, la densità lineare di massa e la tensione della corda elastica che si ottiene nel limite continuo.

Otteniamo così che la funzione di Lagrange originaria diventa

$$L = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_x \phi, \partial_t \phi) dx \quad (1.56)$$

con

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_x \phi, \partial_t \phi) = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \tau \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \equiv \frac{1}{2} \mu (\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2} \tau (\partial_x \phi)^2 \quad (1.57)$$

$\mathcal{L}$  è detta *densità di lagrangiana* o semplicemente “lagrangiana” quando è chiaro che ci si riferisce alla densità e non alla funzione di Lagrange  $L$ .

Le equazioni del moto della funzione di Lagrange originaria sono

$$(\delta m)\ddot{q} = k(q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}) \quad (1.43)$$

che possono essere riscritte come

$$\frac{\delta m}{\delta x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = k\delta x \frac{\phi(x + \delta x) - 2\phi(x) + \phi(x - \delta x)}{(\delta x)^2}$$

e quindi nel limite continuo diventano

$$\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (1.58)$$

ossia l'equazione delle onde in una dimensione,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (1.59)$$

con  $c = \sqrt{\tau/\mu}$  la velocità di propagazione delle onde. Come si verifica facilmente, la (1.62) è l'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \phi)} \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \quad (1.60)$$

per la lagrangiana  $\mathcal{L}$  data dalla (1.57). Si ha infatti,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} = \mu \partial_t \phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \phi)} = -\tau \partial_x \phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (1.61)$$

da cui segue immediatamente che la (1.60) è equivalente alla (1.62).

Se invece della catena armonica consideriamo i pendoli accoppiati del box 1.5, si vede facilmente (esercizio) che nel limite continuo le equazioni del moto diventano

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2} \phi, \quad (1.62)$$

che è l'equazione di Klein-Gordon in una dimensione spaziale, e che questa è l'equazione di Eulero-Lagrange della lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2c^2} (\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{c^2} \phi^2 \quad (1.63)$$

Adesso, astraiamo da questi casi concreti e consideriamo la situazione generale (mantenendo solo l'assunzione che  $\phi$  sia un campo scalare): Sia  $\mathcal{R}$  un regione nello spazio e  $\phi$  un campo definito in esso descritto dalla densità di lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathcal{L}(\phi(\mathbf{x}), \nabla \phi(\mathbf{x}), \partial_t \phi(\mathbf{x})) \quad (1.64)$$

dove  $\nabla$  è il gradiente di componenti  $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . L'equazione del moto del campo generata da  $\mathcal{L}$  è l'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right] + \nabla \cdot \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \quad (1.65)$$

e la funzione di Lagrange corrispondente è

$$L = \int_{\mathcal{R}} \mathcal{L} dV \quad (1.66)$$

dove  $dV$  è l'elemento infinitesimo di volume. Naturalmente, le equazioni del moto (1.65) vanno supplementate da condizioni al contorno sul bordo di  $\mathcal{R}$ .

È importante osservare che non c'è nulla nella natura di sistema continuo che richieda che la sua funzione di Lagrange sia del tipo (1.66) con  $\mathcal{L}$  della forma (1.64). Nulla vieta che la funzione di Lagrange sia del tipo  $L = \int \int \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV dV'$  o addirittura con dipendenze da più punti  $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \dots$ . In effetti, nelle applicazioni si incontrano funzioni di questo tipo. Tuttavia, i sistemi continui che intervengono a livello fondamentale (per esempio il campo elettromagnetico) sono descritti da funzioni di Lagrange del tipo (1.66). Per questi sistemi continui si usa la dicitura *campi locali*: per tali sistemi l'interazione tra le diverse parti del sistema è *locale* e questo si riflette nel fatto che la funzione di Lagrange è l'integrale di una densità locale.

#### Box 1.7 — Campo di Klein-Gordon.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2c^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} \mu_0^2 \phi^2 \quad (1.67)$$

dove  $c$  è la velocità della luce e  $\mu_0$  una costante (che non ha nulla a che fare con la densità di massa precedentemente introdotta!).<sup>a</sup> Allora:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\mu_0^2 \phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} = -\nabla \phi$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \nabla \cdot (-\nabla \phi) = -\mu_0^2 \phi$$

ossia, l'equazione di Klein-Gordon

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi + \mu_0^2 \phi = 0 \quad (1.68)$$

di solito scritta anche nella forma

$$\square \phi + \mu_0^2 \phi = 0, \quad \text{dove} \quad \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (1.69)$$

è l'operatore di d'Alembert.

<sup>a</sup>È utile avere presente le dimensioni delle grandezze in gioco. Nel caso della corda vibrante il campo ha le dimensioni di una lunghezza, ma non nel caso di Klein-Gordon. Infatti, la densità di lagrangiana ha la dimensione di un'energia  $\mathcal{E}$  per unità di volume  $L^3$ , cioè  $[\mathcal{L}] = [\mathcal{E}]L^{-3}$ . Allora, considerando il secondo termine nella (1.67), dovrà valere la relazione  $[\nabla \phi]^2 = [\mathcal{E}]L^{-3}$ . Ma  $[\nabla \phi]^2 = [\phi]^2 L^{-2}$ , quindi  $[\phi]^2 = [\mathcal{E}]L^{-1}$ . Poiché  $[\mu_0]^2 [\phi]^2 = [\mathcal{L}] = [\mathcal{E}]L^{-3}$ , vediamo che  $[\mu_0]^2 = L^{-2}$ , quindi la costante  $\mu_0$  nella (1.67) ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza (come peraltro risulta immediato semplicemente confrontando il primo e l'ultimo termine della (1.67)).

### 1.3.2 Il campo di Schrödinger

Una particella quantistica in un potenziale  $V$  è descritta dal campo di Schrödinger  $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$  che soddisfa l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi \quad (1.70)$$

$\psi$  è un esempio di campo complesso che non è ottenuto come limite continuo di un sistema discreto (a meno che non si faccia del calcolo numerico). L'equazione di Schrödinger è l'equazione di Eulero-Lagrange della densità di lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \hbar (\bar{\psi} \dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}} \psi) - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \bar{\psi} \cdot \nabla \psi - V \bar{\psi} \psi \quad (1.71)$$

**Box 1.8 — Campo di Schrödinger (esempio di campo complesso).** Nella (1.71)  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  vanno trattati come campi indipendenti. Allora:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = \frac{i}{2} \hbar \dot{\psi} - V \psi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = -\frac{i}{2} \hbar \psi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \bar{\psi}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi$$

da cui le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{i}{2} \hbar \psi \right) + \nabla \cdot \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi \right) = \frac{i}{2} \hbar \dot{\psi} - V \psi$$

che coincidono con l'equazione di Schrödinger (1.70).

Adesso qualche commento sul campo di Schrödinger. Nel 1924, de Broglie ipotizzò che una particella di impulso  $\mathbf{p}$  ed energia  $E$  fosse guidata dall'onda  $\psi = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t}$  le cui caratteristiche d'onda,  $\mathbf{k}$  e  $\omega$  fossero collegate alle caratteristiche meccaniche della particella  $\mathbf{p}$  e  $E$  dalle relazioni  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$  e  $E = \hbar \omega$ . In particolare, se  $E = \mathbf{p}^2/(2m)$ , allora la frequenza dell'onda deve essere

$$\omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m\hbar} = \frac{\hbar \mathbf{k}^2}{2m}.$$

Ne segue che la velocità di gruppo dell'onda  $\mathbf{v}_g = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} = \frac{\hbar\mathbf{k}}{m}$  è uguale alla velocità della particella  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$ . Osserviamo che

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hbar\omega\psi = E\psi \quad \text{e} \quad \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla \right)^2 \psi = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} \psi = E\psi$$

Quindi l'onda piana deve soddisfare l'equazione

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla \right)^2 \psi \quad (1.72)$$

e la velocità della particella è determinata dall'onda mediante la relazione

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{\hbar}{m} \frac{\bar{\psi} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla \right) \psi}{\bar{\psi} \psi} \quad (1.73)$$

L'ipotesi fondamentale della meccanica quantistica è che per una particella libera l'eq. (1.72) valga per qualunque onda  $\psi$  (non necessariamente per un'onda piana). Questa ipotesi può essere equivalentemente formulata mediante le regole di corrispondenza

$$E \rightarrow \hat{E} = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e} \quad \mathbf{p} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{i} \nabla \quad (1.74)$$

che permettono di trasformare la relazione classica per l'energia  $E = \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  nell'equazione d'onda

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi, \quad \hat{H} = \mathcal{E}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}).$$

Questa, per  $\mathcal{E} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x})$  è proprio l'equazione di Schrödinger (1.70). L'altra ovvia ipotesi è che l'equazione (1.73) valga per una qualunque onda  $\psi$ . Sorprendentemente, questa seconda ipotesi non compare nelle formulazioni usuali della meccanica quantistica, pur essendo parte integrante dell'ipotesi di de Broglie.

Vediamo adesso l'analogo quantistico del box 1.6.

**Box 1.9 — Particella quantistica carica in campi elettrici e magnetici magnetici.** L'interazione di una carica  $e$  con un campo elettromagnetico esterno  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  è ottenuta mediante il principio di minimo accoppiamento che corrisponde alle seguenti sostituzioni nella dinamica libera:

$$\hat{E} \rightarrow \hat{E} - e\varphi, \quad \hat{\mathbf{p}} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A},$$

dove  $\varphi$  e  $\mathbf{A}$  sono, rispettivamente, il potenziale scalare e il potenziale vettore, legati ai campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  dalle relazioni (1.48). Il principio di minimo accoppiamento è immediatamente suggerito dalla formula (1.55) per l'Hamiltoniana classica. Si osservi che l'operatore quantistico di impulso  $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$  corrisponde all'impulso canonico classico  $\mathbf{p}$  (e non all'impulso meccanico  $\mathbf{P}$ ). Allora, l'equazione d'onda diventa

$$(\hat{E} - e\varphi)\psi = \frac{1}{2m} \left( \hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi$$

ossia

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} - e\varphi\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \nabla - \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \psi \quad (1.75)$$

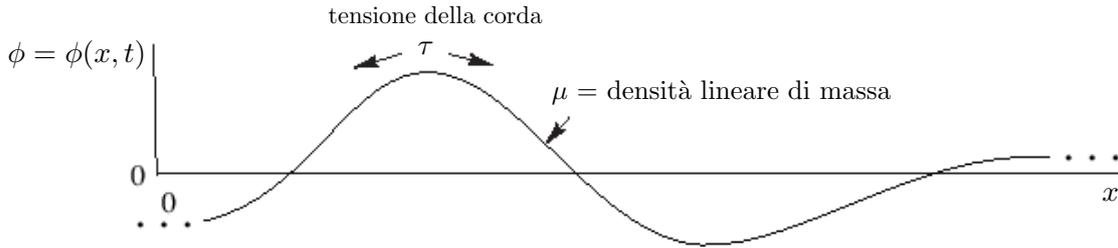


Figura 1.1: Il limite continuo della catena armonica può descrivere onde trasversali di una corda. In questo caso, il campo  $\phi = \phi(x, t)$  è lo scostamento verticale della corda dalla sua configurazione d'equilibrio.

Quindi l'hamiltoniana di una carica  $e$  con un campo elettromagnetico esterno  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  è

$$H = \frac{1}{2m} \left( \hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi + e\varphi.$$

Risulta utile definire gli operatori di derivazione

$$D_t \equiv \partial_t + \frac{ie}{\hbar} \varphi \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = \nabla - \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} \quad (1.76)$$

in termini dei quali l'equazione del moto (1.75) diventa formalmente simile all'equazione di particella libera:

$$i\hbar D_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{D}^2 \psi. \quad (1.77)$$

Inoltre, usando gli operatori (1.76) possiamo immediatamente trasformare la densità di Lagrangiana (1.71) per particella libera ( $V = 0$ ) nella densità di Lagrangiana le cui equazioni di Eulero-Lagrange sono date dalla (1.75):

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \hbar \left[ \bar{\psi} D_t \psi - (D_t \bar{\psi}) \psi \right] - \frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{D} \bar{\psi} \cdot \mathbf{D} \psi \quad (1.78)$$

### 1.3.3 Flussi d'energia e quantità localmente conservate

Data la densità di lagrangiana  $\mathcal{L}$  di un campo *classico* (escludiamo il campo di Schrödinger<sup>4</sup>), si definisce (la densità di) impulso canonico come il campo

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad (1.79)$$

e la densità di energia

$$u = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} \quad (1.80)$$

Una proprietà importante delle teorie di campo è il flusso d'energia associato alle onde del campo che si propagano. Analizziamo questo in un caso concreto.

<sup>4</sup>Non tanto perché le quantità che stiamo per definire non siano definibili matematicamente per il campo di Schrödinger – in effetti lo sono – ma perché il loro significato fisico non è in termini di energia e impulso.

**Box 1.10 — Flusso d'energia nella corda vibrante.** Consideriamo il campo  $\phi$  che descrive la catena armonica nel limite continuo, cioè la corda vibrante, con  $\phi$  che rappresenta lo scostamento nella direzione verticale dalla configurazione d'equilibrio della corda (si veda la figura sopra). La densità di lagrangiana della corda con densità di massa  $\mu$  e tensione  $\tau$  è data dalla (1.57) e, come abbiamo visto,  $\phi$  soddisfa l'equazione delle onde. Allora la densità di l'impulso canonico e la densità d'energia definite dalle equazioni sopra sono, rispettivamente,

$$\pi = \mu \dot{\phi} \quad \text{e} \quad u = \frac{1}{2} \mu \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \tau (\partial_x \phi)^2 \quad (1.81)$$

Durante un piccolo intervallo di tempo  $dt$  un'onda che si muove verso destra percorrerà la distanza  $dx = cdt$ , dove  $c = \sqrt{\tau/\mu}$  è la velocità di propagazione delle onde. La quantità di energia trasportata nell'intervallo tra  $x$  e  $x + dx$  al tempo  $t$  è  $d\mathcal{E}(x, t) = u(x, t)dx = cu(x, t)dt$ . La potenza istantanea  $\Pi(x, t)$  che passa il punto  $x$  al tempo  $t$  è quindi data da

$$\Pi(x, t) = \frac{\partial \mathcal{E}(x, t)}{\partial t} = cu(x, t)$$

Prendendo la derivata temporale della densità d'energia della corda, valutata per una *soluzione delle equazioni del moto*, si ottiene

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{\text{sol}} = \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} = \tau \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \tau \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (1.82)$$

(dove nel secondo passaggio abbiamo usato l'equazione delle onde (1.58)). Quindi, l'energia  $u$  del campo  $\phi$ , soluzione delle equazioni delle onde, soddisfa l'equazione di continuità

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0 \quad (1.83)$$

per la densità di flusso

$$J = -\tau \dot{\phi} \partial_x \phi = -c^2 \mu \dot{\phi} \partial_x \phi \equiv c^2 G$$

La quantità definita dall'ultima uguaglianza, cioè,

$$G = -\mu \dot{\phi} \partial_x \phi = -\pi \partial_x \phi \quad (1.84)$$

svolge un ruolo importante nelle teorie di campo in quanto rappresenta la *densità d'impulso meccanico* nella direzione di propagazione del campo. Diamo una spiegazione fisica di questo fatto.

In primo luogo, osserviamo che  $G$  ha le stesse dimensioni dell'impulso canonico (perché  $\phi$  è una lunghezza). Richiamiamo, inoltre, che le soluzioni dell'equazione delle onde ricadono in due categorie: onde  $\phi_+$  che si muovono verso destra e onde  $\phi_-$  che si muovono verso sinistra.<sup>a</sup> Poiché le onde  $\phi_+$  sono del tipo  $f(x - ct)$ , si ha  $\dot{\phi}_+ = -c \partial_x \phi_+$ , mentre per le onde  $\phi_-$  si ha  $\dot{\phi}_- = c \partial_x \phi_-$ . I corrispondenti impulsi canonici sono dunque

$$\pi_+ = \mu \partial_t \phi_+ = -\mu c \partial_x \phi_+ \quad \text{e} \quad \pi_- = \mu \partial_t \phi_- = \mu c \partial_x \phi_- .$$

Inserendo queste espressioni nell'impulso meccanico (1.84), si ottiene

$$G_{\pm} = \pm \mu c (\partial_x \phi_{\pm})^2. \quad (1.85)$$

Quindi per un'onda che si propaga nella direzione positiva, la densità d'impulso meccanico è positivo, mentre per un'onda che si propaga nella direzione negativa, la densità d'impulso meccanico è negativa; questo spiega il segno meno nella (1.84). Infine, l'ultimo passo nel comprendere la definizione (1.84) è osservare che  $\partial\phi/\partial x$  è la pendenza della corda (si veda la figura) è quindi è come  $\tan\theta$ , dove  $\theta$  è l'angolo della corda rispetto all'asse  $x$ . Nel caso di piccole ampiezze (che è il limite di validità dell'equazione delle onde) abbiamo  $\partial\phi/\partial x \approx \tan\theta \approx \sin\theta$ . Poiché l'impulso canonico è per definizione perpendicolare all'asse  $x$  (ha la stessa direzione di  $\phi$ ), ne segue che  $\pi\partial\phi/\partial \approx \pi\sin\theta$ . Quindi  $G = \pi\sin\theta$  è la densità d'impulso tangente alla corda nella direzione della propagazione. Mentre questo risultato è stato ottenuto dal movimento meccanico della corda, la definizione (1.84) e le sue generalizzazioni danno l'impulso trasportato dal campo a prescindere dal fatto che il campo abbia un'interpretazione meccanica come nel caso della corda.

Il prossimo passo è collegare (1.85) alla densità di energia per una soluzione dell'equazione delle onde. Per i due tipi possibili di onde,  $\dot{\phi}_{\pm} = \mp c\partial_x\phi_{\pm}$  e  $c^2 = \tau/\mu$ , si ha

$$u_{\pm} = \frac{1}{2}\mu\dot{\phi}_{\pm}^2 + \frac{1}{2}\tau(\partial_x\phi_{\pm})^2 = \tau(\partial_x\phi_{\pm})^2.$$

Usando questo risultato e  $c^2 = \tau/\mu$  nella (1.85), dà

$$G_{\pm} = \pm \frac{u_{\pm}}{c}, \quad (1.86)$$

dove è sottinteso che  $u$  è sempre una quantità positiva.

<sup>a</sup>L'integrale generale dell'equazione della corda vibrante è  $\phi = f(x-ct) + g(x+ct)$ , dove  $f$  e  $g$  sono funzioni arbitrarie (purché differenziabili due volte). Questa soluzione fu scoperta da d'Alembert ed è nota come integrale di d'Alembert. Per comprenderne il significato, si supponga che la corda sia illimitata dalle due parti e che  $g=0$ , per cui  $\phi = \phi_+ = f(x-ct)$ . Poiché questa funzione dipende solo da  $x-ct$ , questa soluzione descrive un'onda che si propaga inalterata nella direzione positiva dell'asse delle  $x$ : in un sistema di riferimento in moto con velocità  $c$  la soluzione avrebbe sempre, nel corso del tempo, la stessa forma: un'onda di questo tipo è detta *progressiva*. La soluzione  $\phi = \phi_- = g(x+ct)$  corrisponde invece ad un'onda *regressiva*, cioè un'onda che si muove da destra a sinistra. La soluzione generale è la sovrapposizione di questi due tipi d'onde.

Le relazioni (1.83), (1.84) e (1.86) sono state tutte ottenute per il caso specifico di una corda. È naturale domandarsi se le proprietà di una teoria di campo locale sono tali da dare in generale risultati simili. La risposta è affermativa. Il corrispondente di una quantità conservata per un sistema di particelle, in una teoria di campo locale è una quantità localmente conservata, cioè una quantità  $\rho$  funzione dei campi che risolvono le equazioni del moto, per la quale esiste una densità di flusso  $\mathbf{J}$ , anch'essa funzione dei campi che risolvono le equazioni del moto, in modo tale che tale che la coppia  $\rho, \mathbf{J}$  soddisfa l'equazione di continuità

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.87)$$

Una classe ampia di teorie di campo scalare in tre dimensioni è data da lagrangiane

della forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - V(\phi), \quad (1.88)$$

dove  $V(\phi)(x) = V(\phi(x))$ , per esempio, per il campo di Klein-Gordon,  $V(\phi) = \frac{1}{2} \mu_0^2 \phi^2$ . Si lascia come esercizio mostrare che per teorie di questo tipo vale la (1.87) con  $\rho$  la densità di energia

$$u = \frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) \quad (1.89)$$

e<sup>5</sup>

$$\mathbf{J} = c^2 \mathbf{G} = -c^2 \pi \nabla \phi \quad (1.90)$$

con  $\phi$  soluzione delle equazioni del moto e  $c^2 = \tau/\mu$ . Nella sezione 4.4 mostreremo che questa legge locale di conservazione è collegata all'invarianza della teoria per traslazione temporale. Mostreremo inoltre che le tre componenti della densità di impulso meccanico soddisfano anch'esse un'equazione della forma (1.87) con flussi dati dal tensore degli sforzi e che questa legge locale di conservazione è conseguenza dell'invarianza della teoria per traslazioni spaziali.

### 1.3.4 Relazioni di dispersione

Anticipiamo un metodo che useremo sistematicamente nel capitolo 7: l'*analisi in onde piane* delle soluzioni dei campi liberi. La forma delle onde piane è

$$\mathcal{A} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (1.91)$$

dove  $\omega$ ,  $\mathbf{k}$  e  $\mathcal{A}$  sono rispettivamente la frequenza angolare, il numero d'onda e l'ampiezza dell'onda piana;  $\mathcal{A}$  può essere uno scalare (reale o complesso), un vettore, etc. a seconda della natura del campo.

La *relazione di dispersione* è definita come la relazione tra il numero d'onda (o la sua lunghezza d'onda) e la frequenza di un'onda piana. Questa relazione è *determinata solamente dalle equazioni di campo* e non dipende dalle condizioni al contorno.

**Box 1.11 — Relazione di dispersione delle onde elettromagnetiche.** Consideriamo le equazioni di Maxwell (1.47) libere ( $\rho = 0$ ,  $\mathbf{J} = 0$ ). Usando la nota formula di calcolo vettoriale

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = -\Delta \mathbf{F} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}), \quad (1.92)$$

si dimostra facilmente che i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  soddisfano l'equazione delle onde:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} - \Delta \mathbf{F} = 0 \quad (1.93)$$

dove  $\mathbf{F}$  sta per  $\mathbf{E}$  o  $\mathbf{B}$ . Allora l'onda piana (1.91) soddisfa questa equazione se

$$\omega^2 = c^2 |\mathbf{k}|^2. \quad (1.94)$$

<sup>5</sup>Si osservi che, sebbene il campo non abbia le dimensioni di una lunghezza come nel caso della corda, il fattore  $c^2$  nella (1.90) è dettato da semplici considerazioni dimensionali:  $[\pi] = [\mathcal{L}][\phi]^{-1}T$ , per cui  $[\pi \nabla \phi] = [\mathcal{L}][\phi]^{-1}T[\phi]L^{-1} = [\mathcal{L}]TL^{-1}$ , mentre  $[\mathbf{J}] = LT^{-1}[\mathcal{L}]$ , il che vuole dire che occorre moltiplicare  $\pi \nabla \phi$  per una velocità al quadrato per formare una quantità che ha la stesse dimensioni di  $\mathbf{J}$ .

Questa è la relazione di dispersione delle onde elettromagnetiche nel vuoto.

**Problema 1.3** Mostrare che la relazione di dispersione del campo di Klein-Gordon (1.68) è

$$\omega^2 = c^2 |\mathbf{k}|^2 + c^2 \mu_0^2 \quad (1.95)$$

**Problema 1.4** Mostrare che la relazione di dispersione del campo di Schrödinger libero (1.70) ( $V = 0$ ) è

$$\omega = \frac{\hbar}{2m} |\mathbf{k}|^2 \quad (1.96)$$

### 1.3.5 Formalismo hamiltoniano

La densità di Hamiltoniana è definita come nel caso discreto

$$\mathcal{H}(\phi, \pi) = u(\phi, \pi) = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}. \quad (1.97)$$

Il passaggio da  $\mathcal{L}$  a  $\mathcal{H}$  va inteso come l'analogo per i campi della trasformata di Legendre (1.11), vale a dire, si assume che l'equazione (1.79) sia risolvibile rispetto a  $\dot{\phi}$  per cui nella (1.97) si intende che  $\dot{\phi} = \dot{\phi}(\phi, \pi)$ . Procedendo in maniera formalmente identica al caso discreto, si dimostra che valgono le equazioni di Hamilton

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \quad (1.98a)$$

$$\dot{\pi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \quad (1.98b)$$

## Appendice 1.A – Teorema spettrale e forme quadratiche\*

Richiamiamo alcuni teoremi di algebra e geometria che sono molto utili in fisica teorica.

### 1.A.1 Autovalori e autovettori

Ambiente: Spazio vettoriale  $\mathcal{V}$  di dimensione  $n$  su un campo  $\mathbb{K}$  di scalari (reali  $\mathbb{R}$  o complessi  $\mathbb{C}$ ). Dato un operatore lineare  $A$  da  $\mathcal{V}$  a  $\mathcal{V}$ , lo scalare  $\lambda$  viene chiamato *autovalore* di  $A$  se esiste un vettore non nullo  $v$  per il quale  $A(v) = \lambda v$ . Ogni vettore che soddisfa questa relazione si chiama *autovettore* di  $A$  avente autovalore  $\lambda$  (se  $v$  è un autovettore, qualunque suo multiplo scalare  $kv$  lo è altrettanto). L'insieme di tutti questi vettori è un sottospazio di  $V$ , detto *autospazio* di  $\lambda$ .

Il seguente teorema è talvolta usato come definizione: *Sia  $A$  un operatore lineare. Allora  $\lambda$  è un autovalore se e solo se l'operatore  $\lambda I - A$  è singolare. L'autospazio di  $\lambda$  è allora il*

nucleo di  $\lambda I - A$ . Per trovare gli autovalori di un operatore lineare  $A$  si deve allora risolvere l'equazione

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

Poiché un operatore è singolare se e solo se il suo determinante è nullo,  $\lambda$  è un autovalore di  $A$ , se e solo se è soluzione dell'equazione

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (1.99)$$

Questa equazione è detta *equazione agli autovalori* (o “equazione secolare” o “equazione caratteristica”) di  $A$ . Se calcoliamo il determinante, otteniamo un polinomio di grado  $n$ , che è detto *polinomio caratteristico* di  $A$ ,

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \quad (1.100)$$

e chiaramente gli autovalori di  $A$  sono le sue radici. Trovare gli autovalori di un operatore su uno spazio di dimensione  $n$  è dunque equivalente a trovare le radici del polinomio caratteristico. A questo proposito ricordiamo che non c'è una formula generale per trovare le radici di polinomi di grado superiore a quattro e anche le formule per le cubiche o le quartiche sono abbastanza orrende. Di solito in problemi concreti si ricorre a metodi numerici.

### 1.A.2 Diagonalizzazione ed autovettori

Un operatore  $A$  su uno spazio lineare  $\mathcal{V}$  di dimensione  $n$  è detto diagonalizzabile se esiste una base in cui esso è rappresentato da una matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (1.101)$$

Allora  $A$  è diagonalizzabile se e solo se la sua rappresentazione matriciale è simile a una matrice diagonale, cioè se esiste una matrice invertibile  $S$  tale che  $S^{-1}AS$  è una matrice diagonale. Questo significa che per essere diagonalizzabile,  $A$  deve avere la seguente struttura

$$A = SDS^{-1} \quad (1.102)$$

Ricordiamo che una matrice invertibile  $S$  può essere sempre scritta nella forma

$$S = (\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n). \quad (1.103)$$

dove  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  sono vettori colonna che formano una base in  $\mathbb{C}^n$ . Lo scopo è trovare  $A = SDS^{-1}$  per una qualche matrice diagonale  $D$  con i numeri  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  lungo la sua diagonale. Quindi  $AS = SD$ , cioè

$$(A\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad A\mathbf{v}_n) = (\lambda_1\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \lambda_n\mathbf{v}_n), \quad (1.104)$$

avendo scritto le colonne di entrambi i membri dell'equazione  $AS = SD$ . Quindi,  $A$  è diagonalizzabile se e solo se esistono numeri  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  e  $n$  vettori  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  tali che

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i \quad (1.105)$$

Si ha così il teorema: *Un operatore  $A$  è diagonalizzabile, può cioè essere scritta nella forma  $A = SDS^{-1}$ , per qualche operatore diagonale  $D$  e operatore invertibile  $S$ , se e solo se esiste una base formata da autovettori di  $A$ . La matrice che rappresenta  $S$  è formata da questi vettori come vettori colonna.*

È importante osservare che gli autovalori sono invarianti per trasformazione di similitudine. Infatti, se  $B$  è simile ad  $A$ , vale a dire, esiste una matrice invertibile  $V$  tale che  $B = VAV^{-1}$ , allora<sup>6</sup>

$$\det(B - \lambda I) = \det(VAV^{-1} - \lambda I) = \det[V(A - \lambda I)V^{-1}] = \det(A - \lambda I)$$

Ne segue che gli autovalori di  $B$  e  $A$  sono gli stessi.

Per il teorema fondamentale dell'algebra, un polinomio di grado  $n$  ha sempre  $n$  radici complesse, anche se alcune di queste possono avere molteplicità algebrica. Ne segue che: *Un operatore  $A$  su uno spazio lineare complesso di dimensione  $n$  ha  $n$  autovalori (non necessariamente distinti) e almeno un autovettore.* Quando un autovalore è una radice del polinomio caratteristico con molteplicità algebrica  $> 1$  si dice che è *degenere*. L'insieme degli autovalori di  $A$  si chiama *spettro* di  $A$ . Quando gli autovalori di  $A$  sono tutti distinti (assenza di degenerazione), si dice che l'operatore ha *spettro semplice* o che gli autovalori sono semplici. Il seguente teorema è molto utile: *Autovettori non nulli, relativi ad autovettori distinti, sono linearmente indipendenti.*

Trovare gli autovalori di un operatore è dunque il primo passo per diagonalizzarlo. Il secondo passo è trovare gli autovettori. Questi si trovano separatamente, cercando i vettori che annullano  $A - \lambda I$  per ogni autovalore  $\lambda$ . Se ce ne sono abbastanza di linearmente indipendenti in modo da formare una base in  $\mathcal{V}$ , il gioco è fatto. Questo però, in generale, può non funzionare e la presenza di autovalori degeneri è un ostacolo alla diagonalizzabilità dell'operatore. Tuttavia, se gli autovalori sono semplici, cioè sono radici semplici di  $p(\lambda)$  (o detto in altri termini, lo spettro dell'operatore è non degenere), il gioco funziona sempre: *Se lo spettro di operatore  $A$  su uno spazio  $\mathcal{V}$  di dimensione  $n$  è semplice, allora  $A$  è diagonalizzabile.*

### 1.A.3 Aggiunto di un operatore

Sia  $A$  un operatore su uno spazio  $\mathcal{V}$  su di dimensione  $d$  su  $\mathbb{C}$ , munito di prodotto scalare  $\langle u, v \rangle$ . Se  $\mathcal{V}$  è di dimensione  $n$ , gli elementi della matrice che rappresenta  $A$  rispetto ad una base  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  sono definiti da

$$A(\mathbf{e}_j) = \sum_i A_{ij} \mathbf{e}_i. \quad (1.106)$$

Se la base è ortonormale, cioè  $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ , allora

$$A_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_j \rangle \quad (1.107)$$

Un operatore lineare  $A$  possiede un aggiunto  $A^*$  se

$$\langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle = \langle A^*\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (1.108)$$

Passando all'azione dell'operatore sugli elementi della base, l'equazione precedente diventa

$$A_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_j \rangle = \langle A^*\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \left\langle \sum_k [A^*]_{ki} \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j \right\rangle = \sum_k \overline{[A^*]_{ki}} \delta_{kj} = \overline{[A^*]_{ji}},$$

da cui  $[A^*]_{ij} = \overline{[A]_{ji}}$ . Quindi ogni operatore lineare  $A$  su uno spazio di dimensione finita, ha un (solo) aggiunto rappresentato dalla matrice aggiunta  $A^*$ . Segue dalla definizione che  $A^{**} = A$ . In spazi di dimensione infinita non tutti gli operatori lineari hanno un aggiunto.

<sup>6</sup>Si ricordi che  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .

### 1.A.4 Teorema spettrale per operatori autoaggiunti

La chiave di volta per trovare un criterio sufficiente di diagonalizzabilità molto generale è il seguente teorema: *Se  $A$  lascia invariata la direzione di un vettore  $\mathbf{v}$ , allora  $A^*$  lascia invariato il sottospazio  $\mathcal{W}$  di tutti i vettori ortogonali a  $\mathbf{v}$ .* Si osservi che “lasciare invariata la direzione di  $\mathbf{v}$ ” è un altro modo per dire che  $\mathbf{v}$  è un autovettore di  $A$ , poiché se  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ , il vettore  $\mathbf{v}$  viene “stirato” (o accorciato o moltiplicato per una fase), ma non cambia la sua direzione. Per “lasciare invariato il sottospazio di tutti i vettori ortogonali a  $\mathbf{v}$ ” si intende che quando  $A^*$  agisce su un qualunque vettore ortogonale a  $\mathbf{v}$ , lo trasforma in un altro che è ancora ortogonale a  $\mathbf{v}$ . Si è osservi che l’insieme dei vettori ortogonali a  $\mathbf{v}$  è un sottospazio di  $\mathcal{V}$ .

Da questo teorema segue il teorema: *Se  $A$  è un operatore auto-aggiunto su uno spazio  $\mathcal{V}$  di dimensione  $n$  dotato di prodotto scalare, allora  $A$  è diagonalizzabile e i suoi autovalori sono reali.* Questo è il *teorema spettrale* per gli operatori autoaggiunti in spazi lineari di dimensione finita. Questo teorema è molto utile, in particolare in meccanica classica (riduzione agli assi principali di inerzia di un corpo rigido e teoria delle piccole oscillazioni) e in meccanica quantistica.

La matrice  $U$  che realizza la diagonalizzazione  $D = U^{-1}AU$ , è *unitaria*, ed è formata dagli autovettori  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  normalizzati a 1,

$$U = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \quad (1.109)$$

Si osservi che adesso l’eventuale presenza di autovalori degeneri non influisce minimamente sulla procedura di diagonalizzazione. Allora

$$A = UDU^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \dots \\ \mathbf{v}_n^* \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^*$$

Ma  $\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^*$  sono i proiettori ortogonali sugli autovettori e se un autovalore è degenero ad esso corrisponderà la somma dei proiettori su gli autovettori corrispondenti, cioè il proiettore sull’autospatio associato all’autovalore. Quindi,

$$A = \sum_{k=1}^r \lambda_k P_k, \quad (1.110)$$

dove  $r \leq n$ ,  $\lambda_k$  sono autovalori distinti e le matrici  $P_k$  proiettano sugli autospatii associati agli autovalori  $\lambda_k$ . Poiché questi sottospazi sono ortogonali tra loro, si ha  $P_k P_j = 0$  per  $k \neq j$ ; inoltre, essendo  $U$  una matrice ortogonale,  $\sum_k P_k = \mathbf{1}$ . La (1.110) è detta *rappresentazione spettrale* di  $A$

### 1.A.5 Teorema di Sylvester

Questo teorema è una variante del teorema spettrale, ed particolarmente utile nella teoria del corpo rigido e in teoria della relatività. Lo enunciamo per spazi vettoriali reali, ma una forma analoga vale per spazio vettoriali complessi.

Preliminarmente introduciamo alcune nozioni. Una funzione  $\Phi: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  è detta bilineare se  $\Phi(u, v)$  è lineare sia nella prima variabile sia nella seconda. Se inoltre  $\Phi(u, v) = \Phi(v, u)$  la funzione è detta *forma bilineare simmetrica*. Se  $\Phi(v, v) \geq 0$ , la forma è detta *semi-definita non negativa*; se  $\Phi(v, v) > 0$ , si dice che la forma è *definita positiva*.

Una forma bilineare in forma matriciale si scrive come  $\Phi(u, v) = v^T A v$ , dove  $v^T$  è un vettore riga,  $v$  un vettore colonna e  $A$  una matrice. Se  $\Phi$  è simmetrica, la matrice  $A$  è

simmetrica. Allora vale il seguente teorema: *Sia  $\Phi$  una forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale reale  $\mathcal{V}$  di dimensione  $n$ . Esiste allora una base di  $\mathcal{V}$  in cui  $\Phi$  è rappresentata da una matrice diagonale; ogni altra rappresentazione diagonale ha lo stesso numero  $n_+$  di elementi positivi e lo stesso numero di elementi negativi  $n_-$ . La differenza  $S = n_+ - n_-$ , è chiamata *segnatura* di  $\Phi$ . Se nessun elemento della matrice diagonale è nullo, la forma è detta *non degenera*. In questo caso,  $n_+ + n_- = n$ , la dimensione dello spazio.*

Una forma bilineare simmetrica non degenera  $\Phi$  è di solito chiamata (pseudo-) *metrica* e denotata con  $g$ . La metrica  $g$  permette di definire una nozione di ortogonalità tra vettori in  $\mathcal{V}$ : due vettori  $u$  e  $v$  sono ortogonali rispetto a  $g$ , se  $g(u, v) = 0$ . Quindi, risulta definita la nozione di base ortogonale rispetto a  $g$  come un insieme di  $n$  vettori  $e_i$  tali che  $g(e_i, e_j) = 0$ , per tutti  $i \neq j$ . Si ha così un rafforzamento del precedente teorema: *Sia  $g$  una pseudo-metrica su uno spazio vettoriale reale  $\mathcal{V}$  di dimensione  $n$ . Esiste allora una base ortogonale rispetto a  $g$  in cui  $g$  è rappresentata da una matrice diagonale.* Se la segnatura  $S$  della forma è uguale a  $n$ , la forma definisce un prodotto scalare euclideo su  $\mathcal{V}$ :  $\langle u, v \rangle = g(u, v)$ . Altrimenti, la forma definisce uno *pseudo-prodotto* scalare  $\langle u, v \rangle$  per il quale viene meno la positività di  $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$ . Uno spazio vettoriale munito di prodotto scalare  $\langle u, v \rangle$  indotto da una pseudo-metrica  $g$  è di solito denotato  $\mathbb{R}^{n_+, n_-}$ , ed è chiamato spazio *pseudo-euclideo*. Il caso più importante per la fisica è lo spazio pseudo-euclideo  $\mathbb{R}^{1,3}$ , che è lo spazio vettoriale di Minkowski della relatività ristretta (equivalentemente, si usa anche  $\mathbb{R}^{3,1}$  per rappresentare tale spazio).

I risultati sopra esposti sono genericamente noti come *teorema di Sylvester* o *legge di inerzia*. Questi risultati possono essere anche espressi della nozione di forme quadratiche che è così definita: data una forma bilineare simmetrica  $\Phi$ , la forma quadratica associata è  $\mathcal{Q}(v) = \Phi(v, v)$ . Per  $\Phi$  non degenera, questo non è altro che il quadrato della *pseudo-norma*:  $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$ . Si dice che la forma quadratica è positiva definita o semi-definita non negativa se la forma simmetrica che la genera ha le corrispondenti proprietà. Come conseguenza di quanto visto sopra per le forme bilineari simmetriche, si ha il seguente teorema: *Ogni forma reale quadratica  $\mathcal{Q}$  possiede un'unica rappresentazione della forma*

$$\mathcal{Q}(x_1, \dots, x_n) = \sum_i^{n_+} x_i^2 + \sum_i^{n_-} x_i^2.$$

## 2. Ruolo dell'azione in meccanica classica

### 2.1 Principio d'azione di Hamilton

In meccanica, quantità differenti sono chiamate “azione”. Scopo di questo capitolo è di fare un po' d'ordine. Incominceremo con l'*integrale (o funzionale) d'azione* che permette di formulare le leggi della meccanica in termini del *principio di minima azione di Hamilton*: si suppone che esista un integrale d'azione che dipende dal movimento, in modo tale che, quando si varia il movimento e si impongono le condizioni affinché integrale d'azione sia minimo, si ottengono le equazioni del moto. Il metodo di formulare la meccanica partendo da un principio di minima azione ha il vantaggio che si può facilmente rendere compatibile con la teoria della relatività.

#### 2.1.1 Principio d'azione per sistemi di particelle

Incominciamo con un sistema di particelle. Si consideri la totalità dei movimenti rappresentati da funzioni  $q = q(t)$ , dove la variabile tempo  $t$  varia dal valore iniziale  $t'$  al valore finale  $t'' > t'$ . Le funzioni  $q = q(t)$  sono considerate sufficientemente lisce da non dare problemi nelle manipolazioni matematiche.

Nel seguito useremo la seguente terminologia: chiameremo *cammino* un generico movimento rappresentato da una qualunque funzione  $q = q(t)$  per distinguerlo dal movimento che è soluzione delle equazioni del moto e che chiameremo *traiettoria*; per una traiettoria useremo talvolta la notazione  $q_0 = q_0(t)$ . Infine, chiameremo *percorso* o *linea*, la linea nello spazio delle configurazioni di cui la funzione  $q = q(t)$  fornisce una particolare parametrizzazione, ma la stessa linea può essere parametrizzata in un'infinità di modi differenti. Questa terminologia non è standard, ma ci servirà per evitare confusioni

Per un dato cammino  $q = q(t)$ , si definisce l'*integrale d'azione* come l'integrale rispetto al tempo

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}[q(t)] = \int_{t'}^{t''} L(t) dt, \quad L(t) \equiv L(q(t), \dot{q}(t)) \quad (2.1)$$

La notazione con parentesi quadre serve a mettere in evidenza che l'integrale d'azione (2.1) è un *funzionale*, vale a dire, una funzione che associa il numero reale  $\mathcal{S}[q(t)]$  ad ogni cammino  $q = q(t)$  nello spazio delle configurazioni dal tempo  $t'$  al tempo  $t''$ . Si osservi che lo spazio di tali cammini è infinito-dimensionale.

Il principio di minima azione di Hamilton può essere formulato così: *fissati* i valori iniziali e finali

$$q' = q(t') \quad \text{e} \quad q'' = q(t''), \quad (2.2)$$

gli *stessi* per tutti i cammini, la traiettoria del sistema è data dal cammino  $\bar{q} = \bar{q}(t)$  che minimizza l'integrale d'azione (2.1).

In altre parole, l'integrale d'azione, soggetto alle condizioni al contorno di Dirichlet (2.2), ha un minimo per quel particolare cammino che è soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange o delle equazioni di Hamilton.

### 2.1.2 Variazione dell'integrale d'azione

Vogliamo stabilire se il minimo dell'integrale d'azione soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange. Per semplicità, assumiamo che il sistema abbia un solo grado di libertà, per cui il cammino è rappresentato da un punto sulla retta reale che evolve nel corso del tempo. Incominciamo con lo studiare come cambia l'integrale d'azione (2.1) quando un generico cammino  $q = q(t)$  è sostituito con una qualsiasi funzione del tipo

$$q(t) + \delta q(t) \quad (2.3)$$

dove  $\delta q(t)$  è una funzione che è piccola ovunque nell'intervallo di tempo  $[t', t'']$ . È conveniente porre

$$\delta q(t) \equiv \epsilon \eta(t)$$

dove  $\eta(t)$  è una qualunque funzione (liscia) nell'intervallo e  $\epsilon$  è un parametro;  $\delta q(t)$  viene chiamata una *variazione* della funzione  $q(t)$ .

Sviluppiamo  $\mathcal{S}$  in serie potenze in  $\epsilon$  nell'intorno di  $\epsilon = 0$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[q(t) + \delta q(t)] &= \mathcal{S}[q(t)] + \underbrace{\epsilon \int_{t'}^{t''} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\eta} \right) dt}_{\delta \mathcal{S}[q(t)]} \Big|_{q=q(t)} + \\ &\quad \underbrace{\frac{\epsilon^2}{2!} \int_{t'}^{t''} \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} \eta \dot{\eta} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^2} \eta^2 \right] dt}_{\delta^2 \mathcal{S}[q(t)]} \Big|_{q=q(t)} + \dots \quad (2.4) \end{aligned}$$

Il termine del prim'ordine,

$$\delta \mathcal{S} = \epsilon \int_{t'}^{t''} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\eta} \right) dt \quad (2.5)$$

è chiamato la *variazione prima* dell'integrale d'azione, il termine del second'ordine,  $\delta^2 \mathcal{S}$ , *variazione seconda*.

Poiché  $\eta$  e  $\dot{\eta}$  non sono variazioni indipendenti possiamo esprimere  $\delta \mathcal{S}$  solo in termini di  $\eta$ : integrando per parti il secondo termine nella (2.5), si ottiene

$$\int_{t'}^{t''} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\eta} \right) dt = \epsilon \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \eta \right]_{t'}^{t''} + \epsilon \int_{t'}^{t''} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \eta dt.$$

Quindi, ripristinando la definizione originaria  $\delta q = \epsilon \eta$ :

$$\delta \mathcal{S}[q(t)] = \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t'}^{t''} + \int_{t'}^{t''} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt \quad (2.6)$$

In particolare, se il cammino  $q(t)$  soddisfa le condizioni (2.2), allora la variazione  $\eta$  soddisfa le condizioni omogenee di Dirichlet

$$\eta(t') = \eta(t'') = 0 \quad (2.7)$$

per cui il termine di bordo nella (2.6) è nullo e quindi si ha

$$\delta \mathcal{S}[q(t)] = \int_{t'}^{t''} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt \quad (2.8)$$

Supponiamo adesso che  $q = \bar{q}$  sia un cammino che rende minimo l'integrale d'azione. Questo significa che  $\mathcal{S}[q + \delta q]$  è maggiore di  $\mathcal{S}[q]$  per qualunque variazione  $\delta q$ . Quindi, come nell'usuale calcolo differenziale a più variabili, la condizione necessaria affinché  $\mathcal{S}[q]$  abbia un valore minimo in  $\bar{q}$  è che  $\delta \mathcal{S}[\bar{q}]$  si annulli. In altre parole,  $\bar{q}$  deve essere soluzione dell'equazione

$$\delta \mathcal{S}[q(t)] = 0 \quad (2.9)$$

Poiché devono valere le condizioni (2.2) per tutte le funzioni  $\bar{q} + \delta q$ , ne segue che il secondo membro della (2.8) deve annullarsi per qualunque scelta di  $\delta q$ . Questo è possibile solo se l'integrando è identicamente nullo. Otteniamo così le equazioni di Eulero-Lagrange (1.3) come condizioni di minimo dell'integrale d'azione. Più precisamente,  $\bar{q} = \bar{q}(t)$  è il cammino che rende stazionario o estremo l'integrale d'azione. Se si tratti di un massimo, un minimo o un punto sella è deciso dal segno della variazione seconda  $\delta^2 \mathcal{S}$  calcolata per  $q = \bar{q}$ . Nella sezione 2.4, vedremo che se la funzione di Lagrange è standard e  $t'' - t'$  è sufficientemente piccolo, l'estremale è davvero un minimo.

Quanto discusso si generalizza facilmente al caso in cui il sistema ha più di un gradi di libertà. In questo caso le  $r$  differenti funzioni  $q_n(t)$  devono essere variate indipendentemente nel principio di minima azione. Allora evidentemente si ottengono le  $r$  equazioni

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = 0, \quad n = 1, \dots, r, \quad (2.10)$$

esprese compattamente dalla (1.3).

### 2.1.3 Principio d'azione ed equazioni canoniche

L'equivalenza tra equazioni di Hamilton e le equazioni di Eulero-Lagrange è resa manifesta dal fatto che queste equazioni emergono dallo stesso principio di minimo. Consideriamo la funzione di Lagrange come funzione di  $q = q(t)$  e  $p = p(t)$  data dalla (1.11) e scriviamo l'integrale d'azione (2.1) come

$$\mathcal{S}[q, p] = \int_{t'}^{t''} [p \dot{q} - H(p, q)] dt. \quad (2.11)$$

Trattiamo  $p = p(t)$  come una variabile indipendente, non vincolata al valore (1.1). Quindi la variazione prima di  $\mathcal{S}$  è

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} &= \int_{t'}^{t''} \left[ p\delta\dot{q} + \dot{q}\delta p - \left( \frac{\partial H}{\partial q}\delta q + \frac{\partial H}{\partial p}\delta p \right) \right] dt \\ &= [p\delta q]_{t'}^{t''} + \int_{t'}^{t''} \left[ -\dot{p}\delta q + \dot{q}\delta p + \left( \frac{\partial H}{\partial q}\delta q + \frac{\partial H}{\partial p}\delta p \right) \right] dt \\ &= [p\delta q]_{t'}^{t''} + \int_{t'}^{t''} \left[ \left( \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p + \left( -\dot{p} - \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q \right] dt\end{aligned}$$

Imponendo le condizioni (2.2), il termine di bordo si annulla. Poiché trattiamo  $q$  e  $p$  come variabili indipendenti, la condizione necessaria di minimo

$$\delta\mathcal{S} = 0 \quad (2.12)$$

è soddisfatta solo se si annullano i termini che moltiplicano  $\delta q$  e  $\delta p$ . Otteniamo così le equazioni canoniche del moto (1.12a) e (1.12b). Si osservi che l'indipendenza di  $q$  e  $p$  si manifesta nel fatto che mentre  $q$  è soggetto alle condizioni al contorno (2.2), nessuna condizione al contorno è stata imposta su  $p$ .

**Box 2.1 — Forma parametrica delle equazioni canoniche (esempio di Hamiltoniana identicamente nulla).** Supponiamo di non trattare il tempo  $t$  come variabile indipendente, ma di considerarlo una coordinata come le altre, ad esempio la posizione delle lancette di un orologio ideale, o lo spazio percorso da un corpo, non soggetto a influenze esterne, che si muove di moto rettilineo uniforme in un sistema di riferimento inerziale. Allora la configurazione del sistema è descritta da  $r+1$  variabili  $\mathcal{g} = (q, t)$ , dove  $q = (q_1, \dots, q_r)$  e  $t \equiv q_{r+1}$ . La totalità di tali variabili forma quello che è usualmente noto come *spazio delle configurazioni esteso*. Un possibile cammino del sistema è descritto da una linea o percorso nello spazio delle configurazioni esteso, e tale linea può essere espressa in funzione di un parametro  $\tau$ , vale a dire, come  $\mathcal{g} = \mathcal{g}(\tau) = (q(\tau), t(\tau))$ , ma il parametro è arbitrario, è rilevante la linea e non il modo in cui è parametrizzata.

Denotiamo la derivata rispetto a  $\tau$  con un punto più grande, poniamo cioè

$$\dot{q} = \frac{dq}{d\tau} \quad \text{e} \quad \dot{t} = \frac{dt}{d\tau}.$$

che sono le componenti della “velocità”  $\dot{\mathcal{g}}$ . Si osservi che

$$\dot{q} \equiv \frac{dq}{dt} = \frac{dq/d\tau}{dt/d\tau} = \dot{q}/\dot{t}$$

Siano  $\tau'$  e  $\tau''$  valori del parametro tali che  $(q(\tau'), t(\tau')) = (q', t')$  e  $(q(\tau''), t(\tau'')) = (q'', t'')$ . L'integrale d'azione (2.1) nelle nuove variabili (rendendo esplicita un'eventuale dipendenza dal tempo della funzione di Lagrange) è

$$\mathcal{S} = \int_{t'}^{t''} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt = \int_{\tau'}^{\tau''} L(q(\tau), \dot{q}(\tau)/\dot{t}(\tau), t(\tau)) \dot{t}(\tau) d\tau$$

e quindi può essere riscritto come

$$\mathcal{S} = \int_{\tau'}^{\tau''} \mathcal{L}(\tau) d\tau, \quad \text{con} \quad \mathcal{L}(\tau) = L(q(\tau), t(\tau), \dot{q}(\tau)/\dot{t}(\tau)) \dot{t}(\tau) \quad (2.13)$$

Allora la funzione di Lagrange nelle nuove variabili  $\mathbf{q} = (q, t)$  e  $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}, \dot{t})$ ,

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = L\left(q, t, \dot{q}/\dot{t}\right) \dot{t}, \quad (2.14)$$

La nuova funzione di Lagrange  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  è una funzione omogenea di primo grado nelle variabili  $\dot{\mathbf{q}}$ . Quindi, per il teorema di Eulero delle funzioni omogenee,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \dot{t} = \mathcal{L} \quad (2.15)$$

Ma  $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{\mathbf{q}}$  è l'impulso associata a  $\mathbf{q}$ , per cui  $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\rho} \dot{\mathbf{q}}$ . Ne segue che la funzione di Hamilton  $\mathcal{H}$  associata a  $\mathcal{L}$  è identicamente nulla:

$$\mathcal{H} = \boldsymbol{\rho} \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L} = 0. \quad (2.16)$$

Allora l'integrale d'azione (2.11) assume la forma particolarmente semplice

$$\mathcal{S} = \int_{\tau'}^{\tau''} \boldsymbol{\rho} \dot{\mathbf{q}} d\tau = \int_{\mathbf{q}'}^{\mathbf{q}''} \boldsymbol{\rho} d\mathbf{q} \quad (2.17)$$

dove la seconda uguaglianza esprime l'integrale d'azione come integrale di linea, il che rende manifesta l'indipendenza dalla parametrizzazione. C'è tuttavia qualcosa che non torna: se  $\mathcal{H} = 0$ , le traiettorie, cioè il minimo di  $\mathcal{S}$ , sono linee rette  $\boldsymbol{\rho} = \text{costante}$ ,  $\mathbf{q} = \text{costante}$ . La forma dell'azione è *troppo* semplice!

Ciò che non torna è la relazione tra impulso e velocità:  $\boldsymbol{\rho}$  è definito come  $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{\mathbf{q}}$ , per cui  $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , ma questa relazione non può essere invertita: le equazioni

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad \text{in componenti: } p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.18)$$

non possono essere risolte rispetto a  $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{r+1})$ ; se lo fosse, avremmo un ben definito valore  $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho})$ , ma  $\boldsymbol{\rho}$  non cambia se moltiplichiamo  $\dot{\mathbf{q}}$  per un fattore costante  $\alpha$  (perché  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  è una funzione omogenea di primo grado nelle variabili  $\dot{\mathbf{q}}$ ). In altre parole, la corrispondenza  $\dot{\mathbf{q}} \rightarrow \boldsymbol{\rho}$  è *molti-a-uno* (che è un'evenienza di solito esclusa quando si passa dal formalismo lagrangiano a quello hamiltoniano). Ora, se l'equazione (2.18) non è risolvibile rispetto a  $\dot{\mathbf{q}}$ , questo vuol dire che le variabili  $p_1, \dots, p_{r+1}$  *non sono indipendenti tra loro* e questo, a sua volta, significa che deve esistere un *vincolo* tra queste variabili.

Se consideriamo l'ultima variabile  $q_{r+1} = t$ , allora l'impulso ad essa associato è

$$p_{r+1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \frac{\partial(L\dot{t})}{\partial \dot{t}} = L - \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\dot{q}}{\dot{t}^2} \right) \dot{t} = L - pq = -H(q, p, t)$$

ossia

$$p_{r+1} = H(q_1, \dots, q_{r+1}, p_1, \dots, p_r) \quad (2.19)$$

Per una data funzione di Hamilton  $H$ , questo è la formula esplicita del vincolo tra le variabili  $p_1, \dots, p_{r+1}$ . Allora il principio d'azione diventa la condizione che l'azione (2.17) sia stazionaria sotto la condizione ausiliaria (2.19). La condizione ausiliaria può essere

trattata mediante il metodo di Lagrange introducendo un moltiplicatore  $\lambda = \lambda(\tau)$  e quindi minimizzando l'integrale

$$\tilde{\mathcal{S}} = \int_{\tau'}^{\tau''} (\mu \dot{q} - \lambda \mathcal{K}) d\tau \quad (2.20)$$

dove  $\mathcal{K}(q_1, \dots, q_{r+1}, p_1, \dots, p_{r+1}) = 0$  è la condizione (2.19) espressa in forma simmetrica per tutte le variabili. Si può dimostrare (ma questo è un altro esercizio) che le equazioni canoniche sono in corrispondenza del cammino che rende stazionaria l'azione (2.20).

#### 2.1.4 Moto geodetico\*

Un caso molto importante di movimento è il moto geodetico che, come visto nella sezione 1.1.1, è il moto definito da una funzione di Lagrange con puro termine cinetico:

$$L = T = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \right)^2 \quad (2.21)$$

dove

$$d^2 = (\dot{q}, g(q) \dot{q}) = \sum_{ij} g_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.22)$$

è il quadrato dell'elemento di linea, con  $g = g(q)$  una forma quadratica non degenere, simmetrica e definita positiva, cioè una *metrica*. Questo è il movimento di un punto materiale di massa unitaria in uno spazio  $r$ -dimensionale munito di una metrica  $g$  non euclidea — in breve, uno *spazio curvo*.

In un moto geodetico l'energia totale  $\mathcal{E}$  coincide con l'energia cinetica (e quindi con la Lagrangiana) che è quindi una costante del moto:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \right)^2 = \text{costante} \quad (2.23)$$

Convenzionalmente, di solito si definisce *moto geodetico* il moto con modulo della velocità uguale a 1 (in opportune unità di misura), per cui  $\mathcal{E} = 1/2$ .

**Box 2.2 — Equazioni del moto geodetico.** In vista della loro importanza, determiniamo le equazioni di Eulero-Lagrange del moto geodetico. Facciamo il calcolo in componenti utilizzando la notazione degli indici in alto per le componenti di  $q$  e la convenzione che indici alti e bassi quando in una formula sono ripetuti è sottinteso che sono sommati. Con queste convenzioni,

$$L = \frac{1}{2} g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j$$

da cui si ottiene

$$\frac{\partial L}{\partial q^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \dot{q}^i \dot{q}^j$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = \frac{1}{2} g_{ij} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^j + \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \dot{q}^k} = \frac{1}{2} g_{ij} \delta_k^i \dot{q}^j + \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \delta_k^j = \frac{1}{2} g_{kj} \dot{q}^j + \frac{1}{2} g_{ik} \dot{q}^i = g_{ki} \dot{q}^i$$

(avendo usato nell'ultimo passaggio che gli indici sommati li possiamo chiamare come vogliamo e la simmetria  $g_{ik} = g_{ki}$ ).

Infine,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = \frac{d}{dt} (g_{ki} \dot{q}^i) = g_{ki} \ddot{q}^i + \frac{dg_{ki}}{dt} \dot{q}^i = g_{ki} \ddot{q}^i + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^m} \dot{q}^m \dot{q}^i$$

Allora le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0$$

sono

$$g_{ki} \ddot{q}^i + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^m} \dot{q}^m \dot{q}^i - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \dot{q}^i \dot{q}^j = 0 \quad (2.24)$$

Adesso riscriviamo la (2.24) in una forma più carina. Il secondo termine a primo membro può essere riscritto come

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^m} \dot{q}^m \dot{q}^i = \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} \dot{q}^i \dot{q}^j = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} \right) \dot{q}^i \dot{q}^j$$

Quindi gli ultimi due termini nella (2.24) possono essere raggruppati e la (2.24) può essere riscritta come

$$g_{ki} \ddot{q}^i + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right) \dot{q}^i \dot{q}^j = 0 \quad (2.25)$$

L'espressione

$$\Gamma_{kij} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right) \quad (2.26)$$

è nota come *simbolo di Christoffel di prima specie*, in termine del quale l'equazione del moto geodetico assume la forma

$$g_{ki} \ddot{q}^i + \Gamma_{kij} \dot{q}^i \dot{q}^j = 0 \quad (2.27)$$

Si può infine riscrivere quest'equazione in modo tale che il primo termine sia semplicemente la derivata seconda della configurazione. A tal fine basta moltiplicare ambo i membri dell'equazione per l'inverso della metrica. Nelle convenzioni con gli indici, si definisce

$$g^{ij} \equiv (g^{-1})_{ij}, \quad (2.28)$$

per cui la moltiplicazione per l'inverso della metrica risulta nell'equazione

$$g^{nk} g_{ki} \ddot{q}^i + g^{nk} \Gamma_{kij} \dot{q}^i \dot{q}^j = 0$$

Per definizione di inverso  $g^{nk}g_{ki} = \delta_i^n$  (la delta di Kronecker), inoltre, definendo il *simbolo di Christoffel di seconda specie*,

$$\Gamma_{ij}^n \equiv g^{nk}\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}g^{nk} \left( \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right), \quad (2.29)$$

la precedente equazione si riscrive come

$$\ddot{q}^n + \Gamma_{ij}^n \dot{q}^i \dot{q}^j = 0 \quad (2.30)$$

ed è nota come *equazione geodetica*. Si osservi la simmetria di  $\Gamma$  per lo scambio dei due indici bassi:  $\Gamma_{ij}^n = \Gamma_{ji}^n$ . Una forma equivalente dell'equazione è in termini della velocità  $v^n = \dot{q}^n$ :

$$\frac{dv^n}{dt} + \Gamma_{ij}^n v^i v^j = 0 \quad (2.31)$$

**Box 2.3 — Equazione delle linee geodetiche.** Supponiamo di essere interessati solo alla linea seguita dalla traiettoria e non come essa viene percorsa nel tempo, vale a dire vogliamo determinare l'orbita di un punto che si muove di moto geodetico. A tal fine, come nel box (2.1), esprimiamo il cammino  $q$  in funzione di un parametro arbitrario  $\tau$ , vale a dire, come  $q = q(\tau)$ . Allora l'integrale d'azione diventa

$$\mathcal{S} = \int T dt = \int T \frac{dt}{d\tau} d\tau = \mathcal{E} \int \frac{dt}{d\tau} d\tau$$

poiché per un moto geodetico  $T = \mathcal{E} = \text{costante}$ . La formula per  $dt/d\tau$  è ottenuta dalla condizione

$$T = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{d\tau} \right)^2 \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 = \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{E}}} \frac{d}{d\tau}, \quad (2.32)$$

da cui,  $\mathcal{S} = \sqrt{\mathcal{E}/2} \int d$ .

Trascurando l'inessenziale costante moltiplicativa, l'azione di una linea tra due punti  $q'$  e  $q''$  è dunque la lunghezza della linea stessa:

$$[q] = \int_{q'}^{q''} d. \quad (2.33)$$

dove l'elemento di linea

$$d = \sqrt{g_{ik} dq^i dq^k} \quad (2.34)$$

è la distanza tra due punti infinitamente vicini. Vediamo così che il principio di minima azione diventa il *principio di minima distanza* e le associate equazioni di Eulero-Lagrange sono le equazioni delle geodetiche rispetto alla metrica  $g_{ik}$ . Poiché per un moto geodetico il modulo della velocità è costante, minima distanza significa *minimo tempo*, come espresso dalla (2.32):  $dt \propto d$ . È proprio in virtù di questa proporzionalità, che possiamo concludere che le equazioni delle geodetiche hanno la stessa forma (2.31) se le linee sono parametrizzate dalla lunghezza d'arco anziché dal tempo  $t$ ; naturalmente, in questo caso, le derivate nella (2.31) vanno intese come derivate rispetto ad  $d$ . Quando si sceglie

un parametro non legato a  $\phi$  o a  $t$  da una trasformazione lineare, l'equazione geodetica assume una forma più complicata e si lascia allo studente volenteroso il compito di determinarle (calcolando le equazioni di Eulero-Lagrange dell'integrale d'azione (2.33)). Più in generale, un parametro è detto *affine* se lascia invariata la forma dell'equazione (2.31), per cui tutti i parametri  $a + b$ , dove  $a$  e  $b$  sono costanti, sono parametri affini.

**Box 2.4 — Geodetiche sulla superficie di una sfera.** Il quadrato dell'elemento di linea sulla superficie di una sfera di raggio unitario in coordinate sferiche è

$$d^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$$

per cui la funzione di Lagrange di un punto di massa unitaria che si muove liberamente su questa superficie è

$$L = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \dot{\phi}^2$$

Vogliamo mostrare che le geodetiche sono (come ci si aspetta) archi di cerchi massimi.

Come esercizio a se stante, determiniamo prima i simboli di Christoffel. Anziché usare la formula (2.30), procediamo a rovescio: determiniamo le equazioni di Eulero-Lagrange e per confronto ricaviamo i simboli di Christoffel. Le equazioni di Eulero-Lagrange ci serviranno in ogni caso per determinare le geodetiche.

Per la variabile  $\theta$  si ottiene immediatamente

$$\ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0 \quad (2.35)$$

Confrontando con l'equazione geodetica (2.31) per la variabile  $\theta$ :

$$\ddot{\theta} + \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} \dot{\theta} \dot{\theta} + \Gamma_{\theta\phi}^{\theta} \dot{\theta} \dot{\phi} + \Gamma_{\phi\theta}^{\theta} \dot{\phi} \dot{\theta} + \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \dot{\phi} \dot{\phi} = \ddot{\theta} + \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} \dot{\theta} \dot{\theta} + 2\Gamma_{\theta\phi}^{\theta} \dot{\theta} \dot{\phi} + \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \dot{\phi} \dot{\phi} = 0$$

vediamo che

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = \Gamma_{\theta\phi}^{\theta} = \Gamma_{\phi\theta}^{\theta} = 0, \quad \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta$$

Analogamente, ricaviamo da  $L$  le equazioni di Eulero-Lagrange per la variabile  $\phi$ :

$$\frac{d}{dt} (\sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0 \Rightarrow \sin^2 \theta \ddot{\phi} + 2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\phi} = 0 \Rightarrow \ddot{\phi} + 2 \cot \theta \dot{\theta} \dot{\phi} = 0. \quad (2.36)$$

Il confronto con la (2.31) per la variabile  $\phi$  fornisce:

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\phi} = \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = 0, \quad \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \cot \theta$$

Adesso risolviamo le equazioni geodetiche (2.35) e (2.36). Il problema va risolto per condizioni iniziali arbitrarie  $\theta(0) = \theta'$ ,  $\phi(0) = \phi'$  e  $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}'$ ,  $\dot{\phi}(0) = \dot{\phi}'$ . Se affrontato direttamente, la risoluzione del problema richiede un po' di lavoro (che lasciamo allo studente che voglia fare un esercizio di risoluzione di equazioni differenziali). Il lavoro può tuttavia essere ridotto sfruttando la simmetria del problema. Invece di condizioni iniziali arbitrarie si prendano condizioni particolari tali che  $\theta' = \pi/2$ ,  $\phi' = 0$  (il punto

dove l'equatore interseca il meridiano di Greenwich) e la componente  $\theta$  della velocità iniziale è nulla, cioè velocità iniziale  $\dot{\theta}' = 0, \dot{\phi}' = \omega$ . È immediato verificare che

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \phi(t) = \omega t$$

sono soluzioni delle equazioni geodetiche (2.35) e (2.36) che soddisfano le condizioni iniziali particolari. Questa geodetica è l'equatore della sfera. Per condizioni iniziali arbitrarie, ci si può sempre ricondurre alle condizioni particolari che abbiamo scelto ruotando la sfera in maniera opportuna. Ma l'equatore è un cerchio massimo e la rotazione di un cerchio massimo è ancora un cerchio massimo. Quindi tutti gli archi di cerchi massimi sono geodetiche e tutte le geodetiche sono archi di cerchi massimi.

### 2.1.5 Principio d'azione per campi locali

Consideriamo adesso un sistema continuo la cui configurazione è un campo  $\phi = \phi(\mathbf{x})$  governato da una funzione di Lagrange locale, cioè del tipo

$$L = \int_{\mathcal{R}} \mathcal{L} dV \quad (1.66)$$

con  $\mathcal{L}$  della forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathcal{L}(\phi(\mathbf{x}), \nabla\phi(\mathbf{x}), \partial_t\phi(\mathbf{x})) \quad (1.64)$$

Adesso un cammino è una funzione  $\phi$  del punto spaziale  $\mathbf{x}$  e del tempo  $t$ , cioè,  $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$  e per esso si definisce l'integrale d'azione

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}[\phi(\mathbf{x}, t)] = \int_{t'}^{t''} \int_{\mathcal{R}} \mathcal{L}(\phi(\mathbf{x}, t), \nabla\phi(\mathbf{x}, t), \partial_t\phi(\mathbf{x}, t)) dV dt \quad (2.37)$$

Allora, come per i sistemi di particelle, l'integrale d'azione, soggetto alle condizioni al contorno di Dirichlet

$$\phi'(\mathbf{x}) = \phi'(\mathbf{x}, t') \quad \text{e} \quad \phi''(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, t''), \quad (2.38)$$

dove  $\phi'(\mathbf{x})$  e  $\phi''(\mathbf{x})$  sono campi assegnati, ha un minimo (o per lo meno un estremo) per quel particolare cammino  $\bar{\phi} = \bar{\phi}(\mathbf{x}, t)$  che è soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange (1.65) o, equivalentemente, delle equazioni di Hamilton (1.98). Questo è il *principio d'azione per campi locali*. In effetti, oltre alle condizioni (2.38) si devono anche assegnare condizioni sul bordo  $\partial\mathcal{R}$ , che specificheremo del corso della dimostrazione.

La dimostrazione del principio di Hamilton per campi locali ricalca la dimostrazione per sistemi di particelle. Come prima, si considera una variazione  $\delta\phi(\mathbf{x}, t) \equiv \epsilon\eta(\mathbf{x}, t)$  e si sviluppa in serie  $\mathcal{S}[\phi(\mathbf{x}, t) + \delta\phi(\mathbf{x}, t)]$ . Il termine del prim'ordine in  $\epsilon$  fornisce la variazione prima, ma adesso dobbiamo tenere conto della dipendenza da  $\nabla\phi$ , per cui la (2.5) va sostituita con

$$\delta\mathcal{S} = \epsilon \int_{t'}^{t''} \int_{\mathcal{R}} \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\eta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\dot{\eta} + \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)}}_{\mathbf{A}} \cdot (\nabla\eta) \right] dV dt \quad (2.39)$$

Ora,

$$\mathbf{A} \cdot \nabla\eta = \sum_i A_i \frac{\partial\eta}{\partial x_i} = \sum_i \frac{\partial(A_i\eta)}{\partial x_i} - \eta \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot (\eta\mathbf{A}) - \eta \nabla \cdot \mathbf{A},$$

per cui il terzo termine a secondo membro della (2.39) fornisce il contributo

$$\int_{\mathcal{R}} [\nabla \cdot (\eta \mathbf{A}) - \eta \nabla \cdot \mathbf{A}] dV = \int_{\partial \mathcal{R}} \eta \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\mathcal{R}} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \eta dV$$

dove, nel primo passaggio, abbiamo usato il teorema di Gauss per trasformare il primo integrale in un integrale di superficie. Il secondo termine della (2.39) lo si tratta come nel caso discreto nel passaggio dalla (2.5) alla (2.6). Si ottiene così la variazione prima

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} = \int_{\mathcal{R}} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta \phi \right]_{t'}^{t''} dV + \int_{t'}^{t''} \int_{\partial \mathcal{R}} \delta \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \cdot \mathbf{n} dS dt \\ + \int_{t'}^{t''} \int_{\mathcal{R}} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right] - \nabla \cdot \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \right] \right\} \delta \phi dV dt \end{aligned} \quad (2.40)$$

Le condizioni (2.38) implicano condizioni di Dirichlet omogenee per la variazione  $\delta \phi$  al tempo iniziale e a quello finale; in tal caso il primo termine si annulla. Qualunque condizione al contorno per  $\phi$  che garantisca che  $\delta \phi$  si annulli sul bordo  $\partial \mathcal{R}$  comporta un annullamento del secondo integrale. Questo si ha, per esempio per condizioni al contorno di Dirichlet per  $\phi$ , non necessariamente omogenee, oppure per condizioni periodiche se  $\mathcal{R}$  è una scatola; infine, se  $\mathcal{R}$  si estende su tutto lo spazio, basta richiedere l'annullamento del campo all'infinito. Sia come sia, in questo caso la variazione prima diventa

$$\delta \mathcal{S} = \int_{t'}^{t''} \int_{\mathcal{R}} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right] - \nabla \cdot \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \right] \right\} \delta \phi dV dt \quad (2.41)$$

Condizione necessaria affinché  $\phi$  sia un estremo dell'integrale d'azione è che  $\delta \mathcal{S} = 0$ , ma poiché  $\delta \phi$  è una funzione arbitraria, questo è possibile solo se l'espressione in parentesi graffe si annulla, il che equivale alla condizione che  $\phi$  soddisfi le equazioni di Eulero-Lagrange (1.65). Fine della dimostrazione.

## 2.2 Funzione principale e funzione caratteristica di Hamilton

Consideriamo lo sviluppo in serie (2.42) dell'integrale d'azione soggetto alle condizioni di Dirichlet (2.2) per un camminino  $\bar{q}$  che lo minimizza. Allora il termine del prim'ordine si annulla perché  $\bar{q}$  soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange e quindi si ha

$$\mathcal{S}[\bar{q} + \delta q] = \mathcal{S}[\bar{q}] + \underbrace{\frac{\epsilon^2}{2!} \int_{t'}^{t''} \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} \eta \dot{\eta} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^2} \eta^2 \right] dt}_{\delta^2 \mathcal{S}[\bar{q}]} \Big|_{q=\bar{q}} + \dots \quad (2.42)$$

Il primo termine di questo sviluppo,

$$\mathcal{S}[\bar{q}] = \int_{t'}^{t''} L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) dt \equiv S(q'', t''; q', t'). \quad (2.43)$$

dipende dai coordinate iniziali  $q'$  al tempo  $t'$  e da quelle finali  $q''$  al tempo  $t''$  e d è per questo che l'abbiamo denotato  $S(q'', t''; q', t')$ . La funzione  $S(q'', t''; q', t')$  è nota come *funzione principale di Hamilton* o “funzione d'azione” o anche “azione on shell”, nello slang della alte energie. Comunque la si chiami, è importante che si tenga presente la differenza con l'integrale d'azione  $\mathcal{S}$ : mentre quest'ultimo è un funzionale sui cammini,  $S$  è il valore del funzionale per una traiettoria, cioè per quel particolare cammino che rende stazionario

l'integrale d'azione per le date condizioni al contorno  $q'$  al tempo iniziale  $t'$  e  $q''$  al tempo iniziale  $t''$ .

Questa funzione fu introdotta da Hamilton. Essa ha un naturale significato geometrico (di cui ci occuperemo in un prossimo capitolo) e fornisce una procedura alternativa di integrazione delle equazioni canoniche del moto (anche di questo ce ne occuperemo in seguito). Sorprendentemente (o forse no), questa funzione è molto utile in meccanica quantistica: è la quantità rilevante per il regime “quasi-classico” e fornisce la forma esatta del propagatore quantistico per hamiltoniane quadratiche (anche di questo ce ne occuperemo in un capitolo successivo).

Per un sistema conservativo  $S$  dipende solo dalla differenza  $t = t'' - t'$  e in questo caso la funzione rilevante è<sup>1</sup>

$$S(q'', q', t) = \int_{q'0}^{q''t} L(\bar{q}, \dot{q}_0) d\tau \quad (2.44)$$

Nota questa funzione, si ha

$$S(q'', t''; q', t') = S(q'', q', t'' - t'). \quad (2.45)$$

### 2.2.1 Variazioni infinitesime della funzione principale di Hamilton

Studiamo adesso come cambia  $S(q'', t''; q', t')$  per una variazione solo della coordinata finale  $q'' \rightarrow q'' + \delta q''$ . La risposta è data dalla (2.6): poichè  $q(t)$  è una traiettoria, essa soddisfa le equazione di Eulero-Lagrange e quindi l'integrale nella (2.6) si annulla; si annulla anche il termine di bordo calcolato in  $t'$  perchè il punto iniziale non cambia. Dunque, resta solo il termine di bordo in  $t''$  e la variazione di  $S$  è

$$\delta S = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right|_{t=t''} \delta q'' = p'' \delta q'', \quad (2.46)$$

dove  $p''$  è il valore finale dell'impulso. Quindi,

$$\frac{\partial S}{\partial q''} = p'', \quad (2.47a)$$

cioè, l'impulso è il tasso di variazione dell'azione con le coordinate finali.

Adesso calcoliamo il tasso di variazione dell'azione con il tempo finale. Per definizione, la derivata totale rispetto al tempo di  $S$  è

$$\frac{dS}{dt''} = L(q(t''), \dot{q}(t'')) = L(q'', \dot{q}'').$$

D'altro canto, tenuto conto della (2.47a), si ha anche

$$\frac{dS}{dt''} = \frac{\partial S}{\partial t''} + \frac{\partial S}{\partial q''} \dot{q}'' = \frac{\partial S}{\partial t} + p'' \dot{q}''$$

Confrontando queste due ultime equazioni, e richiamando che  $H(q'', p'') = p'' \dot{q}'' - L(q'', \dot{q}'')$  si ottiene

$$\frac{\partial S}{\partial t''} = -H(q'', p''), \quad (2.47b)$$

<sup>1</sup>Abbiamo cambiato nome alla variabile di integrazione per evitare confusioni con l'estremo superiore di integrazione  $t$ .

cioè, l'energia è il tasso di variazione dell'azione con il tempo finale.

Procedendo in maniera analoga a prima, per la dipendenza di  $S$  dal punto e dal tempo iniziale, si ottengono le equazioni (esercizio)

$$\frac{\partial S}{\partial q'} = -p', \quad (2.48a)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t'} = H(q', p'). \quad (2.48b)$$

Le relazioni ottenute per i tassi di variazione di  $S = S(q'', q', t)$  sono compattamente espressi dalla formula differenziale

$$\delta S = p'' \delta q'' - p' \delta q' - H(q'', p'') \delta t'' + H(q', p') \delta t'. \quad (2.49)$$

Per sistemi conservativi nelle (2.47b) e (2.48b) si ha  $H(q'', p'') = H(q', p') = E$ . Allora, posto  $t = t'' - t'$ , le relazioni precedenti diventano

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E. \quad (2.50)$$

e

$$\delta S = p'' \delta q'' - p' \delta q' - E \delta t \quad (2.51)$$

### 2.2.2 Funzione caratteristica di Hamilton\*

L'energia (o la frequenza in meccanica quantistica), a differenza del tempo, è molto più facile da controllare sperimentalmente. Risulta quindi utile passare dalla funzione principale di Hamilton ad un'altra funzione in cui il tempo è sostituito dall'energia.

Se vogliamo passare in modo invertibile da  $S(q'', q', t)$  ad una funzione che dipenda da  $E$  anziché da  $t$ , dobbiamo effettuare una trasformazione di Legendre di  $S$  rispetto a  $t$ . Dunque, come in termodinamica, dobbiamo considerare la funzione

$$s(q'', q', E) = Et + S(q'', q', t) \quad (2.52)$$

dove è inteso che la funzione  $t = t(q'', q', E)$  è ottenuta risolvendo la (2.50) rispetto a  $t$ .

La funzione  $s$  è nota come *funzione caratteristica di Hamilton*. Essa esprime come l'integrale d'azione, calcolato per una traiettoria, dipende dalle coordinate iniziali e finali della traiettoria e dall'energia (per un sistema conservativo, determinata dalle condizioni iniziali  $q'$  e  $p'$ ).

I tassi di variazione di  $s$  si ottengono con gli stessi metodi che si usano in termodinamica: il differenziale di  $s$  è

$$\delta s = E \delta t + t \delta E + \delta S = E \delta t + t \delta E + p'' \delta q'' - p' \delta q' - E \delta t.$$

Quindi,

$$\delta s = t \delta E + p'' \delta q'' - p' \delta q', \quad (2.53)$$

da cui

$$\frac{\partial s}{\partial q''} = p'', \quad \frac{\partial s}{\partial q} = -p', \quad \frac{\partial s}{\partial E} = t \quad (2.54)$$

Se  $s$  è una funzione convessa di  $E$ , possiamo invertire la trasformata di Legendre e ottenere

$$S(q'', q', t) = s(q'', q', E) - Et \quad (2.55)$$

dove adesso la funzione  $E = E(q'', q', t)$  è ottenuta risolvendo l'ultima delle equazioni nella (2.54) rispetto a  $E$ .

Esprimiamo adesso  $s$  come integrale nel caso di un sistema conservativo. Poiché per un tale sistema l'energia  $E$  è costante lungo la traiettoria, utilizzando la (1.11), possiamo riscrivere (2.44) come

$$S(q'', q', t) = \int_0^t [p_0 \dot{q}_0 - H(q_0, \dot{q}_0)] d\tau = \int_0^t p_0 \dot{q}_0 d\tau - Et. \quad (2.56)$$

Quindi, dalla (2.52),

$$s(q'', q', E) = \int_0^t p_0 \dot{q}_0 d\tau = \int_{q'}^{q''} p dq \quad (2.57)$$

Facciamo alcune osservazioni sulla formula appena ottenuta. La prima espressione a destra è scritta come un integrale sulla traiettoria con il tempo come parametro di integrazione, il che può essere utile in molti casi, ma non è necessario. Questo è mostrato dalla seconda espressione: l'integrale viene calcolato per una curva nello spazio di fase che coincide con la traiettoria e il cui parametro può essere qualsiasi. Il valore dell'integrale non dipende dalla scelta particolare di questo parametro. L'elemento di integrazione  $p dq$ , il prodotto scalare del vettore  $p$  con il vettore  $dq$ , è la *1-forma canonica* nel linguaggio della geometria simplettica ed è anche chiamato *invariante integrale di Poincaré*.

L'invariante integrale di Poincaré  $p dq$ , è importante, tra l'altro, perché garantisce la forma particolarmente semplice delle equazioni canoniche del moto (1.12), come chiariremo nel seguito.

### Esempi

**Box 2.5 — Particella libera.** L'esempio più semplice di  $S$  proviene da una particella che si muove liberamente. Le sue traiettorie sono linee rette, quindi per andare da  $q'$  a  $q''$  dobbiamo tracciare una linea retta che collega questi due punti. La velocità della particella è la distanza diviso il tempo impiegato  $t'' - t'$ , e l'energia cinetica  $T$  è metà della massa che moltiplica la velocità al quadrato. Poiché  $T$  è la stessa lungo tutta la traiettoria, l'integrazione sul tempo fornisce una moltiplicazione per  $t'' - t'$ . Quindi (in coordinate cartesiane per  $q$ ) otteniamo la formula

$$S(q'', q', t'' - t') = \frac{m(q'' - q')^2}{2(t'' - t')} \quad (2.58)$$

Consideriamo adesso la funzione caratteristica. Nel caso di una particella che si muove liberamente nello spazio, la traiettoria è una linea retta da  $q'$  a  $q''$  e la sua energia  $E$  è  $p^2/2m$ ; l'impulso  $p = m\dot{q}$  punta nella direzione del movimento, così come l'incremento (differenziale)  $dq$ ; il loro prodotto scalare  $p dq$  è semplicemente la lunghezza (valore assoluto) di  $p$  moltiplicata per la lunghezza (valore assoluto) di  $dq$ , vale a dire  $p dq = |p| |dq|$ . Poiché  $|p|^2 = 2mE$  è costante lungo la traiettoria, resta solo da calcolare l'integrale su  $|dq|$  da  $q'$  a  $q''$  che dà semplicemente  $|q'' - q'|$ . Quindi, per una particella

libera,

$$s(q'', q', E) = \sqrt{2mE} |q'' - q'| \quad (2.59)$$

Si osservi la notevole differenza tra quest'ultima espressione e la formula (2.58) per  $S(q'', q', t'' - t')$  che coinvolge il quadrato della distanza da  $q'$  a  $q''$  invece che la distanza stessa come nella (2.59).

È istruttivo ottenere la (2.59) come trasformata di Legendre della (2.58): la (2.50) applicata alla  $S(q'', q', t)$  fornisce

$$E = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{m(q'' - q')^2}{2t} = \frac{m(q'' - q')^2}{2t^2}.$$

(Ovviamente!) Quindi,

$$t = \sqrt{\frac{m}{2E}} |q'' - q'|, \quad (t > 0),$$

da cui,

$$S(q'', q', t) = \frac{m(q'' - q')^2}{2t} = \sqrt{\frac{mE}{2}} |q'' - q'|$$

e infine

$$s(q'', q', E) = Et + S(q'', q', t) = \sqrt{\frac{mE}{2}} |q'' - q'| + \sqrt{\frac{mE}{2}} |q'' - q'| = \sqrt{2mE} |q'' - q'|$$

**Box 2.6** — \***Oscillatore armonico.** Calcoliamo  $S$  per un oscillatore armonico di frequenza  $\omega$ . Essendo la funzione di Lagrange (1.15) indipendente dal tempo, ci basta calcolare la (2.44). Preliminarmente, dobbiamo determinare la funzione di Lagrange lungo le traiettorie (1.18),

$$q(\tau) = A \cos(\omega\tau) + B \sin(\omega\tau)$$

(per semplicità di scrittura omettiamo il pedice “0” per denotare le traiettorie), dove le costanti  $A$  e  $B$  vanno scelte in modo tale che siano soddisfatte le condizioni al contorno  $q(0) = q'$  e  $\dot{q}(0) = q''$ . Con calcoli elementari si trova

$$A = q' \quad (2.60a)$$

$$B = \frac{q'' - q' \cos(\omega t)}{\sin(\omega t)} \quad (2.60b)$$

La velocità è

$$\dot{q}(\tau) = -A\omega \sin(\omega\tau) + B\omega \cos(\omega\tau)$$

da cui

$$\dot{q}(\tau)^2 = A^2\omega^2 \sin^2(\omega\tau) - 2AB\omega^2 \cos(\omega\tau) \sin(\omega\tau) + B^2\omega^2 \cos^2(\omega\tau)$$

Similmente,

$$\omega^2 q(\tau)^2 = \omega^2 [A^2 \cos^2(\omega\tau) + 2AB \cos(\omega\tau) \sin(\omega\tau) + B^2 \sin^2(\omega\tau)].$$

Quindi la differenza è

$$\dot{q}(\tau)^2 - \omega^2 q(\tau)^2 = -2AB\omega^2 \sin(2\omega\tau) + (B^2 - A^2)\omega^2 \cos(2\omega\tau)$$

dove abbiamo usato le identità trigonometriche

$$2\sin(\theta)\cos(\theta) = \sin(2\theta) \quad \text{e} \quad \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos(2\theta).$$

La primitiva del primo termine è

$$-2AB\omega^2 \int \sin(2\omega\tau) d\tau = AB\omega \cos(2\omega\tau) = AB\omega (1 - 2\sin^2(\omega\tau))$$

e quella del secondo è

$$(B^2 - A^2)\omega^2 \int \cos(2\omega\tau) d\tau = \frac{1}{2}(B^2 - A^2)\omega \sin(2\omega\tau) = (B^2 - A^2)\omega \sin(\omega\tau) \cos(\omega\tau).$$

Usando queste primitive, possiamo calcolare l'azione:

$$\begin{aligned} S(q'', q', t) &= \frac{1}{2}m \int_0^t [\dot{q}(\tau)^2 - \omega^2 q(\tau)^2] d\tau \\ &= \frac{1}{2}m\omega \left[ (B^2 - A^2) \sin(\omega\tau) \cos(\omega\tau) + AB - 2AB \sin^2(\omega\tau) \right]_0^t \\ &= \frac{1}{2}m\omega [(B^2 - A^2) \sin(\omega t) \cos(\omega t) - 2AB \sin^2(\omega t)] \end{aligned}$$

Adesso usiamo le formule (2.60) per esprimere le costanti  $A$  e  $B$  nell'azione in termini delle condizioni al contorno. Incominciamo con  $AB$ :

$$AB = q' \frac{q'' - q' \cos(\omega t)}{\sin(\omega t)}$$

quindi  $B^2 - A^2$ :

$$B^2 - A^2 = \left( \frac{q'' - q' \cos(\omega t)}{\sin(\omega t)} \right)^2 - q'^2 = \frac{q''^2 - 2q''q' \cos(\omega t) + q'^2 \cos^2(\omega t) - q'^2 \sin^2(\omega t)}{\sin^2(\omega t)}$$

Dunque

$$-2AB \sin^2(\omega t) = \frac{-2q'q'' \sin^2(\omega t) + 2q'^2 \cos(\omega t) \sin^2(\omega t)}{\sin(\omega t)}$$

e

$$\begin{aligned} (B^2 - A^2) \cos(\omega t) \sin(\omega t) &= \frac{q''^2 \cos(\omega t) - 2q''q' \cos^2(\omega t) + q'^2 \cos^3(\omega t) - q'^2 \sin^2(\omega t) \cos(\omega t)}{\sin(\omega t)} \end{aligned}$$

Adesso usiamo ancora un po' di trigonometria e riscriviamo

$$q'^2 \cos^3(\omega t) = q'^2 \cos(\omega t)(1 - \sin^2(\omega t)) = q'^2 \cos(\omega t) - q'^2 \cos(\omega t) \sin^2(\omega t)$$

Infine sommiamo le due parti:

$$\begin{aligned} (B^2 - A^2) \cos(\omega t) \sin(\omega t) - 2AB \sin^2(\omega t) \\ = \frac{q''^2 \cos(\omega t) + q'^2 \cos(\omega t) - 2q'q'' \sin^2(\omega t) - 2q''q' \cos^2(\omega t)}{\sin(\omega t)} \end{aligned}$$

che può essere semplificato in

$$\frac{(q'^2 + q''^2) \cos(\omega t) - 2q'q''}{\sin(\omega t)},$$

da cui,

$$S(q'', q', t) = \frac{m\omega}{2\sin(\omega t)} \left[ (q'^2 + q''^2) \cos(\omega t) - 2q'q'' \right] \quad (2.61)$$

Sostituendo  $t = t'' - t'$  si ottiene  $S(q'', t; q', t')$ .

**Box 2.7** — \*Sviluppo a piccoli tempi. A piccoli tempi,  $\delta t = t'' - t'$ , domina l'evoluzione libera, e in questo limite la funzione principale di Hamilton per  $L = p^2/(2m) - V(q)$  assume la forma

$$S(q''t''; q', t') = \frac{m(q'' - q')^2}{2\delta t} - \bar{V}(q', q'')\delta t \quad (2.62)$$

dove  $\bar{V}(q'', q')$  è una media opportuna del potenziale. Per esempio, al primo ordine in  $\delta t$  la (2.61) diventa

$$\frac{m}{2\delta t} \left[ (q'^2 + q''^2) \left( 1 - \frac{1}{2}\omega^2 \delta t^2 \right) - 2q'q'' \right] = \frac{m(q'' - q')^2}{2\delta t} - \frac{1}{4}m\omega^2 (q''^2 + q'^2) \delta t$$

dove

$$\bar{V}(q'', q') = \frac{1}{4}m\omega^2 (q''^2 + q'^2)$$

è proprio la media del potenziale armonico  $\frac{1}{2}m\omega^2 q^2$ .

**Box 2.8** — \*Oscillatore armonico forzato.

### 2.2.3 Metodo di Hamilton di integrazione delle equazioni del moto\*

Come abbiamo visto, il calcolo della funzione principale di Hamilton è abbastanza complicato, anche per un caso così semplice come l'oscillatore armonico; inoltre, il calcolo presuppone che prima siano state risolte le equazioni del moto. Ci si può dunque domandare quale sia l'utilità di una tale funzione. Fu Hamilton a scoprire l'importante ruolo di  $S$ , ed è per questo che fu poi chiamata "funzione principale" di Hamilton.

L'idea di Hamilton può essere così schematizzata. Supponiamo di poter determinare  $S = S(q'', t''; q', t')$  in maniera indipendente, cioè senza dover risolvere le equazioni del moto,

allora possiamo usare questa funzione per *risolvere* le equazioni del moto, nel seguente modo: risolviamo l'equazione (2.48a) rispetto a  $q''$  e sostituiamo l'espressione ottenuta per  $q''$  nella (2.47a). Otteniamo così le equazioni di trasformazione

$$q'' = q''(q', p', t'', t'), \quad p'' = p''(q', p', t'', t') \quad (2.63)$$

che risolvono esplicitamente il problema del moto fornendo  $q$  e  $p$  ad un qualunque tempo  $t''$  in funzione dei loro valori ad un tempo iniziale  $t'$ . Chiariamo questa procedura con un esempio.

**Box 2.9 — Oscillatore armonico.** Partiamo dalla formula per  $S$  data dalla (2.61). Allora dalla (2.48a) otteniamo

$$-p' = \frac{\partial}{\partial q'} \left[ \frac{1}{2} m \omega \frac{(q'^2 + q''^2) \cos(\omega t) - 2q'q''}{\sin(\omega t)} \right] = m \omega \frac{q' \cos(\omega t) - q''}{\sin(\omega t)}$$

da cui

$$q'' = \cos(\omega_0 t) q' + \frac{\sin(\omega_0 t)}{m \omega_0} p'$$

che è la prima equazione di trasformazione (2.63) (come al solito,  $t = t'' - t'$ ). Per ottenere la seconda, sostituiamo nella (2.47a), che è,

$$p'' = \frac{\partial}{\partial q''} \left[ \frac{1}{2} m \omega \frac{(q'^2 + q''^2) \cos(\omega t) - 2q'q''}{\sin(\omega t)} \right] = m \omega \frac{q'' \cos(\omega t) - q'}{\sin(\omega t)},$$

l'espressione per  $q''$ , ottenendo così

$$p'' = m \omega \frac{\left[ \cos(\omega_0 t) q' + \frac{\sin(\omega_0 t)}{m \omega_0} p' \right] \cos(\omega t) - q'}{\sin(\omega t)} = m \omega \frac{[\cos^2(\omega_0 t) - 1] q' + \frac{\sin(\omega_0 t)}{m \omega_0} p' \cos(\omega t)}{\sin(\omega t)}$$

da cui

$$p'' = -m \omega_0 \sin(\omega_0 t'') q' + \cos(\omega_0 t'') p'$$

Le espressioni per  $q''$  e  $p''$  sono proprio le soluzioni dell'oscillatore armonico in funzione dei valori iniziali  $q'$  e  $p'$ .

Resta il problema di determinare  $S$  senza dover risolvere le equazioni del moto. Anche questo problema fu affrontato da Hamilton. Si sostituisca l'espressione per  $p''$  data dalla (2.47a) nella (2.47b) ottenendo così

$$\frac{\partial S}{\partial t''} + H \left( q'', \frac{\partial S}{\partial q''} \right) = 0 \quad (2.64)$$

Questa è un'equazione differenziale alle derivate parziali di cui  $S$  è soluzione. Essa è nota come *equazione di Hamilton-Jacobi*.

Apparentemente, l'equazione (2.64) non è sufficiente a determinare  $S$  perché non contiene alcuna informazione sulle variabili  $t'$  e  $q'$ . Tuttavia, possiamo supplementare (2.64) con un'equazione rispetto alle variabili iniziali: basta combinare le equazioni (2.48) in una singola equazione differenziale per  $S$ :

$$-\frac{\partial S}{\partial t'} + H \left( q', -\frac{\partial S}{\partial q'} \right) = 0 \quad (2.65)$$

Il problema dell'integrazione delle equazioni del moto, cioè le equazioni di Hamilton, che sono due insiemi di equazioni differenziali alle derivate ordinarie, è stato dunque ricondotto all'integrazione di due equazioni differenziali alle derivate parziali.

Per un sistema conservativo,  $E = \text{costante}$ . Allora, sostituendo la (2.55) nella (2.64) (tenendo a mente che  $t = t'' - t'$ ), si ottiene la prima equazione differenziale per la funzione caratteristica di Hamilton

$$H\left(q'', \frac{\partial s}{\partial q''}\right) = E \quad (2.66a)$$

L'equazione (2.66a) ha la forma dell' *equazione stazionaria di Hamilton-Jacobi*. Procedendo in modo analogo, si ottiene la seconda equazione

$$H\left(q'', -\frac{\partial s}{\partial q'}\right) = E \quad (2.66b)$$

Se siamo in grado di risolvere queste equazioni e determinare così  $s$ , grazie alla (2.55), possiamo risalire a  $S$  e quindi usare il metodo di Hamilton per integrare le equazioni del moto.

Nonostante l'importanza fondamentale delle scoperte di Hamilton (inclusa l'interpretazione geometrica della sua funzione principale che studieremo in un capitolo successivo), il problema matematico di risoluzione delle due equazioni alle derivate parziali è praticamente impossibile da portare a compimento senza il metodo generale di Jacobi basato sulla teoria delle trasformazioni canoniche.

## 2.3 Principio d'azione di Jacobi\*

Ritorniamo alla formula (2.57) per la funzione caratteristica di Hamilton  $s(q'', q', E)$ . Una domanda naturale è se questa formula sia ottenibile direttamente da un principio variazionale. Sembra naturale rispondere di sì e l'ovvia congettura è che l'integrale d'azione che genera la formula (2.57) sia semplicemente della stessa forma

$$[q] = \int_{q'}^{q''} p dq \quad (2.67)$$

dove adesso l'integrazione è lungo *qualunque* curva  $q = q(\tau)$  da  $q'$  a  $q''$  con il parametro  $\tau$  che è arbitrario poiché differenti scelte del parametro non cambiano la curva.

Moralmente, questa è la risposta corretta. Occorre però qualificarla e tenere conto il valore estremo (2.57) è calcolato per un valore costante dell'energia  $E$ . Il principio d'azione è dunque il seguente: *per un valore fissato di  $H(q, p) = E$ , la traiettoria di un sistema conservativo è l'estremo dell'integrale d'azione (2.67)*. Questo è il *principio variazionale di Jacobi*.

### 2.3.1 Integrale d'azione di Jacobi

Dimostriamo il principio di Jacobi nel caso fisicamente rilevante di  $L = T - V$ , con  $T$  funzione quadratica delle velocità cioè della forma (1.5). In virtù della (1.9),

$$pdq = 2Tdt = 2T \frac{dt}{d\tau} d\tau,$$

dove  $\tau$  è un generico parametro. Possiamo eliminare  $dt/d\tau d\tau$ , utilizzando la formula (1.7) per l'energia cinetica,

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{d\tau}\right)^2 \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2$$

e la legge di conservazione dell'energia,

$$T = E - V. \quad (2.68)$$

Uguagliando le due espressioni per  $T$ , si ottiene

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d}{d\tau} \right)^2 \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 = E - V \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{2(E - V)}} \frac{d}{d\tau},$$

da cui,

$$p dq = \int_{q'}^{q''} 2T \frac{dt}{d\tau} d\tau = 2(E - V) \frac{1}{\sqrt{2(E - V)}} \frac{d}{d\tau} d\tau = \sqrt{2(E - V)} d,$$

dove  $d$  è l'elemento di linea (1.6) che fornisce la distanza naturale tra configurazioni infinitamente vicine. Arriviamo così alla formula

$$[q] = \int_{q'}^{q''} \sqrt{2(E - V)} d \quad (2.69)$$

Abbiamo completato il processo di eliminazione e abbiamo ottenuto l'*integrale d'azione di Jacobi* (2.69). Il tempo  $t$  non appare in  $[q]$ , che è inoltre indipendente dal parametro  $\tau$ . Tuttavia,  $d$  non è un differenziale esatto e sarebbe sbagliato credere che l'integrando di  $[q]$  sia  $\sqrt{2(E - V)}$  e che  $d$  corrisponde al differenziale della variabile indipendente. Per l'integrazione effettiva, occorre scegliere un parametro  $\tau$  come variabile indipendente.

### 2.3.2 Abbandono del tempo assoluto

### 2.4 Variazione seconda dell'integrale d'azione ed equazione di Jacobi\*

Consideriamo adesso il secondo termine dello sviluppo (2.42) che è  $1/2$  che moltiplica la *variazione seconda* dell'integrale d'azione

$$\delta^2 \mathcal{S}[\bar{q}] = \epsilon^2 \int_{t'}^{t''} \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} \eta \dot{\eta} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^2} \eta^2 \right] dt \Big|_{q=\bar{q}} \quad (2.70)$$

La condizione necessaria affinché  $\bar{q}$  sia un punto critico di  $\mathcal{S}$  è che si annulli la sua variazione prima e questo, come abbiamo visto, è equivalente alla condizione che  $\bar{q}$  soddisfi le equazioni di Eulero-Lagrange. Se il punto critico  $\bar{q}$  sia un massimo, un minimo o un punto sella è deciso dal segno della variazione seconda (2.70). Più precisamente, per  $\bar{q}$  fissato  $\delta^2 \mathcal{S}[\bar{q}]$  è una *forma quadratica* della funzione  $\eta$ . e se questa forma è definita positiva, allora  $\bar{q}$  è un minimo. Questo problema è stato studiato da Jacobi, soprattutto nel contesto delle linee geodetiche su una superficie bidimensionale. Morse negli anni Venti e Trenta del secolo scorso arrivò alla soluzione completa del problema.

Per studiare il problema, consideriamo il caso fisicamente rilevante di funzione di Lagrange standard  $L = T - V$  di tipo newtoniano (esempio 1.1), che semplifichiamo ulteriormente come problema uni-dimensionale. Allora

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q),$$

da cui

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} = m, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial q^2} = -\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}$$

e quindi

$$\delta^2 \mathcal{S} = \epsilon^2 \int_{t'}^{t''} [m\dot{\eta}^2 - f(t)\eta^2] dt, \quad f(t) \equiv \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} \right|_{q=\bar{q}(t)} \quad (2.71)$$

Il problema è stabilire se esiste una *qualunque* variazione  $\eta(t)$ , ssogetta alle condizioni omogenee di Dirichlet

$$\eta(t') = \eta(t'') = 0, \quad (2.7)$$

per cui  $\delta^2 \mathcal{S}$  diventa negativo. A questo scopo, cerchiamo la funzione  $\eta$  che minimizza  $\delta^2 \mathcal{S}$  e se per questa funzione  $\delta^2 \mathcal{S}$  è positivo, allora  $\delta^2 \mathcal{S}$  sarà positivo per tutte le funzioni. Poiché il problema è omogeneo, la normalizzazione di  $\eta$  nell'intervallo  $[t', t'']$  va fissata; è conveniente assumere che abbia norma  $L^2$  unitaria:

$$\int_{t'}^{t''} \eta(t)^2 dt = 1 \quad (2.72)$$

La minimizzazione di  $\delta^2 \mathcal{S}$  soggetta a questo vincolo può essere ottenuta introducendo un moltiplicatore di Lagrange  $\lambda$  e minimizzando il funzionale

$$\mathcal{J}[\eta] = \int_{t'}^{t''} [m\dot{\eta}^2 - f(t)\eta^2 - \lambda\eta^2] dt$$

Quindi  $\eta$  deve soddisfare le equazioni di Eulero-Lagrange

$$m \frac{d}{dt} \dot{\eta} + f(t)\eta + \lambda\eta = 0 \quad (2.73)$$

Risolviamo questa equazione rispetto a  $f(t)\eta$ ,

$$f(t)\eta = -m \frac{d}{dt} \dot{\eta} - \lambda\eta$$

e sostituiamo questa espressione nell'integrale a secondo membro della (2.71):

$$\delta^2 \mathcal{S} = \epsilon^2 \int_{t'}^{t''} \left[ m\dot{\eta}^2 + \eta \frac{d}{dt} (m\dot{\eta}) + \lambda\eta^2 \right] dt = \int_{t'}^{t''} \left[ m \frac{d}{dt} (\dot{\eta}\eta) + \lambda\eta^2 \right] dt = m\dot{\eta}\eta \Big|_{t'}^{t''} + \lambda \int_{t'}^{t''} \eta^2 dt$$

Ma il termine di bordo si annulla, essendo le condizioni al contorno per  $\eta$  omogenee, e la norma  $L^2$  di  $\eta$  è 1. Quindi

$$\delta^2 \mathcal{S} = \epsilon^2 \lambda \quad (2.74)$$

La conclusione di questo gioco di prestigio è che abbiamo trovato il significato del moltiplicatore di Lagrange:  $\lambda$  è proprio la variazione seconda dell'azione (moltiplicata per  $\epsilon^2$ ). Quindi il problema di partenza è ricondotto a determinare il segno di  $\lambda$ .

Il moltiplicatore  $\lambda$  è determinato dall'equazione di Eulero-Lagrange (2.73) che va letta come equazione agli autovalori:

$$m \frac{d^2 \eta}{dt^2} + f(t)\eta = -\lambda\eta, \quad f(t) \equiv \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} \right|_{q=\bar{q}(t)} \quad (2.75)$$

### 2.4.1 Equazione di Jacobi

Questo problema può essere studiato senza calcolare esplicitamente  $\delta^2\mathcal{S}$ . La risposta dipende dalle traiettorie  $q(t)$  nelle vicinanze di  $\bar{q}(t)$ . Poiché queste sono soluzioni delle equazioni del moto

$$m \frac{d^2 q}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial q}, \quad (2.76)$$

esse non differiscono molto dalla traiettoria  $\bar{q}(t)$ , ed è quindi naturale scrivere nuovamente  $q(t) = \bar{q}(t) + \epsilon\eta(t)$  e trovare l'equazione per  $\eta(t)$ . Dalla (2.76), trascurando termini di ordine superiore in  $\epsilon$ , otteniamo

$$m \frac{d^2 \bar{q}}{dt^2} + m\epsilon \frac{d^2 \eta}{dt^2} = - \left. \frac{\partial V}{\partial q} \right|_{q=\bar{q}} - \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} \right|_{q=\bar{q}} \epsilon\eta.$$

Poiché  $\bar{q}$  risolve l'equazione del moto, otteniamo per  $\eta$  l'equazione

$$m \frac{d^2 \eta}{dt^2} = - \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} \right|_{q=\bar{q}} \eta \quad (2.77)$$

che è nota come *equazione delle piccole deviazioni di Jacobi*.

## Appendice 2.A – Connessione affine e curvatura\*

Concludiamo questo capitolo con alcuni elementi di geometria che sono di complemento alle sezioni 2.1.4 e 2.4.

### 2.A.1 Spazio tangente e varietà riemanniana

La nozione di varietà riemanniana formalizza la nozione di *spazio curvo* di dimensione arbitraria  $d$ . Una varietà riemanniana è una *varietà differenziabile*  $M$  dotata di un tensore metrico  $g$  definito positivo. E una varietà differenziabile è ciò che si ottiene incollando insieme “pezzi” che sono in corrispondenza biunivoca e differenziabile con  $\mathbb{R}^d$ . Questo significa che i punti  $q$  di  $M$  sono descrivibili mediante coordinate locali  $q_1, \dots, q_d$ , cioè da un vettore in  $\mathbb{R}^d$ . La scelta di un sistema di coordinate è largamente convenzionale e si passa da un sistema di coordinate ad un altro attraverso trasformazioni  $\bar{q}_n = \bar{q}_n(q_1, \dots, q_d)$ ,  $n = 1, \dots, d$ , che sono invertibili e differenziabili. Non è detto che esista un sistema di coordinate che copra tutta quanta la varietà. In ogni punto  $q$  è definito uno spazio tangente che è definito come l'insieme dei vettori tangenti alle curve che passano per  $q$ . L'esempio paradigmatico di varietà riemanniana è la superficie di una sfera di raggio unitario (fig. 2.1).

Nell'intorno infinitesimo di un punto di  $M$ , si applicano le nozioni della geometria euclidea. Per esempio, è ben definito lo spostamento infinitesimo da  $q$  al punto infinitamente vicino  $q + d\mathbf{q}$ , dove  $d\mathbf{q}$  è un vettore infinitesimo in  $q$ , cioè un vettore infinitesimo tangente ad una curva passante per  $q$ . Una base naturale di vettori in  $q$  è così costruita: sia  $q_1, \dots, q_d$  un sistema di coordinate locali e si considerino i vettori

$$\mathbf{h}_n = \lim_{\delta q^n \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{q}}{\delta q^n} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q^n} \quad (2.78)$$

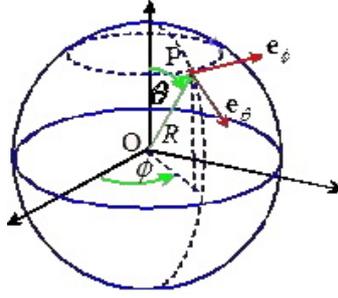


Figura 2.1: Base ortonormale sulla sfera.

dove  $\delta \mathbf{q}$  è lo spostamento da  $q$  ad un punto vicino  $q'$  la cui coordinata è  $\delta q^n$  lungo la curva passante per  $q$  per la quale solo la coordinata  $q^n$  varia e tutte le altre restano costanti. Si osservi che le componenti dei vettori  $\mathbf{h}_n$  sono  $(\mathbf{h}_i)^k = \delta_i^k$ , dove  $\delta_i^k$  è la delta di Kronecker.

I vettori  $\{\mathbf{h}_n\}$  formano una base per lo spazio dei vettori tangenti in  $q$  (usualmente detta base olonomica). Per la sfera, la caratterizzazione di questi vettori è facilitata dal fatto che possiamo descrivere un punto della sfera (di raggio unitario) in termini del raggio vettore  $\mathbf{r}$  dello spazio tridimensionale rispetto ad un'origine  $O$  nel centro della sfera. Poiché  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y + z\hat{\mathbf{e}}_z = \sin\theta \cos\phi\hat{\mathbf{e}}_x + \sin\theta \sin\phi\hat{\mathbf{e}}_y + \cos\theta\hat{\mathbf{e}}_z$ , la base naturale nello spazio tangente rispetto alle coordinate sferiche è data dai vettori

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_\theta &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \cos\theta \cos\phi\hat{\mathbf{e}}_x + r \cos\theta \sin\phi\hat{\mathbf{e}}_y - \sin\theta\hat{\mathbf{e}}_z \\ \mathbf{h}_\phi &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\sin\theta \sin\phi\hat{\mathbf{e}}_x + \sin\theta \cos\phi\hat{\mathbf{e}}_y\end{aligned}$$

Il punto di vista della geometria (da Gauss e Riemann in poi) non è quello di descrivere una varietà in termini di quantità definite nello spazio euclideo in cui la varietà è immersa, ma in termini geometrici intrinseci. Non si prenda quindi l'esempio della sfera troppo alla lettera, ma solo come un modo per visualizzare la definizione (5.8) facendo anche riferimento alla fig. 2.1.

Il tensore metrico  $g$ , per definizione, fornisce un prodotto scalare per ogni punto di  $M$ . In particolare, fornisce il prodotto scalare tra due vettori della base (5.8). Poiché  $(\mathbf{h}_i)^k = \delta_i^k$ , abbiamo  $\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{h}_j = g(\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_j) = g_{kl}\delta_i^k\delta_j^l = g_{ij}$ . Abbiamo così l'importante relazione tra base  $\{\mathbf{h}_n\}$  e il tensore metrico:

$$\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{h}_j = g_{ij}. \quad (2.79)$$

La scelta delle coordinate è convenzionale. Un cambiamento di coordinate  $\bar{q}_n = \bar{q}_n(q_1, \dots, q_d)$  trasforma i vettori  $\mathbf{h}_n = \partial \mathbf{q} / \partial q^n$  nei vettori

$$\bar{\mathbf{h}}_n = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \bar{q}^n} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^n} = \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^n} \mathbf{h}_k$$

per cui la (2.79) diventa  $\bar{\mathbf{h}}_i \cdot \bar{\mathbf{h}}_j = \bar{g}_{ij}$ , dove  $\bar{g}_{ij} = \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} \frac{\partial q^l}{\partial \bar{q}^j} g_{kl}$  è il tensore metrico nel nuovo sistema di coordinate.

Mediante le procedure usuali si può convertire la base  $\mathbf{h}_n$  in una base ortonormale  $\mathbf{e}_n$ . Al variare di  $q$  nello spazio (o perlomeno in un suo aperto), si hanno  $d$  campi lisci di vettori ortonormali, cioè tali che

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (2.80)$$

Per esempio, per un generico punto sulla sfera di coordinate sferiche  $(\theta, \phi)$  la base ortonormale è data dai vettori  $\mathbf{e}_\theta = \cos\theta \cos\phi \mathbf{h}_x + \cos\theta \sin\phi \mathbf{h}_y - \sin\theta \mathbf{h}_z$ , e  $\mathbf{e}_\phi = -\sin\phi \mathbf{h}_x + \cos\phi \mathbf{h}_y$ . Come si vede, valgono le relazioni di ortonormalità:  $\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{h}_\theta = 1$ ,  $\mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{h}_\phi = 1$ ,  $\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{h}_\phi = 0$ . (In questo caso, i vettori di partenza erano già ortogonali e si doveva curare solo la normalizzazione, in generale si dovrà usare anche il metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt).

Non c'è nulla che privilegi una base ortonormale rispetto ad un'altra ottenuta dalla prima mediante una trasformazione che preservi l'ortonormalità (rotazione). La scelta di una base nello spazio tangente è l'analogo della scelta di un gauge in elettrodinamica.

### 2.A.2 Trasporto parallelo di vettori

I vettori della base  $\{\mathbf{h}_n\}$  cambiano da punto a punto. Quindi la variazione di un vettore  $\mathbf{V} = V^n \mathbf{h}_n$  nel passaggio dal punto  $q$  ad un punto infinitamente vicino  $q + d\mathbf{q}$  consiste di due termini, uno dovuto alla variazione delle sue componenti ed uno dovuto alla variazione della base:

$$\delta \mathbf{V} = \delta(V^n \mathbf{h}_n) = \mathbf{h}_n dV^n + V^n d\mathbf{h}_n \quad (2.81)$$

In questa formula  $dV^n = V^n(q + d\mathbf{q}) - V^n(q)$  e  $d\mathbf{h}_n$  è la variazione infinitesima della base nel passaggio da  $q$  a  $q + d\mathbf{q}$  ed è quindi data dalla formula

$$\mathbf{h}_n(q + d\mathbf{q}) = \mathbf{h}_n(q) + \frac{\partial \mathbf{h}_n}{\partial q^j} dq^j \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{h}_n = \frac{\partial \mathbf{h}_n}{\partial q^j} dq^j \quad (2.82)$$

La (2.81) fornisce la *variazione assoluta* (o differenziale covariante) di  $\mathbf{V}$  e ha un significato geometrico invariante, cioè indipendente dalla scelta di un sistema di coordinate. Al contrario, ciascuno dei due termini che compaiono a secondo membro della (2.81) dipende dalla base.

In uno spazio piatto, l'assenza di variazione del vettore è data dalla condizione  $d\mathbf{V} = 0$  che caratterizza un campo di vettori costanti e paralleli. La condizione  $\delta \mathbf{V} = 0$  in uno spazio curvo ha un significato geometrico analogo, come si può facilmente vedere: nella (2.81) possiamo sostituire  $V^n d\mathbf{h}_n$  con  $V^n(q + d\mathbf{q}) d\mathbf{h}_n$ , in quanto infinitesimi di ordine superiore non danno contributo, per cui, uguagliando a zero il secondo membro della (2.81), otteniamo  $V^n(q + d\mathbf{q}) \mathbf{h}_n - V^n(q) \mathbf{h}_n + V^n(q + d\mathbf{q}) d\mathbf{h}_n = 0$ , ossia

$$V^n(q + d\mathbf{q}) \mathbf{h}(q + d\mathbf{q}) = V^n(q) \mathbf{h}_n \quad (2.83)$$

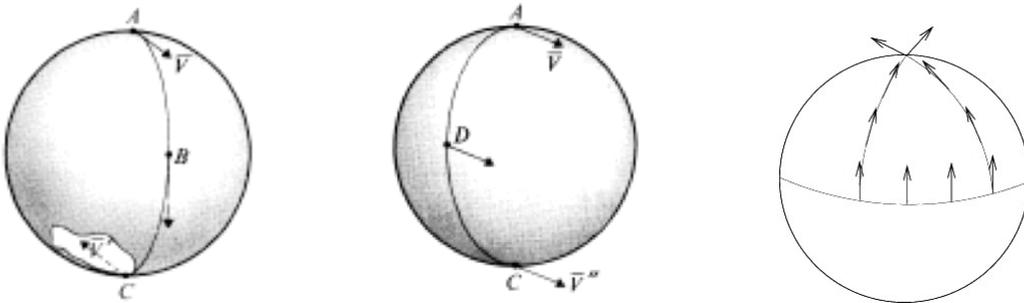


Figura 2.2: Dipendenza dal percorso del trasporto parallelo

Questa equazione esprime il fatto che nel passaggio dalla base in  $q$  a quella nel punto vicino  $q + d\mathbf{q}$ , le componenti del vettore non sono cambiate. In altre parole,  $\mathbf{V}(q + d\mathbf{q})$  e  $\mathbf{V}(q)$  sono vettori paralleli. Questo è l'analogo in uno spazio curvo della condizione infinitesima di parallelismo in uno spazio piatto.

Tuttavia, mentre in uno spazio piatto il parallelismo tra vettori può essere immediatamente esteso dall'infinitesimo al finito, in uno spazio curvo il parallelismo di vettori in punti distanti non è definito, a meno che non si specifichi un cammino che congiunga i due punti. In altre parole, in uno spazio curvo il trasporto parallelo di un vettore da un punto ad un altro dipende dal cammino. La regola di trasporto parallelo lungo un cammino è la seguente: se se partiamo da un vettore  $\mathbf{V}'$  in  $q'$ , man mano che ci muoviamo lungo un dato cammino, definiamo in ogni punto  $q = q(t)$  che incontriamo un vettore che, rispetto alle base  $\mathbf{h}(q(t))$ , ha le stesse componenti di  $\mathbf{V}'$ , vale a dire, iteriamo passin passetto lungo il cammino la (2.83).

La nozione di “parallelismo a distanza” ha degli aspetti poco intuitivi. Per esempio se si trasporta il vettore tangente al polo nord lungo un arco di cerchio massimo, il vettore trasportato al polo sud appare “dall'esterno” anti-parallelo a quello iniziale, e differisce dal vettore trasportato seguendo un altro percorso, come mostrato dalle prime due figure in fig. 2.2 La dipendenza del trasporto dal percorso è la differenza cruciale tra spazi piatti e curvi. Vediamone un altro caso, sempre sulla sfera: si prenda un vettore all'equatore, che punta verso una linea di longitudine costante; lo si trasporti parallelamente fino al polo nord lungo una linea di longitudine; poi si prenda il vettore originale, lo si trasporti parallelamente lungo l'equatore di un angolo  $\theta$  e poi lo si porti fino al polo nord come prima. È chiaro che il vettore, trasportato parallelamente lungo i due percorsi, è arrivato alla stessa destinazione con due valori diversi (ruotati di  $\theta$ ), come mostra l'ultima figura in fig. 2.2.

### 2.A.3 Connessione affine ed equazione geodetica

Consideriamo la formula (2.82) per i vettori  $d\mathbf{h}_n$ . Le quantità  $\partial\mathbf{h}_n/\partial q_j$ , al variare di  $n$  e  $j$  tra 1 e  $d$  sono  $d^2$  vettori in  $q$ , ciascuno dei quali può quindi essere espresso come combinazione lineare dei vettori  $\mathbf{h}_i$  della base. Per  $n$  e  $j$  fissati siano  $\Gamma_{nj}^i$  questi coefficienti. Allora

$$\frac{\partial\mathbf{h}_n}{\partial q_j} = \Gamma_{nj}^i \mathbf{h}_i \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{h}_n = \Gamma_{nj}^i \mathbf{h}_i dq^j \quad (2.84)$$

$\Gamma_{nj}^i$  sono detti *coefficienti di connessione*.  $\Gamma$  è detta *connessione affine*. Una connessione affine è un modo per connettere (mediante trasporto parallelo), spazi tangenti differenti, come espresso dalla (2.82). Originariamente si pensava alla varietà  $M$  immersa in uno spazio vettoriale reale (come abbiamo visto per la sfera) di cui gli spazi tangenti sono sottospazi affini e il collegamento tra questi sottospazi è dato da trasformazioni affini.

Il tensore metrico determina tutta la struttura geometrica della varietà, in particolare determina i coefficienti di connessione. Per vedere questo, si osservi innanzitutto (ricordando la definizione (5.8) degli elementi della base) che

$$\frac{\partial\mathbf{h}_n}{\partial q^j} = \frac{\partial}{\partial q^j} \frac{\partial\mathbf{q}}{\partial q^n} = \frac{\partial}{\partial q^n} \frac{\partial\mathbf{q}}{\partial q^j} = \frac{\partial\mathbf{h}_n}{\partial q^j} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{nj}^i = \Gamma_{jn}^i,$$

vale a dire,  $\Gamma_{nj}^i$  deve essere simmetrico nello scambio degli indici bassi. Adesso differenziando ambo i membri della (2.79), si ottiene  $(d\mathbf{h}_i) \cdot d\mathbf{h}_j + \mathbf{h}_i \cdot d\mathbf{h}_j = dg_{ij}$  ossia,

$$\left( \Gamma_{jl}^k g_{ik} + \Gamma_{il}^k g_{jk} \right) dq^l = dg_{ij} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^l} = \Gamma_{jl}^k g_{ik} + \Gamma_{il}^k g_{jk}.$$

Usando quest'ultima relazione e le simmetrie di  $\Gamma$  e  $g$ , si vede che vale la seguente uguaglianza

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^l} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{il}}{\partial q^j} = 2\Gamma_{li}^k g_{jk}$$

Adesso, dividendo per 2 e invertendo il tensore metrico  $g$  si ottiene

$$\Gamma_{ij}^n \equiv g^{nk} \Gamma_{kij} = \frac{1}{2} g^{nk} \left( \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right), \quad (2.30)$$

che è esattamente l'espressione per il simbolo di Christoffel di seconda specie ottenuta nel box 2.2, quando abbiamo ricavato l'equazione del moto geodetico. Come vedremo tra un attimo, questa non è una coincidenza.

Determiniamo adesso l'equazione per il trasporto parallelo di un vettore lungo un dato cammino  $q = q(t)$ . Per fare questo, dobbiamo passare dalla condizione infinitesima  $\delta \mathbf{V} = 0$  alla condizione di annullamento del tasso di variazione di  $\mathbf{V}$  lungo il cammino, vale a dire

$$\frac{\delta \mathbf{V}}{\delta t} = 0 \quad (2.85)$$

La formula esplicita per  $\delta \mathbf{V} / \delta t$  è data dalle (2.81) e (2.84) per spostamento infinitesimo  $dq^j = \dot{q}^j dt$  lungo  $q = q(t)$ , cioè

$$\frac{\delta \mathbf{V}}{\delta t} = \frac{dV^n}{dt} \mathbf{h}_n + \Gamma_{nj}^i V^n \dot{q}^j \mathbf{h}_i. \quad (2.86)$$

Questa formula fornisce la *derivata assoluta* o *derivata covariante* di  $\mathbf{V}$  lungo il cammino  $q = q(t)$  e ha un significato geometrico invariante, cioè indipendente dalla scelta di un sistema di coordinate. Al contrario, ciascuno dei due termini che compaiono a secondo membro della (2.86) *non ha* significato geometrico invariante, ma dipende dalla scelta di un sistema di coordinate. Allora, in componenti, l'eq. (2.85) diventa

$$\frac{dV^i}{dt} + \Gamma_{nj}^i V^n \dot{q}^j = 0 \quad (2.87)$$

Siano  $q(t') = q'$  e  $q(t'') = q''$ ; sia inoltre  $\mathbf{V}' = \mathbf{V}(t')$  la condizione iniziale dell'equazione differenziale (2.87). Allora la soluzione di (2.87)  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t)$  fornisce i vettori lungo il dato cammino  $q = q(t)$  che sono paralleli a  $\mathbf{V}'$ ; in particolare,  $\mathbf{V}(t'')$  è il vettore in  $q''$  parallelo a  $\mathbf{V}'$ . Poiché (2.87) è un'equazione lineare, la sua soluzione può essere espressa come trasformazione lineare dallo spazio tangente in  $q'$  allo spazio tangente in  $q = q(t)$ , cioè come  $\mathbf{V}(t) = \mathbf{U}\mathbf{V}(t')$  in termini dell'operatore lineare di trasporto parallelo  $\mathbf{U} = \mathbf{U}[q', q''; q(t)]$  che dipende dai punti  $q'$  e  $q''$  e dal cammino  $q(t)$  che li congiunge.

In particolare, se poniamo  $V^n = \dot{q}^n$  nella (2.87), si ottiene

$$\frac{d^2 q^i}{dt^2} + \Gamma_{nj}^i \dot{q}^n \dot{q}^j = 0 \quad (2.88)$$

Questa equazione caratterizza quei cammini per i quali *il trasporto parallelo della tangente coincide con la tangente stessa*, che è la caratterizzazione geometrica di una geodetica, intesa come una linea *retta*, cioè come *una linea che trasporta parallelamente il suo vettore tangente*, proprio come fanno le rette nello spazio euclideo. Essendo  $\Gamma$  il simbolo di Christoffel di seconda specie, la (2.88) coincide con l'equazione geodetica (2.31), che nasce dalla caratterizzazione geometrica della geodetica come linea di minima distanza. Le due caratterizzazioni portano alla stessa equazione.

### 2.A.4 Derivata covariante e curvatura

Riscriviamo la formula (2.86) per la derivata covariante nel seguente modo

$$\frac{\delta \mathbf{V}}{\delta t} = \frac{\mathbf{V}(q + d\mathbf{q}) + \Gamma_{nj}^i V^n dq^j \mathbf{h}_i - \mathbf{V}(q)}{dt}, \quad (2.89)$$

dove  $q$  è il punto corrispondente al “tempo”  $t$  e  $dq^j = \dot{q}^j dt$  sono le componenti del vettore di spostamento infinitesimo lungo la curva nel tempo  $dt$ . Vediamo che i primi due termini a numeratore rappresentano il vettore in  $q$  che è parallelo a  $\mathbf{V}(q + d\mathbf{q})$ , vale a dire, il vettore

$$\mathbf{V}_{q+d\mathbf{q}}^{\parallel}(q) = \mathbf{V}(q + d\mathbf{q}) + \Gamma_{nj}^i V^n dq^j \mathbf{h}_i = \mathbf{V}(q) + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q^j} dq^j + \Gamma_{nj}^i V^n dq^j \mathbf{h}_i \quad (2.90)$$

È questa la ragione per cui la (2.89) è ben definita: è il limite di un rapporto incrementale in cui si confrontano vettori che vivono nello stesso spazio.

Si osservi che in uno spazio curvo, una nozione di derivata del tipo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{V}(q + \epsilon \mathbf{U}) - \mathbf{V}(q)}{\epsilon}$$

non può funzionare perché  $\mathbf{V}(q + \epsilon \mathbf{U})$  e  $\mathbf{V}(q)$  vivono in spazi differenti: il primo nello spazio tangente a  $q + \epsilon \mathbf{U}$  e il secondo nello spazio tangente a  $q$ . Se tuttavia sostituiamo  $\mathbf{V}(q + \epsilon \mathbf{U})$  con il suo trasporto parallelo  $\mathbf{V}_{q+d\mathbf{q}}^{\parallel}(q)$ , la formula che si ottiene,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{V}_{q+\epsilon \mathbf{U}}^{\parallel}(q) - \mathbf{V}(q)}{\epsilon} \equiv D_{\mathbf{U}} \mathbf{V} \quad (2.91)$$

risulta ben definita per qualunque coppia di campi vettoriali  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{U}$  e rappresenta la *derivata covariante* del campo vettoriale  $\mathbf{V}$  lungo il campo vettoriale  $\mathbf{U}$ . Dalla (2.90) si ottiene immediatamente

$$D_{\mathbf{U}} \mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q^k} U^k + \Gamma_{ij}^n V^i U^j \mathbf{h}_n \quad (2.92)$$

In particolare, se  $\mathbf{U}$  è il vettore  $\mathbf{h}_j$ , otteniamo la derivata covariante di  $\mathbf{V}$  nella direzione  $\mathbf{h}_j$ , cioè,

$$D_k \mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q^k} + \Gamma_{ik}^n V^i \mathbf{h}_n \quad (2.93)$$

/DA FINIRE/



## 3. Trasformazioni canoniche<sup>\*</sup>

In questa sezione richiamiamo la nozione di trasformazione canonica e mostriamo come Jacobi abbia usato questa nozione per sviluppare un formalismo potente di integrazione delle equazioni del moto. Le trasformazioni canoniche sono caratterizzate da una singola funzione, il generatore. Il problema di trovare una opportuna trasformazione canonica che semplifica la funzione di Hamilton, rendendo così facilmente integrabili le equazioni del moto, è quindi equivalente al problema della costruzione di questa funzione. Questa funzione è determinata da una singola equazione differenziale parziale. Il problema di risolvere le equazioni del moto può essere sostituito dal problema della soluzione di questa equazione. Questo, succintamente, è il metodo di Jacobi di integrazione.

### 3.1 Proposizione fondamentale della teoria delle trasformazioni canoniche

Consideriamo un sistema descritto dalla coppia  $(q, p)$ , la cui evoluzione temporale è data dalle equazioni canoniche del moto (1.12) per una data hamiltoniana  $H(q, p)$ . Si consideri una trasformazione invertibile (ovviamente liscia)

$$Q = Q(q, p), \quad P = P(q, p). \quad (3.1)$$

In generale, non abbiamo alcuna ragione di aspettarci che la coppia  $(Q, P)$  sia un *sistema hamiltoniano*, cioè che esista una funzione  $K(Q, P)$  tale siano soddisfatte le equazioni canoniche del moto per le nuove variabili:

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} \quad (3.2)$$

Tuttavia, questo si realizza se l'invariante integrale di Poincaré  $\int pdq$  è preservato dalla trasformazione, *a meno a meno del differenziale additivo di una funzione*. Questa è la *proposizione fondamentale* della teoria delle trasformazioni canoniche che enunciamo così: *se esiste una funzione  $S_1 = S_1(q, Q)$  tale che*

$$p\delta q = P\delta Q + \delta S_1, \quad (3.3)$$

allora esiste una funzione  $K(Q, P)$  tale che le equazioni (3.2) sono soddisfatte.<sup>1</sup>

Prima di dimostrare questa proposizione, alcuni commenti.

#### Commenti

- L'interpretazione della (3.3) è la stessa di quella termodinamica: poiché

$$\delta S_1 = p\delta q - P\delta Q = \frac{\partial S_1}{\partial q}\delta q + \frac{\partial S_1}{\partial Q}\delta Q \quad (3.4)$$

devono valere le equazioni

$$p = \frac{\partial S_1}{\partial q} \quad (3.5a)$$

$$P = -\frac{\partial S_1}{\partial Q} \quad (3.5b)$$

- Le equazioni (3.5) sono le equazioni fondamentali di una trasformazione canonica. È nella natura di una trasformazione canonica che non possiamo ottenere esplicitamente le nuove variabili in termini delle vecchie variabili (o viceversa). Abbiamo una rappresentazione mista in cui i vecchi e i nuovi impulsi  $p$  e  $P$ , sono espressi come funzioni delle vecchie e nuove coordinate di posizione  $q$  e  $Q$ . Per una rappresentazione esplicita delle nuove variabili in funzione delle vecchie (o viceversa) dobbiamo risolvere le equazioni (3.5) rispetto alle nuove variabili (o alle vecchie).
- La funzione  $S_1 = S_1(q, Q)$  è detta generatore della trasformazione, in quanto le formule esplicite per le trasformazioni delle variabili possono essere scritte come derivate di  $S_1$ . La trasformazione generata da una tale funzione è detta *canonica*.
- Variabili  $Q, P$  collegate alle variabili originarie  $q, p$  dalla (3.3) sono dette *variabili canoniche*. Una particolare scelta di variabili canoniche, di per sé, non è legata ad alcuna hamiltoniana, ma, come vedremo, per alcune hamiltoniane, si possono trovare variabili canoniche rispetto alle quali la funzione di Hamilton assume una forma semplice.
- La trasformazione identica  $Q = q, P = p$  non può essere espressa dal generatore  $S_1(q, Q)$  perché per la trasformazione identica  $q$  e  $Q$  sono variabili dipendenti, mentre gli argomenti del generatore sono variabili indipendenti. Possiamo ovviare a questo con una trasformata di Legendre. Per esempio, supponiamo di volere trovare una funzione generatrice che sia funzione delle variabili  $q$  e  $P$ . Allora riscriviamo  $p\delta q - P\delta Q = dS_1$  come

$$p\delta q + Q\delta P = d(PQ + S_1) \equiv \delta S_2$$

La quantità

$$S_2 = S_2(q, P) = PQ + S_1, \quad (3.6)$$

si chiama ugualmente generatore e per questa funzione si ha

$$p = \frac{\partial S_2}{\partial q} \quad (3.7a)$$

$$Q = \frac{\partial S_2}{\partial P} \quad (3.7b)$$

<sup>1</sup>Poiché il differenziale di un differenziale è nullo, se differenziamo ambo i membri della prima equazione nella (3.3), otteniamo

$$\delta p \wedge \delta q = \delta P \wedge \delta Q \equiv \omega.$$

Quindi le trasformazioni canoniche possono essere definite come le trasformazioni che lasciano invariata la 2- forma  $\omega$ , che è detta *forma simplettica*.

Analogamente, mediante trasformata di Legendre, si possono ottenere funzioni generatrici  $S_3 = S_3(p, Q)$  e  $S_4 = S_4(p, P)$ , per le quali valgono formule analoghe di trasformazione (esercizio).

**Problema 3.1** Mostrare che  $S_2 = Pq$  è il generatore della trasformazione identica.

**Problema 3.2** Mostrare che le trasformazioni canoniche hanno la proprietà di gruppo — *la composizione di due trasformazioni canoniche è ancora una trasformazione canonica* — e che se  $S_1$  è il generatore della prima trasformazione e  $S'_1$  il generatore della seconda, allora il generatore della trasformazione composta è  $S_1 + S'_1$ .

**Problema 3.3** Mostrare che  $S_1(q, Q) = -S_1(Q, q)$ .

### 3.1.1 Dimostrazione della proposizione fondamentale

La proposizione fondamentale delle trasformazioni canoniche è diretta conseguenza del principio variazionale di Hamilton per l'integrale d'azione (2.11) che riscriviamo così:

$$S[q, p] = \int_{t'}^{t''} pdq - H(q, p)dt. \quad (3.8)$$

Incominciamo col considerare il caso in cui né la funzione di Hamilton  $H$  né la trasformazione canonica abbiano una dipendenza esplicita dal tempo. Sostituendo  $pdq$  dato dalla (3.3) nella (3.8), otteniamo

$$S[q, p] = \int_{t'}^{t''} [PdQ + \delta S_1 - H(q, p)dt] \quad (3.9)$$

$$= \underbrace{\int_{t'}^{t''} PdQ - H(q, p)dt}_{S[q, P]} + \int_{t'}^{t''} \frac{dS_1}{dt}dt, \quad (3.10)$$

dove  $dS_1/dt$  è la derivata rispetto al tempo calcolata lungo un cammino:

$$\frac{dS_1}{dt}(t) = \frac{d}{dt}S_1(q(t), Q(t)). \quad (3.11)$$

Ora, il primo termine a secondo membro della (3.10) è l'integrale d'azione nelle nuove variabili per la funzione di Hamilton

$$K(Q, P) = H(q, p), \quad \text{con } q = q(Q, P), \quad p = p(Q, P), \quad (3.12)$$

mentre l'ultimo termine nella (3.10) dà un *contributo di bordo* che non influenza la variazione dell'integrale d'azione. Quindi l'annullarsi della variazione dell'integrale d'azione nelle variabili originarie garantisce l'annullarsi della variazione dell'integrale d'azione nelle nuove variabili e questo, a sua volta, garantisce che valgano le equazioni canoniche del moto (3.2).

Adesso indeboliamo le ipotesi: permettiamo un'esplicita dipendenza dal tempo per la funzione di Hamilton  $H$  e per la trasformazione canonica dipendano dal tempo  $t$ , per cui anche il generatore  $S_1$  avrà una dipendenza esplicita dal tempo. Allora, nella dimostrazione sopra, il passaggio (3.9) è ancora valido, con  $\delta S_1$  dato dalla (3.3), cioè

$$\delta S_1 = \frac{\partial S_1}{\partial q} \delta q + \frac{\partial S_1}{\partial Q} \delta Q.$$

Ma, per  $S_1$  dipendente esplicitamente dal tempo,

$$dS_1 = \delta S_1 + \frac{\partial S_1}{\partial t} dt.$$

Quindi, l'integrando dell'ultimo integrale nella (3.10) va sostituito con

$$\frac{dS_1}{dt} - \frac{\partial S_1}{\partial t}$$

Accorpendo  $-\partial S_1/\partial t$  nel primo integrale, otteniamo

$$S[q, p] = \underbrace{\int_{t'}^{t''} PdQ - \underbrace{\left[ H(q, p) + \frac{\partial S_1}{\partial t} \right]}_{K(Q, P)} dt}_{S[Q, P]} + \int_{t'}^{t''} \frac{dS_1}{dt} dt, \quad (3.13)$$

A questo punto, per le stesse considerazioni di prima, concludiamo che  $Q$  e  $P$  soddisfano le equazioni (3.2) per

$$K(Q, P) = H(q, p) + \frac{\partial S_1}{\partial t}(q, Q). \quad (3.14)$$

Per un generatore di tipo  $S_2$  funzione di  $q$  e  $P$  si ha una formula analoga

$$K(Q, P) = H(q, p) + \frac{\partial S_2}{\partial t}(q, P). \quad (3.15)$$

**Box 3.1 — Trasformazione canonica per una trasformazione di Galileo.** La trasformazione di Galileo è rappresentata dalla trasformazione canonica dipendente dal tempo

$$Q = q + ut, \quad P = p + mu$$

Il generatore di tipo  $S_2(q, P)$  di questa trasformazione è (esercizio)

$$S_2(q, P; t) = (q + ut)P - muq - \frac{mu^2}{2}t$$

Verifichiamo:

$$p = \frac{\partial S_2}{\partial q} = P - mu$$

$$Q = \frac{\partial S_2}{\partial P} = q + ut$$

Inoltre, si ha

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} = uP - \frac{mu^2}{2}.$$

Per verificare la legge di trasformazione dell'energia (3.15), basta considerare una particella libera. Allora

$$K = \frac{p^2}{2m} + \frac{\partial S_2}{\partial t} = \frac{(P - mu)^2}{2m} + uP - \frac{mu^2}{2} = \frac{P^2}{2m} - uP + \frac{mu^2}{2} + uP - \frac{mu^2}{2} = \frac{P^2}{2m}$$

che è proprio l'energia cinetica nelle nuove variabili.

### 3.1.2 Punto di vista attivo e passivo delle trasformazioni canoniche

Finora siamo rimasti abbastanza vaghi sul significato fisico del cambiamento di variabili prodotto da una trasformazione canonica. In effetti, ci sono due modi di interpretare una trasformazione canonica.

La nozione di trasformazione canonica può essere interpretata come un cambiamento delle coordinate utilizzate per caratterizzare lo spazio delle fasi. Se  $x$  è un punto di questo spazio, lo possiamo descrivere mediante le coordinate  $(q, p)$  oppure mediante le coordinate  $(Q, P)$ . Allora le trasformazioni (3.1) descrivono un cambiamento di coordinate nello spazio delle fasi che, in virtù della (3.3), preserva la forma canonica delle equazioni del moto. In particolare, se  $f(x)$  è una funzione sullo spazio delle fasi, avremo  $f(q, p) = f(Q, P)$ , perché il valore della funzione in un punto non dipende da quali coordinate usiamo per descriverlo. Possiamo chiamare questa *l'interpretazione passiva* di una trasformazione canonica.

D'altro canto, possiamo riguardare anche le trasformazioni (3.1) come una trasformazione dal punto di fase  $(q, p)$  ad un altro punto di fase  $(Q, P)$ . Questa è l'interpretazione naturale di traslazioni, rotazioni e trasformazioni di Galileo (vedere esempio sopra). Da questo punto di vista, la trasformazione canonica è un mappa dello spazio delle fasi in sé stesso che "sposta" i punti dello spazio delle fasi: fissato un sistema di coordinate, il punto  $x = (q, p)$  è "spostato" dalla trasformazione nel punto  $X = (Q, P)$  (sempre rispetto allo stesso sistema di coordinate). Questa è *l'interpretazione attiva* di una trasformazione canonica. Con alcune classi di trasformazione canoniche, il punto di vista attivo non è utile. Ad esempio, la trasformazione da coordinate cartesiane a coordinate polari sferiche è una trasformazione canonica di tipo passivo, e un'interpretazione "attiva" di essa sarebbe priva di senso. Il punto di vista attivo è particolarmente utile per le trasformazioni dipendenti in modo continuo da un parametro. In questo caso, l'effetto della trasformazione è quello di "spostare" il punto di fase continuamente su una curva nello spazio delle fasi in quanto il parametro cambia continuamente.

Se ci chiediamo come cambia una funzione  $f(x)$  in conseguenza di una trasformazione canonica, la risposta dipende da come interpretiamo la trasformazione. Dal punto di vista passivo, la funzione cambia in forma o dipendenza funzionale, ma non cambia in valore. Se invece si considera la trasformazione canonica da un punto di vista attivo, la funzione non modifica la sua dipendenza funzionale ma modifica i propri valori in seguito alla sostituzione dei valori  $q, p$  con  $Q, P$  nell'argomento della funzione  $f$ .

## 3.2 Proprietà di gruppo e trasformazioni canoniche infinitesime

La dinamica nello spazio delle fasi può essere concepita come una successione continua di trasformazioni canoniche infinitesime, ciascuna delle quali dà luogo a variazioni infinitesime  $\delta q, \delta p$  che soddisfano le equazioni canoniche. La funzione di Hamilton è il generatore infinitesimo del moto. Il generatore finito della trasformazione che si ottiene integrando tutti i contributi infinitesimi è la funzione principale di Hamilton.

Per arrivare a questi risultati, incominciamo col risolvere insieme il problema 3.2. Operiamo una trasformazione canonica arbitraria, definita dalla condizione

$$p\delta q - P\delta Q = \delta S_1$$

Ora trasformiamo le variabili  $Q, P$  in altre variabili  $q', p'$  mediante una seconda trasformazione canonica:

$$P\delta Q - p'\delta q' = \delta S'_1$$

Quindi la somma di queste due equazioni dà:

$$p\delta q - p'\delta q' = \delta(S_1 + S_1'),$$

che mostra che la transizione diretta da  $q, p$  a  $q', p'$  è anch'essa una trasformazione canonica. Ciò significa che il prodotto (composizione) di due trasformazioni canoniche è ancora una trasformazione canonica. Le trasformazioni canoniche hanno dunque la *proprietà del gruppo*, e al *prodotto* di due trasformazioni canoniche corrisponde la *somma* dei generatori. Al riguardo, si osservi la notazione usata:  $S_1(q, Q)$  trasforma  $q$  in  $Q$ , mentre  $S_1(Q, q)$  fa tornare al punto di partenza. Dunque, la somma di queste due trasformazioni non deve fare nulla e quindi  $S_1(Q, q) = -S_1(q, Q)$ . In altre parole, la proprietà di gruppo delle trasformazioni canoniche diventa, per i generatori di tipo "1", il gruppo additivo dei reali. Questa proprietà risulta particolarmente utile quando si compone una successione di trasformazioni canoniche, specialmente quando la successione è continua e le trasformazioni canoniche sono infinitesime.

Una trasformazione

$$Q = q + \delta q, \quad P = p + \delta p \tag{3.16}$$

è una *trasformazione canonica infinitesima* se è generata da una funzione che è una correzione infinitesima della trasformazione identica e quindi della forma (vedere il problema (3.1))

$$S_2(q, P) = Pq + G(q, P)\delta\lambda, \tag{3.17}$$

dove  $\delta\lambda$  è una quantità infinitesima ottenuta per variazione infinitesima di un parametro continuo  $\lambda$ . La funzione  $G(q, P)$  è detta *generatore infinitesimo* della trasformazione.

Allora dalle (3.7), trascurando termini di ordine superiore, otteniamo

$$p = P + \frac{\partial G}{\partial q}\delta\lambda, \quad Q = q + \frac{\partial G}{\partial P}\delta\lambda = q + \frac{\partial G}{\partial p}\delta\lambda,$$

dove  $G = G(q, p)$ , ossia

$$\delta q = \frac{\partial G}{\partial p}\delta\lambda, \quad \delta p = -\frac{\partial G}{\partial q}\delta\lambda \tag{3.18}$$

Le equazioni (3.18) mostrano che le trasformazioni canoniche infinitesime hanno una proprietà notevole: a differenza di una trasformazione canonica finita, che non consente una rappresentazione esplicita, una trasformazione canonica infinitesima può essere espressa in forma esplicita: le formule di trasformazione per  $q$  e  $p$  sono automaticamente determinate in termini del generatore infinitesimo  $G$ . Inoltre, le (3.18) sono le equazioni differenziali della trasformazione canonica finita che si ottiene componendo la successione di trasformazioni infinitesime al variare del parametro  $\lambda$  in un qualche intervallo.

Se il generatore infinitesimo è la funzione di Hamilton  $H(q, p)$  e il parametro  $\lambda$  è il tempo  $t$ , allora le equazioni (3.18) diventano le equazioni canoniche del moto:

$$\delta q = \frac{\partial H}{\partial p}\delta t, \quad \delta p = -\frac{\partial H}{\partial q}\delta t. \tag{3.19}$$

In altre parole, in un determinato intervallo di tempo  $\delta t$ , gli "spostamenti" infinitesimi  $\delta q, \delta p$  sono rappresentati da una trasformazione canonica infinitesima dello spazio delle fasi in sé stesso. In breve, *la funzione di Hamilton è il generatore infinitesimo delle traslazioni temporali*.

### 3.2.1 Prodotto di trasformazioni=somma dei generatori

Per amore di concretezza, continuiamo la trattazione per il caso in cui il generatore è la funzione di Hamilton e il parametro è il tempo, ma non c'è nulla di quello che diremo (a parte la terminologia) che non si applichi ad un generatore infinitesimo qualunque.

Abbiamo visto che gli spostamenti infinitesimi  $q \rightarrow q + \delta q, p \rightarrow p + \delta p$  dell'evoluzione del sistema nello spazio delle fasi in un tempo  $\delta t$  sono trasformazioni canoniche infinitesime dello spazio delle fasi in sé stesso. Il processo può essere ripetuto qualsiasi numero di volte e l'intera evoluzione temporale del sistema non è altro che una successione continua di trasformazioni canoniche. L'intero moto del sistema può quindi essere considerato come il risultato di una trasformazione ottenuta per prodotto delle trasformazioni canoniche infinitesime.

Al prodotto delle trasformazioni corrisponde la somma dei generatori di tipo "1". Passiamo quindi al generatore di tipo "1" ottenuto dalla (3.17) per trasformata di Legendre (3.6). Quindi, per  $G = H$  e  $\lambda = t$ , si ottiene

$$S_1(q, Q) = S_2 - PQ = Pq + G(q, P) - PQ = -P\delta q + H(q, P)\delta t \equiv \delta S_1 \quad (3.20)$$

Se  $q, p$  è lo stato per un dato valore  $t$  del parametro,  $\delta S_1$  è il generatore della trasformazione che lo fa passare allo stato vicino  $Q = q + \delta q, P = p + \delta p$ , corrispondente al valore  $t + \delta t$  del parametro. trascurando termini di ordine superiore, otteniamo

$$\delta S_1 = -p\delta q + H(q, p)\delta t, \quad (3.21)$$

Adesso sommiamo tutti i contributi infinitesimi, cioè integriamo  $\delta S_1$  rispetto a  $t$  lungo la soluzione delle equazioni (3.19) che inizia in  $q' = q(t')$  e finisce in  $q'' = q(t'')$ ,

$$S_1(q', t'; q'', t'') = \int_{t'}^{t''} [-p\delta q + H(q, p)\delta t], \quad (3.22)$$

ottenendo così il *generatore della trasformazione che fa passare il sistema dallo stato iniziale  $q', p'$  allo stato finale  $q'', p''$* , cioè il *generatore finito delle traslazioni temporali*.

### 3.2.2 La funzione principale di Hamilton come generatore del moto

Se adesso confrontiamo la (3.22) con la (2.43), vediamo che  $S_1(q', t'; q'', t'')$  è, a meno di un segno, proprio la funzione principale di Hamilton. Quindi la funzione principale di Hamilton  $S$  assume un nuovo e profondo significato: *la funzione principale di Hamilton è il generatore finito delle traslazioni temporali*. La differenza di segno riflette semplicemente il fatto che mentre  $S_1(q', t'; q'', t'')$  fa passare dallo stato iniziale allo stato finale, la funzione principale di Hamilton  $S(q'', q', t) = -S_1(q', q'', t)$  fa passare dallo stato finale a quello iniziale. In particolare, le equazioni (2.47a) e (2.48a) per i tassi di variazione di  $S$  non sono altro che le equazioni di trasformazione (3.5) per  $p = q'', q = q'$  e  $Q = q', P = p'$ .

Inoltre, l'equazione (2.47b) per il tasso di variazione di  $S$  rispetto al tempo

$$H = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (3.23)$$

assume adesso il significato di relazione tra generatore finito  $S$  e generatore infinitesimo  $H$ .

Il problema del moto è dunque ricondotto alla determinazione del generatore finito  $S$  a partire dal generatore infinitesimo  $H$ . Questo è un problema di integrazione: sostituendo  $p = \partial S / \partial q$  nella (3.23), si ottiene l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad (3.24)$$

### 3.3 Parentesi di Poisson

Sia  $f = f(q, p)$  una funzione sullo spazio delle fasi; quando i suoi argomenti  $p$  e  $q$  vengono sostituiti da una soluzione delle equazioni del moto, essa diventa una funzione del tempo  $t$ . Il tasso di variazione temporale di questa funzione è

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \equiv \{f, H\}, \quad (3.25)$$

dove  $\{f, H\}$  è la *parentesi di Poisson* tra  $f$  e la funzione di Hamilton  $H$ .

In generale, la parentesi di Poisson è definita per funzioni arbitrarie  $f$  e  $g$  sullo spazio delle fasi come

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} \equiv \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}. \quad (3.26)$$

Si osservi che le equazioni di Hamilton possono essere scritte in forma di parentesi di Poisson (esercizio):

$$\dot{q} = \{q, H\} \quad (3.27)$$

$$\dot{p} = \{p, H\} \quad (3.28)$$

Due importanti proprietà della parentesi di Poisson sono la sua anticommutatività

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad (3.29)$$

e l'identità di Jacobi (esercizio)

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0 \quad (3.30)$$

Valgono inoltre le relazioni:

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (3.31)$$

#### 3.3.1 Parentesi di Poisson e costanti del moto

Una funzione  $C = C(q, p)$  sullo spazio delle fasi è una *costante del moto* se il valore di  $C$  rimane costante in funzione del tempo quando i suoi argomenti  $p$  e  $q$  vengono sostituiti da una soluzione delle equazioni del moto. Quindi, per la (3.25), la condizione che  $C$  sia una costante del moto è

$$\{C, H\} = 0 \quad (3.32)$$

A questa condizione può essere data un'interpretazione geometrica: consideriamo la superficie  $C(q, p) = \text{costante}$ . Il vettore normale alla superficie ha componenti  $(\partial C/\partial q, \partial C/\partial p)$ . Quindi la condizione

$$\frac{\partial C}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial C}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} = 0$$

significa che il campo vettoriale  $v_H = (\partial H/\partial p, -\partial H/\partial q)$  (si veda l'equazione (1.13)) è ortogonale al vettore normale alla superficie  $C(q, p) = \text{costante}$  e quindi che è parallelo ad essa. La traiettoria del sistema è dunque nell'intersezione tra la superficie  $H(q, p) = E$  e la superficie  $C(q, p) = \text{costante}$ .

Per il sistema si può trovare un insieme  $C_1, C_2, \dots$  di costanti del moto. Ogni costante ha una parentesi di Poisson nulla con la funzione di Hamilton in conformità alla (3.32),

$$\{C_1, H\} = 0, \quad \{C_2, H\} = 0, \dots \quad (3.33)$$

Inoltre, è importante che queste costanti siano indipendenti l'una dall'altra, per esempio, non deve essere possibile esprimere  $C_3$  in funzione di  $C_1$  e  $C_2$ . La traiettoria si trova quindi nell'intersezione di tutte le superfici  $C_i(q, p) = \text{costante}$ , per valori dati di queste costanti.

### 3.3.2 Parentesi di Poisson e trasformazioni canoniche

Le trasformazioni canoniche definiscono rappresentazioni equivalenti di un sistema hamiltoniano. La parentesi di Poisson rispetta questa equivalenza: è invariante per trasformazioni canoniche. Se prendiamo la parentesi di Poisson di due funzioni  $f$  e  $g$  e ricaviamo la funzione  $h = \{f, g\}$ , allora abbiamo la stessa relazione utilizzando qualsiasi insieme di variabili canoniche, vale a dire, se la trasformazione  $Q = Q(q, p)$ ,  $P = P(q, p)$  è canonica, allora

$$\frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial Q} \frac{\partial g}{\partial P} - \frac{\partial f}{\partial P} \frac{\partial g}{\partial Q} \quad (3.34)$$

Data l'invarianza della parentesi di Poisson per trasformazioni canoniche, ne segue che le relazioni (3.31) sono *canoniche*, devono cioè assumere esattamente la stessa forma per tutte le scelte di coordinate canoniche e momenti poiché le parentesi di Poisson sono costanti. In effetti, si può dimostrare che una trasformazione  $Q = Q(q, p)$ ,  $P = P(q, p)$  è canonica se e solo se

$$\{q_i, q_j\} = \{Q_i, Q_j\} = 0 \quad (3.35a)$$

$$\{p_i, p_j\} = \{P_i, P_j\} = 0 \quad (3.35b)$$

$$\{q_i, p_j\} = \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} \quad (3.35c)$$

### 3.3.3 Equazioni canoniche in forma simplettica

Se formiamo il vettore colonna  $x = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ , possiamo scrivere le equazioni di Hamilton come

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}$$

Dunque, se introduciamo la matrice  $2r \times 2r$

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

detta *matrice simplettica*, possiamo scrivere le equazioni di Hamilton in forma compatta come

$$\frac{dx}{dt} = \mathbb{J} \frac{\partial H}{\partial x} \quad (3.37)$$

Se operiamo una trasformazione invertibile  $Q = Q(q, p)$ ,  $P = P(q, p)$ , compattamente espressa come  $X = X(x)$ , l'equazione (3.37) diventa

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial X}{\partial x} \mathbb{J} \frac{\partial H}{\partial x}$$

dove, nel primo passaggio, compare la matrice jacobiana  $2r \times 2r$

$$\frac{\partial X}{\partial x} \equiv \frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix}$$

che agisce sul vettore  $2r$ -dimensionale  $dx/dt$ ; nel secondo passaggio abbiamo usato la (3.37).

Adesso osserviamo che

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial X} \overleftarrow{\frac{\partial X}{\partial x}} = \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)^T \frac{\partial H}{\partial X}$$

dove la freccia sulla matrice jacobiana indica che la matrice agisce da destra sul vettore a sinistra, il che è equivalente all'usuale azione da sinistra della matrice trasposta, come è espresso nell'ultimo passaggio. Quindi,

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial x} \mathbb{J} \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)^T \frac{\partial H}{\partial X}$$

Vediamo così che se la matrice jacobiana è tale che

$$\frac{\partial X}{\partial x} \mathbb{J} \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)^T = \mathbb{J} \quad (3.38)$$

La forma delle equazioni di Hamilton non cambia. Una trasformazione la cui matrice jacobiana ha questa proprietà è detto *simplettica*, il che è equivalente a dire che è *canonica*.

Usando la matrice simplettica  $\mathbb{J}$ , possiamo riscrivere la parentesi di Poisson come

$$\{f, g\} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \mathbb{J} \frac{\partial g}{\partial x} \quad (3.39)$$

dove  $(\partial f/\partial x)^T$  è un inteso come vettore riga e  $\partial g/\partial x$  come vettore colonna. Adesso è un facile esercizio dimostrare il teorema che la parentesi di Poisson è invariante per trasformazioni canoniche:

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \mathbb{J} \frac{\partial g}{\partial x} = \left( \frac{\partial f}{\partial X} \right)^T \overleftarrow{\left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)^T} \mathbb{J} \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)^T \frac{\partial g}{\partial X} \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \frac{\partial X}{\partial x} \mathbb{J} \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)^T \frac{\partial g}{\partial X} = \left( \frac{\partial f}{\partial X} \right)^T \mathbb{J} \frac{\partial g}{\partial X}. \end{aligned}$$

**Box 3.2 — Trasformazioni canoniche lineari.** Le trasformazioni lineari giocano un ruolo importante nello studio di sistemi descritti da hamiltoniane quadratiche. Per tali sistemi si può assumere che lo spazio delle fasi sia un spazio vettoriale (reale) di dimensione  $2r$ .

Denotiamo con  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$  un vettore in tale spazio. Allora una trasformazione lineare a nuove variabili  $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$  si scrive in forma matriciale come  $\mathbf{X} = M\mathbf{x}$  dove  $M$  è una matrice  $2r \times 2r$  della forma a blocchi

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

dove  $A, B, C, D$  sono matrici  $r \times r$ . Allora  $M$  è proprio la matrice jacobiana  $\partial\mathbf{X}/\partial\mathbf{x}$  e la

(3.38) diventa

$$MJM^T = \mathbb{J} \quad (3.41)$$

Poiché  $\det \mathbb{J} = 1$ , vediamo subito che  $\det M = \pm 1$ . La (3.41) fornisce le condizioni su  $A, B, C, D$  affinché  $M$  sia canonica. Per esempio, nel caso tipico nelle applicazioni in cui  $B$  e  $C$  sono nulli, si ottiene immediatamente la condizione

$$AD^T = \mathbb{1}. \quad (3.42)$$

Si lascia come esercizio la determinazione delle condizioni nel caso generale.



## 4. Simmetrie

Il significato di una simmetria è racchiuso dalla seguente affermazione: *“Le equazioni del moto hanno una simmetria, se le soluzioni delle equazioni, quando sono trasformate secondo la simmetria, sono ancora soluzioni delle equazioni del moto, vale a dire, si ha una simmetria se le equazioni trasformate hanno la stessa forma delle equazioni originarie.”*

### 4.1 Rotazioni e tensori

Incominciamo con le rotazioni che sono un esempio fondamentale di simmetria. In tre dimensioni, una rotazione  $R(\hat{\mathbf{n}}, \theta)$  è determinata da un asse dato da una retta passante per l'origine, univocamente determinata da un versore  $\hat{\mathbf{n}}$ , e da un 'angolo  $\theta$  di rotazione. (Per evitare ambiguità, si fissa una direzione dell'asse, e si considera la rotazione di angolo  $\theta$  effettuata in senso antiorario rispetto all'asse orientato.) È importante osservare che le rotazioni attorno lo stesso asse sono additive nell'angolo; si ha cioè  $R(\hat{\mathbf{n}}, \theta_1)R(\hat{\mathbf{n}}, \theta_2) = R(\hat{\mathbf{n}}, \theta_1 + \theta_2)$ , dove il prodotto denota la composizione di rotazioni. L'insieme delle rotazioni forma il gruppo  $O(3)$ . Una *rotazione propria* è una rotazione che conserva l'orientazione dello spazio, cioè, trasforma una terna orientata di vettori ortogonali in una terna ortogonale con la stessa orientazione). Ad esempio,  $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$  non è una rotazione propria. Equivalentemente, una rotazione propria è una rotazione connessa con identità, cioè tale da essere ottenuta mediante una deformazione continua dell'identità. L'insieme delle rotazioni proprie forma il gruppo  $SO(3)$  (dove “S” sta per “speciale”).

#### 4.1.1 Rotazioni

Ricordiamo che uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}$  ha due tipi di basi: la scelta di un'orientazione di  $\mathbb{V}$  consiste nel chiamare "positive" le basi di un tipo e "negative" le altre. Più precisamente, si definisce sull'insieme delle basi per  $\mathbb{V}$  una relazione di equivalenza nel modo seguente. Per ogni coppia di basi, esiste una trasformazione lineare che manda la prima base nella seconda. Il determinante di questa trasformazione è un numero reale, ed è diverso da zero (perché una trasformazione di questo tipo è un isomorfismo). Due basi sono equivalenti se il determinante della trasformazione che le collega è positivo. Per le proprietà del determinante, questa è in

effetti una relazione di equivalenza. Questa relazione di equivalenza divide l'insieme delle basi in due classi. Non vi è però nessun argomento a priori che permetta di identificare gli elementi di una classe come “positivi” e gli altri come “negativi”: l'orientazione dello spazio  $\mathbb{V}$  consiste proprio nella scelta arbitraria di una classe positiva. Per  $\mathbb{V}$  lo spazio vettoriale euclideo, la classe positiva è definita dalla regola della mano destra.

Sia  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  una base ortonormale destrorsa. La rotazione è descritta in modo analitico scrivendo i vettori dello spazio rispetto a tale base. In termini del versore  $\hat{\mathbf{n}} = (n_x, n_y, n_z)$ , la rotazione di un angolo  $\theta$  intorno all'asse, è rappresentata da una matrice  $R = R(\hat{\mathbf{n}}, \theta)$ . Per esempio, la rotazione intorno all'asse  $z$  trasforma il vettore  $\mathbf{r}$  di coordinate  $(x, y, z)$  nel vettore  $\mathbf{r}'$  di coordinate  $(x', y', z')$  è così rappresentata

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

La condizione che caratterizza una matrice  $R$  che rappresenta una rotazione è che il prodotto scalare tra due vettori sia lasciato invariato dalla rotazione:  $R(\mathbf{u}) \cdot R(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ , che in termini matriciali si scrive  $(R\mathbf{u})^T R\mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$ . Poiché questa identità deve valere per ogni coppia di vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ,  $R$  è una matrice di rotazione se e solo se  $R^T R = \mathbb{1}$ , equivalentemente,  $R^{-1} = R^T$ ; una matrice di questo tipo è detta *ortogonale*. Come si verifica facilmente, poichè il prodotto di matrici ortogonali è ancora una matrice ortogonale, l'insieme delle matrici ortogonali è un sotto-gruppo delle matrici  $3 \times 3$  invertibili, di solito denotato  $O(3)$ . Poiché  $R^T R = \mathbb{1}$ , il determinante delle matrici ortogonali è  $\pm 1$ . L'insieme delle matrici ortogonali con determinante  $+1$  corrisponde al gruppo  $SO(3)$  delle rotazioni proprie.

Le rotazioni proprie preservano dunque l'orientazione dello spazio e trasformano una base destrorsa in un'altra con la stessa orientazione. Esse possono essere ottenute per deformazione continua dell'identità (che ha chiaramente determinante uguale a uno) e quindi si può passare a valori infinitesimi dell'angolo di rotazione. Come si verifica facilmente, la variazione infinitesima  $\delta \mathbf{r}$  di un vettore  $\mathbf{r}$  prodotta da  $R(\hat{\mathbf{n}}, \theta)$ , per  $\theta$  infinitesimo, è  $(\delta \mathbf{r} / \delta t = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$

$$\delta \mathbf{r} = \theta \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r} \equiv -i\theta \mathbf{L}(\hat{\mathbf{n}}) \mathbf{r} \quad (4.2)$$

dove l'ultima uguaglianza definisce l'operatore lineare  $\mathbf{L}(\hat{\mathbf{n}}) \mathbf{r} = i\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}$ , detto *generatore infinitesimo* della rotazione attorno a  $\hat{\mathbf{n}}$ . L'unità immaginaria serve solo a rendere  $\mathbf{L}$  autoaggiunto (cosa che i fisici amano sempre avere); senza  $i$ , l'operatore sarebbe antisimmetrico (il che andrebbe bene lo stesso). È importante osservare che le rotazioni infinitesime, non solo sono additive nell'angolo rispetto allo stesso asse di rotazione, come lo sono le rotazioni finite, ma sono additive anche rispetto ad assi di rotazione differenti (ovviamente passanti per lo stesso centro), si ha infatti  $\theta_1 \hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{r} + \theta_2 \hat{\mathbf{n}}_2 \times \mathbf{r} = (\theta_1 \hat{\mathbf{n}}_1 + \theta_2 \hat{\mathbf{n}}_2) \times \mathbf{r}$ , per cui  $\mathbf{L}(\hat{\mathbf{n}}_1 + \hat{\mathbf{n}}_2) = \mathbf{L}(\hat{\mathbf{n}}_1) + \mathbf{L}(\hat{\mathbf{n}}_2)$ . La rotazione finita è ottenuta come prodotto infinito di rotazioni infinitesime:

$$R(\hat{\mathbf{n}}, \theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \mathbb{1} - i \frac{\theta}{N} \mathbf{L}(\hat{\mathbf{n}}) \right)^N = e^{-i\theta \mathbf{L}(\hat{\mathbf{n}})} \quad (4.3)$$

(vedere esempio sotto).

È utile definire  $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}(\mathbf{e}_1)$ ,  $\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}(\mathbf{e}_2)$  e  $\mathbf{L}_3 = \mathbf{L}(\mathbf{e}_3)$ , che sono, rispettivamente, i generatori delle rotazioni infinitesime lungo gli assi  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Calcoliamo<sup>1</sup>

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \mathbf{r} = (i\mathbf{e}_1 \times)(i\mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}) = -\mathbf{e}_1 \times (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}) = -x\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{r} = (i\mathbf{e}_2 \times)(i\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}) = -\mathbf{e}_2 \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}) = -y\mathbf{e}_1$$

<sup>1</sup>Ricordiamo la formula  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ .

da cui

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \mathbf{r} - \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{r} = -x \mathbf{e}_2 + y \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r} = i \mathbf{L}_3 \mathbf{r}$$

e poiché questa deve valere per ogni  $\mathbf{r}$ , ne ricaviamo l'interessante relazione algebrica

$$[\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2] = \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1 = i \mathbf{L}_3 \quad (4.4a)$$

Procedendo in maniera analoga si trova

$$[\mathbf{L}_3, \mathbf{L}_1] = i \mathbf{L}_2 \quad (4.4b)$$

$$[\mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3] = i \mathbf{L}_1 \quad (4.4c)$$

Le relazioni (4.4) definiscono l'*algebra di Lie*<sup>2</sup> generata da  $\mathbf{L}_1$ ,  $\mathbf{L}_2$  e  $\mathbf{L}_3$ , solito denotata  $\mathfrak{so}(3)$ : è l'algebra di Lie delle rotazioni infinitesime o, più semplicemente, l'*algebra del prodotto vettore*. Di quest'algebra si può dare un'ovvia rappresentazione matriciale. Per esempio, tralasciando termini di ordine superiore, per  $\theta$  infinitesimo si ha

$$R(\mathbf{e}_3, \theta) = \mathbf{1} + \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{1} - i\theta \mathbf{L}_3 \quad \text{da cui} \quad \mathbf{L}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

In maniera analoga si ottengono le matrici

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

**Box 4.1 — Utili rappresentazioni delle rotazioni.** Si hanno le seguenti rappresentazioni delle rotazioni

$$R(\hat{\mathbf{n}}, \theta) \mathbf{r} = \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}}^T \mathbf{r} + \cos \theta [\mathbf{1} - \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}}^T] \mathbf{r} + \sin \theta \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r} \quad (4.7)$$

e

$$R(\hat{\mathbf{n}}, \theta) = e^{-i\theta \mathbf{L}(\hat{\mathbf{n}})} = \mathbf{1} - (1 - \cos \theta) \mathbf{L}(\hat{\mathbf{n}})^2 - i \sin \theta \mathbf{L}(\hat{\mathbf{n}}) \quad (4.8)$$

### 4.1.2 Tensori nello spazio euclideo

Sia  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  una base ortonormale destrorsa. La decomposizione di un vettore  $\mathbf{V}$  rispetto a tale base è scritto usando la convenzione di somma sugli indici ripetuti:  $\mathbf{V} = V_i \mathbf{e}_i$ . I tensori sono una naturale generalizzazione nella nozione di vettore. Incominciamo con i tensori del secondo ordine.

<sup>2</sup>Un'algebra di Lie è una struttura costituita da uno spazio vettoriale  $V$  su un certo campo  $K$  (per esempio i numeri reali o i numeri complessi) e da un operatore binario  $[\cdot, \cdot]$  a valori in  $V$  che soddisfa le seguenti proprietà:

- è bilineare, cioè  $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$  e  $[z, \alpha x + \beta y] = \alpha[z, x] + \beta[z, y]$  per ogni  $x, y, z \in V$  e  $\alpha, \beta \in K$ ;
- soddisfa l'identità di Jacobi, cioè  $[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0$ ;
- è nilpotente, cioè  $[x, x] = 0$

**Tensori del secondo ordine**

Un tensore del secondo ordine  $T$  può essere definito come un operatore lineare che prende in ingresso un vettore  $\mathbf{V}$ , restituisce il vettore  $T(\mathbf{V})$  ed è lineare:

$$T(\alpha\mathbf{V}_1 + \beta\mathbf{V}_2) = \alpha T(\mathbf{V}_1) + \beta T(\mathbf{V}_2) \quad (4.9)$$

Equivalentemente,  $T$  può essere definito come un operatore che prende in ingresso due vettori  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  e restituisce un numero  $T(\mathbf{U}, \mathbf{V})$  ed è lineare in entrambi gli argomenti:

$$T(\alpha\mathbf{U}_1 + \beta\mathbf{U}_2, \mathbf{V}) = \alpha T(\mathbf{U}_1, \mathbf{V}) + \beta T(\mathbf{U}_2, \mathbf{V}) \quad (4.10)$$

$$T(\mathbf{U}, \alpha\mathbf{V}_1 + \beta\mathbf{V}_2) = \alpha T(\mathbf{U}, \mathbf{V}_1) + \beta T(\mathbf{U}, \mathbf{V}_2) \quad (4.11)$$

Dato una base ortonormale destrorsa  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , si definiscono le componenti covarianti del tensore  $T_{jk} \equiv T(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$ . L'azione del tensore su un vettore  $V_k \mathbf{e}_k$  è dunque, per linearità,  $T(\mathbf{e}_j, V_k \mathbf{e}_k) = T_{jk} V_k$ , ne segue che l'azione bilineare su due vettori  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  che produce un numero è  $T_{jk} U_j V_k$ . Un tensore è dunque rappresentabile come una matrice

$$T_{jk} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

Per rotazione  $R$  un tensore  $T = T_{jk}$  si trasforma come

$$T'_{jk} = R_{jm} T_{mn} R_{kn} \quad \text{in forma matriciale: } T' = R T R^T \quad (4.12)$$

Un tensore è detto simmetrico se

$$T(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = T(\mathbf{V}, \mathbf{U}) \quad \Leftrightarrow \quad T_{jk} = T_{kj} \quad (4.13)$$

L'altra classe importante di tensori del secondo ordine è costituita dai tensori antisimmetrici, cioè tali che

$$T(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = -T(\mathbf{V}, \mathbf{U}) \quad \Leftrightarrow \quad T_{jk} = -T_{kj} \quad (4.14)$$

**Box 4.2 — Decomposizione di un tensore del secondo ordine nelle sue parti irriducibili.**

Così come una funzione  $f(x)$  è unicamente decomposta nella somma della sua parte pari e di quella dispari, si può decomporre una matrice nella somma della sua parte simmetrica e di quella antisimmetrica

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) + \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}) \equiv [A_{(s)}]_{ij} + [A_{(a)}]_{ij}.$$

Allora una rotazione  $R$  agisce in maniera indipendente sulle due parti, trasformando  $A_{(s)}$  in una matrice che è ancora simmetrica e  $A_{(a)}$  in una che è ancora antisimmetrica. Infatti,

$$\begin{aligned} [RA_{(s)}R^{-1}]_{ik} &= [RA_{(s)}R^t]_{ik} = \sum_{n,m} R_{in} [A_{(s)}]_{nm} R_{kn} \\ &= \sum_{m,n} R_{kn} [A_{(s)}]_{mn} R_{in} = [RA_{(s)}R^t]_{ki} = [RA_{(s)}R^{-1}]_{ki} \end{aligned}$$

e, analogamente, per  $A_{(a)}$ .

La parte simmetrica, poi, ammette l'ulteriore decomposizione seguente:

$$A_{(s)} = \frac{1}{3} (\text{Tr } A) I + \left[ A - \frac{1}{3} (\text{Tr } A) I \right] \equiv \frac{1}{3} (\text{Tr } A) I + A_{(s_0)}.$$

Il primo termine è uno scalare che moltiplica l'identità, ed è quindi invariante per rotazioni. Il secondo termine  $A_{(s_0)} = A - \frac{1}{3} (\text{Tr } A) I$  è a traccia nulla ed essendo la traccia invariante per trasformazione di similitudine, e quindi per rotazioni è trasformato da una rotazione in una matrice simmetrica che è ancora a traccia nulla. Risulta così dimostrato che la decomposizione di una matrice

$$A = \frac{1}{3} (\text{Tr } A) I + A_{(s_0)} + A_{(a)} \quad (4.15)$$

è preservata da una rotazione, nel senso che una rotazione agisce in modo indipendente su ciascun addendo della somma. Simbolicamente, riscriviamo la (4.15) come

$$\mathbf{3} \times \mathbf{3} = \mathbf{1} + \mathbf{3} + \mathbf{5}, \quad (4.16)$$

intendendo con questo che i 9 gradi di libertà indipendenti della matrice, quando sono organizzati come nella (4.15), formano tre gruppetti su cui le rotazioni agiscono in modo indipendente: il primo è un singoletto, che è lasciato invariato dalle rotazioni, il **3** è la parte antisimmetrica della matrice che può essere messa in corrispondenza con un vettore (vedere sotto), il **5** è una matrice simmetrica a traccia nulla. Nel linguaggio della teoria dei gruppi, si tratta della decomposizione di una rappresentazione *riducibile*  $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$  del gruppo delle rotazioni nelle sue componenti *irriducibili* **1**, **3** e **5**.

### Tensori di ordine arbitrario

La nozione di tensore come “macchina” che prende in ingresso dei vettori, restituisce un numero ed è lineare in tutti gli argomenti può essere estesa da due vettori ad un numero  $N$  arbitrario di vettori in ingresso;  $N$  è l'ordine (o rango) del tensore. Per esempio un tensore del terzo ordine è una funzione a valori reali di 3 vettori,  $T = T(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W})$ , separatamente lineare in ciascun argomento;  $T_{ijk} \equiv T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$  sono le componenti del tensore rispetto ad una data base.

Un tensore di ordine arbitrario  $T = T(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \dots)$  è detto *completamente simmetrico* se  $T$  non cambia per uno scambio di una qualunque coppia dei suoi argomenti; nel linguaggio degli indici, questo significa che  $T_{ijk}$  non cambia se scambiamo due qualunque dei suoi indici. Un tensore di ordine arbitrario  $T = T(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \dots)$  è detto *completamente anti-simmetrico* se ogni volta che scambiamo due dei suoi argomenti (o due dei suoi indici), si ha un cambiamento di segno. Un tensore completamente anti-simmetrico di grado  $N$  è anche chiamato *N-forma*.

Descriviamo adesso tre importanti operazioni sui tensori che permettono di formare nuovi tensori a partire da tensori dati.

### Contrazione

Dato un tensore, per esempio il tensore  $T_{ijk}$  di ordine 3, si può passare ad un tensore di ordine 1 (vettore) uguagliando due indici e sommando sull'indice ripetuto:

$$T_{ijk} \rightarrow T_{ijj} \equiv U_i$$

Per quanto questa operazione sia stata descritta nella rappresentazione in componenti del tensore, ha significato invariante e permette di ottenere un tensore di ordine  $N - 2$  a partire da un tensore di ordine  $N$ .

**Prodotto tensore**

Dati due vettori  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , il loro prodotto tensoriale è il tensore del secondo ordine  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$  definito dalla sua azione su una coppia di vettori  $U, V$  come

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}(U, V) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{U})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}) \quad (4.17)$$

In particolare, se  $\mathbf{e}_j$  è una base inerziale, allora

$$\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k(U, V) = U_j V_k$$

Possiamo dunque riguardare  $\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$  come una base per i tensori del secondo ordine:

$$T = T_{jk} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k,$$

riottenendo così la definizione precedentemente data di tensore. In maniera analoga si definisce una base  $\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m$  per i tensori del terzo ordine e così via. In questo modo risulta definito il prodotto tensore per due tensori arbitrari, per esempio,

$$T = F \otimes G = F_{jk} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k G_{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n = \underbrace{F_{jk} G_{mn}}_{T_{jkmn}} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n$$

In generale, se  $F$  è di ordine  $N$  e  $G$  è di ordine  $M$ ,  $T = F \otimes G$  è di ordine  $N + M$ .

**Prodotto esterno**

Il prodotto esterno di due vettori  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  è definito antisimmettizzando il loro prodotto tensore:

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{A} \quad (4.18)$$

Dunque, il prodotto esterno ha le seguenti importanti proprietà:

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = -\mathbf{B} \wedge \mathbf{A} \quad (4.19)$$

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} = 0 \quad (4.20)$$

In particolare, se  $\mathbf{e}_j$  è una base per i vettori, allora  $\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j$  è una base per i tensori totalmente anti-simmetrici del secondo ordine. Questa base contiene 3 elementi. Se adesso si passa ai tensori totalmente antisimmetrici del terzo ordine, essi sono tutti multipli di  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ . Non esistono tensori totalmente antisimmetrici di ordine superiore a 3 (vedere il Box sotto).

**Box 4.3 — Dimensione dello spazio dei tensori antisimmetrici.** Sia  $\mathbb{V}$  uno spazio vettoriale di dimensione  $D$ . Si chiede di determinare la dimensione dello spazio vettoriale  $\mathcal{F}^N(\mathbb{V})$  dei tensori anti-simmetrici su  $\mathbb{V}$  di ordine  $N$ . Siano  $e_1, e_2, \dots, e_D$  i vettori di una base di  $\mathbb{V}$ . Allora nella base di  $\mathcal{F}^N(\mathbb{V})$  un vettore  $e_\alpha$  può comparire una volta sola. Possiamo quindi rappresentare un vettore della base di  $\mathcal{F}^N(\mathbb{V})$  come una successione di  $N$  simboli “1” e  $D - N$  simboli “0” (chiaramente deve essere  $N \leq D$ ). Per esempio, per  $N = 4$  e  $D = 5$ ,

$$e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \wedge e_5 \quad \leftrightarrow \quad |1, 1, 0, 1, 1\rangle$$

Allora il problema di calcolare la dimensione dello spazio è equivalente al problema combinatorio del numero di modi in cui  $D$  scatole possono essere divise in due gruppi, uno formato da  $N$  scatole piene e l'altro formato da  $D - N$  scatole vuote. Questo

numero è

$$\binom{D}{N} = \frac{D!}{N!(D-N)!}$$

che è quindi la dimensione di  $\mathcal{F}^N(\mathbb{V})$ . Per  $D = 3$ ,

N	dim $\mathcal{F}^N(\mathbb{V})$
0	1
1	3
2	3
3	1

Per  $D = 4$ ,

N	dim $\mathcal{F}^N(\mathbb{V})$
0	1
1	4
2	6
3	4
4	1

**Box 4.4 — Dimensione dello spazio dei tensori simmetrici.** Sia  $\mathbb{V}$  uno spazio vettoriale di dimensione  $D$ . Si chiede di determinare la dimensione dello spazio vettoriale  $\mathcal{B}^N(\mathbb{V})$  dei tensori anti-simmetrici su  $\mathbb{V}$  di ordine  $N$ . Il calcolo della dimensione di questo spazio è equivalente al calcolo delle soluzioni distinte dell'equazione

$$n_1 + n_2 + \dots + n_D = N$$

sotto la condizione che  $0 \leq n_\alpha \leq N$ ,  $\alpha = 1, \dots, D$ . Questo è equivalente al problema combinatorio del numero di modi distinti in cui si possono riempire  $D$  scatole con  $N$  palline identiche. Rappresentiamo le palline con dei pallini e rappresentiamo le scatole con  $D$  spazi tra  $D + 1$  barre; ad esempio, usiamo il simbolo

$$|\bullet\bullet\bullet|\bullet|||\bullet\bullet\bullet\bullet|$$

per rappresentare una distribuzione di  $N = 8$  palline in  $D = 6$  scatole con numeri di occupazione 3, 1, 0, 0, 0, 4. Un simbolo di questo tipo incomincia e finisce con una barra, ma le rimanenti  $D - 1$  barre e  $N$  pallini possono apparire in un ordine arbitrario. Così è chiaro che il numero di distribuzioni distinte è uguale al modo di scegliere  $N$  pallini in un totale di  $N + D - 1$  posti, vale a dire

$$\binom{N+D-1}{N} = \binom{N+D-1}{D-1}$$

(è la stessa cosa scegliere  $D - 1$  barre in un totale di  $N + D - 1$  posti), che è quindi la dimensione di  $\mathcal{B}^N(\mathbb{V})$ . (Si osservi che questa è anche il numero di derivate parziali di ordine  $N$  di una funzione di  $D$  variabili reali, essendo i problemi combinatori del tutto equivalenti).

**Significato geometrico del prodotto esterno**

La base ortonormale destrorsa delle 1-forme (=vettori) è data da  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  e  $\mathbf{e}_z$ . Si passa alla base delle 2-forme con prodotto esterno dei vettori di base con se stessi. Poiché  $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i = 0$ , ci sono solo tre vettori possibili

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_z - \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x\end{aligned}$$

Quindi la dimensione dello spazio delle 2-forme è 3 (in accordo con l'esempio sopra).

Il significato geometrico dei tre vettori  $\mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_x$  e  $\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y$  è di rappresentare quadrati unitari nei tre piani cartesiani; equivalentemente, possiamo riguardare questi vettori come rappresentazioni dei piani stessi (nello stesso senso in cui  $\mathbf{e}_x$  rappresenta l'asse delle  $x$ ). Consideriamo adesso il significato geometrico della 2-forma ottenuta come prodotto esterno di due vettori  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) \wedge (B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_x + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y\end{aligned}$$

Questa 2-forma rappresenta il parallelogramma di lati  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  e le sue componenti sono le aree delle proiezioni del parallelogramma sui tre piani  $\mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_x$  e  $\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y$ . Vale inoltre il *teorema di Pitagora per le aree*: la norma di  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ ,

$$\|\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}\|^2 = (A_y B_z - A_z B_y)^2 + (A_z B_x - A_x B_z)^2 + (A_x B_y - A_y B_x)^2$$

è proprio l'area del parallelogramma  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ . Si ha infatti

$$\begin{aligned}\text{Area} &= A^2 B^2 \sin^2 \theta = A^2 B^2 (1 - \cos^2 \theta) = A^2 B^2 \left( 1 - \frac{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2}{\|\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{B}\|^2} \right) = \|\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{B}\|^2 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^2 \\ &= (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)^2 \\ &= (A_z B_y - A_y B_z)^2 + (A_z B_x - A_x B_z)^2 + (A_y B_x - A_x B_y)^2 = \|\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}\|^2\end{aligned}$$

Moltiplicando i vettori della base delle 2-forme per i vettori  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  e  $\mathbf{e}_z$  si passa alle 3-forme. Ma come si vede subito c'è una sola possibilità:

$$\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \quad (4.21)$$

dove  $\epsilon_{ijk}$  è il simbolo di Levi-Civita

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } (i, j, k) \text{ permutazione pari di } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \text{ permutazione dispari di } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.22)$$

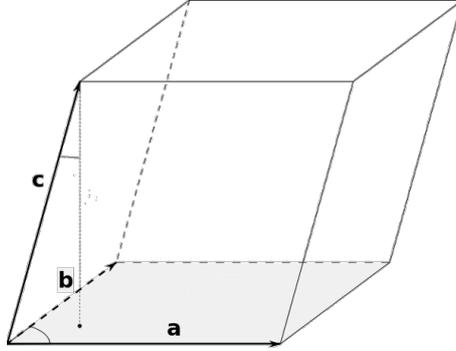
Le altre possibilità ottenute da  $\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z$  per permutazioni di  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  e  $\mathbf{e}_z$  o coincidono con  $\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z$  (permutazioni pari) o differiscono per un segno (permutazioni dispari). Lo spazio delle 3-forme ha dunque dimensione 1.

La 3-forma  $\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z$  rappresenta il cubo unitario di spigoli  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  e  $\mathbf{e}_z$ . Se  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  sono tre vettori, la 3-forma  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}$  rappresenta il parallelepipedo di lati  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ . Sviluppando rispetto alla base,

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C} = A_i B_j C_k \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k = A_i B_j C_k \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z$$

Ma  $A_i B_j C_k \in_{ijk} = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \det(\mathbf{A} \ \mathbf{B} \ \mathbf{C})$ , dove  $(\mathbf{A} \ \mathbf{B} \ \mathbf{C})$  è la matrice i cui vettori colonna sono  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ , è il volume del parallelepipedo di spigoli  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ . Allora

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C} &= (\text{Volume del parallelepipedo di spigoli } \mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ e } \mathbf{C}) \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z \\ &= \det(\mathbf{A} \ \mathbf{B} \ \mathbf{C}) \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z \end{aligned}$$



**Tensore di Levi-Civita** Il *tensore di Levi-Civita* o *forma di volume*  $\text{Vol}$  è definito come il tensore del terzo ordine che prende in ingresso 3 vettori e restituisce il volume del parallelepipedo da essi definito:

$$\text{Vol}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \det(\mathbf{A} \ \mathbf{B} \ \mathbf{C}) \quad (4.23)$$

Per come è definito,  $\text{Vol}$  è un tensore completamente anti-simmetrico, cioè una 3-forma e quindi proporzionale a  $\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z$ ; in effetti, coincide con essa:

$$\text{Vol}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \det(\mathbf{e}_i \ \mathbf{e}_j \ \mathbf{e}_k) A_i B_j C_k = \in_{ijk} A_i B_j C_k$$

Quindi il simbolo di Levi-Civita fornisce le componenti di  $\text{Vol}$  rispetto alla base tensoriale  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$ , ossia

$$\text{Vol} = \in_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z, \quad (4.24)$$

per la (4.21).

**Box 4.5 — Invarianza per rotazioni di  $\text{Vol}$ .** La formula  $\text{Vol} = \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z$  suggerisce che  $\text{Vol}$  dipenda dalla scelta della base ortonormale, ma in realtà non è così:  $\text{Vol}$  è invariante per trasformazione ad un'altra base ortonormale, vale a dire per rotazioni. Sia  $R$  una rotazione che fa passare dalla base  $\bar{\mathbf{e}}_j$  alla base  $\mathbf{e}_i$ , cioè  $\mathbf{e}_i = R_{ij} \bar{\mathbf{e}}_j$ . Allora ( $x \equiv 1, y \equiv 2, z \equiv 3$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 &= R_{1j} \bar{\mathbf{e}}_j \wedge R_{2j} \bar{\mathbf{e}}_j \wedge R_{3j} \bar{\mathbf{e}}_j = \det(R_{1j} \ R_{2j} \ R_{3j}) \bar{\mathbf{e}}_1 \wedge \bar{\mathbf{e}}_2 \wedge \bar{\mathbf{e}}_3 \\ &= \det(R) \bar{\mathbf{e}}_1 \wedge \bar{\mathbf{e}}_2 \wedge \bar{\mathbf{e}}_3 = \bar{\mathbf{e}}_1 \wedge \bar{\mathbf{e}}_2 \wedge \bar{\mathbf{e}}_3, \end{aligned}$$

essendo il determinante di una rotazione uguale a 1.

**Box 4.6 — Formule utili per prodotti di  $\in^{ijk}$ .** Nei calcoli è utile disporre di una formula esplicita per  $\in_{ijk} \in_{lmn}$ . Una tale formula si ottiene immediatamente dalla (5.65)

ricordando che  $\det(MN) = \det(M)\det(N)$  e  $\det M = \det M^T$ :

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \det(\mathbf{e}_i \ \mathbf{e}_j \ \mathbf{e}_k) \det(\mathbf{e}_l \ \mathbf{e}_m \ \mathbf{e}_n) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i^T \\ \mathbf{e}_j^T \\ \mathbf{e}_k^T \end{pmatrix} (\mathbf{e}_l \ \mathbf{e}_m \ \mathbf{e}_n)$$

da cui

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \quad (4.25)$$

ossia

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \delta_{il}(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) - \delta_{im}(\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kl}) + \delta_{in}(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}). \quad (4.26)$$

Da questa formula seguono, per contrazione degli indici, tre utili identità:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \quad (4.27)$$

$$\epsilon_{jmn}\epsilon_{imn} = 2\delta_{ji} \quad (4.28)$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6 \quad (4.29)$$

L'ultima uguaglianza segue immediatamente dall'osservazione che il numero delle componenti non nulle di  $\text{Vol}$  è uguale al numero totale di permutazioni di  $1, 2, 3$  che è  $3! = 6$ .

**Dualità tra forme** La forma di volume  $\text{Vol}$  permette di stabilire una dualità, detta dualità di Hodge, tra 1-forme e 2-forme: data una 1-forma  $\mathbf{A}$  (un vettore) si definisce la 2-forma  ${}^*\mathbf{B}$  di componenti

$$({}^*\mathbf{B})_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k \quad (4.30)$$

Viceversa, se  $B$  è una 2-forma, ad essa è associato il vettore  ${}^*B$ :

$$({}^*B)_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B_{jk} \quad (4.31)$$

Verifichiamo che  ${}^{**}\mathbf{B} = \mathbf{B}$ . Usando la (4.28), si ottiene:

$$\frac{1}{2} \epsilon_{mij} \epsilon_{ijk} B^k = \frac{1}{2} \epsilon_{mij} \epsilon_{kij} B^k = \frac{1}{2} 2\delta_{mk} B^k = B_m$$

**Box 4.7 — Matrice associata a un vettore e prodotto vettore.** La matrice che rappresenta  $B_{ij} = ({}^*\mathbf{B})_{ij}$  è

$$B = \epsilon_{ijk} B_k = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Inoltre, l'azione lineare di  $B$  su un generico vettore  $\mathbf{V}$  è equivalente a quella del prodotto

vettore:

$$B(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_z V_y - B_y V_z \\ -B_z V_x + B_x V_z \\ B_y V_x - B_x V_y \end{pmatrix} = \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \epsilon_{ijk} V_j B_k$$

Inoltre, la trasformazione lineare del vettore  $\mathbf{B} \rightarrow M\mathbf{B}$  è in corrispondenza con la trasformazione

$$B \rightarrow MBM^T \quad (4.33)$$

del tensore corrispondente.

### 4.1.3 Simmetrie discrete: parità e inversione temporale

**Parità** L'inversione spaziale o parità  $P$  è la trasformazione che cambia l'orientazione dello spazio. In quanto tale,  $P$  trasforma una base destrorsa in una sinistrorsa e viceversa. Rappresentando un vettore  $\mathbf{V}$  rispetto ad una base destrorsa,  $\mathbf{V} = V_k \mathbf{e}_k$ , l'azione di  $P$  sulle componenti del vettore è dato dalla rotazione

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

di determinante  $-1$ . Dunque  $\mathbf{V} \rightarrow P\mathbf{V} = -\mathbf{V}$  e si dice che il vettore è dispari per parità. la combinazione di vettori può avere proprietà differenti per parità: per esempio, il prodotto vettore di due vettori  $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$  per parità diventa  $(-\mathbf{U}) \times (-\mathbf{V}) = \mathbf{U} \times \mathbf{V}$  ed è quindi pari. I vettori che sono pari per parità sono detti *pseudo-vettori*. Anche il prodotto scalare di due vettori è pari, che è il comportamento normale di uno scalare per parità, mentre il prodotto triplo  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$  (il volume) cambia segno per parità ed è il prototipo di *pseudo-scalare*.

Queste considerazioni si estendono ai campi: per parità l'operatore differenziale  $\nabla \rightarrow -\nabla$ , quindi se  $\mathbf{E}$  è un vettore,  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  è pari (e quindi uno scalare) e così è per  $\nabla \times \mathbf{E}$  (che è dunque uno pseudovettore), mentre se  $\mathbf{B}$  è uno pseudovettore,  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  è dispari (e quindi uno pseudoscalare) e  $\nabla \times \mathbf{B}$  è dispari (ed è dunque un vettore). Queste sono le distinzioni usuali a livello di Fisica 1. Si invita lo studente a riformularle nel linguaggio delle forme, alla luce del tensore di Levi-Civita e della dualità che abbiamo discusso sopra.

Sia come sia, il problema è se le leggi fondamentali della fisica sono in grado di determinare quale è l'orientazione del nostro universo. Se sono invarianti per parità, questo è impossibile. Per esempio, le leggi classiche del moto  $m\mathbf{a} = -\nabla V$  sono chiaramente invarianti per parità.

**Problema 4.1** Dimostrare che le equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (1.47a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.47b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.47c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \quad (1.47d)$$

sono invarianti per parità. Preliminarmente, si utilizzi la legge di Lorentz  $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + (q/c)\mathbf{V} \times \mathbf{B}$  per mostrare che

$$P\mathbf{E} = -\mathbf{E} \quad \text{e} \quad P\mathbf{B} = \mathbf{B} \quad (4.35)$$

**Problema 4.2** L'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi \quad (1.70)$$

è invariante per parità?

**Problema 4.3** Mostrare che se la lagrangiana  $L$  o la densità di Lagrangiana  $\mathcal{L}$  sono scalari, le equazioni del moto sono automaticamente invarianti per parità.

**Problema 4.4** Fornire un esempio (anche artificiale) di teoria non invariante per parità.

**Inversione temporale** L'inversione temporale  $T$  è la trasformazione che cambia il verso del tempo. In quanto tale,  $T$  cambia  $t$  in  $-t$ . Le proprietà di trasformazione dei vettori e dei tensori sono quindi dettate non dalla loro natura geometrica, ma dalla loro natura cinematica o dinamica. Per esempio, la posizione  $\mathbf{X}$  di un punto materiale è pari per inversione temporale:  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ , ma la velocità è dispari:  $\mathbf{X} = d\mathbf{V}/dt \rightarrow d\mathbf{X}/(-dt) = -\mathbf{V}$ , mentre l'accelerazione  $\mathbf{a} = d\mathbf{V}/dt$  è pari. Quindi, se  $\mathbf{F}$  dipende solo da  $\mathbf{x}$ , le equazioni di Newton  $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$  sono invarianti per inversione temporale.

**Box 4.8 — Invarianza delle equazioni di Maxwell per inversione temporale.** Come per la parità, il punto di partenza è la legge di Lorentz. Applicando l'inversione temporale a ambo i membri della forza di Lorentz (assumendo l'invarianza della carica), si ottiene

$$T\mathbf{F} = qT\mathbf{E} + \frac{q}{c}T\mathbf{V} \times T\mathbf{B}.$$

Ma  $T\mathbf{F} = \mathbf{F}$  (essendo  $\mathbf{F}$  uguale a  $m\mathbf{a}$ , che è pari per inversione temporale) e  $T\mathbf{V} = -\mathbf{V}$ . Dunque, per confronto,

$$T\mathbf{E} = \mathbf{E} \quad \text{e} \quad T\mathbf{B} = -\mathbf{B} \quad (4.36)$$

Consideriamo adesso il comportamento di cariche e correnti. Per una carica puntiforme la densità di carica si esprime mediante la delta di Dirac:

$$\rho = e\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)) \quad \text{e la densità di corrente è} \quad \mathbf{J} = \rho\mathbf{V} = e\mathbf{V}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)) \quad (4.37)$$

È chiaro che è sufficiente considerare una carica puntiforme perché tutte le distribuzioni di cariche e correnti si ottengono sommando sulle distribuzioni microscopiche di cariche puntiformi. Allora

$$T\rho = \rho \quad \text{e} \quad T\mathbf{J} = -\mathbf{J}. \quad (4.38)$$

Infine,

$$T\nabla = \nabla \quad \text{e} \quad T\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}. \quad (4.39)$$

Sostituendo (4.36), (4.38) e (4.39), si vede che le equazioni di Maxwell sono invarianti per inversione temporale.

**Box 4.9 — Invarianza dell'equazione di Schrödinger per inversione temporale.** Adesso l'equivalente della forza di Lorentz è la relazione di de Broglie per un'onda piana:

$$m\mathbf{V} = \hbar\mathbf{k}, \quad \psi_{\mathbf{k}} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t} \quad (4.40)$$

Poiché  $\mathbb{T}\mathbf{V} = -\mathbf{V}$  e  $\mathbb{T}t = -t$ , ne segue che

$$\mathbb{T}\psi_{\mathbf{k}} = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \omega t} = \overline{\psi_{\mathbf{k}}}$$

dove la barra denota la coniugazione complessa. Ma qualunque onda è sovrapposizione di onde piane, per cui

$$\mathbb{T}\psi = \overline{\psi} = \mathcal{C}\psi \quad (4.41)$$

dove  $\mathcal{C}$  è l'operazione di coniugazione complessa, che è l'esempio più semplice di trasformazione anti-unitaria (Ricordiamo che una trasformazione  $A$  è detta anti-lineare se  $A(\alpha u + \beta v) = \bar{\alpha}u + \bar{\beta}v$  ed è detta anti-unitaria se è antilineare e conserva la norma.) Applichiamo  $\mathbb{T} = \mathcal{C}$  ad ambo i membri dell'equazione di Schrödinger, tenendo conto della (4.39) e della realtà di  $V$ :

$$-i\hbar \left( -\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial t} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \overline{\psi} + V \overline{\psi}.$$

Quindi se  $\psi$  è soluzione dell'equazione di Schrödinger, anche  $\mathbb{T}\psi = \overline{\psi}$  lo è. Risulta così dimostrata l'invarianza dell'equazione di Schrödinger per inversione temporale.

## 4.2 Rotazioni e spinori

Nell'equazioni di Pauli per una particella quantistica di spin 1/2 compare un termine della forma  $a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3$  (il termine di accoppiamento con il campo magnetico), dove

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sono le matrici di Pauli e  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  è un vettore. Questo termine si scrive di solito compattamente come  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}$ , anche se una notazione preferibile è  $\sigma(\mathbf{a})$ :

$$\sigma(\mathbf{a}) = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 - ia_2 & -a_3 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

Questa notazione mette in evidenza la corrispondenza tra vettori e matrici hermitiane  $2 \times 2$  a traccia nulla. Questa corrispondenza è *indipendente dalla meccanica quantistica* e fu in effetti utilizzata da Cayley e Klein nella seconda metà dell'ottocento per semplificare la descrizione delle rotazioni passando ad un formalismo complesso. Secondo la (4.42), gli elementi  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$  di una base ortonormale nello spazio tri-dimensionale sono messi in corrispondenza con le tre matrici di Pauli e questa corrispondenza è estesa a tutti i vettori per linearità. La corrispondenza è *biunivoca*: se  $A$  è una matrice hermitiana  $2 \times 2$  a traccia

nulla, ad essa è associato il vettore  $\mathbf{a}$  con componenti

$$a_i = \frac{1}{2} \text{Tr}(A\sigma_i). \quad (4.43)$$

La verifica di questo è lasciata come esercizio. Un'importante proprietà di questa corrispondenza è che

$$\sigma(\mathbf{a})^2 = \mathbf{a}^2 \mathbf{1} \quad (4.44)$$

come si vede immediatamente per calcolo diretto.

#### 4.2.1 Corrispondenza tra rotazioni e SU(2)

Denotiamo adesso con  $\psi$  un vettore complesso bidimensionale di componenti  $\psi_1$  e  $\psi_2$ , inteso come vettore colonna (“ket”). Una qualunque matrice complessa  $M$  agisce su  $\psi$  nella maniera usuale di prodotto righe per colonne,  $\psi \rightarrow M\psi$ . La sua azione duale sui “bra” (vettori riga)  $\psi^* = (\bar{\psi}_1 \ \bar{\psi}_2)$  è  $\psi^* \rightarrow \psi^* M^*$ . Quindi il proiettore

$$\psi\psi^* = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 & \bar{\psi}_2 \end{pmatrix}$$

si trasforma come  $\psi\psi^* \rightarrow M\psi\psi^*M^*$ . Poiché ogni matrice hermitiana è somma di proiettori, una generica matrice hermitiana  $A$  si trasforma come  $A \rightarrow MAM^*$  e se  $A = \sigma(\mathbf{a})$ , per un qualche vettore tri-dimensionale  $\mathbf{a}$ , avremo  $\sigma(\mathbf{a}) \rightarrow M\sigma(\mathbf{a})M^*$ .

Consideriamo le trasformazioni  $\sigma(\mathbf{a}) \rightarrow M\sigma(\mathbf{a})M^*$  che corrispondono ad una rotazione nello spazio 3-dimensionale. Quest'ultime sono caratterizzate dalla condizione di lasciare invariata la norma del vettore. Poiché  $\sigma(\mathbf{a})^2 = \mathbf{a}^2 \mathbf{1}$ , ad una rotazione  $R$  dovrà corrispondere una trasformazione  $U$  tale che  $U\sigma(\mathbf{a})^2U^* = \sigma(\mathbf{a})^2$ . Ma  $U\sigma(\mathbf{a})^2U^* = \mathbf{a}^2UU^*$ . Quindi  $UU^* = \mathbf{1}$ , vale a dire  $U$  deve essere unitaria, cioè  $U^{-1} = U^*$ . Osservando che

$$\det \sigma(\mathbf{a}) \equiv \begin{vmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 - ia_2 & -a_3 \end{vmatrix} = -a_3^2 - a_1^2 - a_2^2 = -\mathbf{a}^2$$

si conclude che il determinante di  $U$  può valere  $+1$  o  $-1$ .

La trasformazione unitaria  $U$  corrispondente ad una rotazione propria  $R$  deve essere anch'essa una deformazione continua dell'identità e quindi il suo determinante deve essere  $+1$ . L'insieme delle matrici unitarie  $2 \times 2$  con determinante unitario forma il gruppo SU(2); queste matrici sono del tipo

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono numeri complessi tali che  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Questo gruppo è in corrispondenza con il gruppo SO(3), nel senso che se  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = R\mathbf{r}$ , con  $R \in \text{SO}(3)$ , allora

$$\sigma(\mathbf{r}) \rightarrow \sigma(\mathbf{r}') = U\sigma(\mathbf{r})U^*, \quad (4.46)$$

con  $U \in \text{SU}(2)$ .

La formula per la matrice unitaria che rappresenta la rotazione di un angolo  $\theta$  attorno all'asse di rotazione individuato dal versore  $\hat{\mathbf{n}}$  è

$$U(\hat{\mathbf{n}}, \theta) = \exp \left[ -i \frac{\theta}{2} \sigma(\hat{\mathbf{n}}) \right] = \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \mathbf{1} - i \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \sigma(\hat{\mathbf{n}}) \quad (4.47)$$

Da questa formula segue che la corrispondenza tra  $SU(2)$  e  $SO(3)$  è due a uno:  $U(\hat{\mathbf{n}}, \theta)$  e  $U(\hat{\mathbf{n}}, \theta + 2\pi) = -U(\hat{\mathbf{n}}, \theta)$  corrispondono alla stessa rotazione  $R(\mathbf{a}, \theta)$ . In altre parole,  $SU(2)$  (che è semplicemente connesso) è un doppio ricoprimento di  $SO(3)$  (che è duplicemente connesso).

**Box 4.10 — Algebra di Pauli.** Per calcolo diretto, a partire dalla definizione in termini delle matrici di Pauli, si dimostra che

$$\sigma(\mathbf{a})\sigma(\mathbf{b}) + \sigma(\mathbf{b})\sigma(\mathbf{a}) = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\mathbf{1} \quad (4.48)$$

per qualunque coppia di vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , da cui segue la (4.44) per  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ . L'algebra di Pauli è l'algebra generata da  $\mathbf{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  e la sua struttura algebrica è definita completamente dalla (4.48) (indipendentemente dalla sua forma esplicita in termini di matrici di Pauli). Essa contiene combinazioni lineari dei seguenti elementi

$\mathbf{1}$	1 elemento
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	3 elementi
$\sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_1, \sigma_1\sigma_2$	3 elementi
$\sigma_1\sigma_2\sigma_3$	1 elemento

Non ci possono essere infatti polinomi di quarto grado (o di grado maggiore) indipendenti; ad esempio, usando la (4.48),  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_3 = \sigma_2\sigma_3$ . Quindi, come spazio vettoriale reale, l'algebra di Pauli ha dimensione 8.

Un'altra relazione importante (che si può dimostrare a partire dalla definizione in termini delle matrici di Pauli) è

$$\sigma(\mathbf{a})\sigma(\mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{1} + i\sigma(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (4.49)$$

che, combinata con la (4.48) fornisce

$$\sigma(\mathbf{a})\sigma(\mathbf{b}) - \sigma(\mathbf{b})\sigma(\mathbf{a}) = 2i\sigma(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (4.50)$$

per qualunque coppia di vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . Se si definisce il prodotto esterno

$$\sigma(\mathbf{a}) \wedge \sigma(\mathbf{b}) \equiv \frac{1}{2} [\sigma(\mathbf{a})\sigma(\mathbf{b}) - \sigma(\mathbf{b})\sigma(\mathbf{a})]$$

la (4.49) può essere riscritta come

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{a})\sigma(\mathbf{b}) &= \frac{1}{2} [\sigma(\mathbf{a})\sigma(\mathbf{b}) + \sigma(\mathbf{b})\sigma(\mathbf{a})] + \frac{1}{2} [\sigma(\mathbf{a})\sigma(\mathbf{b}) - \sigma(\mathbf{b})\sigma(\mathbf{a})] \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{1} + \sigma(\mathbf{a}) \wedge \sigma(\mathbf{b}) \end{aligned}$$

**Box 4.11 — Dalle rotazioni infinitesime alle rotazioni finite.** Ricaviamo la formula (4.47). Prima otteniamo la sua versione infinitesima. Se  $\mathbf{r}'$  nella (4.46) è una rotazione infinitesima di  $\mathbf{r}$ , e quindi uguale a  $\theta\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}$  dove  $\theta$  è infinitesimo, la  $U$  a secondo membro della (4.46) è una deformazione infinitesima dell'identità e quindi della forma  $\mathbf{1} + E$ , dove  $E$  è una matrice infinitesima da determinarsi: tralasciando termini di ordine superiore, la

(4.46) diventa

$$\sigma(\mathbf{r}) + \sigma(\theta \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{1} + iE)\sigma(\mathbf{r})(\mathbf{1} - iE) = \sigma(\mathbf{r}) - i\sigma(\mathbf{r})E + iE\sigma(\mathbf{r})$$

da cui, utilizzando la (4.50),

$$\sigma(\theta \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}) = -\frac{i}{2}\sigma(\theta \hat{\mathbf{n}})\sigma(\mathbf{r}) + \frac{i}{2}\sigma(\mathbf{r})\sigma(\theta \hat{\mathbf{n}}) = -i\sigma(\mathbf{r})E + iE\sigma(\mathbf{r}) \Rightarrow E = -\frac{\theta}{2}\sigma(\hat{\mathbf{n}})$$

Allora  $U$  è ottenuta come prodotto infinito di rotazioni infinitesime  $\mathbf{1} - \frac{\theta}{2}\sigma(\hat{\mathbf{n}})$ :

$$U(\hat{\mathbf{n}}, \theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \mathbf{1} - i\frac{\theta}{2N}\sigma(\hat{\mathbf{n}}) \right)^N = e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma(\hat{\mathbf{n}})} \quad (4.51)$$

Poniamo per comodità  $\alpha = -\theta/2$  e sviluppiamo in serie l'esponenziale

$$\begin{aligned} e^{i\alpha\sigma(\hat{\mathbf{n}})} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n [\alpha\sigma(\hat{\mathbf{n}})]^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n} \sigma(\hat{\mathbf{n}})^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1} \sigma(\hat{\mathbf{n}})^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \mathbf{1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{(2n)!} + i\sigma(\hat{\mathbf{n}}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos(\alpha) \mathbf{1} + i \sin(\alpha) \sigma(\hat{\mathbf{n}}) \end{aligned}$$

da cui, ripristinando  $\alpha = -\theta/2$ , segue la (4.47).

## 4.2.2 Spinori e loro significato geometrico

Il vettore complesso  $\psi$  è chiamato *spinore*, e non semplicemente vettore complesso bi-dimensionale, per sottolineare che  $\psi$  codifica proprietà geometriche dello spazio fisico, come intendiamo chiarire. In quanto tale, lo spinore non è un oggetto quantistico, ma è un oggetto geometrico classico.

Il modo canonico di associare un vettore ad uno spinore consiste nel formare il bilineare

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \psi^* \boldsymbol{\sigma} \psi = \psi^* \sigma_1 \psi \mathbf{e}_1 + \psi^* \sigma_2 \psi \mathbf{e}_2 + \psi^* \sigma_3 \psi \mathbf{e}_3 \\ &= (\bar{\psi}_1 \psi_2 + \bar{\psi}_2 \psi_1) \mathbf{e}_1 - i(\bar{\psi}_1 \psi_2 - \bar{\psi}_2 \psi_1) \mathbf{e}_2 + (\bar{\psi}_1 \psi_1 - \bar{\psi}_2 \psi_2) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (4.52)$$

Per quanto possa apparire perverso, possiamo anche passare alla rappresentazione di  $\mathbf{a}$  come matrice:

$$\sigma(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 & 2\bar{\psi}_2 \psi_1 \\ 2\bar{\psi}_1 \psi_2 & -|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

### Spinore come asta con bandiera

Consideriamo la seguente parametrizzazione dello spinore

$$\psi = \sqrt{a} e^{-i\chi/2} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) e^{-i\phi/2} \\ \sin(\theta/2) e^{i\phi/2} \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

dove  $a > 0, \theta, \phi, \chi$  sono parametri reali (due numeri complessi = 4 numeri reali); in particolare,

$$a = \psi^* \psi = |\psi|^2 \quad (4.55)$$

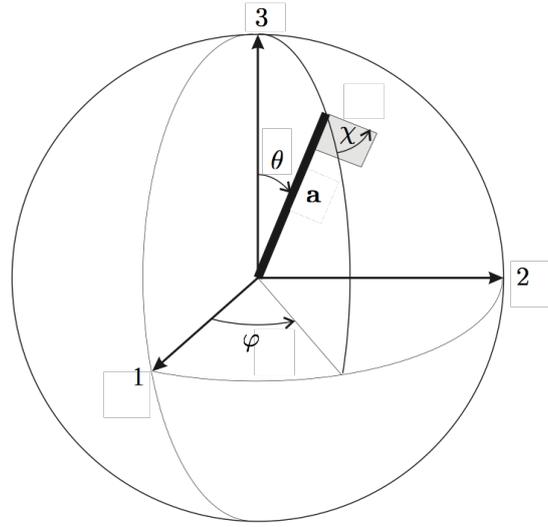


Figura 4.1: Lo spinore ha una direzione nello spazio (l'asta), un'orientazione intorno a quest'asse (bandiera) e un segno complessivo (non mostrato). Un insieme opportuno di parametri per descrivere lo spinore è (a meno di un segno)  $a, \theta, \phi, \chi$  come mostrato. I primi tre fissano la lunghezza e la direzione dell'asta usando le coordinate sferiche standard, l'ultimo dà l'orientazione della bandiera.

è il quadrato della norma dello spinore. Allora il vettore  $\mathbf{a}$  associato allo spinore  $\psi$  secondo la (4.52) ha componenti

$$\begin{aligned} a_1 &= \bar{\psi}_1 \psi_2 + \bar{\psi}_2 \psi_1 = a \cos(\theta/2) e^{i\phi/2} \sin(\theta/2) e^{i\phi/2} + a \sin(\theta/2) e^{-i\phi/2} \cos(\theta/2) e^{-i\phi/2} \\ &= a 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} = a \sin \theta \cos \varphi \end{aligned}$$

Analogamente, si trova

$$\begin{aligned} a_2 &= -i (\bar{\psi}_1 \psi_2 - \bar{\psi}_2 \psi_1) = a \sin \theta \sin \varphi \\ a_3 &= \bar{\psi}_1 \psi_1 - \bar{\psi}_2 \psi_2 = a \cos \theta \end{aligned}$$

Quindi la parametrizzazione (4.54) dello spinore porta alla rappresentazione del vettore associato in coordinate sferiche. Il fatto che la norma di  $\psi$  sia la radice quadrata della norma di  $\mathbf{a}$  e che gli angoli che parametrizzano  $\psi$  siano “dimezzati” giustifica l'idea che lo spinore sia una sorta di radice quadrata di un vettore. Riassumendo,

$$\text{da uno spinore } \psi \text{ si ottiene il vettore } \mathbf{a} = \psi^* \boldsymbol{\sigma} \psi \quad (4.56)$$

Sarebbe però sbagliato concludere che uno spinore non è altro che un modo per rappresentare un vettore. In effetti, lo spinore contiene più informazione geometrica di un vettore: nel passaggio dallo spinore al vettore si perde l'informazione sulla fase  $e^{-i\chi/2}$ . Wheeler ha suggerito di chiamare l'oggetto geometrico che  $\psi$  rappresenta un’“asta con bandiera” (“flagpole”):  $a = |\psi|^2$  è la lunghezza dell'asta,  $\mathbf{a}$  è il vettore dell'asta;  $\chi$  è l'angolo che rappresenta l'orientazione della bandiera (si veda la figura 6.1).

**Box 4.12 — Rotazione di uno spinore.** Supponiamo di ruotare di un angolo  $\alpha$  uno spinore  $\psi$  attorno ad un asse, per esempio l'asse  $z$ . Secondo la (4.47), una tale rotazione è data

dalla matrice

$$U(\mathbf{e}_3, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) - i \sin(\alpha/2) & 0 \\ 0 & \cos(\alpha/2) + i \sin(\alpha/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix}$$

che quando agisce su uno spinore parametrizzato come nella (4.54) trasforma la variabile angolare  $\phi$  in  $\phi + \alpha$ , mentre la variabile  $\theta$  resta costante: il corrispondente vettore  $\mathbf{a}$  nello spazio fisico ruota di  $\alpha$  attorno all'asse  $z$  (l'asta della bandiera). Quando  $\alpha = 2\pi$ , il vettore  $\mathbf{a}$  ritorna nella sua posizione originaria, ma lo spinore no: acquista un segno negativo in quanto

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i(\phi+2\pi)/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i(\phi+2\pi)/2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi/2} \end{pmatrix}$$

Questa è la proprietà sorprendente degli spinori: una rotazione di un angolo giro attorno ad un asse non li riporta nella condizione iniziale. Si osservi che la bandiera ruota rigidamente con l'asta, senza cambiare la sua orientazione originaria.

**Box 4.13 — Spinore come autovettore.** Dimostriamo che dato un vettore  $\mathbf{a}$ , lo spinore (4.52) è l'auto-vettore di  $\sigma(\mathbf{a})$  corrispondente all'auto-valore positivo, dove  $a > 0$ ,  $\theta$  e  $\phi$  sono le coordinate sferiche di  $\mathbf{a}$  (a meno di una fase globale e di un fattore di normalizzazione). A tal fine risolviamo l'equazione agli autovalori  $\sigma(\mathbf{a})\psi = \lambda\psi$ . Possiamo procedere al calcolo algebrico diretto, oppure procedere in maniera più geometrica, osservando che  $\sigma(\hat{\mathbf{a}})$ , dove  $\hat{\mathbf{a}}$  è il versore lungo  $\mathbf{a}$ , è unitariamente a  $\sigma_3$ , quindi i due autovalori di  $\sigma(\mathbf{a})$  sono  $+a$  e  $-a$ . Allora i due autovettori di  $\hat{\mathbf{a}}$  sono ottenuti da quelli di  $\sigma_3$  per rotazione unitaria. I due autovettori di  $\sigma_3$  sono  $\psi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $\psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , il primo associato all'autovalore  $+1$  e il secondo a  $-1$ . Dunque se  $U(\hat{\mathbf{n}}, \theta)$  è la trasformazione che ruota  $\mathbf{e}_3$  in  $\hat{\mathbf{a}}$ , i due autovettori di  $\sigma(\hat{\mathbf{a}})$  sono

$$\psi_{+,\hat{\mathbf{a}}} = U(\hat{\mathbf{n}}, \theta)\psi_+ \quad \psi_{-,\hat{\mathbf{a}}} = U(\hat{\mathbf{n}}, \theta)\psi_-.$$

Per trovarne l'espressione esplicita, occorre determinare  $U(\hat{\mathbf{n}}, \theta)$ . Il versore dell'asse di rotazione è chiaramente

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} &= \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{a}}{|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{e}_3 \times (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3)}{|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{a}|} = \frac{a_1\mathbf{e}_2 - a_2\mathbf{e}_1}{\sqrt{a_2^2 + a_1^2}} \\ &= \frac{\sin\theta \cos\phi \mathbf{e}_2 - \sin\theta \sin\phi \mathbf{e}_1}{\sin\theta} = \cos\phi \mathbf{e}_2 - \sin\phi \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

Allora, dalla formula (4.47) otteniamo

$$U(\hat{\mathbf{n}}, \theta) = \cos(\theta/2)\mathbf{1} - i \sin(\theta/2)(\cos\phi \sigma_2 - \sin\phi \sigma_1) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2)e^{-i\phi} \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

Quindi,

$$\psi_{+,\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad \psi_{-,\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2)e^{-i\phi} \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

L'equazione agli autovalori determina lo spinore a meno di una fase in quanto il vettore  $\mathbf{a}$  non contiene alcuna informazione sulla fase dello spinore ad esso associato; inoltre, per costruzione, i due autovettori hanno norma 1. Quindi, se moltiplichiamo gli spinori (4.57) per la fase globale  $e^{-i(\chi+\phi)/2}$  e per un qualunque numero reale il vettore che si ottiene è proprio  $\psi$  dato dalla (4.54).

Osserviamo che se denotiamo con  $\psi_1$  e  $\psi_2$  le due componenti di  $\psi$ , dato dalla (4.54), allora la matrice

$$U = \frac{1}{|\psi|} \begin{pmatrix} \psi_1 & -\bar{\psi}_2 \\ \psi_2 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

è la matrice unitaria  $U(\hat{\mathbf{n}}, \theta)$  ed è quindi la matrice che diagonalizza  $\sigma(\mathbf{a})$ , vale a dire, tale che  $\sigma_3 = U^{-1}\sigma(\mathbf{a})U$ .

**Box 4.14 — Spinore come stiro-rotazione e come quaternione.** Un numero complesso  $a$  può essere interpretato geometricamente come un vettore nel piano, ma anche come una *stiro-rotazione*: per ogni numero complesso  $z$ , la trasformazione  $z \mapsto az$  rappresenta uno “stiramento” del piano di un fattore  $|a|$  (compressione o espansione a seconda se  $|a| < 1$  o  $|a| > 1$ ), combinata con una rotazione del piano di un angolo pari ad  $\arg(a)$ . Analogamente, uno spinore, può essere interpretato, non solo come un’asta con bandiera, ma anche come una *stiro-rotazione* dello spazio tridimensionale. L’operatore

$$Q = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\bar{\psi}_2 \\ \psi_2 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix} = |\psi|U \quad (4.59)$$

codifica (a meno di un segno) tutta l’informazione geometrica contenuta in  $\psi$ . La trasformazione

$$\mathbf{v} \mapsto Q\mathbf{v}Q^*$$

dilata il vettore  $\mathbf{v}$  e lo ruota: è una stiro-rotazione. La corrispondenza tra spinori e stiro-rotazioni è biunivoca (a meno di un segno). Colleghiamo questa interpretazione dello spinore alla nozione classica di quaternione.

Un quaternione è un elemento dell’algebra di Pauli della forma

$$q = q_0\mathbb{1} + q_1\sigma_2\sigma_3 + q_2\sigma_3\sigma_1 + q_3\sigma_1\sigma_2 \quad (4.60)$$

Se si considera la moltiplicazione due elementi di questo tipo:

$$r = qp = (q_0\mathbb{1} + q_1\sigma_2\sigma_3 + q_2\sigma_3\sigma_1 + q_3\sigma_1\sigma_2)(p_0\mathbb{1} + p_1\sigma_2\sigma_3 + p_2\sigma_3\sigma_1 + p_3\sigma_1\sigma_2)$$

è facile convincersi che  $r$  è ancora della stessa forma, cioè,  $r = r_0\mathbb{1} + r_1\sigma_2\sigma_3 + r_2\sigma_3\sigma_1 + r_3\sigma_1\sigma_2$ . Questo perché il prodotto di termini con uguali prodotti di matrici  $\sigma$  fornisce un multiplo dell’identità, ad esempio  $q_1p_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_3 = -q_1p_1\sigma_2\sigma_2\sigma_3\sigma_3 = -q_1p_1\sigma_2^2\sigma_3^2 = -q_1p_1\mathbb{1}$ , mentre il prodotto di termini con prodotti differenti di matrici  $\sigma$  fornisce un multiplo del prodotto di due matrici  $\sigma$ , ad esempio,  $q_3p_2\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1 = -q_3p_2\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_1 = q_3p_2\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_3 = q_3p_2\sigma_2\sigma_3$ . Quindi l’insieme degli elementi della forma (4.60) forma una sotto-algebra dell’algebra di Pauli di dimensione 4 (come spazio vettoriale reale). Questa è l’algebra dei quaternioni proposta da Hamilton nel 1843. Si passa alle notazioni

di Hamilton ponendo  $q = q_0\mathbb{1} + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ , dove  $\mathbf{i} = \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1$ ,  $\mathbf{j} = \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$  e  $\mathbf{k} = \sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$  sono le “unità immaginarie” dell'algebra, nel senso che  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbb{1}$ .

Una rotazione  $U$  è della forma (4.47) e quindi può essere equivalentemente espressa come  $U = u_0\mathbb{1} + u_1i\sigma_1 + u_2i\sigma_2 + u_3i\sigma_3$ , con  $u_0, u_1, u_2, u_3$  parametri reali tali che  $u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$ . È dunque un quaternioni  $U = u_0\mathbb{1} + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$  di lunghezza  $|U| = \sqrt{u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 1$ . Questa rappresentazione delle rotazioni fu proposta da Cayley nel 1846. Quando  $U$  è moltiplicato per un numero reale positivo  $\lambda$  si ottiene un quaternioni di lunghezza  $\lambda$ . Ma uno spinore è una stiro-rotazione, cioè della forma (4.59), che è proprio la moltiplicazione di un numero reale per una trasformazione unitaria. *Quindi uno spinore è un quaternioni.* È istruttivo osservare che gli oggetti matematici introdotti nel 1926 da Pauli per descrivere lo spin quantistico siano gli stessi che sono stati introdotti da Hamilton nel 1843.

### 4.2.3 Inversione spaziale degli spinori

Consideriamo uno spinore  $\psi$  e studiamo come si trasforma per inversione spaziale o parità. Utilizziamo la parametrizzazione (4.54) dello spinore, perché essa rende manifesta la sua interpretazione geometrica come “asta con bandiera” e la sua interpretazione come autovettore di  $\sigma(\mathbf{a})$ .

Nel box 4.13 abbiamo visto che lo spinore  $\psi$  dato dalla (4.54) è autovettore (non normalizzato) di  $\sigma(\mathbf{a})$  corrispondente all'autovalore positivo. Come si legge immediatamente dalla (4.58), l'autovettore corrispondente all'autovalore negativo è  $\begin{pmatrix} -\bar{\psi}_2 \\ \bar{\psi}_1 \end{pmatrix}$ . La trasformazione che fa passare da un autovettore all'altro è

$$\begin{pmatrix} -\bar{\psi}_2 \\ \bar{\psi}_1 \end{pmatrix} = -i\sigma_2 \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 \\ \bar{\psi}_2 \end{pmatrix} = -i\sigma_2 \mathcal{C} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

dove  $\mathcal{C}$  è l'operazione di coniugazione complessa delle componenti del vettore, che è anti-unitaria. Ma l'autovettore corrispondente all'autovalore positivo di  $\sigma(\mathbf{a})$  non è altro che l'autovettore corrispondente all'autovalore negativo di  $\sigma(-\mathbf{a})$  e viceversa. Quindi

$$P : \psi \rightarrow \psi_P = -i\sigma_2 \mathcal{C} \psi \quad (4.62)$$

rappresenta, nello spazio spinoriale, l'*inversione spaziale* o operatore di *parità*

$$P : \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}_P = -\mathbf{a} \quad (4.63)$$

Si osservi che la trasformazione (4.61) è proprio ciò che ci aspettiamo sulla base dell'interpretazione dello spinore (4.54) come asta con bandiera: la coniugazione complessa tiene conto dell'inversione dell'orientazione della bandiera e dell'asta; mentre lo scambio delle componenti dello spinore corrisponde al fatto che una variazione di  $\pi$  nello spazio tridimensionale corrisponde ad una variazione di  $\pi/2$  nello spazio spinoriale. Inoltre, si osservi che in 3 dimensioni (e più in generale in spazi di dimensione dispari), l'inversione spaziale non fa parte del gruppo proprio delle rotazioni: essendo  $-1$  il suo determinante jacobiano, non può essere ottenuta per deformazione continua dell'identità; invece, in due dimensioni, o più in generale in spazi di dimensione pari, il suo determinante jacobiano è  $+1$  e quindi (4.62) è una rotazione propria (in due dimensioni, è la rotazione di  $\pi$ ).

### 4.3 Simmetrie continue e teorema di Noether per sistemi di particelle

Passiamo adesso alle simmetrie continue, sempre alla luce del significato di simmetria racchiuso dalla proposizione: *Le equazioni del moto hanno una simmetria, se le soluzioni*

delle equazioni, quando sono trasformate secondo la simmetria, sono ancora soluzioni delle equazioni del moto, vale a dire, si ha una simmetria se le equazioni trasformate hanno la stessa forma delle equazioni originarie.

Consideriamo una particella libera in un sistema di riferimento inerziale che è governata dall'equazione del moto  $\ddot{\mathbf{r}} = 0$ . Allora una trasformazione di Galileo ad un altro sistema inerziale che si muove rispetto al primo con velocità costante  $\mathbf{u}$ , non modificando l'accelerazione, non cambia la forma dell'equazione e le soluzioni trasformate nel nuovo sistema di riferimento sono ancora soluzione delle equazioni del moto  $\ddot{\mathbf{r}} = 0$ .

Poiché le soluzioni delle equazioni del moto corrispondono ad un minimo dell'integrale d'azione  $\mathcal{S}$ , una condizione sufficiente affinché una trasformazione sia una simmetria è che  $\mathcal{S}$  sia lasciato invariato dalla trasformazione. Per esempio, l'integrale d'azione

$$\mathcal{S}[x, y, z] = \int \left[ \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - Bz \right] dt \quad (4.64)$$

dove  $B$  è una costante, è chiaramente invariante per traslazioni nel piano  $x$ - $y$ :

$$\mathcal{S}[x + a, y + b, z] = \mathcal{S}[x, y, z],$$

analoga invarianza, si ha per rotazioni (4.1) attorno all'asse  $z$ .

Traslazioni e rotazioni sono esempi di *trasformazioni continue*, cioè trasformazioni che dipendono in maniera continua da un parametro. Nel caso sopra considerato  $a$  e  $b$  possono variare indipendentemente in modo continuo, lo stesso vale per l'angolo  $\theta$  nella (4.1). Una *trasformazione infinitesima* è una trasformazione continua il cui parametro è una quantità infinitesima. La trasformazione finita può essere quindi ottenuta come successione continua di trasformazioni infinitesime, analogamente a quanto abbiamo visto per le rotazioni. Sia  $\delta q$  una trasformazione infinitesima della configurazione che lascia invariato l'integrale d'azione, cioè tale che

$$\delta \mathcal{S}[q] \equiv \mathcal{S}[q + \delta q] - \mathcal{S}[q] = 0. \quad (4.65)$$

Allora  $\delta q$  è una *simmetria infinitesima dell'azione*. Si osservi che la (4.65) va interpretata come un'equazione nell'incognita  $\delta q$ , che deve valere per qualunque cammino  $q$ .

**Box 4.15 — Invarianza per rotazioni — moto in un campo centrale.** Consideriamo l'azione che descrive il moto di una particella in un campo centrale

$$\mathcal{S}[\mathbf{r}] = \int \left[ \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - V(r) \right] dt \quad (4.66)$$

Questa azione è invariante per rotazioni  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = R\mathbf{r}$ . Per piccoli angoli di rotazione si ha  $R\mathbf{r} = \mathbf{r} + \theta \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}$  dove  $\hat{\mathbf{n}}$  è un vettore unitario la cui direzione specifica l'asse di rotazione e  $\theta$  è l'angolo infinitesimo di rotazione. Esercizio: verificare che la variazione  $\delta \mathbf{r} = \theta \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}$  è una simmetria dell'integrale d'azione  $\mathcal{S}[\mathbf{r}]$ , vale a dire

$$\mathcal{S}[\mathbf{r} + \theta \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}] = \mathcal{S}[\mathbf{r}]$$

### 4.3.1 Non univocità della lagrangiana e invarianza debole dell'azione

Incominciamo con un esempio

**Box 4.16 — Spinte di Galileo.** L'azione di una particella libera in un dato sistema di riferimento inerziale è

$$\mathcal{S}[\mathbf{r}] = \int \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 dt$$

Consideriamo la spinta di Galileo

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{u}t \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{r}} \rightarrow \dot{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{u}$$

per velocità  $\mathbf{u}$  infinitesima. Allora

$$\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \rightarrow \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{u})^2 = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + m \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u}$$

Quindi,

$$\mathcal{S}[\mathbf{r} + \mathbf{u}t] = \mathcal{S}[\mathbf{r}] + \int m \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u} dt \quad (4.67)$$

e dunque la (4.65) non è soddisfatta. Questo mostra che la (4.65) è una condizione troppo restrittiva. Se vogliamo includere la simmetria di Galileo tra le simmetrie (e lo vogliamo!) dobbiamo concludere che la (4.65), pur sufficiente, *non è necessaria*.

Le conclusioni del box precedente sono chiarite dalla seguente osservazione. Pur essendo la quantità fondamentale della meccanica, la funzione di Lagrange non è univocamente determinata. Consideriamo due lagrangiane  $L(q, \dot{q})$  e  $L'(q, \dot{q})$ , che differiscono per una derivata totale rispetto al tempo di una qualche funzione  $F(q, t)$  delle coordinate e del tempo:

$$L'(q, \dot{q}) = L(q, \dot{q}) + \frac{dK}{dt} \quad (4.68)$$

Gli integrali d'azione per queste due lagrangiane sono tali che

$$\mathcal{S} = \int_{t'}^{t''} L'(q, \dot{q}) dt = \int_{t'}^{t''} L(q, \dot{q}) dt + \int_{t'}^{t''} \frac{dF}{dt} dt = \mathcal{S} + K(q'', t'') - K(q', t'),$$

cioè differiscono per una costante che dà contributo nullo alla variazione, di modo che le condizioni  $\delta\mathcal{S} = 0$  e  $\delta\mathcal{S}' = 0$  sono equivalenti e *forniscono le stesse equazioni del moto*. Così la funzione di Lagrange è definita solo a meno di una derivata totale additiva di una qualsiasi funzione (ovviamente liscia) delle coordinate e del tempo.

Risulta quindi del tutto naturale sostituire la (4.65) con

$$\delta\mathcal{S}[q] = \int \frac{dK}{dt} dt \quad (4.69)$$

Se esistono  $\delta q$  e  $K$  che soddisfano la (4.69) per un cammino  $q$  arbitrario, si ha un'*invarianza debole dell'azione*; adesso, le incognite della (4.69) sono due: la variazione  $\delta q$  e la funzione  $K$ . In altre parole, si richiede che l'azione sia invariante *a meno di termini di bordo*. Quando  $K$  risulta nullo, si ricade nella (4.65) e si ha un'*invarianza forte dell'azione*. Per esempio, le rotazioni sono un'*invarianza forte dell'azione* (4.66).

La condizione (4.69) è meno restrittiva della (4.65) e quanto visto sopra per le trasformazioni di Galileo ne fornisce un esempio. Come si può vedere dalla (4.67), in questo caso si ha  $K = m\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$ . Dunque, le trasformazioni di Galileo sono un'*invarianza debole dell'azione* di particella libera.

**Box 4.17 — Invarianza dell'azione per traslazione temporale.** Un altro esempio semplice di simmetria con  $K \neq 0$  è l'invarianza per traslazione temporale. Una traslazione temporale è data dalla variazione del cammino

$$\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t + \epsilon) = \mathbf{r}(t) + \epsilon \dot{\mathbf{r}}(t) \quad \Rightarrow \quad \delta \mathbf{r}(t) = \epsilon \dot{\mathbf{r}}(t)$$

poiché trattiamo  $\epsilon$  come infinitesimo. Per esempio, per questa trasformazione, l'azione (4.66) diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\mathbf{r} - \epsilon \dot{\mathbf{r}}] &= \int \left[ \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{r}} - \epsilon \ddot{\mathbf{r}})^2 - V(\mathbf{r} - \epsilon \dot{\mathbf{r}}) \right] dt \\ &= \mathcal{S}[\mathbf{r}] + \int \left[ m \epsilon \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot \epsilon \dot{\mathbf{r}} \right] dt \\ &= \mathcal{S}[\mathbf{r}] + \epsilon \int \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \right] dt \end{aligned}$$

Quindi l'azione varia per un termine di bordo che in questo caso è uguale a

$$K = \epsilon \left[ \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \right] = \epsilon L \quad (4.70)$$

È importante osservare che a livello infinitesimo la traslazione temporale diventa la deformazione  $\delta \mathbf{r} = \epsilon \dot{\mathbf{r}}(t)$  del cammino  $\mathbf{r}(t)$  allo stesso tempo  $t$ . Per una traslazione temporale finita,  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t + \epsilon)$ , con  $\epsilon$  non più infinitesimo, questa possibilità di confronto allo stesso tempo non è più possibile. Questo mostra l'utilità delle trasformazioni infinitesime di simmetria, perché permettono di rappresentare le simmetrie come *trasformazioni locali* dei "campi", in questo caso la posizione della particella, e *non* delle coordinate che li parametrizzano, in questo caso, il tempo. Come vedremo tra breve così è per i campi locali veri e propri, parametrizzati dalle coordinate spazio e tempo.

### 4.3.2 Teorema di Noether e costanti del moto

Il *teorema di Noether*, dovuto a Emmy Noether, mette in luce il legame esistente tra simmetrie di un sistema fisico e costanti del moto.

Il teorema è la conseguenza immediata di tre fatti:

- (1) la formula per una *variazione arbitraria dell'azione*; questa formula è data dall'equazione (2.6) che stabilisce come varia l'azione in conseguenza di una variazione infinitesima arbitraria  $\delta q$  di un qualunque cammino  $q$  e la riscriviamo così:

$$\delta \mathcal{S} = \int \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) dt + \int \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt; \quad (4.71)$$

- (2) la condizione di *simmetria dell'azione*

$$\delta \mathcal{S} = \int \frac{dK}{dt} dt \quad (4.69)$$

che caratterizza quelle *particolari* variazioni di un qualunque cammino che sono simmetrie dell'azione;

- (3) la condizione di *minima azione* (o di azione stazionaria), l'azione è cioè calcolata per un cammino che è soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange.

Allora per una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange, il secondo termine a destra nella (4.71) si annulla e l'equazione diventa

$$\delta \mathcal{S} = \int \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) dt$$

che, uguagliata alla (4.69), fornisce

$$\int \frac{dK}{dt} dt = \int \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) dt,$$

ossia

$$\frac{d}{dt} K - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q = 0 \quad \Rightarrow \quad K - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \equiv \mathcal{Q} = \text{costante} \quad (4.72)$$

Questo è il *teorema di Noether*: la quantità  $\mathcal{Q}$ , detta carica di Noether, è una costante del moto. Per padroneggiare il teorema di Noether è utile aver chiari alcuni esempi.

**Box 4.18 — Conservazione dell'impulso.** Particella libera:

$$\mathcal{S}[\mathbf{r}] = \int \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 dt$$

ha chiaramente la simmetria (forte)

$$\delta \mathbf{r} = \boldsymbol{\epsilon} \quad (\text{vettore infinitesimo costante di traslazione})$$

Poiché  $K = 0$ , la carica di Noether è

$$-\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = -\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$$

Poiché  $\boldsymbol{\epsilon}$  è arbitrario e costante, l'impulso  $\mathbf{p}$  è conservato.

**Box 4.19 — Conservazione del momento angolare.** L'azione (4.66) che descrive il moto di una particella in un campo centrale ha la simmetria (forte)

$$\delta \mathbf{r} = \theta \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}.$$

La quantità conservata è (a meno del segno)

$$\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r} = \mathbf{p} \cdot \theta \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r} = \theta \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

Poiché  $\theta \hat{\mathbf{n}}$  è arbitrario e costante, concludiamo che il momento angolare  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  è conservato.

**Box 4.20 — Conservazione della posizione iniziale.** La simmetria  $\delta \mathbf{r} = \mathbf{u}t$  per spinte di Galileo ha

$$K = m \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}$$

quindi la quantità conservata è

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} t$$

Poiché  $\theta \hat{\mathbf{n}}$  è arbitrario e costante, risulta conservata la quantità  $\mathbf{r} - \mathbf{v}t = \mathbf{r}_0$ , la posizione al tempo  $t = 0$ . Non sembra essere una quantità molto interessante.

**Box 4.21 — Conservazione dell'energia.** Abbiamo precedentemente mostrato che alla simmetria per traslazione temporale  $\delta \mathbf{r} = \epsilon \dot{\mathbf{r}}$  è associato  $K = \epsilon \left[ \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \right] = \epsilon L$ . Quindi la carica di Noether è

$$\epsilon L - \mathbf{p} \cdot \epsilon \dot{\mathbf{r}} = -\epsilon(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L).$$

e dunque la quantità conservata associata alle traslazioni temporali è l'energia  $\mathcal{E} = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L$ .

**Box 4.22 — Particella "conforme".** Si consideri una particella di massa  $m$  sotto l'influenza di un potenziale che va come l'inverso del quadrato della distanza:

$$\mathcal{S}[x] = \int \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{\alpha}{x^2} \right) dt$$

L'equazione del moto è

$$m \ddot{x} = \frac{2\alpha}{x^3}$$

Risolviamo le equazioni del moto algebricamente usando il teorema di Noether per trovare un'altra costante del moto oltre all'energia,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{\alpha}{x^2}, \quad (4.73)$$

che è ovviamente conservata essendo la funzione di Lagrange indipendente dal tempo.

Per applicare il teorema di Noether, osserviamo che questo sistema ha la simmetria (detta di Weyl):

$$t \rightarrow t' = \lambda t, \quad x(t) \rightarrow x'(t') = \sqrt{\lambda} x(t) \quad (4.74)$$

per  $\lambda$  costante. Infatti, sotto questa trasformazione,

$$\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \sqrt{\lambda} \frac{1}{\lambda} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{dx}{dt}$$

e l'azione resta invariata:

$$\mathcal{S} \rightarrow \int \left( \frac{1}{2} m \frac{\dot{x}^2}{\lambda} - \frac{\alpha}{\lambda x^2} \right) \lambda dt = \mathcal{S}$$

Per applicare il teorema di Noether dobbiamo passare alla versione infinitesima delle (4.74) ponendo  $\lambda = 1 + \epsilon$  ed espandendo al prim'ordine in  $\epsilon$ :

$$t \rightarrow t' = (1 + \epsilon)t, \quad x(t) \rightarrow x'((1 + \epsilon)t) = \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} \right) x(t)$$

La seconda equazione fornisce

$$x'(t) + \dot{x}(t)\epsilon t = x(t) + \frac{\epsilon}{2}x(t)$$

da cui

$$\delta x = x'(t) - x(t) = -\epsilon t \dot{x}(t) + \frac{\epsilon}{2} x(t) \quad \text{e} \quad \delta \dot{x} = -\epsilon \dot{x} - \epsilon t \ddot{x} + \frac{\epsilon}{2} \dot{x} = -\frac{\epsilon}{2} \dot{x} - \epsilon t \ddot{x}$$

Calcoliamo adesso la variazione dell'azione

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} &= \int \left[ \frac{1}{2} m \delta(\dot{x}^2) - \alpha \delta \left( \frac{1}{x^2} \right) \right] dt = \int \left[ m \dot{x} \delta \dot{x} + 2 \frac{\alpha}{x^3} \delta x \right] dt \\ &= \epsilon \int \left[ -m \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 + t \dot{x} \ddot{x} \right) + \alpha \frac{x - 2t \dot{x}}{x^3} \right] dt \\ &= \epsilon \int \frac{d}{dt} \left( -m \frac{t \dot{x}^2}{2} + \frac{\alpha t}{x^2} \right) dt = \epsilon \int \frac{d}{dt} (tL) dt \end{aligned}$$

Il termine di bordo è  $K = -tL$  e quindi la carica di Noether associata alla simmetria è

$$\mathcal{Q} = K - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x = -t \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{\alpha}{x^2} \right) - m \dot{x} \left( -t \dot{x} + \frac{1}{2} x \right) = -\frac{1}{2} m x \dot{x} + \frac{1}{2} m t \dot{x}^2 + \frac{\alpha t}{x^2}$$

ossia,

$$\mathcal{Q} = -\frac{1}{2} m x \dot{x} + t \mathcal{E} \quad (4.75)$$

Le equazioni (4.73) e (4.75) sono due equazioni algebriche per  $x(t)$  e  $\dot{x}(t)$ . Da loro otteniamo  $x(t)$  in funzione del tempo, in termini di due costanti di integrazione  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{Q}$ , come deve essere il caso per un'equazione del moto del secondo ordine con un solo grado di libertà. Questo risolve completamente il problema. (Si noti che, in generale, almeno una delle quantità conservate deve essere una funzione esplicita del tempo, come è  $\mathcal{Q}$ , altrimenti non ci sarebbe dinamica).

Per scovare eventuali errori di calcolo è sempre utile verificare che la carica di Noether trovata è una costante del moto. Nel nostro caso,

$$\dot{\mathcal{Q}} = -\frac{1}{2} m \dot{x} \dot{x} - \frac{1}{2} m x \ddot{x} + \mathcal{E} = -\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} \frac{2\alpha}{x^2} + \mathcal{E} = -\mathcal{E} + \mathcal{E} = 0$$

### 4.3.3 Campi esterni

In questa sezione discutiamo il ruolo delle “quantità esterne” (o di “background”) e come affrontarle nel quadro del teorema di Noether. Il teorema di Noether applicato alle particelle mette in luce molti aspetti delle simmetrie che a volte sono più nascosti in teoria dei campi. Le quantità esterne ne sono un esempio.

Consideriamo l'azione (4.64) che per comodità riscriviamo,

$$\mathcal{S}[x, y, z] = \int \left( \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - Bz) \right) dt, \quad (4.64)$$

dove  $B$  è una costante. Non ci interessa la fisica di quest'azione ma solo le sue simmetrie. Il termine di interazione rompe chiaramente la simmetria sferica. Le rotazioni nel piano  $x$ - $y$  restano una simmetria, ma la simmetria  $O(3)$  è rotta. Ora, si scriva  $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$  e sia  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  e si riscriva l'azione come

$$\mathcal{S}[\mathbf{r}; \mathbf{B}] = \int \left( \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} \right) dt \quad (4.76)$$

Si tratta esattamente della stessa azione, semplicemente scritta in modo più elegante. Sia  $\mathbf{r}$  che  $\mathbf{B}$  sono vettori le cui componenti sono riferiti ad un qualche sistema di assi cartesiani.

Applicando una rotazione degli assi, i prodotti scalari  $\dot{\mathbf{r}}^2$  e  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}$  rimangono invariati e quindi l'azione è invariante. Se  $R$  denota la matrice di rotazione, abbiamo

$$\mathcal{S}[\mathbf{r}; \mathbf{B}] = \mathcal{S}[R\mathbf{r}; R\mathbf{B}]. \quad (4.77)$$

Questa "simmetria" implica la conservazione del momento angolare? No, ovviamente (il momento angolare  $\mathbf{L}$  non è conservato per questo sistema, come può essere facilmente controllato dalle equazioni del moto). Che c'è di sbagliato? Niente. Dobbiamo solo essere attenti al ruolo delle differenti variabili e trasformazioni.

L'equazione (4.77) è un'identità matematica e potrebbe essere chiamata una "simmetria" dell'azione. Tuttavia, non implica un'equazione di conservazione perché coinvolge la variazione di una *quantità esterna*. Applichiamo l'algoritmo Noether a (4.76) per capire cosa sta succedendo. Consideriamo una rotazione infinitesima  $\theta \mathbf{n}$ . Allora  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{B}$  variano come  $\delta \mathbf{r} = \theta \mathbf{n} \times \mathbf{r}$  e  $\delta \mathbf{B} = \theta \mathbf{n} \times \mathbf{B}$ . Come si può facilmente verificare le rotazioni infinitesime lasciano invariata l'azione (ovvio!).

Calcoliamo la variazione dell'azione per una soluzione delle equazioni del moto:

$$\delta \mathcal{S} = \int \left[ \frac{d}{dt} (m \dot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r}) - \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} \right] dt = \int \theta \mathbf{n} \cdot \left( \frac{d\mathbf{L}}{dt} - \mathbf{r} \times \mathbf{B} \right) dt \quad (4.78)$$

e osserviamo che non è una derivata totale. Questo è il punto cruciale. Poiché la "simmetria" comporta la variazione di una quantità esterna, la variazione lungo le soluzioni delle equazioni del moto non è una derivata totale. Possiamo comunque procedere con la stessa logica. Poiché la variazione della simmetria è zero, otteniamo,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{B} \quad (4.79)$$

che è l'equazione corretta del momento torcente. È interessante constatare che anche in un caso in cui non si applica, il teorema di Noether fornisce la corretta equazione per la carica che sarebbe conservata se la simmetria non fosse rotta (in questo caso il momento angolare).

Le variabili dinamiche (funzioni del tempo che sono variate nel principio d'azione) e le quantità esterne (masse, cariche o addirittura vettori, tensori ma non variabili nel principio d'azione) svolgono ruoli molto diversi. Il vettore  $\mathbf{B}$  nella (4.76) è un esempio di *quantità esterna*. Ogni volta che una simmetria comporta la variazione di una quantità esterna, il teorema di Noether non consegna una quantità conservata.

Dal punto di vista del teorema Noether, si può dire che l'azione (4.76) *non è invariante* per rotazioni perché  $\mathcal{S}[R\mathbf{r}; \mathbf{B}] \neq \mathcal{S}[\mathbf{r}; \mathbf{B}]$ . L'uguaglianza (4.77) rappresenta una trasformazione passiva, una trasformazione in cui tutti i vettori rimangono fissi e solo gli assi vengono ruotati. Ma le "trasformazioni passive" non sono le simmetrie di Noether. Le simmetrie di Noether sono quelle trasformazioni attive tali che, per i valori indicati delle quantità esterne, l'azione è invariante a meno di un'eventuale derivata totale. Sono queste simmetrie che danno origine a quantità conservate.

## 4.4 Simmetrie continue e teorema di Noether per campi locali

### 4.4.1 Simmetrie per campi locali

La trattazione ricalca quanto abbiamo visto per sistemi di particelle. L'esempio più semplice è un campo scalare  $\phi(\mathbf{x}, t)$  descritto dall'azione

$$\mathcal{S}[\phi] = \frac{1}{2} \int [(\partial_t \phi)^2 - (\nabla \phi)^2] dV dt \quad c = 1 \quad (4.80)$$

che è resa stazionaria dalle soluzioni dell'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 0$$

L'azione (4.80) è chiaramente invariante per la traslazione costante  $\phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \phi(\mathbf{x}, t) + \phi_0$ , cioè  $S[\phi + \phi_0] = S[\phi]$ . La simmetria adesso agisce sul campo  $\phi(\mathbf{x}, t)$ .

Analogamente al caso delle particelle, la densità di lagrangiana è definita a meno di un derivata totale

$$\frac{\partial K_0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{K}$$

Si ha dunque una simmetria (debole) dell'azione se esiste una trasformazione infinitesima  $\delta\phi(\mathbf{x}, t)$  tale che

$$\delta S \equiv S[\phi(\mathbf{x}, t) + \delta\phi(\mathbf{x}, t)] - S[\phi(\mathbf{x}, t)] = \int \left[ \frac{\partial K_0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{K} \right] dV dt \quad (4.81)$$

per opportuni campi  $K_0$  e  $\mathbf{K}$ . Al riguardo, due commenti:

- La (4.81) è un'equazione per le funzioni  $\delta\phi(\mathbf{x}, t)$  non per  $\phi(\mathbf{x}, t)$ :  $\delta\phi(\mathbf{x}, t)$  è una simmetria se l'equazione (4.81) è verificata per tutte le funzioni  $\phi(\mathbf{x}, t)$ .
- Le coordinate non giocano alcun ruolo. L'azione è un funzionale di  $\phi(\mathbf{x}, t)$  e le coordinate  $\mathbf{x}, t$  sono variabili "mute" che sono integrate. La definizione di simmetria (4.81) non coinvolge cambiamenti di coordinate in alcun modo. Anche simmetrie associate a traslazioni spazio-temporali, rotazioni, etc. possono essere sempre espresse come trasformazioni locali  $\delta\phi(\mathbf{x}, t)$  sui campi.

**Box 4.23 — Invarianza per traslazioni spazio-temporali.** Ritornando all'azione (4.80), ci si aspetta che, oltre alla simmetria  $\phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \phi(\mathbf{x}, t) + \phi_0$ , siano una simmetria anche le *traslazioni spazio-temporali*

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad t \rightarrow t + \epsilon_0, \quad (4.82)$$

Questo perché la lagrangiana nell'azione (4.80) non dipende esplicitamente dalle coordinate  $\mathbf{x}$  e  $t$ . Sembrerebbe, allora, che abbiamo due diversi tipi di simmetria, alcune che agiscono sui campi, altre sulle coordinate.

Questo non è corretto: tutte le simmetrie possono essere espresse come trasformazioni dei campi, anche quelle che nascono da una trasformazione delle coordinate. Le trasformazioni (4.82) vanno intese come trasformazioni dei campi nel seguente modo: dato il campo  $\phi(\mathbf{x}, t)$ , si costruisce il nuovo campo (il campo traslato)  $\phi'(\mathbf{x}, t)$  i cui valori sono (trascurando infinitesimi di ordine superiore)

$$\phi'(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}, t + \epsilon_0) = \phi(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t) + \epsilon_0 \partial_t \phi(\mathbf{x}, t).$$

Allora la variazione del campo associata alla traslazione delle coordinate spazio-temporali è

$$\delta\phi(\mathbf{x}, t) = \epsilon_0 \partial_t \phi(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t) \quad (4.83)$$

Questa è una relazione locale che coinvolge solo il punto  $(\mathbf{x}, t)$ . La conseguente variazione

dell'azione (4.80) è:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} &= \int [(\partial_t\phi)\partial_t(\delta\phi) - (\nabla\phi)\cdot(\nabla\delta\phi)] dVdt \\ &= \int [(\partial_t\phi)\partial_t(\epsilon\cdot\nabla\phi + \epsilon_0\partial_t\phi) - (\nabla\phi)\cdot\nabla(\epsilon\cdot\nabla\phi + \epsilon_0\partial_t\phi)] dVdt \\ &= \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon_0(\partial_t\phi)^2 - \epsilon_0(\nabla\phi)^2] + \nabla\cdot[\epsilon(\partial_t\phi)^2 - \epsilon(\nabla\phi)^2] \right\} dVdt\end{aligned}$$

che è proprio della forma a secondo membro della (4.80) per  $K_0 = \frac{1}{2}\epsilon_0 [(\partial_t\phi)^2 - (\nabla\phi)^2]$  e  $\mathbf{K} = \frac{1}{2}\epsilon [(\partial_t\phi)^2 - (\nabla\phi)^2]$ , ossia

$$K_0 = \epsilon_0\mathcal{L}, \quad \mathbf{K} = \epsilon\mathcal{L} \quad (4.84)$$

Quindi le traslazioni spazio-temporali (4.82), rappresentate dalle trasformazioni locali sui campi (4.83), sono una simmetria dell'azione. È importante osservare che la presenza di una energia potenziale nell'azione che non dipende esplicitamente da  $\mathbf{x}$  e  $t$ , cioè della forma locale  $V(\phi(\mathbf{x}, t))$ , dove  $V$  è una funzione reale a valori reali, *non rovina la simmetria*. Si ha infatti,

$$\delta V = V'(\phi)\delta\phi = V'(\phi)[\epsilon_0\partial_t\phi + \epsilon\cdot\nabla\phi] = \frac{\partial}{\partial t}\epsilon_0 V + \nabla\cdot\epsilon V$$

che dà di nuovo una variazione dell'azione della forma a secondo membro della (4.80). Si lascia come esercizio verificare che se  $V$  dipende esplicitamente da  $\mathbf{x}$  e  $t$ , cioè  $V = V(\phi(\mathbf{x}, t), x)$ , questo non è più vero.

#### 4.4.2 Teorema di Noether per campi locali

Il teorema di Noether per campo locali ricalca pari pari quanto visto per sistemi di particella. I tre fatti rilevanti adesso sono:

(1) la formula per una *variazione arbitraria dell'azione*:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} &= \int \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \delta\phi \right] dVdt + \int \int_{\partial\mathcal{R}} \delta\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)} \cdot \mathbf{n} dS dt \\ &\quad + \int \int_{\mathcal{R}} \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \right] - \nabla\cdot \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)} \right] \right\} \delta\phi dVdt \quad (2.40)\end{aligned}$$

(2) la condizione di *simmetria dell'azione*

$$\delta\mathcal{S} = \int \left[ \frac{\partial K_0}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{K} \right] dVdt \quad (4.81)$$

(3) la condizione di *minima azione* (o di azione stazionaria).

Allora per una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange, il secondo termine a destra nella (2.40) si annulla e l'equazione (2.40) diventa

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} &= \int \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \delta\phi \right] dVdt + \int \int_{\partial\mathcal{R}} \delta\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)} \cdot \mathbf{n} dS dt \\ &= \int \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \delta\phi \right] dVdt + \int \int_{\mathcal{R}} \nabla\cdot \left[ \delta\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)} \right] dVdt \quad (4.85)\end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo utilizzato il teorema di Gauss. Uguagliando la (4.85) e la (4.81) si ottiene

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0 \quad (4.86)$$

con

$$\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta \phi - K_0 \quad (4.87)$$

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \delta \phi - \mathbf{K} \quad (4.88)$$

L'equazione (4.86) è un'equazione di continuità che esprime una legge locale di conservazione, in questo caso della densità di carica di Noether  $\rho$  propagata dalla densità di flusso  $\mathbf{J}$ . Per “buone” condizioni al bordo, la carica totale

$$\mathcal{Q} = \int_{\mathcal{X}} \rho dV \quad (4.89)$$

è ovviamente conservata.

**Box 4.24 — Tensore energia-impulso di un campo scalare.** Riprendiamo il box 4.23. Consideriamo una lagrangiana di forma generale (1.88)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - V(\phi) \quad \boxed{c \equiv 1}. \quad (4.90)$$

e richiamiamo le quantità rilevanti:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} \quad (\text{impulso canonico}) \quad (4.91)$$

$$u = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) \quad (\text{densità d'energia}) \quad (4.92)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \phi} = -\nabla \phi \quad (4.93)$$

Inserendo le formule (4.84) nelle equazioni (4.87), si ottiene

$$\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} [\epsilon_0 \partial_t \phi(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t)] - \epsilon_0 \mathcal{L} \quad (4.94)$$

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} [\epsilon_0 \partial_t \phi(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t)] - \boldsymbol{\epsilon} \mathcal{L} \quad (4.95)$$

Poiché le traslazioni le 4 traslazioni spaziotemporali  $\epsilon_0$  e  $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)$  sono indipendenti otteniamo 4 cariche localmente conservate.

Ponendo  $\boldsymbol{\epsilon} = 0$  nelle (4.94) e (4.95), otteniamo

$$\rho_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \partial_t \phi - \mathcal{L} = u, \quad \mathbf{J}_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \partial_t \phi = -\pi \nabla \phi$$

Similmente a quanto visto nel caso uni-dimensionale (esempio 1.10) poniamo  $\mathbf{J}_0 = \mathbf{G}$ , la densità di impulso meccanico. Allora l'equazione di continuità di Noether che ne risulta,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{G} = 0, \quad u = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}, \quad \mathbf{G} = -\pi \nabla \phi \quad (4.96)$$

è l'analogo del teorema di Poynting per il campo scalare:  $\mathbf{G}$  è la *densità di flusso dell'energia del campo* e la carica totale conservata

$$\mathcal{E} = \int u dV \quad (4.97)$$

è proprio l'energia totale.

Consideriamo adesso le rimanenti 3 cariche conservate. Ponendo ripetutamente nelle (4.94) e (4.95), soltanto  $\epsilon_x$  diverso da zero, soltanto  $\epsilon_y$  diverso da zero e soltanto  $\epsilon_z$  diverso da zero, otteniamo le tre formule per le densità di carica e di flusso:

$$\rho_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \partial_x \phi, \quad \mathbf{J}_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \partial_x \phi - \mathbf{e}_x \mathcal{L} \quad (4.98)$$

$$\rho_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \partial_y \phi, \quad \mathbf{J}_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \partial_y \phi - \mathbf{e}_y \mathcal{L} \quad (4.99)$$

$$\rho_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \partial_z \phi, \quad \mathbf{J}_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \partial_z \phi - \mathbf{e}_z \mathcal{L} \quad (4.100)$$

dove  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  e  $\mathbf{e}_z$  sono i tre versori lungo gli assi  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Vediamo che le tre densità di carica sono proprio le tre componenti dell'impulso meccanico  $\mathbf{p}$ , ossia la densità di flusso dell'energia. Le tre densità di flusso corrispondenti sono date da

$$\mathbf{J}_i = -(\nabla \phi) \partial_i \phi - \mathbf{e}_i \mathcal{L}, \quad i = x, y, z$$

Tutta l'informazione contenuta nei 3 vettori  $\mathbf{J}_i$  è riassunta dal tensore (matrice)  $\mathbf{T}$  di componenti

$$\mathbf{T}_{ij} = -\partial_j \phi \partial_i \phi - \delta_{ij} \mathcal{L}$$

dove  $\delta_{ij}$  è la delta di Kronecker.  $\mathbf{T}$  è un tensore simmetrico che è l'analogo per il campo scalare del tensore degli sforzi di Maxwell; la sua forma esplicita è

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -(\partial_x \phi)^2 - \mathcal{L} & -\partial_x \phi \partial_y \phi & -\partial_x \phi \partial_z \phi \\ -\partial_x \phi \partial_y \phi & -(\partial_y \phi)^2 - \mathcal{L} & -\partial_y \phi \partial_z \phi \\ -\partial_x \phi \partial_z \phi & -\partial_x \phi \partial_y \phi & -(\partial_z \phi)^2 - \mathcal{L} \end{pmatrix}$$

Definendo  $\nabla \cdot \mathbf{T} = \sum_j \partial_j \mathbf{T}_{ij}$ , le tre equazioni di continuità per le densità  $G_i$  si scrivono in forma compatta

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{T} = 0, \quad (4.101)$$

che è l'equazione di continuità per la densità di flusso dell'energia (cioè la densità di impulso meccanico) ed esprime il fatto che questa si conserva localmente lungo qualunque direzione. La carica (vettoriale)

$$\mathcal{P} = \int \mathbf{G} dV \quad (4.102)$$

è l'impulso totale meccanico del campo, che è dunque una costante del moto.

**Box 4.25 — Invarianza di fase e conservazione della probabilità per il campo di Schrödinger.**

Consideriamo l'integrale d'azione per la densità di lagrangiana del campo di Schrödinger (1.71):

$$\mathcal{S} = \int \left[ \frac{i}{2} \hbar (\bar{\psi} \dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}} \psi) - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \bar{\psi} \cdot \nabla \psi - V \bar{\psi} \psi \right] dV dt. \quad (4.103)$$

Come abbiamo visto nello svolgimento del box 1.8, le corrispondenti equazioni del moto per  $\psi$  sono date l'equazione di Schrödinger per una particella in un potenziale  $V$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi. \quad (1.70)$$

Come si vede facilmente, l'azione (4.103) è invariante in senso forte rispetto a trasformazioni di fase per  $\alpha$  costante

$$\psi \rightarrow e^{-i\alpha} \psi. \quad (4.104)$$

Calcoliamo la carica di Noether associata. Prima dobbiamo passare alle trasformazioni infinitesime che sono

$$\delta \psi = -i\alpha \psi, \quad \delta \bar{\psi} = i\alpha \bar{\psi}. \quad (4.105)$$

Poiché

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{i}{2} \hbar \bar{\psi}$$

e  $K_0 = 0$  (invarianza forte dell'azione), dalla formula (4.87) per la densità di Noether si ottiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \delta \psi = \frac{i}{2} \hbar \bar{\psi} (-i) \alpha \psi = \frac{1}{2} \alpha \bar{\psi} \psi.$$

Poiché  $\alpha$  è arbitrario, ne segue che la densità localmente conservata  $\rho = \bar{\psi} \psi$ . La carica associata  $Q = \int \bar{\psi} \psi dV$  è dunque una costante del moto usualmente è posta uguale a 1. Con questa normalizzazione,  $\rho$  è proprio la densità di probabilità del campo di Schrödinger.

**Problema 4.5** Sia  $\psi$  il campo di Klein-Gordon *complesso* descritto dalla densità di lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2c^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} (\nabla \bar{\psi}) \cdot (\nabla \psi) - \frac{1}{2} \mu_0^2 \bar{\psi} \psi \quad (4.106)$$

La corrispondente azione è chiaramente invariante per trasformazioni di fase (4.104). Si determinino la densità di carica e la corrente di Noether associate a questa simmetria.

### 4.5 Invarianza di gauge

La descrizione matematica di una qualsiasi situazione fisica contiene quasi sempre delle ridondanze che ne facilitano la descrizione, ma che non hanno significato fisico oggettivo. In termini molto generali, l'invarianza di gauge, cioè di *calibratura*, è il requisito che la teoria non dipenda dalle ridondanze che introduciamo. Sorprendentemente, questo fatto ha implicazioni fisiche profonde.

Per esempio, l'uso di un sistema di riferimento per descrivere un sistema, se scelto oculatamente, ne facilita la descrizione e la formulazione delle leggi che lo governano, ma non ha di per sé un significato fisico oggettivo (riprenderemo questo punto importante nel prossimo capitolo). Un altro esempio è la descrizione dei campi elettrici e magnetici in termini dei potenziali. I potenziali  $\varphi$  e  $\mathbf{A}$  sono introdotti mediante le relazioni (1.48), che per comodità riscriviamo

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.48a)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (1.48b)$$

I potenziali forniscono una descrizione ridondante del campo elettromagnetico. Possiamo cambiarli e introdurre nuovi potenziali  $\varphi'$  e  $\mathbf{A}'$  che forniscono esattamente gli stessi campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , ma questo cambiamento dei potenziali non corrisponde ad alcuna variazione della situazione fisica, è solo un cambiamento nella *nostra* descrizione del campo elettromagnetico. Le trasformazioni dei potenziali che non cambiano  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad (1.49)$$

per una qualunque *funzione di gauge*  $\Lambda = \Lambda(\mathbf{r}, t)$  (Questo era un esercizio che avevamo assegnato nel box 1.6) Tuttavia, possiamo sfruttare questa libertà per riscrivere le equazioni di Maxwell in una forma più semplice che ne facilita la soluzione. Per esempio, se scegliamo Se scegliamo  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_L$  e  $\varphi = \varphi_L$  tali che

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_L = -\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_L}{\partial t} \quad (4.107a)$$

le equazioni di Maxwell (nel sistema di Gauss razionalizzato o sistema di Heaviside)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (1.47a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.47b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.47c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (1.47d)$$

diventano (esercizio)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_L}{\partial t^2} - \Delta \varphi_L = 4\pi\rho \quad (4.107b)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_L}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A}_L = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (4.107c)$$

vale a dire, le equazioni di Maxwell diventano le equazioni inomogenee delle onde per i potenziali. La scelta di  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  si chiama “la scelta di un gauge” e (4.107a) è detto *gauge di Lorentz*.

Un altro esempio è lo stato in meccanica quantistica. Lo stato quantistico è un proiettore unidimensionale o, equivalentemente, un raggio nello spazio di Hilbert del sistema. Quando descriviamo lo stato in termini del campo di Schrödinger  $\psi$  introduciamo una ridondanza, la *fase globale* dello stato. Tuttavia, questa ridondanza facilita la formulazione della legge dinamica per lo stato, vale a dire ci permette di descrivere l'evoluzione dello stato in termini dell'equazione di Schrödinger per  $\psi$ . La teoria così formulata, in termini dell'equazione di Schrödinger o, equivalentemente, dell'azione (4.103), deve essere invariante rispetto a cambiamenti di fase, che è proprio quello che abbiamo mostrato nel box 4.25.

Abbiamo così due esempi concreti, fisicamente molto rilevanti, di invarianza di gauge. Nel caso del campo di Schrödinger si ha una invarianza *globale* di gauge espressa dalla trasformazione (4.104) in quanto  $\alpha$  è una costante. L'elettromagnetismo offre invece un esempio di invarianza *locale* di gauge, in quanto la funzione di gauge  $\Lambda$  nella (1.49) dipende dallo spazio e dal tempo. Nella prossima sezione mostreremo che quando combiniamo elettromagnetismo e meccanica quantistica la trasformazione di fase (4.104) deve diventare anch'essa locale.

#### 4.5.1 Invarianza locale di gauge

Consideriamo il campo di Schrödinger di una particella quantistica carica in campi elettrici e magnetici (esempio 1.9) la cui equazione del moto è

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} - e\varphi\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \nabla - \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \psi \quad (1.75)$$

Le trasformazioni di gauge (1.49) non cambiano  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  e quindi non devono neanche cambiare la forma dell'equazione d'onda, perché *la fisica descritta da questa equazione non deve dipendere dalla scelta del gauge*. Chiaramente, questo è possibile solo se esiste una trasformazione *locale* di fase,

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\alpha} \psi$$

per una qualche funzione  $\alpha = \alpha(\mathbf{x}, t)$ , che compensi la trasformazione di  $\varphi$  e  $\mathbf{A}$ . Stabiliamo se una tale trasformazione esiste sostituendo  $\varphi$ ,  $\mathbf{A}$  e  $\psi$  in funzione di  $\varphi'$ ,  $\mathbf{A}'$  e  $\psi'$  nell'equazione d'onda:

$$\underbrace{-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} (\psi' e^{i\alpha}) - e \left( \varphi' + \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) (\psi' e^{i\alpha})}_{(I)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{\left[ \nabla - \frac{ie}{\hbar c} (\mathbf{A}' - \nabla \Lambda) \right]^2}_{(II)} (\psi' e^{i\alpha})$$

Sviluppiamo il primo membro

$$(I) = \left[ -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi'}{\partial t} - \hbar \frac{\partial \alpha}{\partial t} \psi' - e\varphi' \psi' - \frac{e}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \psi' \right] e^{i\alpha}$$

Osserviamo che si ha compensazione se

$$\alpha = -\frac{e}{\hbar c} \Lambda.$$

Si lascia come esercizio dimostrare che per questa scelta di  $\alpha$  anche a secondo membro si ha compensazione e che portando a secondo membro  $e^{i\alpha}$  si ottiene

$$e^{-i\alpha} \times (II) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \nabla - \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A}' \right)^2 \psi'$$

Risulta così dimostrato che l'equazione d'onda (1.75) è invariante per le trasformazioni locali di gauge

$$\begin{cases} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \\ \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \\ \psi \rightarrow \psi' = \exp\left(i \frac{e}{\hbar c} \Lambda\right) \psi \end{cases} \quad (4.108)$$

Si osservi che, essendo  $\varphi$  e  $\mathbf{A}$  campi esterni, sulla base di quanto visto nella sezione 4.3.3, questa simmetria non comporta cariche di Noether conservate (oltre alla carica  $Q = \int \bar{\psi}\psi dV$  che abbiamo determinato nel box 4.25).

#### 4.5.2 Equazione di Pauli e fattore giromagnetico dell'elettrone

Nel 1927, Pauli fece la seguente ipotesi: l'onda associata ad una particella di spin 1/2 è descritta da uno spinore  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$  che soddisfa l'equazione

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[ \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi + e\varphi \right] \psi - \frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \psi \quad (4.109)$$

dove  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \equiv \sigma(\mathbf{B})$  secondo le notazioni introdotte all'inizio di questo capitolo. Questa equazione è nota come *equazione di Pauli*.

Possiamo riscrivere il termine di accoppiamento con il campo magnetico introducendo l'operatore di spin  $\mathbf{S} = \hbar\boldsymbol{\sigma}/2$ :

$$H_{\text{magn}} = -\frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} = -\frac{e}{mc} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$$

Se l'elettrone fosse una particella classica carica ruotante attorno ad un asse passante per il suo centro di massa con momento angolare  $\mathbf{S}$  (**ma non lo è!**), il suo momento di dipolo magnetico intrinseco  $\boldsymbol{\mu}$  sarebbe

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2mc} \mathbf{S}$$

a cui corrisponderebbe un'energia

$$H_{\text{magn}}^{\text{classica}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\frac{e}{2mc} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$$

Il **fattore giromagnetico** è definito come il numero  $g$  che moltiplica il termine classico in modo da fornire il corretto valore quantistico. Quindi, nella teoria di Pauli,  $g = 2$ , in accordo con il dato sperimentale per l'elettrone (a meno di correzioni di ordine  $\alpha = e^2/\hbar c$ ), ma la teoria di Pauli non fornisce alcuna spiegazione del perché sia così.

#### 4.5.3 Invarianza di gauge ed equazione di Pauli

In assenza di campi esterni l'equazione di Pauli diventa l'usuale equazione di Schrödinger per lo spinore  $\psi$

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \psi = \frac{\sigma(\mathbf{p})^2}{2m} \psi$$

essendo  $\sigma(\mathbf{p})^2 = \mathbf{p}^2$ . A partire dall'Hamiltoniana libera scritta in termini di  $\sigma(\mathbf{p})$ , applichiamo il principio di minimo accoppiamento

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - e\varphi, \quad \sigma(\mathbf{p}) \rightarrow \sigma(\mathbf{p}) - \frac{e}{c} \sigma(\mathbf{A}),$$

Allora ne risulta l'hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m} \left[ \sigma(\mathbf{p}) - \frac{e}{c} \sigma(\mathbf{A}) \right]^2 \psi + e\varphi$$

Sviluppiamo l'operatore al quadrato:

$$\left[ \sigma(\mathbf{p}) - \frac{e}{c} \sigma(\mathbf{A}) \right]^2 = \sigma(\mathbf{p})^2 - \frac{e}{c} \sigma(\mathbf{p})\sigma(\mathbf{A}) - \frac{e}{c} \sigma(\mathbf{A})\sigma(\mathbf{p}) + \frac{e^2}{c^2} \sigma(\mathbf{A})^2$$

e usiamo le relazioni dell'algebra di Pauli per i 4 termini a secondo membro:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{p})^2 &= \mathbf{p}^2 \mathbf{1} \\ \sigma(\mathbf{p})\sigma(\mathbf{A}) &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \mathbf{1} + i\sigma(\mathbf{p} \times \mathbf{A}) \\ \sigma(\mathbf{A})\sigma(\mathbf{p}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} \mathbf{1} + i\sigma(\mathbf{A} \times \mathbf{p}) \\ \sigma(\mathbf{A})^2 &= \mathbf{A}^2 \mathbf{1} \end{aligned}$$

La somma dei 4 termini multipli dell'identità dà

$$\mathbf{p}^2 \mathbf{1} - \frac{e}{c} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{1} + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2 \mathbf{1} = \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \mathbf{1}$$

I termini rimanenti  $i\sigma(\mathbf{p} \times \mathbf{A})$  e  $i\sigma(\mathbf{A} \times \mathbf{p})$  non si elidono perché  $\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla$  è un operatore di derivazione che agisce anche su  $\mathbf{A}$ :

$$i\sigma(\mathbf{p} \times \mathbf{A})\psi = \hbar\sigma(\nabla) \times (\sigma(\mathbf{A})\psi) = \hbar[\sigma(\nabla \times \mathbf{A})]\psi + \hbar[\sigma(\nabla)\psi] \times \sigma(\mathbf{A}) = \hbar[\sigma(\nabla \times \mathbf{A})]\psi$$

Ma  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ , e  $i\sigma(\mathbf{A} \times \mathbf{p})\psi = \hbar\sigma(\mathbf{A}) \times [\sigma(\nabla)\psi]$ . Dunque,

$$i\sigma(\mathbf{p} \times \mathbf{A}) + i\sigma(\mathbf{A} \times \mathbf{p}) = \hbar\sigma(\mathbf{B}).$$

Mettendo insieme tutti i pezzi, si ottiene

$$H = \left[ \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi + e\varphi \right] \mathbf{1} - \frac{e\hbar}{2mc} \sigma(\mathbf{B})$$

da cui segue l'equazione di Pauli (4.109). Dunque, il principio di minimo accoppiamento applicato all'operatore  $\sigma(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$ , permette di ricavare l'equazione di Pauli dall'equazione di Schrödinger libera, producendo così il corretto accoppiamento di un elettrone con il campo magnetico con fattore giromagnetico  $g = 2$ .<sup>3</sup>

---

**Problema 4.6** Si determini la densità di lagrangiana  $\mathcal{L}$  per l'equazione di Pauli (4.109).

---

<sup>3</sup>La derivazione che abbiamo dato si trova nel libro di J.J. Sakurai "Advanced Quantum Mechanics" (1967) e Sakurai ne dà credito a Feynman.

#### 4.5.4 Effetto Aharonov-Bohm

L'effetto Aharonov-Bohm è un fenomeno quantistico in cui una particella carica è influenzata da campi elettromagnetici in regioni in cui tali campi sono nulli. Raymond Eldred Siday e Werner Ehrenberg per primi predissero l'effetto nel 1949 e un effetto simile fu più tardi riscoperto da Yakir Aharonov e David Bohm nel 1959. In generale, la conseguenza profonda dell'effetto Aharonov-Bohm è che *il concetto del campo elettromagnetico classico che agisce localmente su una particella non è adeguato a descrivere il corrispondente comportamento quantistico*.

Il caso più comunemente descritto, a volte detto effetto solenoideale Aharonov-Bohm, si ha quando una funzione d'onda di una particella carica passa attorno ad un lungo solenoide, sperimentando uno spostamento di fase come risultato del campo magnetico racchiuso dalla funzione d'onda, nonostante il campo magnetico sia zero nella regione in cui la particella passa effettivamente. Questo spostamento di fase è stato osservato sperimentalmente attraverso i suoi effetti su frange di interferenza. Si è potuto anche individuare un effetto Aharonov-Bohm elettrico, in cui una particella carica è influenzata da regioni con differente potenziale elettrico ma con campo elettrico nullo, ed anche questo ha avuto conferma sperimentale.

Incominciamo con l'effetto magnetico. Consideriamo una particella carica in prossimità di un lungo solenoide, che genera un campo magnetico  $\mathbf{B}$ . Se il solenoide è estremamente lungo, il campo interno è uniforme e il campo esterno è zero. Utilizziamo un sistema di coordinate polari con asse  $z$  nel mezzo del solenoide e che punta nella direzione del campo magnetico. Per risolvere l'equazione di Schrödinger, dobbiamo prima determinare i potenziali  $\mathbf{A}$  e  $\varphi$ . Poiché il solenoide è scarico, il campo elettrico  $\mathbf{E} = 0$ , quindi scegliamo  $\varphi = 0$  (e quindi  $\partial\mathbf{A}/\partial t = 0$ , in accordo con la (1.48b)). Il potenziale vettore fuori dal solenoide deve soddisfare due condizioni: in primo luogo,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 0$ , che è semplicemente la definizione del potenziale vettoriale; la seconda condizione è una conseguenza del teorema di Stokes:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \Phi_m \quad (4.110)$$

se il cammino di integrazione  $C$  è una curva contratta intorno al solenoide e  $\Phi_m$  è il flusso magnetico totale attraverso il solenoide. Di solito si sceglie il potenziale vettoriale

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi_m}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta \quad (4.111)$$

dove  $r$  è la distanza dall'asse  $z$  e  $\mathbf{e}_\theta$  è il versore nella direzione dell'angolo  $\theta$  del sistema di coordinate polari. È facile dimostrare che il potenziale vettoriale, dato dall'equazione (4.111), soddisfa entrambe le condizioni.<sup>4</sup> Vediamo che anche se il campo magnetico  $\mathbf{B}$  è confinato all'interno del solenoide, il potenziale vettore  $\mathbf{A}$  fuori del solenoide non è zero. Se usiamo un'opportuna funzione di gauge  $\Lambda = \Lambda(\mathbf{r}, t)$  (equazione (1.49)), possiamo rendere  $\mathbf{A}$  nullo quasi ovunque al di fuori del solenoide, ma dobbiamo ancora soddisfare la condizione dell'equazione (4.110).

<sup>4</sup> Si consideri un solenoide di raggio  $a$  con  $n$  spire per unità di lunghezza che portano una corrente  $i$ . Deve valere  $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi_B$ , dove  $\Phi_B$  è il flusso di campo magnetico. Si scelga un contorno circolare concentrico con il solenoide di raggio  $r$ . Il flusso magnetico  $\Phi_B$  concatenato con il contorno circolare vale  $\pi a^2 \mu_0 n i$  per  $r > a$  e  $\pi r^2 \mu_0 n i$  per  $r < a$ . L'integrale di contorno dà  $A(r)2\pi r$ . Quindi

$$\mathbf{A}(r > a) = \frac{\pi a^2 \mu_0 n i}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta = \frac{a^2 \mu_0 n i}{2r} \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{A}(r < a) = \frac{r \mu_0 n i}{2} \mathbf{e}_\theta$$

La funzione d'onda  $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$  di una particella carica è la soluzione dell'equazione di Schrödinger (1.75) (trascuriamo effetti di spin) per  $\varphi = 0$  e  $\mathbf{A}$  indipendente dal tempo. Operiamo la trasformazione di gauge (4.108) usando la funzione di gauge

$$\Lambda = - \int_0^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'. \quad (4.112)$$

Il punto iniziale di integrazione  $O$  è scelto arbitrariamente, che è conseguenza della libertà di gauge per i potenziali elettromagnetici. Si osservi che è *cruciale che il potenziale  $\mathbf{A}$  sia irrotazionale* (il campo  $\mathbf{B}$  è zero), altrimenti  $\Lambda = \Lambda(\mathbf{r})$  dipenderebbe dal cammino di integrazione e quindi non sarebbe una funzione di  $\mathbf{r}$ . Allora, per la (4.108),

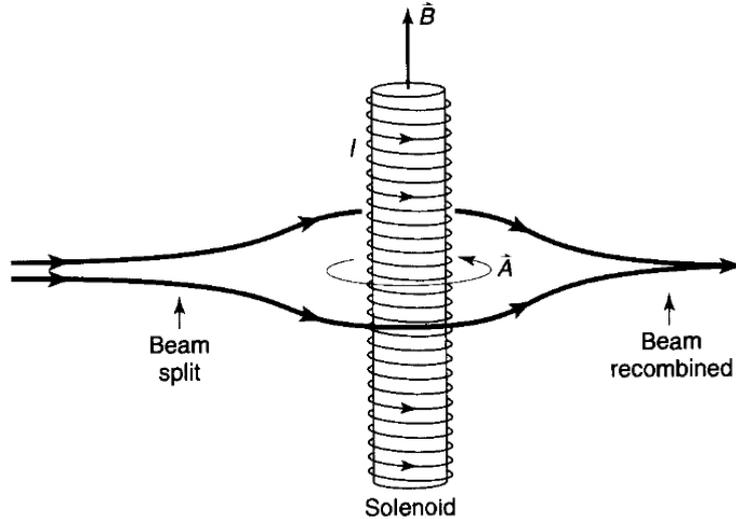
$$\psi(\mathbf{r}, t) = \exp\left(-i \frac{e}{\hbar c} \Lambda\right) \psi' \quad (4.113)$$

con  $\psi'$  che soddisfa l'equazione libera

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi'}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi' \quad (4.114)$$

È importante tenere presente che la trasformazione di gauge e quindi l'evoluzione libera per  $\psi'$  valgono solo nella regione fuori dal solenoide. Non possiamo concludere che abbiamo eliminato completamente  $\mathbf{A}$  mediante una trasformazione di gauge, perché deve sempre valere il vincolo (4.110).

Ora immaginiamo il seguente esperimento. Prendiamo un fascio di elettroni, dividiamolo in due, e inviamo ciascun fascio su un differente lato del solenoide, come mostrato in figura.



Quello che facciamo è molto simile all'esperimento della doppia fenditura, quindi ci aspettiamo che i due fasci di elettroni interferiscano quando si incontrano dopo aver aggirato il solenoide. Per descrivere l'interferenza, descriviamo i fasci in termini di onde piane:

$$\psi_1 = Ae^{ikx_1}, \quad \psi_2 = Ae^{ikx_2} \quad (4.115)$$

dove  $k$  è il vettore d'onda dei fasci di elettroni e  $x_1$  e  $x_2$  sono le lunghezze che ciascun fascio percorre (cammini ottici). Ovviamente questa non è la soluzione esatta, ma ci aiuta a capire che cosa succede con i fasci. Se il solenoide non contiene un campo magnetico, il

potenziale vettoriale al di fuori del solenoide è nullo, quindi la differenza di fase tra  $\psi_1$  e  $\psi_2$  e conseguentemente la figura di interferenza dipenderanno solo dalla differenza tra i cammini  $\Delta\Phi = k(x_2 - x_1)$ .

Ma quando si accende il campo magnetico dentro il solenoide, il potenziale vettore  $\mathbf{A}$  ha la forma dell'equazione (4.110) di modo che le funzioni d'onda  $\psi_1$   $\psi_2$  acquistano fattori di fase supplementari come mostrato nell'equazione (4.113). Di conseguenza, la figura di interferenza si sposterà di una fase aggiuntiva  $\Delta\Phi = (e/\hbar c)[- \Lambda_1 + \Lambda_2]$ . Per calcolare  $\Delta\Phi$ , usiamo l'equazione (4.112) e scriviamo

$$\Delta\Phi = \frac{e}{\hbar c} \left[ \int_{C_1} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \right] = \frac{e}{\hbar c} \oint \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{e\Phi_m}{\hbar c} \quad (4.116)$$

$C_1$  e  $C_2$  stanno per i percorsi che ogni fascio percorre quando passa attorno al solenoide. Dal momento che  $C_1$  e  $C_2$  formano un percorso chiuso  $C$  attorno al solenoide, la differenza di fase totale tra i fasci sarà proporzionale al flusso magnetico all'interno del solenoide. Quindi se cambiamo il campo magnetico nel solenoide, modifichiamo la differenza di fase tra i fasci e la figura di interferenza si sposterà. Questo si chiama *effetto Aharonov-Bohm*.

Sottolineiamo ancora che quando i fasci di elettroni passano attorno al solenoide, non passano mai attraverso regioni spaziali con campo magnetico non nullo, per cui nell'elettrodinamica classica non si prevede in questa situazione alcuna interazione tra l'elettrone e il campo magnetico. Tuttavia, abbiamo visto che se descriviamo le particelle in termini di meccanica quantistica, il campo magnetico nella regione isolata dalle particelle produce effetti tangibili sul loro movimento. L'effetto Aharonov-Bohm fu descritto per la prima volta nel 1959 in un articolo, scritto da Yakir Aharonov e da David Bohm e ricevette risposte contrastanti. Molti fisici affermavano che l'effetto in realtà non poteva avere conseguenze misurabili che, come i potenziali, era solo un costrutto matematico, per cui era necessaria una conferma sperimentale. In effetti, sviluppando la loro idea, Aharonov e Bohm avevano consultato il fisico sperimentale Robert G. Chambers e nel loro articolo descrissero l'esperimento che doveva essere condotto per dimostrare la loro teoria. Solo un anno dopo, nel 1960, Chambers eseguì l'esperimento proposto e dimostrò che tale effetto esisteva. Negli anni successivi, l'effetto è stato confermato da esperimenti più precisi e quindi oggi solo poche persone ne dubitano l'esistenza.

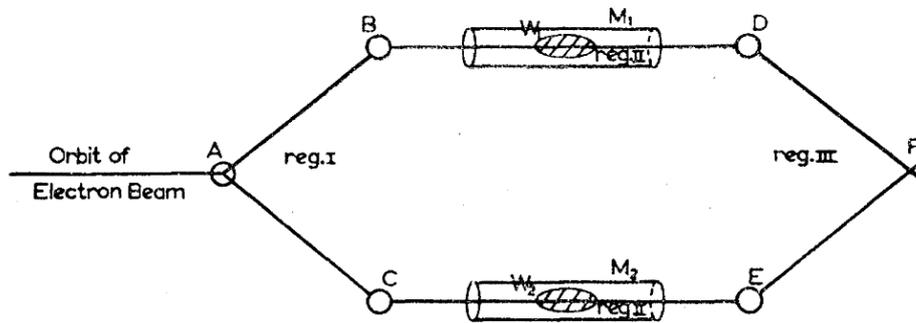
Nel loro articolo, Aharonov e Bohm descrivono anche un'altra versione dello stesso fenomeno, quando le particelle attraversano una regione dove il campo elettrico  $\mathbf{E}$  è zero, ma il potenziale scalare  $\varphi$  non lo è. Il moto delle particelle è governato dall'equazione di Schrödinger (1.75) per  $\mathbf{A} = 0$ . La situazione è analoga a prima, ma adesso operiamo la trasformazione di gauge (4.108) usando la funzione di gauge

$$\Lambda = \int_{t'=0}^{t'=t} \varphi(\mathbf{r}) dt' = \varphi(\mathbf{r}) t. \quad (4.117)$$

in modo da annullare il campo elettrico; allora, per la (4.108),  $\psi$  è data dalla (4.113), per  $\Lambda$  adesso dato da (4.117), con  $\psi'$  che soddisfa l'equazione libera (4.114).

Nell'effetto Aharonov-Bohm elettrico, i fasci di elettroni devono viaggiare attraverso regioni di spazio con diversi potenziali scalari per acquisire la differenza di fase. La

situazione sperimentale è analoga a quella mostrata in figura.



Ciascun fascio attraversa un diverso cilindro conduttore, uno al potenziale  $\phi_1$  e l'altro al potenziale  $\phi_2$ . È importante che i cilindri siano sufficientemente lunghi di modo che il campo elettrico all'interno sia zero e il potenziale sia costante. Se i potenziali dei cilindri sono diversi, i fasci acquisiscono la differenza di fase di

$$\Delta\Phi = \frac{et}{\hbar c} \Delta\phi \quad (4.118)$$

dove  $\Delta\phi$  è la differenza di potenziale tra i cilindri e  $t$  è il tempo richiesto all'elettrone per attraversare il cilindro. Il risultato dell'esperimento dovrebbe essere simile a quello dell'effetto Aharonov-Bohm magnetico con uno spostamento di frange che appare nella figura di interferenza. Il problema principale di questo tipo di esperimenti è che è difficile da eseguire e i risultati sono più difficili da interpretare perché non possiamo raggiungere una situazione in cui gli elettroni non attraversano campi elettrici perché all'inizio e alla fine dei cilindri sono inevitabilmente presenti dei campi elettrici.

#### 4.5.5 L'elettromagnetismo come manifestazione di un fattore di fase non integrabile\*

Qual è la morale dell'effetto Aharonov-Bohm? Secondo alcuni, che in meccanica quantistica i potenziali rappresentano una descrizione più fondamentale della realtà fisica che i campi. Secondo altri, che l'interazione tra campo e particella non è locale.

La prima risposta, presa alla lettera, non è corretta. Tanto in elettrodinamica classica quanto in meccanica quantistica, i potenziali forniscono una descrizione ridondante e l'invarianza di gauge vale tanto in elettrodinamica classica quanto in meccanica quantistica. In effetti, è proprio l'invarianza di gauge (4.108) la chiave per comprendere l'effetto Aharonov-Bohm. Le variazioni di fase (4.116) nel caso magnetico e (4.118) nel caso elettrico sono *invarianti di gauge*. Per esempio, se nel caso magnetico si opera una trasformazione di gauge del potenziale vettore nella (4.116) e si effettua l'integrazione, vediamo che la differenza di fase  $\Delta\Phi$  non cambia perché integriamo il gradiente di una funzione su un ciclo chiuso, il che significa che la differenza di fase è un'invariante di gauge. Quindi, l'affermazione che i potenziali sono più fondamentali dei campi – anche se fosse vera – non ci aiuta comunque a chiarire quale sia la differenza tra il caso classico e quello quantistico.

Fu Chen Ning Yang, agli inizi degli anni 70 del secolo scorso, a chiarire la situazione.<sup>5</sup> Secondo Yang, la fase locale della funzione d'onda e i potenziali non sono quantità fisiche

<sup>5</sup>Yang fu premio Nobel per la fisica nel 1957, insieme al collega Tsung-Dao Lee, per il lavoro sulla violazione della legge di parità in fisica delle particelle, verificata sperimentalmente dalla connazionale Chien-Shiung Wu.

significative, perché possono essere sempre cambiate, localmente, mediante una trasformazione di gauge — che è esattamente ciò che abbiamo ribadito sopra — mentre ciò che è fisico è il fattore di fase non integrabile (per il caso magnetico)

$$\exp \left[ \frac{ie}{\hbar c} \oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \right] = \exp \left[ \frac{ie}{\hbar c} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \right] \quad (4.119)$$

Questo fattore non è locale, nel senso che dipende da un integrale (di linea o di superficie) dei campi. Inoltre, è puramente quantistico e non ha analogo in fisica classica. Questa idea fu sviluppata da Yang in un importante lavoro del 1975<sup>6</sup>, motivato proprio dall'effetto Aharonov-Bohm. In tale lavoro, *l'elettromagnetismo in meccanica quantistica* è descritto come *la manifestazione di un fattore di fase non integrabile*. Questa idea si applica non solo ai campi elettromagnetici, ma anche ai campi di Yang-Mills che ne sono una naturale estensione e sono alla base del modello standard delle particelle elementari (Yang e Robert Mills svilupparono la teoria di questi campi nel 1954).

A costo di sembrare riduttivi, si può semplificare ulteriormente la risposta di Yang, sostenendo che la morale dell'effetto Aharonov-Bohm è che si deve prendere sul serio la meccanica quantistica in quanto tale: l'effetto Aharonov-Bohm è semplicemente una conseguenza inevitabile dell'equazione di Schrödinger, che è un'equazione invariante per trasformazione di gauge. Inoltre, riguardo alla differenza tra il caso classico e quello quantistico, si deve sempre tenere presente che i confronti tra meccanica quantistica e meccanica classica, fuori dalla loro sede naturale (lo studio del limite classico della meccanica quantistica) rischiano di essere fuorvianti perché si tratta di due teorie del moto con strutture dinamiche profondamente diverse.

Detto questo chiariamo il significato geometrico del fattore di fase non integrabile partendo da una situazione più generale dell'elettromagnetismo, per poi ritrovare l'elettromagnetismo come caso particolare. Non facciamo questo per amore di generalità, ma perché pensiamo che se partissimo direttamente con l'elettromagnetismo, l'estrema semplicità di questo caso non farebbe vedere le sottigliezze in gioco.

Partiamo dall'idea di Heisenberg che protoni e neutroni siano due stati della stessa particella, il nucleone. Anche se si trascura la loro carica, protone e neutrone non sono completamente simmetrici, il neutrone è leggermente più massivo, e quindi l'isospin non è una simmetria perfetta della forza nucleare forte. Ma assumiamo che questo sia un effetto elettromagnetico e che se tralasciamo quest'ultimo neutrone e protone sono stati diversi della stessa particella, analogamente a come spin su e spin giù sono stati differenti della stessa particella. Heisenberg propose che il nucleone fosse descritto dalla funzione d'onda a due componenti complesse  $\psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{x}) \\ \psi_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$  e che la teoria fosse invariante per trasformazioni SU(2). Si osservi che questo SU(2) non ha nulla a che fare con il gruppo delle rotazioni nello spazio fisico. Sebbene la matematica sia la stessa,  $\psi$  non è uno spinore e non descrive lo spin di una particella, ma quello che è noto come *isospin*.

Per precisare la struttura matematica della teoria, introduciamo per ogni punto  $\mathbf{x}$  nello spazio un corrispondente spazio complesso  $\mathbb{V}_{\mathbf{x}}$  (nella terminologia della matematica moderna  $\mathbb{V}_{\mathbf{x}}$  è una fibra). Ciascun spazio  $\mathbb{V}_{\mathbf{x}}$  è isomorfo a  $\mathbb{C}^2$ . Allora l'idea di Heisenberg si traduce nell'assunzione che lo stato del sistema sia descritto da un continuo di vettori  $\Psi(\mathbf{x}) \in \mathbb{V}_{\mathbf{x}}$  (sezione trasversale del fascio di fibre). Vale a dire, si assume che  $\Psi$  sia una funzione ad un sol valore sullo spazio, il cui valore in un punto  $\mathbf{x}$  è un vettore  $\Psi(\mathbf{x})$  in  $\mathbb{V}_{\mathbf{x}}$ .

<sup>6</sup>Wu, T. T.; Yang, C. N. (1975). "Concept of non-integrable phase factors and global formulation of gauge fields". Phys. Rev. D. 12: 3845-3857.

Se in ogni punto dello spazio si introduce una base ortonormale  $\mathbf{e}_1(\mathbf{x}), \mathbf{e}_2(\mathbf{x})$ , allora  $\psi_1(\mathbf{x})$  e  $\psi_2(\mathbf{x})$  sono le componenti del vettore  $\Psi(\mathbf{x})$  rispetto a quella base :

$$\Psi(x) = \psi_a(\mathbf{x})\mathbf{e}_a(\mathbf{x}) \quad (4.120)$$

(convenzione di somma sugli indici ripetuti). Pertanto la funzione d'onda  $\psi(x)$  dipenderà dall'insieme dei vettori di base, o *gauge*  $\mathbf{e}_a(\mathbf{x})$ . La scelta della base, ossia del gauge, è arbitraria e un cambiamento di base generato da una trasformazione unitaria  $U(\mathbf{x})$  in ogni punto  $\mathbf{x}$  provoca una trasformazione di gauge sulle componenti del vettore:

$$\psi(\mathbf{x}) \rightarrow \psi'(\mathbf{x}) = U^*(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})$$

Si osservi che il punto di vista sulla trasformazione è totalmente passivo: se si cambia la base, si cambiano in accordo le componenti di modo che il vettore  $\Psi(\mathbf{x})$  non cambi;  $\Psi(\mathbf{x})$  è un oggetto geometrico che non dipende dalla scelta di una base e fornisce (nella teoria di Heisenberg dell'isospin) la caratterizzazione intrinseca dello stato del nucleone. Questo fu il punto di partenza della formulazione originale della teoria di Yang-Mills, dove protoni e neutroni erano descritti come due componenti di un doppietto di isospin, appartenente alla rappresentazione fondamentale di  $SU(2)$ . La fisica del modello standard è diversa, ma la matematica è la stessa che fu sviluppata da Yang e Mills. Ed è quest'ultima che ci interessa qui.

In qualunque teoria di campo, per determinarne le equazioni differenziali che lo governano, occorre confrontare il campo in due punti infinitamente vicini. I vettori di base  $\mathbf{e}_1(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{e}_2(\mathbf{x})$  cambiano da punto a punto. Quindi la variazione di un vettore  $\Psi(x) = \psi_a(\mathbf{x})\mathbf{e}_a(\mathbf{x})$  nel passaggio dal punto  $\mathbf{x}$  ad un punto infinitamente vicino  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  consiste di due termini, uno dovuto alla variazione delle sue componenti ed uno dovuto alla variazione della base:

$$\delta\Psi = \delta(\psi_a\mathbf{e}_a) = \mathbf{e}_a d\psi_a + \psi_a d\mathbf{e}_a \quad (4.121)$$

In questa formula  $d\psi_a = \psi_a(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \psi_a(\mathbf{x})$  e  $d\mathbf{e}_a$  è la variazione infinitesima della base da  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  ed è quindi data dalla formula

$$\mathbf{e}_a(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = \mathbf{e}_a(\mathbf{x}) + \frac{\partial\mathbf{e}_a}{\partial x_k} dx_k \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{e}_a = \frac{\partial\mathbf{e}_a}{\partial x_k} dx_k \quad (4.122)$$

La (4.121) fornisce la *variazione assoluta* (o differenziale covariante) di  $\Psi$  e ha un significato geometrico invariante, cioè indipendente dalla scelta di una base. Al contrario, ciascuno dei due termini che compaiono a secondo membro della (4.121) dipende dalla base, cioè dal gauge.

Consideriamo la formula (4.122) per i vettori  $d\mathbf{e}_a$ . Le quantità  $\partial\mathbf{e}_a/\partial x_k$ , al variare di  $a$  tra 1 e 2 e  $k$  tra 1 e 3 sono 6 vettori in  $\mathbf{x}$ , ciascuno dei quali può quindi essere espresso come combinazione lineare dei vettori  $\mathbf{e}_a$  della base. Per  $a$  e  $k$  fissati siano  $-iA_{bak}$  questi coefficienti, dove  $i$  è l'unità immaginaria (essendo la variazione infinitesima di una base in uno spazio complesso, vogliamo  $A$  herminiana, il segno meno è convenzionale). Allora

$$\frac{\partial\mathbf{e}_a}{\partial x_k} = -iA_{bak}\mathbf{e}_b \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{e}_a = -iA_{bak}\mathbf{e}_b dx_k \quad (4.123)$$

$A_{bak}$  sono detti *coefficienti di connessione* e  $A = A(\mathbf{x})$  è detta *campo di connessione di gauge*. Assegnare un campo di connessione è un modo per connettere basi in spazi vettoriali infinitamente vicini. La scelta più semplice è porre  $A_{bak} = 0$ , di solita chiamata *connessione piatta*. In questo caso si possono confrontare vettori in spazi differenti in modo banale:

la base è la stessa in tutti i punti. Si dice che in questo caso si ha una nozione globale di parallelismo analoga a quello dei vettori nello spazio euclideo: un vettore nel punto  $\mathbf{x}'$  può essere trasportato nel punto  $\mathbf{x}''$  semplicemente costruendo in  $\mathbf{x}''$  un vettore che ha le stesse componenti che il vettore di partenza ha in  $\mathbf{x}'$ . L'equazione che descrive questo processo è  $\delta\Psi = 0$ , la quale, non variando la base, si banalizza riducendosi a  $d\psi_a = 0$ , che è la condizione che le componenti del vettore non cambino.

Quel che è interessante è che anche nel caso non piatto  $A_{bak} \neq 0$  si può avere una nozione di parallelismo a distanza imponendo la condizione  $\delta\Psi = 0$ , ma adesso il trasporto parallelo da un punto ad un altro dipende dalla scelta di una curva che connette i due punti. Si scelga dunque una curva  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$  che connette  $\mathbf{x}'$  e  $\mathbf{x}''$  ( $t$  è un parametro arbitrario, non necessariamente il tempo). La variazione assoluta del vettore lungo la curva è ottenuta dalla (4.121) passando al tasso di variazione rispetto a  $t$  e tenendo conto della (4.123):

$$\frac{\delta\Psi}{\delta t} = \frac{d\psi_a}{dt} \mathbf{e}_a - iA_{bak}\psi_a \frac{dX_k}{dt} \mathbf{e}_b = \frac{d\psi_a}{dt} \mathbf{e}_a - iA_{abk}\psi^b \frac{dX_k}{dt} \mathbf{e}_a.$$

Se adesso scambiamo gli indici  $a$  e  $b$ , i due vettori a secondo membro hanno entrambi componenti  $a$ , per cui la componente  $a$  del primo membro risulta:

$$\left(\frac{\delta\Psi}{\delta t}\right)_a = \frac{d\psi_a}{dt} - iA_{abk}\psi^b \frac{dX_k}{dt}. \quad (4.124)$$

Queste formule forniscono la *derivata assoluta* o *derivata covariante* di  $\Psi$  lungo la curva  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$  e hanno un significato geometrico invariante, cioè indipendente dalla scelta di un gauge, anche se ciascuno dei due termini a secondo membro dipende dalla scelta di un gauge. L'annullamento della derivata covariante lungo la curva,

$$\frac{d\psi_a}{dt} - iA_{bk}^a \psi^b \frac{dX_k}{dt} = 0, \quad (4.125)$$

fornisce l'equazione nell'incognita  $\Psi$ , per il trasporto parallelo di un vettore per una data connessione di gauge  $A$  e una data curva  $C$  di equazione  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ ; vale a dire, se  $\mathbf{X}(0) = \mathbf{x}'$  (abbiamo scelto  $t' = 0$ ),  $\mathbf{X}(t'') = \mathbf{x}''$  e  $\Psi = \Psi(t')$  è la condizione iniziale, allora la  $\Psi = \Psi(t)$  è il vettore lungo la curva che al "tempo"  $t$  è parallelo a  $\Psi'$ , in particolare,  $\Psi(t'')$  è il vettore in  $\mathbf{x}''$  parallelo a  $\Psi''$ .

Adesso, per capire la situazione, semplifichiamo drasticamente e ritorniamo al nostro problema di partenza che era una funzione d'onda a valori complessi, cioè a valori in  $\mathbb{C}$  e non in  $\mathbb{C}^2$ , per cui i cambiamenti di base in ogni punto  $\mathbf{x}$  sono dati da  $U(1)$  (le rotazioni nel piano complesso) e non da  $SU(2)$ . Tuttavia, tutto ciò che abbiamo detto continua a valere: anziché 2 vettori di base in ogni punto ne avremo 1 e il campo di connessione di gauge è semplicemente una funzione a valori vettoriali senza indici  $a$  e  $b$  e l'equazione di trasporto parallelo diventa

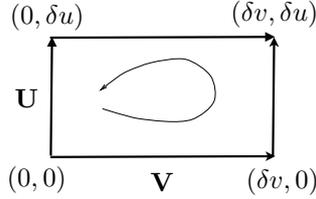
$$\frac{d\psi}{dt} - iA_k \psi \frac{dX_k}{dt} = 0, \quad (4.126)$$

dove  $\psi = \psi(\mathbf{x})$  è la componente del vettore  $\Psi$  rispetto alla base  $\mathbf{e}(\mathbf{x})$  (un solo vettore per ogni punto). La costante di accoppiamento è denotata adesso con  $e/c$ , perché quando si passa dalla matematica alla fisica la costante di accoppiamento è proprio il rapporto tra carica elettrica elementare e velocità della luce. La soluzione dell'equazione di trasporto parallelo è

$$\psi(\mathbf{x}) = \exp \left[ i \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{X} \right] \psi(0) \quad (4.127)$$

Se  $C$  è un percorso chiuso, ritroviamo il “fattore di fase non integrabile” (4.119) (riedefinendo  $\mathbf{A}$  come  $\frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}$ ).

L’idea di base della nozione di curvatura (introdotta da Gauss e raffinata da Riemann) è che la curvatura si manifesta se trasportiamo parallelamente un vettore lungo un circuito infinitesimo chiuso e confrontiamo i valori iniziali e finali del vettore (si pensi al trasporto parallelo di vettori sulla superficie della terra). Prendiamo un circuito infinitesimo come mostrato in figura sotto.



L’idea di Gauss è che quando trasportiamo parallelamente un vettore  $\psi_a$  (ritorniamo al caso bi-dimensionale per non banalizzare) lungo un circuito infinitesimo chiuso, il cambiamento subito dal vettore in un punto  $(0,0)$  nel disegno sopra) è proporzionale all’area del circuito, ai vettori che definiscono il circuito e al vettore di partenza; il coefficiente di proporzionalità è proprio la curvatura:  $\delta\psi_a = (\delta u)(\delta v) A_k B_j R_{abkj} \psi_b$ . Naturalmente, Gauss aveva in mente il trasporto degli usuali vettori, non di vettori che non sono tangenti di curve, ma la sua idea si applica pari pari anche al trasporto di questi vettori.

Consideriamo adesso il trasporto (4.127): per un circuito infinitesimo

$$\delta\psi = \left( i \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{X} \right) \psi(0)$$

Inoltre, per un circuito infinitesimo, applichiamo il teorema di Stokes:

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{X} = \nabla \times \mathbf{A} \cdot \delta v \delta u \mathbf{U} \times \mathbf{V}$$

Quindi la curvatura è rappresentata da  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Questo vuol dire che possiamo interpretare il potenziale vettore  $\mathbf{A}$  (a meno di una costante) come una connessione di gauge e il campo magnetico  $\mathbf{B}$  come la curvatura di questa connessione (a meno di una costante). Il fattore di fase non-integrabile è dunque un effetto di “curvatura” della connessione di gauge. È questa la spiegazione geometrica del perché in meccanica quantistica l’elettromagnetismo è *la manifestazione di un fattore di fase non integrabile*. Questa interpretazione geometrica non ha analogo classico: per giungere a questa conclusione è essenziale che lo stato del sistema sia descritto da una funzione d’onda.

In questa trattazione abbiamo completamente tralasciato il tempo; se lo si include, si giunge alla conclusione che potenziale scalare e potenziale vettore definiscono la connessione e che il campo elettromagnetico  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  rappresenta la curvatura. Procedendo in modo analogo (ma con qualche complicazione in più) nel caso di  $\Psi$  vettore complesso a due dimensioni, si arriva alla teoria di Yang-Mills. Osserviamo infine che dalla (4.124) segue la formula per la derivata covariante lungo la coordinata  $x_j$ : basta prendere la curva in cui le altre due coordinate restano costanti e solo  $x_j$  varia usando come parametro la coordinata stessa. Per questa scelta, il secondo membro della (4.124) diventa  $\partial_j \psi_a - i A_{aj} \psi_b$ . Il primo membro definisce la *derivata covariante* della componente  $a$  di  $\Psi$ , che è denotata  $D_j \psi_a$ :

$$D_j \psi_a = \partial_j \psi_a - i A_{aj} \psi_b \quad (4.128)$$

Nel caso unidimensionale, la derivata covariante diventa  $\mathbf{D} = \nabla - i\mathbf{A}$ , che ridefinendo  $\mathbf{A}$  può essere scritta nella forma usuale

$$\mathbf{D} = \nabla - i \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A} \quad (4.129)$$

## 5. Invarianza relativistica

### 5.1 Sistemi inerziali, prima legge di Newton e trasformazioni di Lorentz

L'invarianza relativistica, sia essa di Galileo o di Lorentz è radicata nella nozione di sistema inerziale e nella prima legge di Newton. A questo riguardo, facciamo tesoro delle osservazioni mirabilmente espresse nelle prime pagine del testo di meccanica di Landau e Lifshitz, riguardanti la nozione di sistema inerziale.

È importante osservare che, in generale, le leggi del moto assumono *forme differenti in sistemi di riferimento differenti*. La scelta di un sistema di riferimento è convenzionale, ma proprio per questo conviene sceglierne uno in cui le leggi del moto assumono la forma più semplice. Se scegliessimo un sistema arbitrario di riferimento, ad esempio quello di un corpo in rapida rotazione o di un razzo che accelera, lo spazio sarebbe inhomogeneo e anisotropo. Lo stesso vale per il tempo, che sarebbe altrettanto inhomogeneo se, per esempio misurato da un orologio con un movimento irregolare delle lancette.

La grande scoperta di Newton fu la realizzazione che è sempre possibile scegliere un sistema di riferimento in cui lo spazio è omogeneo ed isotropo e il tempo è omogeneo. Questo è un *sistema di riferimento inerziale*. L'esistenza di sistemi di riferimento inerziali, riflette, ovviamente, una proprietà della natura e, di per sé, non ha niente a che fare con la possibilità che abbiamo di scegliere un sistema di riferimento a nostro piacimento. Si tratta di un fatto empirico, che è verificato nell'esperienza con un elevato grado di approssimazione. In un sistema di riferimento inerziale, un corpo libero, cioè un corpo non soggetto ad influenze esterne, se è a riposo ad un certo istante rimane sempre a riposo, e si si muove a velocità costante, continua a muoversi con la stessa velocità. In breve, per un tale corpo vale la *prima legge di Newton* che, nel formalismo lagrangiano, può essere riformulata come segue.

L'omogeneità dello spazio e del tempo implica che la funzione di Lagrange  $L$  non possa contenere esplicitamente la posizione della particella o il tempo, cioè  $L$  deve essere una funzione solo della velocità  $\mathbf{v}$ . Poiché lo spazio è isotropo,  $L$  deve essere indipendente dalla direzione di  $\mathbf{v}$ , e quindi essere funzione solo del suo modulo  $v$ , il che è lo stesso, solo di

$v^2 = \mathbf{v}^2$ . Quindi

$$L = L(v^2) \quad (5.1)$$

Allora, essendo  $\partial L / \partial \mathbf{r} = 0$ , le equazioni di Eulero-Lagrange forniscono

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \text{costante} \quad (5.2)$$

E questa è proprio la prima legge di Newton. Proprio perché conseguenza dell'omogeneità e isotropia dello spazio e dell'omogeneità del tempo, la prima legge di Newton, e di conseguenza le equazioni (5.1) e (5.2), valgono sia se la legge di trasformazione tra sistemi di riferimento è di Galileo sia se è di Lorentz. Tuttavia la forma di  $L(v^2)$  sarà differente.

Nel testo di meccanica di Landau e Lifshitz si mostra che se si assume l'invarianza galileiana, utilizzando proprio la nozione di invarianza (debole) dell'azione, allora  $L(v)$  deve essere della forma

$$L = \text{costante} \times \mathbf{v}^2$$

e (quando considerazioni dinamiche sono tenute in considerazione) la costante è identificata con  $m/2$ , dove  $m$  è la massa della particella.

### 5.1.1 Spaziotempo di Minkowski

Se la legge di trasformazione tra sistemi di riferimento è una trasformazione di Lorentz dobbiamo tenere conto del fatto che il tempo non è più assoluto e che la trasformazione coinvolge anche il tempo. Una condizione sufficiente per garantire che la forma delle equazioni del moto sia la stessa in tutti i sistemi di riferimento è richiedere che l'integrale d'azione sia invariante per trasformazioni di Lorentz. Prima di passare a questo, richiamiamo le nozioni di base della relatività ristretta. Assumiamo che sia nota la fisica della relatività ristretta e ci limitiamo a richiamarne la struttura matematica.

Lo spazio vettoriale di Minkowski  $\mathbb{R}^{1,3}$  è l'usuale spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4$  munito di una metrica (=forma bilineare simmetrica non degenere)  $g$  di segnatura  $-2$ . Chiameremo 4-vettori gli elementi di  $\mathbb{R}^{1,3}$ , per distinguerli dagli usuali vettori tri-dimensionali che, in caso di ambiguità, chiameremo 3-vettori. La metrica  $g$  definisce un(o pseudo) prodotto scalare tra una qualunque coppia di 4-vettori  $U$  e  $V$  in  $\mathbb{R}^4$ :

$$U \cdot V = g(U, V) \quad (5.3)$$

e una nozione di ortogonalità:  $U$  e  $V$  sono ortogonali se  $U \cdot V = 0$ .

Il teorema di Sylvester (si veda l'appendice al capitolo 1) stabilisce che esiste una base ortogonale  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  tale che  $g$  è rappresentata dalla matrice

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

In una tale base,  $V^0 = V \cdot \mathbf{e}_0$  è la componente temporale di  $V$  e  $V_k = V \cdot \mathbf{e}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , sono le sue componenti spaziali che formano il 3-vettore  $\mathbf{V} = V^k \mathbf{e}_k$  (adottiamo la convenzione di Einstein che quando un indice alto e un indice basso compaiono in una formula, è sottinteso che vadano sommati). Stipuliamo inoltre che le lettere greche, come  $\mu$  o  $\nu$ , corrano da 0 a 3, mentre le lettere latine, come  $i$  o  $j$  corrano da 1 a 3 e che quindi rappresentino le

componenti della parte spaziale di un 4-vettore (questa convenzione non è seguita da tutti, per esempio, Landau-Lifshitz usano l'opposto). Con questa convenzione,  $V = V^\mu \mathbf{e}_\mu$ , dove le quantità  $V^\mu$  sono dette le componenti *controvarianti* di  $V$  rispetto alla base  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ .

Il quadrato della pseudo-norma del 4-vettore  $V = V^\mu \mathbf{e}_\mu$  è

$$V^2 = V \cdot V = V^T \eta V = \eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = V^{02} - \mathbf{V}^2 \quad (5.5)$$

dove, nella prima uguaglianza  $V$  rappresenta un vettore colonna e  $V^T$  un vettore riga. D'ora in poi, per brevità, ometteremo la qualificazione "pseudo". Più in generale, per il prodotto scalare di due vettori, scriveremo

$$U \cdot V = \eta_{\mu\nu} U^\mu V^\nu.$$

Inoltre si definiscono le quantità

$$U_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} U^\nu \quad (5.6)$$

(di modo che le componenti spaziali acquistano da  $\eta$  un segno meno);  $U_\mu$  che dette le componenti *covarianti* di  $U$  rispetto alla base  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Allora il prodotto scalare può essere scritto come

$$U \cdot V = U_\mu V^\mu = U^\mu V_\mu,$$

per la simmetria di  $\eta$ . Per passare dalle componenti covarianti a quelle controvarianti di un tensore basta moltiplicare ambo i membri di (5.6) per l'inverso di  $\eta$ , che denotiamo con  $\eta^{\mu\nu}$ , per cui

$$U^\mu = \eta^{\mu\nu} U_\nu \quad (5.7)$$

Si osservi che  $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , cioè  $\eta$  e  $\eta^{-1}$  sono date dalla stessa matrice (questo non è in generale vero se si utilizza un sistema di coordinate arbitrario).

Non essendo la metrica definita positiva, si distinguono tre tipi di 4-vettori in  $\mathbb{R}^{1,3}$ :  $V$  è di *tipo tempo* se  $V^2 > 0$ , è di *tipo spazio* se  $V^2 < 0$ , infine, è di *tipo luce* se  $V^2 = 0$ . Definiamo adesso l'analogo di Minkowski dello spazio euclideo. L'usuale spazio euclideo (quello della geometria euclidea che si studia alle superiori) non è uno spazio vettoriale, non esistendo alcun punto privilegiato che rappresenta l'origine di una base di vettori, ma è lo spazio affine<sup>1</sup>  $\mathbb{E}$  generato da  $\mathbb{R}^3$ . Analogamente, lo *spazio di Minkowski*  $\mathbb{M}$  è lo spazio affine generato dallo spazio vettoriale di Minkowski  $\mathbb{R}^{1,3}$ .

Il significato fisico di tutto ciò è il seguente. Lo spazio di Minkowski  $\mathbb{M}$  rappresenta lo spazio-tempo. Le relazioni fisiche fondamentali, in particolare, le equazioni del moto, *devono avere un significato fisico invariante*, devono cioè dipendere solamente dalle relazioni geometriche di  $\mathbb{M}$  che sono espresse dalla metrica  $g$ . La nozione di sistema di riferimento è introdotta nel modo seguente. Si fissi arbitrariamente un punto  $O$  in  $\mathbb{M}$ . Allora tutti i punti di universo possono essere descritti come 4-vettori con origine in  $O$ , cioè come 4-vettori in  $\mathbb{R}^{1,3}$ . Un *sistema di riferimento inerziale* è rappresentato da un *vettore unitario*

<sup>1</sup>Ricordiamo che lo spazio affine  $A$  generato da uno spazio vettoriale  $\mathcal{V}$  è così definito:

1. Ogni coppia (ordinata) di punti  $x$  e  $y$  in  $A$  determina un vettore  $u \in \mathcal{V}$ , simbolicamente espresso come  $v = x - y$  (oppure  $\overrightarrow{xy}$ ).
2. Se  $x$  è un qualunque punto in  $A$  e  $u$  un qualunque vettore in  $\mathcal{V}$ , esiste uno e un solo punto  $y$  in  $A$  tale che  $y = x + u$ .
3. Se  $x - y = u$  e  $z - x = v$ , allora  $z - y = u + v$  (regola del parallelogramma).

di tipo tempo con componente temporale positiva, cioè diretta verso il futuro. Dato un tale vettore  $\mathbf{e}_0$ , si ha una decomposizione naturale di  $\mathbb{R}^{1,3}$  in  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ , dove  $\mathbb{R}$  è la retta reale orientata nella direzione di  $\mathbf{e}_0$  che rappresenta il tempo nel sistema inerziale definito da  $\mathbf{e}_0$  e  $\mathbb{R}^3$  è il sotto-spazio di  $\mathbb{R}^{1,3}$  ortogonale a  $\mathbf{e}_0$ , formato quindi solo da vettori di tipo spazio, che rappresenta lo spazio tri-dimensionale nel sistema di riferimento inerziale definito da  $\mathbf{e}_0$ . Se nello spazio  $\mathbb{R}^3$  si considera una base  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  ortonormale destrorsa, si ottiene una base  $\{\mathbf{e}_\alpha\} = \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  in  $\mathbb{R}^{1,3}$  che chiameremo *base inerziale*. In una tale base la metrica  $g$  assume la forma diagonale  $\eta$ . Rispetto a questa base un punto di universo  $x$  è descritto dal 4-vettore  $x = x^\mu \mathbf{e}_\mu$ . La coordinata  $x^0$  del punto di universo  $x$  è identificata con  $ct$ , dove  $c$  è la velocità della luce e  $t$  è il tempo misurato nel dato sistema inerziale; inoltre,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  sono le coordinate spaziali di  $x$  nel dato sistema inerziale.

**Box 5.1 — Base arbitraria.** A volte risulta utile lavorare con una base arbitraria di 4 vettori  $\mathbf{h}_\mu = \mathbf{h}_\mu(x)$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$ , non necessariamente ortogonali o normalizzati ed eventualmente dipendente dal punto  $x$ . Una base di questo tipo emerge naturalmente quando si considerano coordinate generali  $x^\mu$ : si considerino i vettori

$$\mathbf{h}_\mu(x) = \lim_{\delta x^\mu \rightarrow 0} \frac{\delta x}{\delta x^\mu} = \frac{\partial x}{\partial x^\mu} \quad (5.8)$$

dove  $\delta x$  è lo spostamento da  $x$  ad un punto infinitamente vicino di coordinate  $\delta x^\mu$  lungo la curva passante per  $x$  per la quale solo la coordinata  $x^\mu$  varia e tutte le altre restano costanti. Si osservi che le componenti dei vettori  $\mathbf{h}_\mu(x)$  sono  $\mathbf{h}_\mu^\nu(x) = \delta_\mu^\nu$ , dove  $\delta_\mu^\nu$  è la delta di Kronecker. I vettori  $\mathbf{h}_\mu(x)$  formano una base per lo spazio dei vettori tangenti in  $x$  usualmente detta *base olonomica*.

Sia  $M = M(x)$  la trasformazione di cambiamento di base:

$$\mathbf{h}_\mu(x) = M_\mu^\nu(x) \mathbf{e}_\nu. \quad (5.9)$$

Allora le componenti della metrica rispetto alla nuova base sono

$$g_{\mu\nu}(x) = M^{\mu_1}_\mu(x) M^{\nu_1}_\nu(x) \eta_{\mu_1\nu_1},$$

ossia, introducendo la matrice  $M(x) = \{M^\mu_\nu\}(x)$ ,

$$g(x) = M^T(x) \eta M(x). \quad (5.10)$$

### 5.1.2 Particella libera

Consideriamo una particella in moto arbitrario. Il suo movimento è rappresentato da una successione continua di punti in  $M$ , cioè da una linea in  $M$ , detta *linea di universo*. Una tale linea può essere espressa in forma parametrica come  $X = X(\lambda)$ , ma siamo liberi di scegliere il parametro  $\lambda$  a nostro piacimento; la stessa linea può essere parametrizzata in modi differenti che sono fisicamente equivalenti. Ciò che invece ha significato fisico invariante è la (pseudo-)distanza tra due punti infinitamente vicini

$$ds^2 = dX \cdot dX = dX_\mu dX^\mu.$$

Al riguardo osserviamo che nel sistema inerziale in cui la particella è istantaneamente a riposo e le coordinate spaziali hanno come origine il punto in cui si trova la particella, si ha

$$dX = (cd\tau, 0, 0, 0),$$

dove  $\tau$  è il tempo in tale riferimento istantaneo. Allora  $ds^2 = c^2 d\tau^2 > 0$  e quindi  $dX$  deve essere un 4-vettore di tipo tempo, che è una condizione invariante, e quindi valida per tutti i sistemi di riferimento;  $d\tau = ds/c$  è il *tempo proprio* della particella.

In un sistema inerziale arbitrario, ma fissato, la (pseudo-)distanza tra due punti della linea infinitamente vicini è data dall'*elemento di linea*

$$ds = \sqrt{\frac{dX}{d\lambda} \cdot \frac{dX}{d\lambda}} d\lambda = \sqrt{c^2 \left(\frac{dT}{d\lambda}\right)^2 - \left(\frac{d\mathbf{X}}{d\lambda}\right)^2} d\lambda$$

Poiché il parametro  $\lambda$  è arbitrario, possiamo sceglierlo uguale al tempo nel sistema inerziale fissato, per cui  $T = t$ . Allora una qualunque linea  $\gamma$  che congiunge i punti  $x' = (ct', \mathbf{x}')$  e  $x'' = (ct'', \mathbf{x}'')$  è data dal cammino  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$  con condizioni agli estremi  $\mathbf{X}(t') = \mathbf{x}'$  e  $\mathbf{X}(t'') = \mathbf{x}''$ . L'elemento di linea  $ds$  si riscrive come

$$ds = \sqrt{c^2 - \left(\frac{d\mathbf{X}}{dt}\right)^2} dt = c \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} dt \quad (5.11)$$

essendo  $\mathbf{V} = d\mathbf{X}/dt$  la velocità della particella. Allora, la lunghezza spazio-temporale di un qualunque cammino che congiunge i punti  $x' = (ct', \mathbf{x}')$  e  $x'' = (ct'', \mathbf{x}'')$  è dato dall'integrale di linea

$$\int_{x'}^{x''} ds = c \int_{t'}^{t''} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{V}^2}{c^2}} dt \quad (5.12)$$

Questa è una quantità invariante e (divisa per  $c$ ) ha il significato fisico di *tempo proprio* complessivo di un cammino da  $x'$  a  $x''$  lungo la linea  $\gamma$ . In altre parole, se la particella fosse dotata di un cronometro che è stato azzerato quando la particella si trovava in  $\mathbf{x}'$  al tempo  $t'$ , la formula (5.12) dà il tempo che segna il cronometro quando la particella arriva in  $\mathbf{x}''$  al tempo  $t''$ .

Poiché  $\int_{x'}^{x''} ds$  è una quantità invariante, e in effetti è la sola quantità invariante che si può formare con la velocità  $\mathbf{v}$  e il tempo  $dt$ , l'azione di una particella relativistica è proporzionale ad essa:

$$\mathcal{S} = \alpha \int_{x'}^{x''} ds = -\alpha c \int_{t'}^{t''} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} dt$$

Il valore della costante di proporzionalità  $\alpha$  si determina sviluppando  $L$  in serie di potenze di  $v/c$ . Tralasciando termini di ordine superiore, si ottiene

$$L = \alpha c \sqrt{1 - \frac{\mathbf{V}^2}{c^2}} = \alpha c - \frac{\alpha \mathbf{V}^2}{c}$$

Il termine costante non incide sulle equazioni del moto e quindi si può omettere. Confrontando  $L$  con l'espressione classica  $m\mathbf{V}^2/2$  si ottiene  $\alpha = -mc$ . L'azione per una particella libera è quindi

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_m = -mc \int_{x'}^{x''} ds = -mc^2 \int_{t'}^{t''} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{V}^2}{c^2}} dt \quad (5.13)$$

e la corrispondente funzione di Lagrange è

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{V}^2}{c^2}} \quad (5.14)$$

in accordo (come ci aspettavamo) con la prima legge di Newton espressa dalle equazioni (5.1) e (5.2).

**Box 5.2 — Impulso ed energia di una particella relativistica.** L'impulso è definito dalla (1.1) ed è quindi

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{V}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \quad (5.15)$$

Per velocità piccole  $v \ll c$  si riduce all'espressione newtoniana  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ . L'energia è definita dalla (1.8):

$$\mathcal{E} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{m\mathbf{v}^2}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} \quad (5.16)$$

Questa formula è di notevole importanza e mostra che per  $\mathbf{v} = 0$  l'energia di una particella libera non si annulla, ma assume il valore finito  $\mathcal{E}_0 = mc^2$  che costituisce l'energia a riposo della particella.

**Box 5.3 — Quadri-velocità e quadri-impulso.** La quadri-velocità  $U$  è definita come il vettore tangente della linea di universo che rappresenta il movimento di un punto materiale nello spazio-tempo, quando la linea di universo è parametrizzata in termini del tempo proprio  $\tau$  o, equivalentemente, della lunghezza d'arco  $s = c\tau$ . Conveniamo di scegliere quest'ultima come parametro. Allora

$$U = \frac{dX}{ds} \equiv \dot{x} \quad (5.17)$$

Si osservi che

$$U^2 = U_\mu U^\mu = \left(\frac{ds}{ds}\right)^2 = 1 \quad (5.18)$$

(avendo calcolato il prodotto scalare nel sistema inerziale istantaneo in cui la particella è a riposo).

In un sistema di riferimento inerziale  $ds = c\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} dT$  (dalla (5.11)) e quindi le componenti di  $U = (U^0, \mathbf{U})$  sono

$$U^0 = c \frac{dT}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{V}^2/c^2}} = \gamma \quad (5.19)$$

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{X}}{ds} = \frac{d\mathbf{X}}{dT} \frac{dT}{ds} = \gamma \frac{\mathbf{V}}{c} \quad (5.20)$$

dove

$$\gamma = \gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{V}^2/c^2}} \quad (5.21)$$

Possiamo verificare quanto precedentemente trovato:

$$U^2 = (U^0)^2 - \mathbf{U}^2 = \gamma^2 - \gamma^2 \frac{V^2}{c^2} = \gamma^2 \frac{1}{\gamma^2} = 1$$

Il quadri-impulso di una particella di massa  $m$  è

$$P = mcU \quad (5.22)$$

che ha quindi componenti

$$P = (mc\gamma, m\gamma\mathbf{v}) = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p}) \quad (5.23)$$

La norma di  $P$  è  $P^2 = m^2c^2$ .

Se  $m = 0$ , non è definito il tempo proprio e  $U$  è definito rispetto ad un parametro arbitrario:

$$U = \frac{dX}{d\lambda}$$

Il corrispondente impulso è definito come il quadrivettore di componente temporale  $\mathcal{E} = |\mathbf{P}|/c$  e componente spaziale  $\mathbf{P}$ .

### 5.1.3 Moto geodetico in relatività generale

Si rimanda alla lezione svolta in classe

## 5.2 Trasformazioni di Lorentz e tensori

Le trasformazioni di Lorentz sono l'analogo per  $\mathbb{R}^{1,3}$  delle trasformazioni ortogonali per  $\mathbb{R}^3$ : sono le trasformazioni  $\Lambda$  che non cambiano i prodotti scalari e quindi tali che

$$\Lambda(u) \cdot \Lambda(v) = u \cdot v \quad (5.24)$$

per ogni coppia di 4-vettori  $u, v$  in  $\mathbb{R}^{1,3}$ . Da un punto di vista fisico rappresentano le trasformazioni da un sistema inerziale ad un altro sistema inerziale e sono quindi l'analogo delle spinte di Galileo. Per come sono definite, le trasformazioni di Lorentz includono anche le rotazioni, che chiaramente non cambiano i prodotti scalari. Le trasformazioni di Lorentz sono quindi trasformazioni caratterizzate 6 parametri indipendenti: 3 per le rotazioni, che sono descritte da un versore unitario  $\hat{\mathbf{n}}$  che individua l'asse di rotazione e da un angolo  $\theta$  attorno all'asse di rotazione, e 3 per le spinte di Lorentz, che sono caratterizzate dalla velocità  $\mathbf{u}$  a cui si vuole spingere il sistema.

### 5.2.1 Rapidità

Le spinte di Lorentz sono note, probabilmente dalle scuole superiori. In particolare è noto che, la spinta nella direzione  $\mathbf{e}_x$  di velocità  $u$  è

$$ct' = \gamma \left( ct - \frac{u}{c}x \right) \quad x' = \gamma \left( x - \frac{u}{c}ct \right) \quad (5.25)$$

dove  $\gamma = \gamma(u)$ , cioè

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -u/c \\ -u/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

È conveniente riscrivere la trasformazione(5.26) in termini della *rapidità*  $w$  definita dall'equazione

$$\frac{u}{c} = \tanh w. \quad (5.27)$$

Allora, da  $(\cosh w)^2 - (\sinh w)^2 = 1$  otteniamo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\tanh w)^2}} = \cosh w$$

Possiamo quindi riscrivere la (5.26) come

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh w & -\sinh w \\ -\sinh w & \cosh w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

cosicché una trasformazione di Lorentz appare come una *rotazione iperbolica* di “angolo”  $w$ .

L'importanza di utilizzare la rapidità per descrivere una spinta di Lorentz è che la composizione di trasformazioni in una data direzione è *additiva nella rapidità* (come lo sono le rotazioni attorno allo stesso asse):

$$\Lambda(w_1)\Lambda(w_2) = \Lambda(w_1 + w_2), \quad (5.29)$$

come si dimostra facilmente usando la formula

$$\tanh(w_1 + w_2) = \frac{\tanh w_1 + \tanh w_2}{1 + \tanh w_1 \tanh w_2}$$

Si osservi che da questa formula segue immediatamente l'usuale formula di addizione delle velocità

$$\frac{u_1 + u_2}{1 + u_1 u_2 / c^2}.$$

La caratterizzazione delle spinte di Lorentz come rotazioni iperboliche segue immediatamente dal segno “-” nella metrica (5.4): sono proprio le rotazioni iperboliche a preservare la forma quadratica  $c^2 t^2 - x^2$ , mentre nel caso euclideo sono le usuali rotazioni con seni e coseni che conservano la norma  $x^2 + y^2$ .

**Box 5.4 — Moto uniformemente accelerato.** La nozione di accelerazione non ha un significato geometrico invariante, in quanto la velocità  $d\mathbf{x}/dt$  dipende dalla scelta del sistema di riferimento. Si ha una nozione di moto uniformemente accelerato se si definisce l'accelerazione uniforme rispetto al sistema di riferimento istantaneo della particella. In questo sistema la 4-velocità  $U$  è  $(c, 0, 0, 0)$ . La 4-accelerazione è definita come

$$A = \frac{dU}{d\tau} \equiv \dot{U}$$

dove  $\tau$  è il tempo proprio. Notiamo che poiché  $U \cdot U = c^2$ , per cui  $U \cdot \dot{U} + \dot{U} \cdot U = 0 \Rightarrow A \cdot U = 0$ , cosicché la 4-accelerazione ha solo componenti spaziali, che per comodità scegliamo lungo  $\mathbf{e}_x$ :  $A = (0, \alpha, 0, 0)$ .  $\alpha = \text{costante}$  è la condizione che definisce il moto uniformemente accelerato in modo Lorentz-invariante. In un sistema di riferimento inerziale,  $U' = \gamma(c, v, 0, 0)$ . Si può verificare questo notando che  $U$  si trasforma come un vettore in una trasformazione di Lorentz, dalla (5.26):

$$\begin{pmatrix} U^{0'} \\ U^{1'} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^0 \\ U^1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo adesso l'accelerazione  $A'$  nel sistema inerziale; poiché  $A$  si trasforma come

un 4-vettore abbiamo

$$\begin{pmatrix} A^{0'} \\ A^{1'} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Abbiamo così

$$A^{1'} = \frac{dU^{1'}}{d\tau} = \gamma\alpha$$

vale a dire

$$\frac{d\gamma v}{dt} = \alpha \quad (5.30)$$

avendo usato  $dt = \gamma d\tau$ .

Esplicitiamo adesso il primo membro della (5.30):

$$\frac{d\gamma v}{dt} = v \frac{d\gamma}{dt} + \gamma \frac{dv}{dt} = \gamma \frac{dv}{dt} \left( 1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right) = \gamma^3 \frac{dv}{dt}$$

Quindi l'equazione del moto diventa

$$\frac{dv}{dt} = \alpha \gamma^{-3} = \alpha \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2} \quad (5.31)$$

Semplice integrazione fornisce

$$v(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + \alpha^2 t^2 / c^2}}$$

se assumiamo  $v = 0$  per  $t = 0$ . Si lascia come esercizio mostrare che per scelta opportuna dell'altra costante di integrazione si ottiene la legge oraria

$$z^2 - c^2 t^2 = \frac{c^4}{\alpha^2}$$

che per ovvie ragioni è chiamata moto iperbolico. La corrispondente soluzione non relativistica dà  $z = \frac{1}{2}\alpha t^2$ , cioè moto parabolico. Si osservi che  $\alpha = \infty$  implica  $z = \pm ct$ , quindi l'accelerazione propria di un fotone è infinita.

Osserviamo che questo è il moto di una particella di massa  $m$  su cui agisce una forza costante  $F$ . In questo caso, l'impulso soddisfa l'equazione

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} = \text{costante}$$

e quindi cresce linearmente nel tempo. Tuttavia, per la relazione relativistica tra impulso e velocità (5.15),

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{V}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \mathbf{F}$$

che è proprio la (5.30) per  $\alpha = F/m$  nella direzione del moto.

### 5.2.2 Il gruppo di Lorentz e il gruppo di Poincaré

Le proprietà di una generica trasformazione di Lorentz possono essere studiate passando alla rappresentazione matriciale della (5.24) che è

$$(\Lambda u)^T \eta \Lambda v = u^T \eta v \quad \Rightarrow \quad u^T \Lambda^T \eta \Lambda v = u^T \eta v$$

Poiché quest'ultima identità deve valere per ogni coppia di 4-vettori  $u, v$ , abbiamo che la (5.24) diventa

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (5.32)$$

L'insieme delle trasformazioni  $\Lambda$  che soddisfa questa condizione è un gruppo (esercizio: dimostrarlo!), il *gruppo di Lorentz* che è denotato  $\mathcal{L}$  o anche  $O(1,3)$  (in analogia con il gruppo delle rotazioni).

Dalla (5.32) seguono due importanti proprietà di una trasformazione di Lorentz. La prima segue dal calcolo del determinante di ambo i membri della (5.32):

$$\det(\Lambda)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det \Lambda = \pm 1 \quad (5.33)$$

Adesso l'altra: passando alle componenti della (5.32),  $\Lambda_\sigma^\mu \eta_{\mu\nu} \Lambda_\rho^\nu = \eta_{\rho\sigma}$  e prendendone la componente  $\sigma = \rho = 0$ , otteniamo  $\eta_{\mu\nu} \Lambda_0^\mu \Lambda_0^\nu = 1$  (essendo  $\eta_{00} = 1$ ), da cui

$$(\Lambda_0^0)^2 - (\Lambda_0^k)^2 = 1, \quad \Rightarrow \quad (\Lambda_0^0)^2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \Lambda_0^0 \geq 1 \quad \text{oppure} \quad \Lambda_0^0 \leq -1 \quad (5.34)$$

Questa è la seconda importante proprietà di una trasformazione di Lorentz.

Il gruppo di Lorentz è quindi l'unione dei quattro pezzi che si ottengono combinando le due possibilità per il determinante con le due possibilità per  $\Lambda_0^0$ . Denotiamo con  $+$  e  $-$  le due possibilità per il determinante e con  $\uparrow$  e  $\downarrow$  le due possibilità per  $\Lambda_0^0$ . Quindi, con ovvio significato dei simboli, il gruppo di Lorentz si spezza nell'unione di 4 pezzi disgiunti:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow \quad (5.35)$$

I 4 pezzi non solo sono disgiunti, ma sono anche *disconnessi*: essendo definiti da funzioni che assumono valori discreti, non si può passare da un pezzo all'altro mediante una trasformazione continua.

Il rappresentante più semplice del pezzo  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  è l'identità

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  è proprio l'insieme delle trasformazioni Lorentz che sono connesse in modo continuo con l'identità. Esse trasformano una base inerziale in una base inerziale, cioè preservano l'orientazione positiva della base formata dai versori spaziali e mantengono l'orientamento verso il futuro del versore temporale. L'insieme di queste trasformazioni è in effetti un gruppo, noto come il *gruppo di Lorentz proprio* ( $\det=+1$ ) *ortocrono* ("che è giusto nel tempo") o anche come *gruppo di Lorentz ristretto*.

Il rappresentante più semplice del pezzo  $\mathcal{L}_-^\uparrow$  è l'inversione spaziale o parità

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

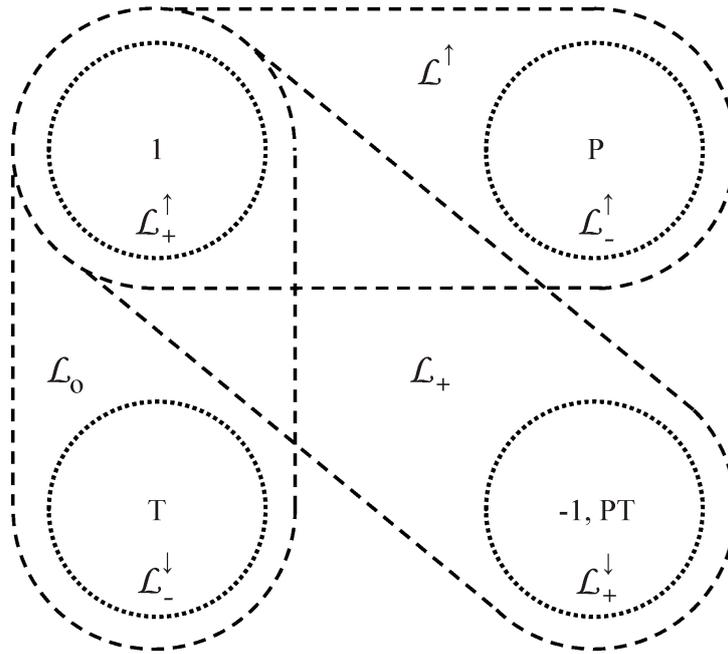


Figura 5.1: Struttura del gruppo di Lorentz

che ha determinate  $-1$  e non cambia l'orientamento temporale. In effetti, tutti gli elementi di  $\mathcal{L}_-^\uparrow$  si ottengono agendo con  $P$  sugli elementi di  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  (si veda la figura 5.1). Poiché  $P^2 = \mathbf{1}$ , questo insieme non è un gruppo. È l'insieme  $\mathcal{L}^\uparrow = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow$  che ha struttura di gruppo, noto come *gruppo di Lorentz ortocrono*.

Il rappresentante più semplice del pezzo  $\mathcal{L}_-^\downarrow$  è l'inversione temporale

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha determinate  $-1$  e cambia l'orientamento temporale. Tutti gli elementi di  $\mathcal{L}_-^\uparrow$  si ottengono agendo con  $T$  sugli elementi di  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ . Anche questo insieme non è un gruppo; lo è l'insieme  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow$  che è noto come *gruppo di Lorentz ortocoro* (“che è giusto nello spazio”).

Infine, il rappresentante più semplice del pezzo  $\mathcal{L}_+^\downarrow$  è l'inversione spazio-temporale

$$I_{st} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{1} = PT$$

che ha determinate  $+1$  e cambia l'orientamento temporale. Tutti gli elementi di  $\mathcal{L}_+^\downarrow$  si ottengono agendo con  $I_{st}$  sugli elementi di  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ . Anche questo insieme non è un gruppo, mentre  $\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow$  ha struttura di gruppo ed è noto come *gruppo di Lorentz proprio*.

Il *gruppo di Poincaré*  $\mathcal{P}$ , detto anche *gruppo di Lorentz inomogeneo*, nasce dall'unione delle trasformazioni di Lorentz con le traslazioni spazio-temporali  $x \rightarrow x + \epsilon$ , dove  $\epsilon$  è un 4-vettore arbitrario. Si tratta dunque di un gruppo a  $6+4=10$  parametri.

### 5.2.3 Tensori nello spazio di Minkowski

La quadri-velocità, la quadri-accelerazione e il quadri-impulso sono esempi di 4-vettori. Un vettore  $V$  si trasforma per trasformazioni di Lorentz  $\Lambda$  come  $V' = \Lambda V$ ; in componenti

$$V'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} V^{\nu} \quad (5.36)$$

(che può essere letto come l'usuale prodotto righe per colonne). I tensori sono una naturale generalizzazione nella nozione di vettore. Incominciamo con i tensori del secondo ordine.

#### Tensori del secondo ordine

Un tensore del secondo ordine  $T$  può essere definito come un operatore lineare che prende in ingresso un vettore  $U$ , restituisce il vettore  $T(U)$  ed è lineare:

$$T(\alpha U_1 + \beta U_2) = \alpha T(U_1) + \beta T(U_2) \quad (5.37)$$

Equivalentemente,  $T$  può essere definito come un operatore che prende in ingresso due vettori  $U$  e  $V$  e restituisce un numero  $T(U, V)$  ed è lineare in entrambi gli argomenti:

$$T(\alpha U_1 + \beta U_2, V) = \alpha T(U_1, V) + \beta T(U_2, V) \quad (5.38)$$

$$T(U, \alpha V_1 + \beta V_2) = \alpha T(U, V_1) + \beta T(U, V_2) \quad (5.39)$$

Dato una base inerziale  $e_{\alpha}$ , si definiscono le componenti covarianti del tensore  $T_{\mu\nu} \equiv T(e_{\mu}, e_{\nu})$ . L'azione del tensore su un vettore  $V^{\nu} e_{\nu}$  è dunque, per linearità,  $T(e_{\mu}, V^{\nu} e_{\nu}) = T_{\mu\nu} V^{\nu} \equiv T \cdot V$ , ne segue che l'azione bilineare su due vettori  $U$  e  $V$  che produce un numero è  $T_{\mu\nu} U^{\mu} V^{\nu}$ . Si passa alle componenti controvarianti del tensore, usando la stessa regola che abbiamo usato per i vettori:  $T^{\mu\nu} = \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} T_{\sigma\rho}$ . In questo caso si possono avere anche componenti miste:  $T^{\mu}_{\nu} = \eta^{\mu\sigma} T_{\sigma\nu}$  e  $T_{\nu}^{\mu} = \eta^{\mu\sigma} T_{\nu\sigma}$ . Si osservi che in generale  $T^{\mu}_{\nu} \neq T_{\nu}^{\mu}$ . Un tensore è dunque rappresentabile come una matrice e, per distinguere le varie rappresentazioni (controvarianti, covarianti o miste) scriveremo

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}$$

Per trasformazione di Lorentz  $\Lambda$  un tensore  $T = T_{\mu\nu}$  si trasforma come

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\rho} T^{\rho\sigma} \Lambda^{\nu}_{\sigma} \quad \text{in forma matriciale: } T' = \Lambda T \Lambda^T \quad (5.40)$$

L'esempio paradigmatico di tensore del secondo ordine è la metrica  $\eta_{\mu\nu}$ , con  $\eta_{\mu\nu} U^{\mu} V^{\nu}$  che rappresenta il prodotto scalare tra i due vettori. La metrica è anche un esempio di tensore simmetrico, cioè di tensore tale che

$$T(U, V) = T(V, U) \quad \Leftrightarrow \quad T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} \quad (5.41)$$

L'altra classe importante di tensori del secondo ordine è costituita dai tensori antisimmetrici, cioè tali che

$$T(U, V) = -T(V, U) \quad \Leftrightarrow \quad T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu} \quad (5.42)$$

**Bivettori**

In 4 dimensioni, c'è una corrispondenza tra coppie di 3-vettori e tensori anti-simmetrici del secondo ordine. Infatti, un tensore anti-simmetrico del secondo ordine  $F$  può essere scritto sempre nella seguente forma matriciale controvariante

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{E}^T \\ \mathbf{E} & -B \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

dove  $E_x, E_y, E_z$  e  $B_x, B_y, B_z$  sono le componenti di due 3-vettori,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , rispettivamente, e  $B$  è la matrice corrispondente a  $\mathbf{B}$  secondo la (4.32). Per questa ragione un tensore anti-simmetrico del secondo ordine è sovente chiamato un *bivettore*.

Per verificare che la parametrizzazione di  $F$  come  $F^{\mu\nu} = (\mathbf{E}, \mathbf{B})$  ha significato invariante, studiamo il comportamento di  $F^{\mu\nu}$  per rotazioni, cioè per

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

dove  $R$  è una rotazione tridimensionale. Allora dalle (5.40) e (4.33), si ottiene

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}', \mathbf{B}') &= \Lambda F \Lambda^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{E}^T \\ \mathbf{E} & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{E}^T \\ R\mathbf{E} & -RB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{E}^T R^T \\ R\mathbf{E} & -RBR^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(\mathbf{E} R^T) \\ R\mathbf{E} & -RBR^T \end{pmatrix} = (R\mathbf{E}, R\mathbf{B}) \end{aligned}$$

Il che dimostra che la decomposizione  $F^{\mu\nu} = (\mathbf{E}, \mathbf{B})$  ha significato invariante e rappresenta il tensore in termini delle sue componenti vettoriali  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  rispetto ad un sistema di riferimento. Chiameremo  $\mathbf{E}$  la *parte "elettrica"* di  $F$  e  $\mathbf{B}$  la sua *parte "magnetica"*.

Le componenti covarianti di  $F$  si ottengono mediante l'usuale regola

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} F^{\rho\sigma} \eta_{\sigma\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E}^T \\ -\mathbf{E} & -B \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

Il che significa che  $F_{\mu\nu} = (-\mathbf{E}, \mathbf{B})$ , cioè nel passaggio dalle componenti controvarianti a quelle covarianti una delle due componenti cambia segno, analogamente a quello che accade per le componenti di un 4-vettore.

Mentre un vettore  $V$  è caratterizzato da un solo invariante, la sua lunghezza al quadrato  $V^2$ , un bivettore ha due invarianti: il suo "modulo quadro"

$$\|F\|^2 = \frac{1}{2} F^2 \equiv \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (5.45)$$

e il suo determinante  $\det F$ . Si lascia per esercizio dimostrare che (si veda il box 5.5)

$$F^2 = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \quad (5.46)$$

$$\det F = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 \quad (5.47)$$

Studiamo adesso il comportamento di  $F$  per spinte di Lorentz. Consideriamo la spinta  $\Lambda$  di velocità  $\mathbf{u}$ . Per comodità, scegliamo l'asse delle  $x$  lungo la direzione di  $\mathbf{u}$ , per cui  $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x$ , dove  $u = |\mathbf{u}|$ . Allora

$$\Lambda = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -u/c & 0 & 0 \\ -u/c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

(si osservi che  $\Lambda^T = \Lambda$ ). Quindi,

$$(\mathbf{E}', \mathbf{B}') = \gamma^2 \begin{pmatrix} 1 & -u/c & 0 & 0 \\ -u/c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -u/c & 0 & 0 \\ -u/c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il calcolo è un po' noioso, ma almeno una volta nella vita andrebbe fatto. Il risultato finale per la parte elettrica è

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \quad (5.49)$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma \left( \mathbf{E}_{\perp} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B} \right), \quad (5.50)$$

dove  $\mathbf{E}_{\parallel}$  è la componente di  $\mathbf{E}$  lungo la direzione di  $\mathbf{u}$  (per la nostra scelta di coordinate,  $\mathbf{E}_{\parallel} = E_x \mathbf{e}_x$ ) e  $\mathbf{E}_{\perp}$  la componente di  $\mathbf{E}$  nel piano ortogonale a  $\mathbf{u}$  (nel nostro caso, il piano  $\mathbf{e}_y$ - $\mathbf{e}_z$ ) e, per la parte magnetica,

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \quad (5.51)$$

$$\mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \left( \mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{E} \right), \quad (5.52)$$

(stesse convenzioni di prima).

**Box 5.5 — Prodotto scalare di bivettori e azione di un bivettore su un vettore.** È utile disporre di formule che esprimano operazioni sui bivettori in termini di operazioni sui vettori tridimensionali che li compongono. Abbiamo già visto che  $F^2 = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)$ . Calcoliamo  $F \cdot G$ , per  $F = (\mathbf{E}, \mathbf{B})$  e  $G = (\mathbf{D}, \mathbf{H})$ :

$$\begin{aligned} F \cdot G &= F_{\mu\nu} G^{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} G^{\mu\nu} = \text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{E}^T \\ \mathbf{E} & -B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & -H \end{pmatrix} \\ &= \text{Tr} \begin{pmatrix} -\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} & \bullet \\ \bullet & -\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + B^T H \end{pmatrix} \\ &= -2\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \text{Tr} B^T H \end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned} \text{Tr } B^T H &= \text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & -B_z & B_y \\ B_z & 0 & -B_x \\ -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y \\ -H_z & 0 & H_x \\ H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{Tr} \begin{pmatrix} B_z H_z + B_y H_y & \bullet & \bullet \\ \bullet & B_z H_z + B_x H_x & \bullet \\ \bullet & \bullet & B_y H_y + B_x H_x \end{pmatrix} = 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \end{aligned}$$

Dunque,

$$F \cdot G = 2(-\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (5.53)$$

da cui segue la (5.46) come caso particolare  $F = G$ .

Consideriamo adesso le componenti controvarianti del 4-vettore  $F^{\mu\nu}U_\nu$ , dove  $U_\mu$  sono le componenti covarianti di un generico 4-vettore  $U$ :

$$F^{\mu\nu}U_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^0 \\ -U_x \\ -U_y \\ -U_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \cdot \mathbf{E} \\ U_0 \mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

### Problema 5.1 — Decomposizione di un tensore del secondo ordine nelle sue parti irriducibili.

Dimostrare che in maniera analoga al caso tridimensionale (Box 4.2), un tensore del secondo ordine si decompone in tre parti, con le trasformazioni di Lorentz che agiscono in maniera indipendente su ciascun termine della somma, e che l'analogo della (5.55) è

$$\mathbf{4} \times \mathbf{4} = \mathbf{1} + \mathbf{6} + \mathbf{9}. \quad (5.55)$$

Questa è la decomposizione di una rappresentazione *riducibile*  $\mathbf{4} \times \mathbf{4}$  del gruppo di Lorentz nelle sue componenti *irriducibili*  $\mathbf{1}$ ,  $\mathbf{6}$  e  $\mathbf{9}$ .

### Tensori di ordine arbitrario

La nozione di tensore come “macchina” che prende in ingresso dei vettori, restituisce un numero ed è lineare in tutti gli argomenti può essere estesa da due vettori ad un numero  $N$  arbitrario di vettori in ingresso;  $N$  è l'ordine (o rango) del tensore. Per esempio un tensore del terzo ordine è una funzione a valori reali di 3 vettori,  $T = T(U, V, W)$ , separatamente lineare in ciascun argomento;  $T_{\mu\nu\sigma} \equiv T(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_\sigma)$  sono le componenti covarianti del tensore rispetto ad una data base inerziale. Anche in questo caso si possono abbassare e alzare gli indici usando il tensore metrico e ottenere la rappresentazione controvariante del tensore e tutte le rappresentazioni miste.

Un tensore di ordine arbitrario  $T = T(U, V, W, \dots)$  è detto *completamente simmetrico* se  $T$  non cambia per uno scambio di una qualunque coppia dei suoi argomenti; nel linguaggio degli indici, questo significa che  $T^{\mu\nu\dots}$  non cambia se scambiamo due qualunque dei suoi indici. Un tensore di ordine arbitrario  $T = T(U, V, W, \dots)$  è detto *completamente anti-simmetrico* se ogni volta che scambiamo due dei suoi argomenti (o due dei suoi indici),

si ha un cambiamento di segno; il bivettore ne è un esempio. Un tensore completamente anti-simmetrico di grado  $N$  è anche chiamato  $N$ -forma.

Descriviamo adesso le tre importanti operazioni sui tensori che permettono di formare nuovi tensori a partire da tensori dati. Sono definite in maniera del tutto analoga al caso euclideo.

### Contrazione

Dato un tensore, per esempio il tensore  $T_{\mu\nu\sigma}$  di ordine 3, si può passare ad un tensore di ordine 1 (vettore) abbassando (o alzando) un indice, uguagliandolo ad uno degli altri indici e sommando sull'indice ripetuto:  $T^{\mu\nu\sigma} \rightarrow T^{\mu}_{\nu}{}^{\sigma} \rightarrow T^{\mu}{}^{\sigma} \equiv U^{\sigma}$ . Per quanto questa operazione sia stata descritta nella rappresentazione in componenti del tensore, ha significato invariante e permette di ottenere un tensore di ordine  $N - 2$  a partire da un tensore di ordine  $N$ .

### Prodotto tensore

Dati due vettori  $A$  e  $B$ , il loro prodotto tensoriale è il tensore del secondo ordine  $A \otimes B$  definito dalla sua azione su una coppia di vettori  $U, V$  come

$$A \otimes B(U, V) = (A \cdot U)(B \cdot V) \quad (5.56)$$

In particolare, se  $e_{\mu}$  è una base inerziale, allora

$$e_{\mu} \otimes e_{\nu}(U, V) = U_{\mu}V_{\nu}$$

Possiamo dunque riguardare  $e_{\mu} \otimes e_{\nu}$  come una base per i tensori del secondo ordine:

$$T = T^{\mu\nu} e_{\mu} \otimes e_{\nu},$$

riottenendo così la definizione precedentemente data di tensore. In maniera analoga si definisce una base  $e_{\mu} \otimes e_{\nu} \otimes e_{\sigma}$  per i tensori del terzo ordine e così via. In questo modo risulta definito il prodotto tensore per due tensori arbitrari, per esempio,

$$T = F \otimes G = F^{\mu\nu} e_{\mu} \otimes e_{\nu} G^{\sigma\rho} e_{\rho} \otimes e_{\sigma} = \underbrace{F^{\mu\nu} G^{\sigma\rho}}_{T^{\mu\nu\sigma\rho}} e_{\mu} \otimes e_{\nu} \otimes e_{\rho} \otimes e_{\sigma}$$

In generale, se  $F$  è di ordine  $N$  e  $G$  è di ordine  $M$ ,  $T = F \otimes G$  è di ordine  $N + M$ .

### Prodotto esterno

Il prodotto esterno di due vettori  $A$  e  $B$  è definito antisimmettizzando il loro prodotto tensore:

$$A \wedge B = A \otimes B - B \otimes A \quad (5.57)$$

Dunque, il prodotto esterno ha le seguenti importanti proprietà:

$$A \wedge B = -B \wedge A \quad (5.58)$$

$$A \wedge A = 0 \quad (5.59)$$

In particolare, se  $e_{\mu}$  è una base inerziale per i vettori, allora  $e_{\mu} \wedge e_{\nu} = e_{\mu} \otimes e_{\nu} - e_{\nu} \otimes e_{\mu}$  è una base per i tensori totalmente anti-simmetrici del secondo ordine:

$$F = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} e_{\mu} \wedge e_{\nu}$$

Si osservi il fattore  $1/2$  a secondo membro che nasce dal fatto che

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu &= \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu + \frac{1}{2} F^{\nu\mu} \mathbf{e}_\nu \otimes \mathbf{e}_\mu = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \mathbf{e}_\nu \otimes \mathbf{e}_\mu \\ &= \frac{1}{2} F^{\mu\nu} (\mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu - \mathbf{e}_\nu \otimes \mathbf{e}_\mu) = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \mathbf{e}_\mu \wedge \mathbf{e}_\nu \end{aligned}$$

In maniera analoga, si definisce una base  $\mathbf{e}_\mu \wedge \mathbf{e}_\nu \wedge \mathbf{e}_\sigma$  per i tensori totalmente antisimmetrici del terzo ordine. Adesso il fattore numerico richiesto è  $1/3!$ , perché ci sono  $3!$  permutazioni di  $\mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu \otimes \mathbf{e}_\rho$  che danno lo stesso contributo: se  $G$  è una 3-forma di componenti  $G^{\mu\nu\sigma}$ , allora

$$G = \frac{1}{3!} G^{\mu\nu\sigma} \mathbf{e}_\mu \wedge \mathbf{e}_\nu \wedge \mathbf{e}_\sigma \quad (5.60)$$

Per una  $N$ -forma, il fattore numerico è  $1/N!$ . Si osservi che non esistono  $N$ -forme per  $N > 4$  (vedere Box 4.3).

L'insieme di tutte le forme forma un'algebra di Grassman con prodotto anticommutativo  $\wedge$ . I vettori della base inerziale  $\mathbf{e}_\alpha$  sono i generatori dell'algebra con relazioni fondamentali di anticommutazione

$$\mathbf{e}_\alpha \wedge \mathbf{e}_\beta = -\mathbf{e}_\beta \wedge \mathbf{e}_\alpha \quad (5.61)$$

### Significato geometrico del prodotto esterno e dualità

Quanto abbiamo visto per lo spazio euclideo si estende alle forme sullo spazio di Minkowski, con la sola differenza che adesso abbiamo più strutture geometriche: linee rette (vettori); piani (2-forme), iper-piani (3 forme) e lo spazio-tempo (4-forme).

Data una base inerziale  $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , due 4-vettori (distinti)  $A = A^0 \mathbf{e}_0 + \mathbf{A}$  e  $B = B^0 \mathbf{e}_0 + \mathbf{B}$  in  $\mathbb{R}^{1,3}$  definiscono un parallelogramma e quindi un piano rappresentato dalla 2-forma

$$\begin{aligned} A \wedge B &= A^0 \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{B} - B^0 \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \\ &= (A^0 B^x - A^x B^0) \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_x + (A^0 B^y - A^y B^0) \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_y + (A^0 B^z - A^z B^0) \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_z \\ &\quad + (A^y B^z - A^z B^y) \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z + (A^z B^x - A^x B^z) \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_x + (A^x B^y - A^y B^x) \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

Le 6 componenti di  $A \wedge B$  sono le proiezioni del parallelogramma sui 6 piani. Se adesso passiamo alla 3-forma  $A \wedge B \wedge C$ , questa rappresenta un parallelepipedo in  $\mathbb{R}^{1,3}$  che ha componenti nei 4 possibili spazi 3-dimensionali (iper-piani)

$$\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z. \quad (5.62)$$

Tre di questi hanno una componente temporale, mentre il quarto è puramente spaziale. Le componenti della 3-forma  $A \wedge B \wedge C$  rispetto alla base (5.62) sono le proiezioni delle facce del parallelepipedo sui 4 iper-piani rappresentati dai vettori della base (5.62). Se infine si passa a  $A \wedge B \wedge C \wedge D$  si ottiene un parallelepipedo quadri-dimensionale, cioè una 4-forma; tutte le 4-forme sono un multiplo di  $\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z$ .

**Tensori di Levi-Civita** Le proprietà del tensore di Levi-Civita o forma di volume in  $\mathbb{R}^{1,3}$  sono analoghe a quelle della forma di volume in  $\mathbb{R}^3$ , adesso occorre però fare attenzione a indici bassi e alti perché le componenti controvarianti di un 4-vettore sono differenti dalle sue componenti covarianti. La definizione è analoga alla (4.24)

$$\text{Vol} = -\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z \quad (5.63)$$

dove il segno meno serve a garantire che il volume sia positivo. Come per il caso tri-dimensionale (esempio 4.5),  $\text{Vol}$  è invariante per trasformazioni di Lorentz a determinante  $+1$  (che fanno passare da una base inerziale ad un'altra con la stessa orientazione). Analogamente al caso tri-dimensionale (a meno del segno) vale la formula

$$\text{Vol}(A, B, C, D) = -\det(A \ B \ C \ D) \quad (5.64)$$

dove adesso occorre specificare che si intende che i vettori nel determinante siano rappresentati dalle loro componenti controvarianti. Allora, fissata una base inerziale  $\{\mathbf{e}_\alpha\}$  e posti  $A = A^\mu \mathbf{e}_\mu$ ,  $B = B^\nu \mathbf{e}_\nu$ ,  $C = C^\sigma \mathbf{e}_\sigma$  e  $D = D^\rho \mathbf{e}_\rho$ , si ottiene

$$\text{Vol}(A, B, C, D) = -\det(\mathbf{e}_\mu \ \mathbf{e}_\nu \ \mathbf{e}_\sigma \ \mathbf{e}_\rho) A^\mu B^\nu C^\sigma D^\rho$$

Quindi le componenti di  $\text{Vol}$  rispetto alla base inerziale  $\{\mathbf{e}_\alpha\}$  sono

$$\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} = -\det(\mathbf{e}_\mu \ \mathbf{e}_\nu \ \mathbf{e}_\sigma \ \mathbf{e}_\rho) \quad (5.65)$$

ossia

$$\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} = \begin{cases} -1 & \text{se } (\mu\nu\sigma\rho) \text{ permutazione pari di } (1, 2, 3, 4) \\ +1 & \text{se } (\mu\nu\sigma\rho) \text{ permutazione dispari di } (1, 2, 3, 4) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (5.66)$$

Si passa alle componenti controvarianti di  $\text{Vol}$  con l'usuale regola

$$\epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \eta^{\mu_1\nu_1} \eta^{\mu_2\nu_2} \eta^{\mu_3\nu_3} \eta^{\mu_4\nu_4} \epsilon_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$$

**Dualità tra forme** Per ogni 4-vettore  $J$  (1-forma), ogni bivettore  $F$  (2-forma), e 3-forma  $N$ , si possono costruire nuove tensori (forme) definite da

$$*J_{\mu\nu\rho} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^\sigma, \quad *F = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}, \quad *N_\mu = \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} N^{\nu\rho\sigma} \quad (5.67)$$

Queste relazioni definiscono la *dualità* (di Hodge) tra forme:  $*J$  è detto il duale di  $J$ ,  $*F$  il duale di  $F$  e  $*N$  il duale di  $N$ .

**Problema 5.2** Dimostrare che

$$\epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = -\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} \quad (5.68)$$

(Sono quindi le componenti controvarianti che hanno le stesse proprietà delle componenti della forma di volume in 3 dimensioni.)

**Problema 5.3** Mediante una trasformazione di Lorentz mostrare che  $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$  e  $\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$  hanno gli stessi valori in tutte le basi inerziali. (Si ricordi che una base inerziale  $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  è definita dall'aver  $\mathbf{e}_0$  che punta verso il futuro e con i vettori spaziali  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  ortogonali a  $\mathbf{e}_0$  che formano una base ortonormale destrorsa.)

**Problema 5.4** Quali sono le componenti di  $\text{Vol}$  rispetto ad una base  $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  con  $\mathbf{e}_0$  che punta verso il passato? E con la base  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  sinistrorsa?

**Problema 5.5** Dimostrare che

$$\epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\epsilon_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} = - \begin{vmatrix} \delta_{\nu_1}^{\mu_1} & \delta_{\nu_2}^{\mu_1} & \delta_{\nu_3}^{\mu_1} & \delta_{\nu_4}^{\mu_1} \\ \delta_{\nu_1}^{\mu_2} & \delta_{\nu_2}^{\mu_2} & \delta_{\nu_3}^{\mu_2} & \delta_{\nu_4}^{\mu_2} \\ \delta_{\nu_1}^{\mu_3} & \delta_{\nu_2}^{\mu_3} & \delta_{\nu_3}^{\mu_3} & \delta_{\nu_4}^{\mu_3} \\ \delta_{\nu_1}^{\mu_4} & \delta_{\nu_2}^{\mu_4} & \delta_{\nu_3}^{\mu_4} & \delta_{\nu_4}^{\mu_4} \end{vmatrix} \quad (5.69)$$

$$\epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\sigma}\epsilon_{\nu_1\nu_2\nu_3\sigma} = - \begin{vmatrix} \delta_{\nu_1}^{\mu_1} & \delta_{\nu_2}^{\mu_1} & \delta_{\nu_3}^{\mu_1} \\ \delta_{\nu_1}^{\mu_2} & \delta_{\nu_2}^{\mu_2} & \delta_{\nu_3}^{\mu_2} \\ \delta_{\nu_1}^{\mu_3} & \delta_{\nu_2}^{\mu_3} & \delta_{\nu_3}^{\mu_3} \end{vmatrix} \quad (5.70)$$

$$\epsilon^{\mu_1\mu_2\sigma\rho}\epsilon_{\nu_1\nu_2\sigma\rho} = -2 \begin{vmatrix} \delta_{\nu_1}^{\mu_1} & \delta_{\nu_2}^{\mu_1} \\ \delta_{\nu_1}^{\mu_2} & \delta_{\nu_2}^{\mu_2} \end{vmatrix} \quad (5.71)$$

$$\epsilon^{\mu_1\lambda\sigma\rho}\epsilon_{\nu_1\lambda\sigma\rho} = -6\delta_{\nu_1}^{\mu_1} \quad (5.72)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} = -24 \quad (5.73)$$

(Modulo il segno, quest'ultima uguaglianza segue immediatamente dall'osservazione che il numero delle componenti non nulle di  $\epsilon$  è uguale al numero totale di permutazioni di 0, 1, 2, 3 che è  $4! = 24$ .)

**Problema 5.6** Dimostrare che

$$**J = J, \quad **F = -F, \quad **N = N \quad (5.74)$$

cosicché (a parte un segno) si può recuperare una qualunque forma  $H$  dal suo duale  $*H$  prendendo nuovamente il suo duale,  $**H$ . Questo mostra che  $H$  e  $*H$  contengono esattamente la stessa informazione.

**Problema 5.7** Dimostrare che per dualità

$$F = (\mathbf{E}, \mathbf{B}) \rightarrow *F = (\mathbf{B}, -\mathbf{E})$$

In questo caso, la dualità di Hodge è a volte chiamata *dualità elettromagnetica*. Si osservi che prendendo nuovamente il duale, si ottiene  $**F = -F$ , in accordo con il problema precedente.

**Problema 5.8** Con riferimento al problema precedente, mostrare che se  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  rappresentano il campo elettrico e il campo magnetico, le equazioni di Maxwell nel vuoto sono invarianti per dualità elettromagnetica.

**Problema 5.9** Mostrare che

$$*F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad (5.75)$$

**Box 5.6 — Forma di volume in una base arbitraria.** Consideriamo una base arbitraria  $\mathbf{h}_\alpha = \mathbf{h}_\alpha(x)$ , eventualmente dipendente dal punto  $x$  collegata ad una base inerziale dalla trasformazione  $M$  secondo la (5.9). Allora la forma di volume applicata al parallelepipedo generato dai vettori della base fornisce

$$\text{Vol}(\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3) = -\det(\mathbf{h}_0 \ \mathbf{h}_1 \ \mathbf{h}_2 \ \mathbf{h}_3) = -\det M$$

Ma dalla (5.10) abbiamo che  $\det g = -\det M^2$ , per cui  $\det M = \sqrt{-\det g}$  (scartiamo

la soluzione negativa, perché richiediamo che  $M$  non cambi l'orientazione della base). Quindi  $\sqrt{-\det g}$  è l'effetto di cambiamento del volume quando si passa da una base inerziale con metrica diagonale  $\eta$  ad una in cui la metrica è  $g = \{g_{\mu\nu}\}$ . Questo vuol dire che in una base arbitraria le componenti del tensore di Levi-Civita sono

$$\sqrt{-\det g} \in^{\mu\nu\sigma\rho} \quad (5.76)$$

**Box 5.7 — Generatori infinitesimi del gruppo di Lorentz ristretto.** Consideriamo  $\Lambda = \mathbb{1} + \omega$  dove  $\omega$  è infinitesimo. In componenti  $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ . Una trasformazione di questo tipo è un elemento infinitesimo del gruppo di Lorentz ristretto  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  essendo il solo pezzo del gruppo di Lorentz che è connesso con continuità all'identità. Allora la (5.32) diventa

$$(\mathbb{1} + \omega)^T \eta (\mathbb{1} + \omega) = \eta \Rightarrow \eta + \omega^T \eta + \eta \omega = \eta \Rightarrow \omega^T \eta = -\eta \omega$$

che, passando alle componenti, diventa

$$\omega^\rho{}_\mu \eta_{\rho\nu} = -\eta_{\sigma\mu} \omega^\sigma{}_\nu \Rightarrow \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}, \quad \omega_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\sigma} \omega^\sigma{}_\nu$$

Quindi il generatore infinitesimo di una trasformazione di Lorentz ristretta è un bivettore, cioè una 2-forma. La trasformazione infinitesima  $\delta x_\mu = \omega_{\mu\nu} X^\nu$  è l'analogo nello spazio di Minkowski della variazione infinitesima (4.2) per i vettori nello spazio euclideo.

### 5.3 Trasformazioni di Lorentz e spinori

L'algebra di Pauli è così ospitale da poter accomodare anche i 4-vettori, in modo del tutto simile al caso dei vettori tri-dimensionali. Fissata una base  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  nello spazio di Minkowski  $\mathbb{R}^{1,3}$  e stabilita l'associazione

$$\mathbf{e}_0 \rightarrow \mathbb{1}, \quad \mathbf{e}_1 \rightarrow \sigma_1, \quad \mathbf{e}_2 \rightarrow \sigma_2, \quad \mathbf{e}_3 \rightarrow \sigma_3, \quad (5.77)$$

essa viene estesa per linearità a tutti i 4-vettori  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$

$$\sigma(\mathbf{a}) = a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3 a_0 = \sigma_0 \mathbb{1} + \sigma(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & a_0 - a_3 \end{pmatrix} \quad (5.78)$$

La corrispondenza tra tra 4-vettori e matrici hermitiane  $2 \times 2$  è biunivoca: data una matrice hermitiana  $A$ , il 4-vettore  $\mathbf{a}$  ad essa associato è

$$a_0 = \frac{1}{2} \text{Tr}(A), \quad \mathbf{a} = \frac{1}{2} \text{Tr}(A\boldsymbol{\sigma}) \quad (5.79)$$

#### 5.3.1 Corrispondenza tra trasformazioni di Lorentz e $\text{SL}(2, \mathbb{C})$

Il quadrato della lunghezza di Minkowski del 4-vettore  $\mathbf{a}$  è uguale al determinante della matrice associata:

$$\begin{vmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & a_0 - a_3 \end{vmatrix} = (a_0 + a_3)(a_0 - a_3) - (a_1 - ia_2)(a_1 + ia_2) = a_0^2 - a_3^2 - a_1^2 - a_2^2 = a^2$$

Questo permette di caratterizzare le trasformazioni di Lorentz in termini di trasformazioni di matrici. Le trasformazioni di Lorentz sono trasformazioni lineari di  $\mathbb{R}^{1,3}$  che lasciano invariata la lunghezza dei 4-vettori. Sono quindi in corrispondenza con le trasformazioni lineari

$$A \rightarrow A' = MAM^*$$

che non cambiano il determinante di  $A$ , cioè tali che  $\det A = \det A'$ . Per le proprietà del determinante (delle matrici hermitiane  $2 \times 2$ )

$$\det MAM^* = \det M \det A \det M = (\det M)^2 \det A$$

Quindi  $\det M = \pm 1$ . La richiesta che le trasformazioni siano connesse con continuità all'identità (come sono le trasformazioni di Lorentz), esclude la possibilità che  $M$  abbia determinante  $-1$ . Quindi le trasformazioni che corrispondono a quelle di Lorentz sono le matrici  $2 \times 2$  con determinante  $+1$ . L'insieme di queste trasformazioni è di solito denotato  $SL(2, \mathbb{C})$  (trasformazioni lineari speciali, cioè con determinante  $+1$ , in 2 dimensioni e a coefficienti complessi). Le matrici che realizzano le trasformazioni di Lorentz sono dunque del tipo

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (5.80)$$

con  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  numeri complessi tali che  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ . Si osservi che le matrici unitarie con determinante 1, cioè le matrici (4.45) che rappresentano le rotazioni, sono incluse in  $SL(2, \mathbb{C})$  e ne costituiscono un sotto-gruppo (il prodotto di due di esse rappresenta ancora una rotazione e l'inverso di una rotazione è ancora una rotazione).

**Box 5.8 — Spinte di Lorentz.** Consideriamo una matrice del tipo

$$e^{-(w/2)\sigma_3} = \begin{pmatrix} e^{-w/2} & 0 \\ 0 & e^{w/2} \end{pmatrix} \quad (5.81)$$

dove  $w$  è un numero reale. Poiché il determinante di questa matrice è 1, essa rappresenta una trasformazione di Lorentz. Di quale trasformazione si tratta?

Per rispondere, occorre determinare l'azione della matrice su un 4-vettore  $a$ :

$$\sigma(a) \rightarrow \sigma(a') = e^{(w/2)\sigma_3} \sigma(a) e^{(w/2)\sigma_3}$$

vale a dire

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a'_0 + a'_3 & a'_1 - ia'_2 \\ a'_1 + ia'_2 & a'_0 - a'_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{-w/2} & 0 \\ 0 & e^{w/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & a_0 - a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-w/2} & 0 \\ 0 & e^{w/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-w/2}(a_0 + a_3) & e^{-w/2}(a_1 - ia_2) \\ e^{w/2}(a_1 + ia_2) & e^{w/2}(a_0 - a_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-w/2} & 0 \\ 0 & e^{w/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-w}(a_0 + a_3) & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & e^w(a_0 - a_3) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi le componenti 1 e 2 di  $a$  non cambiano e per le componenti 0 e 3 si ha:

$$a'_0 = \frac{e^w + e^{-w}}{2} a_0 - \frac{e^w - e^{-w}}{2} a_3 = \cosh(w)a_0 - \sinh(w)a_3 \quad (5.82)$$

$$a'_3 = -\frac{e^w - e^{-w}}{2} a_0 + \frac{e^w + e^{-w}}{2} a_3 = -\sinh(w)a_0 + \cosh(w)a_3 \quad (5.83)$$

Questa è la spinta di Lorentz o trasformazione di Lorentz pura (5.28) lungo l'asse 3 con rapidità  $w$ .

È possibile verificare che  $e^{(-w/2)\sigma_1}$  e  $e^{(-w/2)\sigma_2}$  danno trasformazioni di Lorentz rispettivamente lungo  $x$  e  $y$ . (Deve essere così, dato che le matrici di Pauli possono essere collegate fra loro da rotazioni).

La formula per una trasformazione di Lorentz pura di rapidità  $w$  nella direzione  $\hat{\mathbf{u}}$  (il versore della velocità) è

$$e^{-(w/2)\sigma(\hat{\mathbf{u}})} = \cosh\left(\frac{w}{2}\right) \mathbf{1} - \sinh\left(\frac{w}{2}\right) \sigma(\hat{\mathbf{u}}) \quad (5.84)$$

È importante osservare che una *spinta di Lorentz* è rappresentata da una matrice hermitiana. Il fatto algebrico che il prodotto di due matrici hermitiane non è necessariamente una matrice hermitiana corrisponde al fatto fisico che la composizione di due trasformazioni di Lorentz in direzioni differenti non è una spinta di Lorentz (questo è alla base della spiegazione della precessione di Thomas).

Troviamo così tutta la struttura del gruppo proprio di Lorentz riprodotto nel gruppo  $SL(2, \mathbb{C})$ . La relazione è una corrispondenza due-a-uno poiché una data trasformazione di Lorentz (in senso generale, comprese le rotazioni) può essere rappresentato da una matrice  $+M$  o  $-M$ , per  $M \in SL(2, \mathbb{C})$ . Lo spazio dei parametri del gruppo  $SL(2, \mathbb{C})$  ha tre dimensioni complesse e pertanto sei reali (le matrici hanno quattro numeri complessi e un vincolo complesso sulla determinante). Questo corrisponde alle 6 dimensioni dello spazio dei parametri del gruppo di Lorentz.

### 5.3.2 Spinore come 4-vettore di tipo luce

Adesso siamo in grado di mostrare un ulteriore significato geometrico dello spinore. Possiamo associare il 4-vettore  $a = (a_0, \mathbf{a})$  ad un uno spinore  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ , formando il bilineare  $\psi^* \sigma \psi$ , dove  $\sigma$  sta per il “4-vettore” di matrici  $(\mathbf{1}, \sigma)$ . Esplicitamente,  $a_0 = \psi^* \psi$  e  $\mathbf{a} = \psi^* \boldsymbol{\sigma} \psi$ , dato dalla (4.52). Come visto nella sezione 4.2.2, eq. (4.55),  $\psi^* \psi = |\mathbf{a}|$ . Quindi  $a_0 = |\mathbf{a}|$ . Allora il 4-vettore  $a$  è di tipo luce. Riassumendo, la generalizzazione della (4.56) è:

$$\text{da uno spinore } \psi \text{ si ottiene il 4-vettore di tipo luce: } a = \psi^* \sigma \psi \quad (5.85)$$

Possiamo così dare un significato relativistico all’interpretazione dello spinore come “asta con bandiera”, interpretando la lunghezza dell’asta come la componente temporale di un 4-vettore di tipo luce. Si osservi che, essendo  $a_0 > 0$ , il 4-vettore è orientato verso il futuro in tutti i sistemi di riferimento.

**Box 5.9 — Matrice hermitiana associata ad uno spinore.** È istruttivo scrivere la matrice hermitiana associata in termini di  $\psi$ . Dalla (4.53) segue che

$$\begin{aligned} \sigma(a) &= |\psi|^2 \sigma_0 + \sigma(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 & 2\bar{\psi}_2 \psi_1 \\ 2\bar{\psi}_1 \psi_2 & -|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 - |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} |\psi_1|^2 & \bar{\psi}_2 \psi_1 \\ \bar{\psi}_1 \psi_2 & |\psi_2|^2 \end{pmatrix} = \sigma(a) = 2 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 & \bar{\psi}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.86)$$

Questa espressione rende il senso in cui uno spinore può essere pensato come la “radice quadrata” di un 4-vettore di tipo luce. Si osservi che il determinante della matrice è nullo (come deve essere, in quanto il 4-vettore è di tipo luce).

### 5.3.3 Inversione spaziale e chiralità

Nella sezione 4.2.3 abbiamo visto che nello spazio spinoriale l'inversione di parità è data dalla formula (4.62) che per comodità riscriviamo

$$\mathbf{P} : \psi \rightarrow \psi_{\mathbf{P}} = -i\sigma_2 \mathcal{C}\psi \quad (4.62)$$

Qual è il 4-vettore associato a  $\psi_{\mathbf{P}}$ ? Poiché  $\psi$  e  $\psi_{\mathbf{P}}$  hanno la stessa lunghezza, la componente temporale sarà ancora  $a_0 = \psi^* \psi$ , mentre la componente spaziale sarà  $-\mathbf{a}$ . In altre parole, al cambiamento (4.61) nello spazio spinoriale, corrisponde l'inversione spaziale

$$\mathbf{P} : a = (a_0, \mathbf{a}) \rightarrow a_{\mathbf{P}} = (a_0, -\mathbf{a})$$

nello spazio di Minkowski.

Veniamo ora al tema della chiralità. Essenzialmente, la chiralità riguarda il modo in cui gli spinori si comportano per trasformazioni di Lorentz. Consideriamo una trasformazione di Lorentz di  $\psi$ :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Lambda} \begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\psi_1 + \beta\psi_2 \\ \gamma\psi_1 + \delta\psi_2 \end{pmatrix}$$

Allora  $\psi_{\mathbf{P}}$  si trasforma come

$$\psi_{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} -\bar{\psi}_2 \\ \bar{\psi}_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\bar{\psi}'_2 \\ \bar{\psi}'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{\gamma}\bar{\psi}_1 - \bar{\delta}\bar{\psi}_2 \\ \bar{\alpha}\bar{\psi}_1 + \bar{\beta}\bar{\psi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\delta} & -\bar{\gamma} \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{\psi}_2 \\ \bar{\psi}_1 \end{pmatrix}$$

Ma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} \bar{\delta} & -\bar{\gamma} \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

Quindi gli spinori  $\psi_{\mathbf{P}}$  si trasformano come  $(\Lambda^*)^{-1}$ . A meno che  $\Lambda$  non sia una rotazione,  $(\Lambda^*)^{-1} \neq \Lambda$ . Il che vuol dire che in generale  $\psi_{\mathbf{P}}$  si trasforma diversamente da  $\psi$ . Consideriamo per esempio, la trasformazione di Lorentz pura lungo l'asse  $z$  di rapidità  $w$  (5.81):  $\psi$  si trasforma come

$$\psi \rightarrow \psi' = \begin{pmatrix} e^{-w/2}\psi_1 \\ e^{w/2}\psi_2 \end{pmatrix} \quad \text{e } \psi_{\mathbf{P}} \text{ si trasforma come } \psi_{\mathbf{P}} \rightarrow \psi'_{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} e^{w/2}\psi_{\mathbf{P}1} \\ e^{-w/2}\psi_{\mathbf{P}2} \end{pmatrix}$$

Ne segue che il 4-vettore associato a  $\psi$  si trasforma come (5.82) e (5.83) mentre il 4-vettore associato a  $\psi_{\mathbf{P}}$  si trasforma scambiando  $w$  con  $-w$  nelle (5.82) e (5.83); queste sono le rotazioni iperboliche nel piano  $e_0, e_3$  date, rispettivamente, dalle matrici

$$\begin{pmatrix} \cosh w & -\sinh w \\ -\sinh w & \cosh w \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \cosh w & \sinh w \\ \sinh w & \cosh w \end{pmatrix}$$

Si hanno quindi, per quel che riguarda le proprietà di trasformazione, due tipi distinti di spinori: quelli che si trasformano secondo  $\Lambda$ , che sono denotati  $\psi_R$ , e quelli che si trasformano secondo  $(\Lambda^*)^{-1}$ , che sono denotati  $\psi_{\bar{R}}$ . In termini matematici, questa distinzione si traduce nel fatto che le  $\Lambda$  e le  $(\Lambda^*)^{-1}$  sono due rappresentazioni (irriducibili) del gruppo di Lorentz *distinte*, cioè non esiste alcuna trasformazione lineare invertibile  $S$  tale che  $(\Lambda^*)^{-1} = S\Lambda S^{-1}$ . Le due rappresentazioni sono collegate dall'operazione di parità, che però non è lineare, ma antilineare.

Per quanto questo possa sembrare abbastanza astratto, ha contenuto fisico. Se si utilizzano gli spinori per descrivere particelle quantistiche relativistiche,  $\psi_R$  e  $\psi_L$  descrivono due tipi diversi di particelle, perché hanno diverse proprietà per trasformazioni di Lorentz;  $\psi_R$  e  $\psi_L$  descrivono particelle di chiralità opposta: per convenzione,  $\psi_R$  descrive una particella con *chiralità destra* e  $\psi_L$  una con *chiralità sinistra*. La chiralità, non dipendendo dalla scelta del sistema di riferimento, è una caratteristica intrinseca delle particelle che le distingue (come la carica o la massa di particelle che si muovono a velocità inferiori a quella della luce distinguono le particelle). In altre parole, la particella di una data chiralità, diciamo “destra”, ha questa proprietà in tutti i sistemi di riferimento inerziali, lo stesso dicasi per una particella “sinistra”. Il passaggio dall’una all’altra per parità non corrisponde ad un cambiamento del sistema di riferimento né ad alcuna operazione fisicamente realizzabile; in questo senso, la parità è come la coniugazione di carica.

La scelta della terminologia, pur essendo ormai standard, è purtroppo infelice e può confondere: il termine “chiralità” è dal greco "mano", ed è, in senso generale la proprietà di avere un’immagine speculare non sovrapponibile a sé come avviene, appunto, nel caso di una mano. Un oggetto con questa proprietà è detto chirale. Nel nostro caso, la non sovrapponibilità è abbastanza astratta e non ha nulla a che fare con lo spazio tri-dimensionale, ma con le rotazioni iperboliche nello spazio spinoriale, cioè con le trasformazioni pure di Lorentz, che, per i due tipi di particelle, “ruotano” in senso opposto.

## 6. Campi relativistici

### 6.1 Operazioni differenziali e integrali su campi tensoriali

Un campo tensoriale è una funzione sui punti dello spazio-tempo a valori tensoriali. In questa sezione passiamo in rassegna alcune operazioni differenziali e integrali sui campi tensoriali. Assumiamo di utilizzare coordinate  $x^\mu$  riferite ad una base inerziale  $e_\mu$ .

#### 6.1.1 Operazioni differenziali

1. *Derivata direzionale e gradiente di uno scalare.* Sia  $n$  un qualunque vettore, allora la rapidità di variazione di un campo scalare  $\phi$  lungo  $n$  è ( $\epsilon$  infinitesimo)

$$\frac{\phi(x + \epsilon n) - \phi(x)}{\epsilon} \equiv n \cdot \partial\phi$$

Questa equazione definisce il vettore  $\partial\phi$  in termini geometrici intrinseci. In un sistema di riferimento inerziale si ha

$$\frac{\phi(x + \epsilon n) - \phi(x)}{\epsilon} = \frac{\partial\phi}{\partial x_0} n_0 + \frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

Quindi  $\partial\phi$  è rappresentato dal vettore  $(\partial\phi/\partial x_0, \nabla\phi)$ . In altre parole, risulta definito in termini geometrici intrinseci l'operatore *nabla* quadrimensionale  $\partial$ , di componenti covarianti<sup>1</sup>

$$\partial_\mu = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \tag{6.1}$$

Questo operatore agendo su un campo scalare  $\phi = \phi(x)$  ne fornisce il *gradiente*, cioè il 4-vettore

$$\partial\phi \quad \text{di componenti covarianti} \quad \partial_\mu\phi \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}$$

<sup>1</sup>Si osservi che le componenti covarianti di  $\partial$  hanno la parte spaziale positiva, al contrario delle componenti covarianti spaziali di un vettore  $A$ , che invece sono  $-A$ .

2. *Divergenza di un vettore.* Dato un quadrivettore  $A = A(x)$  si possono formare per derivazione uno scalare e un bivettore. Lo scalare si ottiene per prodotto interno di  $\partial$  con  $A$ , ed è la *divergenza* di  $A$ ,

$$\partial \cdot A = \partial_\mu A^\mu.$$

3. *Rotore di un vettore.* Il bivettore (2-forma) che si ottiene per prodotto esterno di  $\partial$  con il 4-vettore  $A$ ,

$$(\partial \wedge A)_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

è l'equivalente in 4 dimensioni del rotore in 3 dimensioni; con abuso di linguaggio lo chiameremo *rotore*. Si osservi che per le proprietà del prodotto esterno si hanno le identità

$$\partial \wedge (\partial \phi) = 0 \tag{6.2}$$

$$\partial \wedge (\partial \wedge A) = 0 \quad (\text{identità di Bianchi}) \tag{6.3}$$

che sono l'analogo in 4 dimensioni del fatto che in 3 dimensioni il rotore di un gradiente e la divergenza di un rotore sono identicamente nulli.

4. *Operatore di d'Alembert.* La divergenza di un gradiente fornisce l'operatore del secondo ordine noto come operatore d'Alembert o dalembertiano:

$$\partial \cdot \partial \phi = \partial^\mu \partial_\mu \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi \equiv \square \phi$$

dove  $\Delta$  è il laplaciano in 3 dimensioni. La divergenza del rotore,

$$\partial \cdot (\partial \wedge A) = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \square A - \partial(\partial \cdot A)$$

è l'analogo dell'identità  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\Delta \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$  in 3 dimensioni.

5. *Divergenza di un tensore.* La divergenza  $\partial \cdot T$  di un tensore del secondo ordine  $T$  è un vettore:

$$(\partial \cdot T)^\mu = \partial_\nu T^{\mu\nu}$$

Si osservi che la scelta della contrazione sul secondo indice è convenzionale. Se contraiamo sul primo indice abbiamo un'altra nozione di divergenza che denotiamo  $T \cdot \overleftarrow{\partial}$ . Se il tensore è simmetrico non c'è differenza tra le due nozioni di divergenza; se il tensore è anti-simmetrico, c'è una differenza di segno.

Un tensore anti-simmetrico del secondo ordine è un bivettore  $F^{\mu\nu} = (\mathbf{E}, \mathbf{B})$ . Per scrivere le componenti della sua divergenza possiamo usare la formula (5.54) trattando formalmente  $\partial$  come un 4-vettore; dobbiamo però prestare attenzione alla definizione (6.1): per  $\partial$  sono le componenti covarianti ad avere il “+” nella componente spaziale (mentre le contravarianti hanno un “-”). Allora dalla (5.54), cambiando segno alla componente spaziale, otteniamo

$$\partial \cdot F = \partial_\nu F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\nabla \cdot \mathbf{E} \\ -\nabla \times \mathbf{B} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

### 6.1.2 Operazioni integrali

In 3 dimensioni si hanno integrali di linea, di superficie e di volume. In 4 dimensioni si hanno quattro tipi di integrazione:

1. *Integrale lungo una curva.* L'elemento di integrazione è l'elemento di linea, cioè il 4-vettore  $dx = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3)$ . Per esempio, se  $A$  è un vettore e  $C$  una curva:

$$\int_C A \cdot dx = \int_C A_\mu dx^\mu$$

2. *Integrale su una superficie (bidimensionale).* L'elemento di superficie  $dS$  è una 2-forma infinitesima le cui 6 componenti sono le proiezioni dell'elemento di superficie sui 6 piani associati alla base inerziale  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ . Per esempio, se  $F$  è un bivettore e  $S$  una superficie:

$$\int_S F \cdot dS = \int_S F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}$$

3. *Integrale su una iper-superficie (tridimensionale).* L'elemento di iper-superficie  $d\Sigma$  è una 3-forma infinitesima le cui 4 componenti sono le proiezioni dell'elemento di iper-superficie sui 4 spazi tri-dimensionali (iper-piani)  $\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z$ . Come elemento di integrazione a volte è più comodo prendere il 4-vettore  ${}^*d\Sigma$  duale di  $d\Sigma$  secondo la (5.67):

$${}^*d\Sigma_\mu = \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} d\Sigma^{\nu\rho\sigma}$$

Da un punto di vista geometrico  ${}^*d\Sigma$  è un 4-vettore avente per lunghezza l'“iper-area” dell'elemento di iper-superficie e per direzione la normale a questo elemento. In particolare,  ${}^*d\Sigma_0 = dx dy dz$  cioè rappresenta un elemento di volume  $dV$  a 3 dimensioni, ossia, la proiezione dell'elemento di ipersuperficie sull'iperpiano  $x_0 = \text{costante}$ . Per semplificare la notazione, quando non ci sarà ambiguità, denoteremo con  $d\Sigma$  questo 4-vettore.

4. *Integrale esteso ad un volume quadridimensionale.* L'elemento di integrazione è il prodotto dei differenziali<sup>2</sup>

$$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c dV dt \quad (6.5)$$

Questo non è altro che il modulo della 4-forma di volume  $\text{Vol}$  calcolata per  $dx^0 \mathbf{e}_0, dx^1 \mathbf{e}_1, dx^2 \mathbf{e}_2$  e  $dx^3 \mathbf{e}_3$ . In quanto tale, è invariante per trasformazioni di Lorentz.<sup>3</sup>

<sup>2</sup>Dall'esempio del box 5.6 segue che per coordinate generali  $x^\mu$  (non inerziali)  $d\Omega = \sqrt{-\det g} dx_0 dx_1 dx_2 dx_3$ .

<sup>3</sup>Un'ulteriore verifica non guasta: consideriamo, per semplicità, una spinta di Lorentz lungo  $z$ . Allora l'elemento di volume  $dx_0 dx_3$  si trasforma come  $dx'_0 dx'_3 = J dx_0 dx_3$ , dove

$$J = \left| \frac{\partial(x'_0, x'_3)}{\partial(x_0, x_3)} \right|$$

è il determinante jacobiano della trasformazione (5.25):

$$J = \begin{vmatrix} \cosh w_3 & -\sinh w_3 \\ -\sinh w_3 & \cosh w_3 \end{vmatrix} = \cosh^2 w_3 - \sinh^2 w_3 = 1$$

Quindi la forma dell'elemento di volume  $dx_0 dx_3$  non cambia per trasformazioni di Lorentz. Poiché qualunque direzione può essere presa come asse  $z$ , concludiamo che  $d\Omega$  è un elemento di volume invariante nello spazio di Minkowski  $\mathbb{M}$ .

**Teorema di Gauss**

Enunciamo il teorema di Gauss senza fornirne una dimostrazione. Sia  $A$  un 4-vettore e  $\Omega$  un volume dello spazio tempo con bordo  $\partial\Omega$ . Allora

$$\int_{\partial\Omega} A \cdot d\Sigma = \int_{\Omega} \partial \cdot A d\Omega \quad (6.6)$$

**6.2 Campo scalare**

Consideriamo una campo scalare (reale)  $\phi = \phi(x)$ . Per trasformazioni di Lorentz  $x' = \Lambda x$ , il campo si trasforma come

$$\phi'(x') = \phi(\Lambda x) \quad (6.7)$$

La funzione di Lagrange del campo che non contiene derivate di ordine superiore al secondo è della forma  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$  ed è quindi un campo scalare. Poiché la lagrangiana è un campo scalare, l'azione

$$\mathcal{S}[\phi] = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} d\Omega = \int \mathcal{L} dV dt \quad (6.8)$$

è un invariante relativistico. Le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \right] = 0 \quad (6.9)$$

sono quindi invarianti per trasformazioni di Lorentz e definiscono così, per una data scelta di  $\mathcal{L}$ , una teoria relativistica del campo scalare.

**6.2.1 Proprietà del campo scalare**

Studiamo alcune proprietà del campo scalare risolvendo i seguenti problemi.

**Problema 6.1** Determinare le equazioni del moto per la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - V(\phi) \quad (6.10)$$

dove  $V$  è una funzione locale del campo.

**Problema 6.2 — Formula relativistica per la variazione prima dell'azione.** L'azione (6.8) è integrata sul volume quadridimensionale  $\Omega = [t', t''] \times \mathcal{R}$  dove  $\mathcal{R}$  è una regione spaziale. Mostrare che la variazione prima dell'azione 6.8 è data da

$$\delta \mathcal{S} = \frac{1}{c} \int_{\partial\Omega} \delta\phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^{\mu} \phi)} d\Sigma^{\mu} + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \right] \right\} \delta\phi d\Omega. \quad (6.11)$$

(Si usi il teorema di Gauss). Quali condizioni al contorno deve soddisfare il campo su  $\partial\Omega$  affinché le equazioni di Eulero-Lagrange (6.17) corrispondano alla stazionarietà dell'azione?

**Problema 6.3 — Teorema di Noether in forma relativistica.** Si assuma che l'azione (6.8) sia invariante (in senso debole) per trasformazioni di simmetria infinitesime  $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \delta\phi(x)$ ; vale a dire, si assuma che esista un 4-vettore  $K^{\mu}$  tale che

$$\delta \mathcal{S} = \int (\partial_{\mu} K^{\mu}) d\Omega$$

per ogni  $\phi$ . Dimostrare che

$$\partial \cdot J = 0 \quad \text{dove} \quad J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi - K^\mu \quad (6.12)$$

**Problema 6.4 — Tensore energia-impulso del campo scalare in forma relativistica.** Si consideri la lagrangiana (6.10) ponendo per semplicità  $V = 0$ . Utilizzando l'invarianza (debole) dell'azione per traslazioni spaziotemporali infinitesime  $\epsilon^\mu$ ,

$$\delta \phi = -\epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x),$$

ricavare le leggi di conservazione

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (6.13)$$

mostrando che la formula per il tensore energia-impulso è

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} (\partial \phi)^2 \quad (6.14)$$

e che (6.13) è conseguenza del teorema di Noether in forma relativistica.

**Box 6.1 — Campo scalare complesso libero.** La (4.106) assume la forma relativistica

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2c^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} (\nabla \bar{\psi}) \cdot (\nabla \psi) - \frac{1}{2} \mu_0^2 \bar{\psi} \psi = \frac{1}{2} \partial_\mu \psi \partial^\mu \bar{\psi} - \frac{1}{2} \mu_0^2 \bar{\psi} \psi \quad (6.15)$$

Invarianza rispetto a trasformazioni di fase per  $\alpha$  costante

$$\psi \rightarrow e^{-i\alpha} \psi. \quad (4.104)$$

Corrente di Noether

$$J^\mu = i \left[ (\partial^\mu \bar{\psi}) \psi - (\partial^\mu \psi) \bar{\psi} \right] \quad (6.16)$$

**Box 6.2 — Quadrivettore numero d'onda.** Lo scalare  $\phi = \mathcal{A} e^{-ikx}$ , dove  $k$  è un 4-vettore, è soluzione delle equazioni di campo libero  $\square \phi = 0$ , se  $k^2 = k_0^2 - |\mathbf{k}|^2 = 0$ . Quindi  $\mathcal{A} e^{-ikx}$  è un'onda piana di frequenza  $\omega = k_0/c$  e numero d'onda  $\mathbf{k}$ ;  $k = (k_0, \mathbf{k})$  è chiamato il quadrivettore numero d'onda. La condizione  $k^2 = 0$  è la relazione di dispersione (1.94)  $\omega = c|\mathbf{k}|$  di un campo che soddisfa l'equazione delle onde. Analogamente,  $\phi = \mathcal{A} e^{-ikx}$  è soluzione di  $\square \phi = -\mu_0^2 \phi$ , se  $k^2 = k_0^2 - |\mathbf{k}|^2 = \mu_0^2$ , cioè se  $\omega = c\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \mu_0^2}$ , che è la relazione di dispersione (1.95) del campo di Klein-Gordon.

**Box 6.3 — Campo a più componenti.** Se la lagrangiana dipende da un multipletto di campi  $\phi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  (che possono formare un vettore o un tensore),  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, \partial \phi_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , il principio d'azione per una tale lagrangiana implica equazioni di Eulero-Lagrange per

ciascuna componente del multipletto:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right] = 0 \quad (6.17)$$

### 6.2.2 La funzione principale di Hamilton di una particella come campo scalare

Riprendiamo l'azione della particella libera (5.13)

$$S = S_m = -mc \delta \int_{x'}^{x''} ds$$

e calcoliamone la variazione prima

$$\delta S_m = -mc \delta \int_{x'}^{x''} ds = -mc \int_{x'}^{x''} \delta(ds) \quad (6.18)$$

La variazione di  $ds$  può essere ottenuta dalla più semplice variazione di  $ds^2$ . Se denotiamo con  $X = X(s)$  un generico cammino, cioè una linea di universo nello spazio di Minkowski,  $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu$  (in coordinate inerziali) e di conseguenza

$$\delta(ds^2) = 2ds\delta(ds) = \eta_{\mu\nu} \delta(dX^\mu dX^\nu) = 2\eta_{\mu\nu} \delta(dX^\mu) dX^\nu$$

Il fattore due sul lato destro si presenta perché, per simmetria, le variazioni di  $dX^\mu$  e  $dX^\nu$  danno lo stesso risultato. Semplificando un po'

$$\delta(ds) = \eta_{\mu\nu} \delta(dX^\mu) \frac{dX^\nu}{ds} = \eta_{\mu\nu} \delta(dX^\mu) U^\nu = U_\mu \delta(U^\mu) ds$$

dove  $U_\mu$  è la 4-velocità. Sostituendo nella (6.18) e integrando per parti, otteniamo

$$\delta S_m = -mc \int_{x'}^{x''} U_\mu \delta(U^\mu) ds = -mc U_\mu \delta X^\mu \Big|_{x'}^{x''} + mc \int_{x'}^{x''} \frac{dU_\mu}{ds} \delta X^\mu ds \quad (6.19)$$

Come è noto, per stabilire le equazioni del moto, si confrontano cammini passanti per i due punti dati e quindi per variazioni al bordo nulle. La traiettoria effettiva si deduce dalla condizione  $\delta S_m = 0$ . La formula (6.19) ci dà allora l'equazione  $dU_\mu/ds = 0$ , che esprime la costanza della velocità di una particella libera nello spazio quadri-dimensionale. Ma questo lo sapevamo già.

Per trovare la funzione principale di Hamilton  $S_m = S_m(x)$ , si calcola l'azione lungo una traiettoria effettiva tenendo fissato il primo estremo di integrazione  $x'$  e lasciando il secondo  $x'' \equiv x$  libero di variare. Allora

$$\delta S_m(x) = -mc U_\mu \delta x^\mu \quad \Rightarrow \quad \partial S_m = -mc U$$

La funzione  $S_m = S_m(x)$  è un campo scalare.

Possiamo quindi definire il 4-impulso di particella libera in maniera invariante come

$$P = -\partial S_m = mc U \quad (6.20)$$

che coincide con la formula per il 4-impulso che abbiamo già dato. La definizione (6.20) ha tuttavia il pregio di non essere *ad hoc* e di fornire una caratterizzazione del 4-impulso della particella libera completamente analoga a quella data in meccanica non-relativistica.

La componente temporale del 4-impulso della particella libera definisce l'*energia cinetica* di una particella, non necessariamente libera:

$$\mathcal{E}_{\text{cin}} = P^0 = mcU^0 = mc\gamma = \frac{mc}{\sqrt{1 - \mathbf{V}^2/c^2}} \quad (6.21)$$

Per un particella libera, ovviamente, l'energia cinetica coincide con l'energia totale. La componente spaziale del 4-impulso della particella libera definisce l'*impulso meccanico* di una particella, non necessariamente libera

$$\mathbf{P}_{\text{mecc}} = \mathbf{P} = m\gamma\mathbf{V} \quad (6.22)$$

Osserviamo infine che dalla (6.20) e dalla condizione  $U^2 = 1$ , segue immediatamente l'equazione di Hamilton-Jacobi per una particella libera relativistica:

$$(\partial S_m)^2 = m^2 c^2 \quad (6.23)$$

dove, esplicitamente,

$$(\partial S_m)^2 = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial S_m}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial S_m}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial S_m}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial S_m}{\partial z} \right)^2$$

### 6.3 Campo di Maxwell

Abbiamo già incontrato più volte il campo elettromagnetico. La strada che seguiremo in questa sezione non è quella di mostrare che le equazioni di Maxwell formulate in un dato sistema inerziale sono invarianti per trasformazioni di Lorentz (questa fu la strada seguita da Lorentz). Piuttosto, partiremo *ex novo* definendo un campo sullo spazio di Minkowski in maniera indipendente dalla scelta di coordinate che chiameremo *campo di Maxwell*. Definiremo l'azione come l'invariante relativistico più semplice che si può costruire con un tale campo e infine mostreremo che le equazioni del moto corrispondenti (ovviamente invarianti per costruzione) sono proprio le equazioni di Maxwell.

#### 6.3.1 Tensore elettromagnetico

Definiamo il campo di Maxwell o tensore elettromagnetico  $F$  come  $F = \partial \wedge A$ , dove  $A$  è un 4-vettore detto potenziale quadrivettoriale. In componenti,

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad A^\mu = (\varphi, \mathbf{A}) \quad (6.24)$$

$\mathbf{A}$  è il potenziale magnetico e  $\varphi$  è il potenziale elettrico. La forma del tensore esprime il fatto che il campo elettrico ed il campo magnetico sono definiti a partire dal quadripotenziale nel seguente modo:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Ad esempio, le componenti  $x$  sono:

$$E_x = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

che si possono riscrivere come:

$$E_1 = (\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) \quad B_1 = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2$$

Dal momento che il tensore elettromagnetico è una 2-forma, in un sistema di riferimento inerziale la matrice che lo rappresenta è:

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} = (\mathbf{E}, \mathbf{B})$$

oppure:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} = (-\mathbf{E}, \mathbf{B})$$

Il tensore elettromagnetico è dunque un tensore antisimmetrico,  $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ , a traccia nulla, e possiede sei componenti indipendenti. Il prodotto interno dei tensori del campo è inoltre un invariante di Lorentz:  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2) = \text{invariante}$ , mentre il prodotto del tensore  $F^{\mu\nu}$  con il suo tensore duale dà un altro invariante  $\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta}F^{\mu\nu}F^{\gamma\delta} = -4(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) = \text{invariante}$ . Si noti che  $\det(F) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})^2$ .

Le equazioni di Maxwell nel vuoto possono essere derivate dall'azione

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_f = -\frac{1}{4c} \int F^2 d\Omega = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} dV dt. \quad (6.25)$$

imponendo la condizione di annullamento della variazione prima

$$\delta\mathcal{S} = -\frac{1}{4c} \int \delta(F^2) d\Omega = -\frac{1}{2c} \int F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} d\Omega$$

Sostituendo  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , abbiamo

$$\delta\mathcal{S} = -\frac{1}{2c} \int (F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu - F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu) d\Omega$$

Permutando nel primo termine gli indici sommati  $\mu$  e  $\nu$  e sostituendo  $F_{\nu\mu}$  con  $-F_{\mu\nu}$ , il primo termine diventa  $F^{\nu\mu} \partial_\nu \delta A_\mu = -F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu$ , che è uguale al secondo termine, per cui l'integrando diventa  $-2F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu$ . Adesso in questa espressione isoliamo una divergenza totale, che, integrata, fornisce un termine di bordo, vale a dire scriviamo

$$F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu = \partial_\nu (F^{\mu\nu} \delta A_\mu) - (\partial_\nu F^{\mu\nu}) \delta A_\mu.$$

Allora la formula per la variazione è

$$\delta\mathcal{S} = -\frac{1}{c} \int (\partial_\nu F^{\mu\nu}) \delta A_\mu d\Omega + \frac{1}{c} \int F^{\mu\nu} \delta A_\mu d\Sigma_\nu \quad (6.26)$$

dove per il secondo termine abbiamo applicato il teorema di Gauss. Il dominio di integrazione del secondo termine sono l'infinito (dove il campo si annulla) e gli iperpiani  $t = t' = \text{costante}$  e  $t = t'' = \text{costante}$ ; a questi estremi di integrazione temporale, cioè per gli istanti iniziale  $t'$  e finale  $t''$ , la variazione dei potenziali è nulla, perché in virtù del principio di minima azione, i potenziali sono fissati per questi istanti. Il termine di bordo è quindi nullo. Poiché per il principio di minima azione, le variazioni  $\delta A_\mu$  sono arbitrarie, il coefficiente di  $\delta A_\mu$  deve essere nullo, cioè

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \quad (6.27)$$

Equivalentemente, si può arrivare alle (6.27) applicando le equazioni di Eulero-Lagrange per un multipletto di campi (esempio 6.3). La densità di lagrangiana è:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu)\end{aligned}$$

Il primo e il quarto termine sono uguali, perché  $\mu$  e  $\nu$  sono indici sommati. Anche i restanti sono uguali, e quindi la lagrangiana è:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu)$$

Usando l'equazione di Eulero-Lagrange, si ha:

$$\partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \quad (6.28)$$

dove il secondo membro è zero in quanto la lagrangiana non contiene esplicitamente i campi, ma solo le loro derivate. Poiché

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = F^{\mu\nu}$$

l'equazione di Eulero-Lagrange assume la forma  $\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$ , che è proprio la (6.27)

L'equazione (6.27) è un altro modo per scrivere le due equazioni di Maxwell non omogenee in assenza di sorgenti nel vuoto. Infatti, dalla (6.4) segue immediatamente che (6.27) è equivalente alle equazioni

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad -\nabla \times \mathbf{B} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (6.29)$$

In presenza di sorgenti le equazioni di Maxwell non omogenee sono:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \mathbf{J} \quad (6.30)$$

e si riducono a:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{1}{c} J^\mu \Leftrightarrow \partial \cdot F = -\frac{1}{c} J \quad \text{con } J = (c\rho, \mathbf{J}) \quad (6.31)$$

la quadricorrente di carica elettrica (che  $J$  è davvero un 4-vettore è mostrato nel box 6.4). Si osservi che in virtù dell'anti-simmetria di  $F$ , si ha l'identità  $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$ . Ne segue che, necessariamente,

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (6.32)$$

che è la legge di conservazione locale della carica elettrica.

Le equazioni omogenee:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (6.33)$$

si riducono invece a:

$$\partial_\gamma F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\gamma} + \partial_\nu F_{\gamma\mu} = 0 \Leftrightarrow \partial \wedge F = 0 \quad (6.34)$$

e sono automaticamente soddisfatte in virtù dell'identità di Bianchi

$$\partial \wedge F = \partial \wedge (\wedge A) = 0 \quad (6.35)$$

Osserviamo infine che per poter generare le equazioni (6.31) si deve avere a secondo membro della (6.28)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -\frac{1}{c} J^\mu \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{c} A_\mu J^\mu$$

Quindi la lagrangiana per il campo elettromagnetico generato da una corrente "esterna"  $J$  è la somma di  $\mathcal{L}_f$  e della lagrangiana di interazione tra campo e correnti

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{c^2} A_\mu J^\mu, \quad (6.36)$$

vale a dire, l'azione complessiva è

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_f + \mathcal{S}_{\text{int}} = -\frac{1}{4c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d\Omega - \frac{1}{c^2} \int A_\mu J^\mu d\Omega \quad (6.37)$$

**Box 6.4 — Quadricorrente.** Nella (6.31) abbiamo dichiarato che  $J$  è un quadrivettore. Ovviamente, non basta scrivere  $J = (c\rho, \mathbf{J})$  per trasformare un oggetto in un 4-vettore! Sarebbe troppo facile!. Dimostriamo che  $J$  è in effetti un 4-vettore.

La carica di una particella è un invariante relativistico, ma non la densità di carica  $\rho$ , che dipende dalla scelta di un sistema di riferimento, soltanto il prodotto  $de = \rho dV$  (cioè la carica contenuta nel volume spaziale  $dV$ ) è un invariante. Se moltiplichiamo ambo i membri di  $de = \rho dV$  per  $dX^\mu$  otteniamo

$$dedX^\mu = \rho dV dX^\mu = \rho dV dt \frac{dX^\mu}{dt}$$

Poiché il primo membro di questa equazione è un 4-vettore, lo deve essere anche il secondo. Ma  $dV dt$  è uno scalare, quindi  $\rho dX^\mu/dt$  è un quadrivettore. La componente spaziale

$$\mathbf{J} \equiv \rho \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \rho \mathbf{V} \quad (6.38)$$

è la densità tri-dimensionale di corrente, dove  $\mathbf{V}$  è la velocità della carica nel dato punto. La componente temporale è  $c\rho$ . Quindi,  $J = (c\rho, \mathbf{J})$ , con  $\mathbf{J}$  dato dalla (6.38), è un 4-vettore.

Analizziamo adesso il caso di una carica puntiforme. Si consideri un sistema arbitrario di coordinate inerziali e si supponga che il cammino della carica della carica sia  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ . Se la carica è puntiforme, la sua densità di carica si esprime mediante la delta di Dirac:

$$\rho = e\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)) \quad \text{e la densità di corrente è} \quad \mathbf{J} = \rho \mathbf{V} = e\mathbf{V}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)) \quad (4.37)$$

Per avere l'invarianza relativistica manifesta, parametrizziamo il cammino della carica in termini del tempo proprio o della lunghezza d'arco  $s$ . Ma allora dobbiamo garantire che venga selezionato il tempo  $t$  corrispondente a  $X^0(s)$  e questo si ottiene con un'ulteriore delta di Dirac:

$$\rho = e\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)) = e \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)) \delta(ct - X^0(s)) \frac{dX^0}{ds} ds$$

$dX^0/ds$  è la componente 0 della quadrivelocità  $U^\mu$  della carica, (normalizzata a 1, avendo usato la lunghezza d'arco invece del tempo proprio). Allora

$$J^\mu(x) = ec \int U^\mu(s) \delta(x - X(s)) ds \quad (6.39)$$

dove

$$\delta(x - X(s)) = \delta(ct - X^0(s)) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s))$$

è la delta di Dirac 4-dimensionale. L'equazione (6.39) fornisce l'espressione manifestamente relativistica per la 4-corrente che cercavamo. Sottolineiamo che il ruolo svolto dalla delta di Dirac in questa espressione è quello di forzare semplicemente la particella a trovarsi nella posizione corretta ad ogni istante di tempo proprio.

**Box 6.5 — Invarianza di gauge dell'azione  $\Rightarrow$  conservazione locale della carica.** L'invarianza dell'azione (6.37) per trasformazioni di gauge  $A \rightarrow A + \partial\Lambda$  implica la conservazione locale della carica elettrica  $\partial \cdot J = 0$ . Il primo termine è ovviamente invariante; per il secondo termine

$$\mathcal{S}_{\text{int}} = \int \mathcal{L}_{\text{int}} d\Omega = -\frac{1}{c^2} \int A_\mu J^\mu d\Omega \quad (6.40)$$

si ha:

$$\int A_\mu J^\mu d\Omega \rightarrow \int (A_\mu J^\mu + J^\mu \partial_\mu \Lambda) d\Omega = \int (A_\mu J^\mu - \Lambda \partial_\mu J^\mu) d\Omega + \int \partial_\mu (\Lambda J^\mu) d\Omega$$

L'ultimo termine è un termine di bordo che non dà contributo alla variazione dell'azione; l'invarianza (debole dell'azione) comporta quindi l'annullamento del termine  $\partial_\mu J^\mu$ , cioè la legge di conservazione locale della carica elettrica.

**Box 6.6 — Carica in campi esterni.** Calcoliamo l'azione di interazione tra una carica puntiforme e un campo, vale a dire, sostituiamo  $J$  dato dalla (6.39) nella (6.40):

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{int}} &= -\frac{1}{c^2} \int A_\mu J^\mu d\Omega = -\frac{1}{c^2} \int A_\mu ec \int U^\mu(s) \delta(x - X(s)) ds d\Omega \\ &= -\frac{e}{c} \int A_\mu(X(s)) \frac{dX^\mu}{ds} ds. \end{aligned}$$

Quindi, l'azione di interazione è l'integrale di linea

$$\mathcal{S}_{\text{int}} = -\frac{e}{c} \int A_\mu dX^\mu \quad (6.41)$$

Ne segue che l'azione per il moto di una carica puntiforme in campi elettromagnetici esterni è la somma dell'azione libera di particella (5.13) e di  $\mathcal{S}_{\text{int}}$ :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_m + \mathcal{S}_{\text{int}} = \int_{x'}^{x''} \left( -mcds - \frac{e}{c} A_\mu dX^\mu \right) \quad (6.42)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti sono proprio le equazioni di Lorentz in forma relativistica

$$mc \frac{dU^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} U_\nu \quad (6.43)$$

(problema 6.6 sotto). La parte temporale di queste equazioni è nota come *equazione del lavoro*; la parte spaziale è l'*equazione di Lorentz*.

L'azione per un sistema di cariche si ottiene immediatamente da (6.42) sommando su tutte le cariche:

$$\mathcal{S} = \sum \mathcal{S}_m + \sum \mathcal{S}_{\text{int}} = \sum \int_{x'}^{x''} \left( -mc ds - \frac{e}{c} A_\mu dX^\mu \right) \quad (6.44)$$

**Problema 6.5** Mostrare che se la densità di carica è  $\rho = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X})$ , dove  $\mathbf{X}$  è la posizione dove si trova la particella, l'equazione di continuità è automaticamente soddisfatta.

**Problema 6.6** Mostrare che le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti all'azione (6.42) sono le equazioni (6.43).

**Problema 6.7** Mostrare che la componente temporale dell'equazione (6.43) fornisce l'equazione del lavoro

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{cin}}}{dt} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{V} \quad (6.45)$$

dove  $\mathcal{E}_{\text{cin}}$  è l'energia cinetica (6.21). L'equazione (6.46) è il *teorema lavoro-energia* per una carica in un campo elettromagnetico nel regime relativistico. Si osservi che le forze magnetiche non compiono lavoro.

**Problema 6.8** Mostrare che la componente spaziale dell'equazione (6.43) fornisce l'equazione di Lorentz

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B} \quad (6.46)$$

dove  $\mathbf{P}$  è l'impulso meccanico (6.22).

**Box 6.7 — Variazione prima di  $\mathcal{S}_m + \mathcal{S}_{\text{int}}$ , funzione principale di Hamilton e 4-impulso canonico.** Calcoliamo la variazione di  $\mathcal{S}$  (6.42) (dando così la soluzione del problema 6.6).  $\delta\mathcal{S}_m$  lo abbiamo già calcolato ed è dato dalla (6.19). Ci resta da calcolare

$$\delta\mathcal{S}_{\text{int}} = \delta \left( -\frac{e}{c} \int_{x'}^{x''} A_\mu dX^\mu \right) = -\frac{e}{c} \int_{x'}^{x''} \delta(A_\mu dX^\mu).$$

Per la variazione dell'integrando, si ottiene:

$$\delta(A_\mu dX^\mu) = \partial_t A_\mu dX^\mu + A_\mu \delta(dX^\mu) = \delta(A_\mu) dX^\mu + A_\mu d(\delta X^\mu)$$

Riscrivendo l'ultimo termine come  $A_\mu d(\delta X^\mu) = d(A_\mu \delta X^\mu) - dA_\mu \delta X^\mu$  (per isolare il termine di bordo), tenendo conto che  $\delta A_\mu = \partial_\nu A_\mu \delta X^\nu$  e  $dA_\mu = \partial_\nu A_\mu dX^\nu$  (formule per

il differenziale) l'espressione precedente diventa

$$\delta(A_\mu dX^\mu) = (\partial_\nu A_\mu \delta X^\nu) dX^\mu - (\partial_\nu A_\mu \delta X^\nu) dX^\nu + \text{termine di bordo.}$$

dove il termine di bordo è  $d(A_\mu \delta X^\mu)$ . Adesso scambiamo nome agli indici nel primo termine (essendo sommati non cambia nulla):

$$\begin{aligned} \delta(A_\mu dX^\mu) &= (\partial_\mu A_\nu \delta X^\mu) dX^\nu - (\partial_\nu A_\mu \delta X^\nu) dX^\nu + \text{termine di bordo} \\ &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dX^\nu \delta X^\mu + \text{termine di bordo} \\ &= F_{\mu\nu} dX^\nu \delta X^\mu + \text{termine di bordo} \\ &= F_{\mu\nu} U^\nu \delta X^\mu ds + \text{termine di bordo} \end{aligned}$$

dove abbiamo sostituito il tensore elettromagnetico e la quadri-velocità. Utilizzando l'espressione esplicita per il termine di bordo, arriviamo alla formula

$$\delta S_{\text{int}} = -\frac{e}{c} \int_{x'}^{x''} F_{\mu\nu} U^\nu \delta X^\mu ds - \frac{e}{c} A_\mu \delta X^\mu \Big|_{x'}$$

Sommando a questa espressione, la variazione di  $\delta S_m$  data dalla (6.19), otteniamo la formula finale per la variazione prima di  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_m + \mathcal{S}_{\text{int}}$ :

$$\delta \mathcal{S} = \int_{x'}^{x''} \left( mc \frac{dU_\mu}{ds} - F_{\mu\nu} U^\nu \right) \delta X^\mu ds - \left( mcU_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \right) \delta X^\mu \Big|_{x'} \quad (6.47)$$

A questo punto il discorso è sempre lo stesso, ma vale la pena di ripeterlo. Le equazioni del moto si ottengono dalla condizione  $\delta \mathcal{S} = 0$  per cammini passanti per i due punti dati e quindi per variazioni al bordo nulle. La traiettoria effettiva si deduce dalla condizione  $\delta \mathcal{S} = 0$ . La formula (6.47) ci dà allora l'equazione di Lorentz (6.43). La funzione principale di Hamilton  $S = S(x)$  è ottenuta calcolando l'azione lungo una traiettoria effettiva tenendo fissato il primo estremo di integrazione  $x'$  e lasciando il secondo  $x'' \equiv x$  libero di variare. Allora

$$\delta S(x) = - \left( mcU_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \right) \delta x^\mu \quad \Rightarrow \quad \partial S = - \left( mcU + \frac{e}{c} A \right) \quad (6.48)$$

La funzione  $S = S(x)$  è un campo scalare.

In maniera analoga alla meccanica non-relativistica, si *definisce* il *4-impulso canonico*

$$P_{\text{can}} = -\partial S = mcU + \frac{e}{c} A \quad (6.49)$$

che differisce dall'impulso meccanico  $P_{\text{mecc}} = mcU$ .

Dalla (6.49) e dalla condizione  $U^2 = 1$ , segue immediatamente l'equazione di Hamilton-Jacobi :

$$\left( \partial S + \frac{e}{c} A \right)^2 = m^2 c^2 \quad (6.50)$$

### 6.3.2 Tensore energia-impulso

Consideriamo la teoria del campo elettromagnetico puro descritto dall'azione

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d\Omega = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} dV dt. \quad (6.25)$$

Questa teoria è invariante per traslazioni spazio-temporali  $x \rightarrow x + \epsilon$  con costante 4-vettore  $\epsilon$  e possiamo calcolare il tensore di energia-impulso come per il campo scalare (problema 6.4). Inoltre, la teoria di Maxwell è anche invariante per trasformazioni di gauge  $\delta A = \partial \Lambda$ . Vedremo ora come entrambe le simmetrie possono essere combinate per dare un tensore energia-impulso che è simmetrico e invariante di gauge, noto come *tensore di Belinfante*. (Notiamo che la teoria del campo elettromagnetico puro possiede in realtà un gruppo molto più grande di simmetria di Noether, cioè il gruppo conforme).

L'azione di una traslazione costante su il 4-vettore è

$$A \rightarrow A(x - \epsilon) = A(x) - \epsilon^\nu \partial_\nu A(x) + o(\epsilon)$$

per cui la trasformazione infinitesima è  $\delta A_\mu = -\epsilon^\nu \partial_\nu A_\mu$ . Si lascia per esercizio dimostrare che questa trasformazione modifica l'azione (6.25) con un termine di bordo. Notiamo che esiste un evidente problema: questa variazione del potenziale non ha buone proprietà per trasformazioni di gauge (non è gauge-invariante). Si può quindi anticipare che la corrente conservata associata a questa variazione non avrà buone proprietà per trasformazioni di gauge. Questo problema è stato ampiamente discusso in letteratura. Saltiamo la discussione e passiamo direttamente alla soluzione.

Invece della variazione  $\delta A_\mu = -\epsilon^\nu \partial_\nu A_\mu$ , consideriamo una trasformazione che combina una traslazione spazio-temporale costante insieme ad una particolare trasformazione di gauge,

$$\delta A_\mu = -\epsilon^\alpha \partial_\alpha A_\mu + \partial_\mu(\epsilon^\alpha A_\alpha) = F_{\mu\alpha} \epsilon^\alpha \quad (6.51)$$

con  $\epsilon$  costante. In letteratura questa si chiama una "traslazione migliorata". È invariante di gauge perché dipende da  $A$  solo attraverso  $F$ .

**Box 6.8 — Tensore energia-impulso del campo elettromagnetico.** Calcoliamo la variazione della lagrangiana  $\mathcal{L} = -(1/4)F^2$  per la trasformazione (6.51):

$$\delta F^2 = 2F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} = -2F^{\mu\nu} \epsilon^\alpha (\partial_\mu F_{\nu\alpha} - \partial_\nu F_{\mu\alpha}) = -2F^{\mu\nu} \epsilon^\alpha (\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu})$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo scambiato gli indici e quindi cambiato il segno, essendo  $F$  antisimmetrico. Adesso applichiamo l'identità di Bianchi (6.33) per scrivere l'espressione in parentesi come  $-\partial_\alpha F_{\mu\nu}$ . Allora la variazione diventa

$$\delta F^2 = 2F^{\mu\nu} \epsilon^\alpha \partial_\alpha F_{\mu\nu} = \partial_\alpha(\epsilon^\alpha F^2)$$

che è un termine di bordo, dimostrando che la trasformazione (6.51) è davvero una simmetria. La variazione della lagrangiana è

$$\delta \mathcal{L} = -\frac{1}{4} \delta(F^2) = -\frac{1}{4} \partial_\alpha(\epsilon^\alpha F^2) = \partial_\alpha(\epsilon^\alpha \mathcal{L})$$

cosicché  $K^\alpha = \epsilon^\alpha \mathcal{L}$ . Allora la corrente conservata è

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\rho} \delta A_\rho - K^\mu = F^{\mu\rho} \epsilon^\sigma F_{\rho\sigma} - \epsilon^\mu \mathcal{L} = \epsilon^\sigma (F^{\mu\rho} F_{\rho\sigma} - \delta_\sigma^\mu \mathcal{L}) \\ &= \epsilon^\sigma \left( F^{\mu\rho} F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4} \delta_\sigma^\mu F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \end{aligned} \quad (6.52)$$

e otteniamo il *tensore energia-impulso elettromagnetico*

$$T^\mu_\sigma = F^{\mu\rho} F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4} \delta_\sigma^\mu F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (6.53)$$

Questo tensore è gauge invariante (poiché  $F$  lo è) e ha traccia nulla (associata all'invarianza di scala della teoria). Si lascia come esercizio dimostrare, mediante calcolo diretto, che il tensore di energia-impulso è effettivamente una corrente conservata.

È istruttivo scrivere esplicitamente  $T^{\mu\nu}$  in termini delle quantità

$$\text{densità d'energia} \quad u = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \quad (6.54)$$

$$\text{vettore di Poynting} \quad \mathbf{S} = c(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (6.55)$$

$$\text{vettore densità di impulso} \quad \mathbf{G} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \quad (6.56)$$

$$\text{tensore degli sforzi di Maxwell} \quad T_{ij} = E_i E_j + B_i B_j - \delta_{ij} u. \quad (6.57)$$

Allora

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} u & \frac{1}{c} S_x & \frac{1}{c} S_y & \frac{1}{c} S_z \\ cG_x & & & \\ cG_y & & T_{ij} & \\ cG_z & & & \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

e la legge di conservazione  $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$  diventa

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \quad (6.59)$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial t} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^j} = 0 \quad (6.60)$$

che sono le equazioni di continuità per l'energia e l'impulso per il campo elettromagnetico libero.

**Box 6.9 — Struttura del tensore energia-impulso.** Mentre la densità di carica si combina con la densità di corrente per formare un 4-vettore, la densità di energia si combina con la densità di impulso e le densità di flusso di impulso 3-dimensionali (gli “sforzi”), per formare un tensore simmetrico, il *tensore energia-impulso*  $T^{\mu\nu}$ . La struttura messa in luce dalla (6.58) è del tutto generale e vale per tutte le forme di materia e campi, escluso il campo gravitazionale. Per ragioni fisiche di stabilità del sistema si può mostrare che  $T^{\mu\nu}$  deve essere simmetrico. Le componenti di  $T^{\mu\nu}$  hanno il significato seguente:

- $T^{00}$  è la densità di energia;
- $T^{0i}$  è il flusso di energia nella direzione spaziale  $i = x, y, z$  (diviso per  $c$ );
- $T^{i0}$  è la componente  $i$ -esima della densità di impulso (moltiplicata per  $c$ ), che

coincide (a meno di un fattore  $1/c^2$ ) con il flusso di energia nella direzione spaziale  $i$  (per la simmetria del tensore);

- $T^{ij}$  è il flusso nella direzione  $j$  della componente  $i$  della densità di impulso (o viceversa, poiché  $T^{ij} = T^{ji}$ ).

**Box 6.10** — **Tensore energia-impulso di un sistema di particelle non interagenti.** Per determinare la forma del tensore energia impulso di un sistema di particelle occorre descrivere la distribuzione di massa nello spazio attraverso la *densità di massa* analogamente a come abbiamo descritto la distribuzione di una cariche puntiformi in termini della loro densità di carica. Per analogia con la formula per la densità di carica, la densità di massa  $\mu$  di una particella puntiforme è

$$\mu = m\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) \quad (6.61)$$

dove  $\mathbf{X}$  è la posizione della particella. Per la struttura generale del tensore energia-impulso,  $T^{00}$  deve essere pari alla densità di energia, che è  $\mu c^2 U^0$ , dove  $U_0$  è la componente temporale della 4-velocità; inoltre, le componenti  $T^{0i}/c$  devono essere tali che se integrate sono pari all'impulso  $P^i$  della particella, per cui  $T^{0i} = \mu c^2 U^i$ , dove  $U^i = dX^i/ds$  sono le componenti spaziali della 4-velocità. La densità di massa è però la componente temporale del 4-vettore  $(\mu/c)dX^\mu/dt$  (in analogia con la densità di carica). Di conseguenza il tensore energia-impulso di una particella è

$$T^{\mu\nu} = \left( \frac{\mu}{c} \frac{dX^\mu}{dt} \right) (c^2 U^\nu) = \mu c \frac{dX^\mu}{dt} U^\nu = \mu c U^\mu U^\nu \frac{ds}{dt}$$

che è simmetrico, come deve essere. Il tensore energia-impulso di un sistema di particelle non interagenti è la somma dei tensori energia-impulso di singola particella.

**Box 6.11** — **Trattazione non relativistica delle leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso.** In questo Box, otteniamo le leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso per un sistema di carica in interazione elettromagnetica nel formalismo elementare della Fisica Generale. Si lascia come esercizio la trattazione 4-dimensionale. Usualmente in un corso di Fisica Generale si dimostra il *teorema di Poynting*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (6.62)$$

a partire dalle equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (1.47a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.47b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.47c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (1.47d)$$

Assumiamo che lo studente abbia familiarità con questa derivazione. Ci limitiamo a ricordarne il significato fisico. Si osservi preliminarmente che per una singola carica  $q$  il lavoro meccanico per unità di tempo fatto dai campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  è  $q\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}$ , dove  $\mathbf{V}$  è la velocità della carica (il campo magnetico non fa lavoro, essendo la forza magnetica

perpendicolare alla velocità). Per un sistema di cariche distribuite in un volume  $V$  il lavoro meccanico per unità di tempo (potenza) sarà

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{mecc}}}{dt} = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV.$$

Il teorema allora stabilisce che la variazione nel tempo dell'energia elettromagnetica all'interno di un certo volume,

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{e.m.}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V u dV$$

sommata all'energia  $\oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\Sigma}$  che fluisce attraverso le superfici di contorno del volume per unità di tempo, è uguale a  $-d\mathcal{E}_{\text{mecc}}/dt$ . In altri termini, il teorema stabilisce che

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathcal{E}_{\text{e.m.}} + \mathcal{E}_{\text{mecc}}) = - \oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\Sigma}, \quad (6.63)$$

che è la legge di conservazione dell'energia totale.

La conservazione della quantità di moto può essere considerato in modo analogo alla conservazione dell'energia. La forza elettromagnetica su una particella carica è la forza di Lorentz (1.46). Se denotiamo con  $\mathbf{P}_{\text{mecc}}$  la somma delle quantità di moto di tutte le particelle nel volume  $V$ , allora, dalla (1.46), abbiamo

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{mecc}}}{dt} = \int_V \left( \rho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B} \right) dV$$

dove, per comodità in manipolazione, abbiamo convertito la somma sulle particelle un integrale sulle densità di carica e di corrente. Usiamo le equazioni di Maxwell per eliminare  $\rho$  e  $\mathbf{J}$ :

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{J} = c \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

cosicché l'integrando diventa

$$\rho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B} = \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{c} \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}).$$

Allora scrivendo

$$\mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e aggiungendo  $\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$ , otteniamo

$$\rho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B} = \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Il tasso di variazione del momento meccanico può quindi essere scritto come

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{mecc}}}{dt} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV = \int_V \mathbf{C} dV \quad (6.64)$$

dove  $\mathbf{C} = \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})$ . Adesso è un semplice esercizio di calcolo vettoriale mostrare che  $\mathbf{C} = \nabla \cdot \mathbf{T}$  dove  $\mathbf{T} = \{T_{ij}\}$  è il tensore di Maxwell (6.57) e  $\nabla \cdot \mathbf{T}$  ha componenti

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_i = \sum_{\beta} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} T_{i\beta}.$$

Allora, per il teorema di Gauss

$$\int_V \mathbf{C} dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{T} dV = \int_{\partial V} \mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\Sigma},$$

per cui la (6.64) può essere riscritta come

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{P}_{\text{mecc}} + \mathbf{P}_{e.m.}) = \int_{\partial V} \mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} \quad (6.65)$$

dove

$$\mathbf{P}_{e.m.} = \frac{1}{c} \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV = \frac{\mathbf{S}}{c^2} \equiv \mathbf{G}. \quad (6.66)$$

è l'impulso del campo elettromagnetico (6.56).

La (6.65) esprime la conservazione della quantità di moto:  $(\mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\Sigma})_i = \sum_{\beta} T_{i\beta} d\Sigma_{\beta}$  è la componente  $i$  del flusso di quantità di moto attraverso l'elemento infinitesimo di superficie  $d\Sigma$  del bordo di  $V$ . In altre parole, è la forza, trasmessa attraverso la superficie  $d\Sigma$ , che agisce sul sistema complessivo di particelle e campi all'interno del volume  $V$ . L'equazione (6.65) può quindi essere utilizzata per calcolare le forze che agiscono su oggetti materiali in presenza di campi elettromagnetici. L'esempio più noto di questa forza è la *pressione di radiazione*, in cui un fascio di luce trasferisce la sua quantità di moto per un oggetto che assorbe o disperde la radiazione, generando una pressione meccanica su di esso nel processo.

**Box 6.12 — Conservazione del momento angolare.** La conservazione del momento angolare del sistema complessivo di particelle e campi può essere trattato nello stesso modo come abbiamo trattato l'energia e la quantità di moto. Non entriamo nei dettagli, ma ci limitiamo ad osservare che la formula per il momento angolare del campo elettromagnetico è

$$\mathbf{L}_{e.m.} = \frac{1}{c} \int \mathbf{x} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV \quad (6.67)$$

**Problema 6.9 — Tensore energia-impulso di cariche e campi in interazione nel formalismo 4-dimensionale.**

### 6.3.3 Interazione tra campo e particelle

Si rimanda alla lezione svolta in classe sulle difficoltà dell'azione

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_m + \mathcal{S}_f + \mathcal{S}_{\text{int}}$$

### 6.3.4 Interazione tra campi

Si rimanda alla lezione svolta in classe

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - i \frac{e}{\hbar c} A_\mu$$

### 6.3.5 Il campo di Maxwell come "curvatura" \*

### 6.3.6 Il campo di Yang-Mills \*

## 6.4 Campo di Einstein \*

## 6.5 Campo di Dirac

L'equazione di Dirac è stata formulata nel 1928 da Paul Dirac nel tentativo di ovviare agli inconvenienti dell'equazione di Klein-Gordon (la più immediata formulazione relativistica dell'equazione di Schrodinger), che presenta difficoltà se interpretata come un'equazione per la funzione d'onda di una singola particella. Nel 1929 Weyl propose un'equazione per descrivere un fermione relativistico a massa nulla e di spin 1/2. Nel seguito, procederemo a ritroso: partiremo dal campo di Weyl per arrivare al campo di Dirac.

**Box 6.13** — Difficoltà dell'equazione di Klein-Gordon come equazione di Schrödinger relativistica.

$$\square \psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0$$

Relazione di dispersione per onda piana  $\psi = \mathcal{A} e^{-ikx}$ :

$$\square \rightarrow (-ik)^2 = -k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} + |\mathbf{k}|^2 \Rightarrow -\frac{\omega^2}{c^2} + |\mathbf{k}|^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} = 0 \Rightarrow \omega = \pm \omega_{\mathbf{k}}$$

dove

$$\omega_{\mathbf{k}} = c \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}}$$

Usando de Broglie

$$E = \pm c \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2 c^2}$$

Ha soluzioni a energia negativa. Corrente di Noether per invarianza di fase dell'azione:

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left( \bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \right)$$

$$\mathbf{J} = -\frac{i\hbar}{2m} \left( \bar{\psi} \nabla \psi - \psi \nabla \bar{\psi} \right)$$

$\rho$  non può essere interpretata come una probabilità perché non è definita positiva; per esempio si prenda  $\psi = \mathcal{A}e^{-i\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$  per “energia negativa”  $\mathcal{E} = \hbar\omega$  con  $\omega = -\omega_{\mathbf{k}}$  (eventualmente moltiplicata per un fattore che la renda integrabile).

### 6.5.1 Equazione di Weyl

L’equazione proposta da Weyl per un campo spinoriale  $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$  è molto semplice:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \xi = 0 \quad (6.68)$$

Il carattere relativistico dell’equazione segue dal fatto che l’equazione è del prim’ordine nel tempo e nello spazio, cioè spazio e tempo sono trattati nello stesso modo (a differenza dell’equazione di Pauli).

L’indubbio pregio dell’equazione di Weyl è la sua estrema semplicità. La si sarebbe potuta indovinare senza conoscere la relatività, ma solamente guidati dalla ricerca dell’equazione d’onda quantistica più semplice per uno spinore. Inoltre, recentemente, questa equazione si è rivelata utile nella fisica degli stati condensati, in contesti che non c’entrano nulla con la relatività.

**Box 6.14 — Lagrangiana dell’equazione di Weyl.**

$$\mathcal{L} = i\xi^* \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi$$

#### L’equazione di Weyl come equazione d’onda

L’equazione di Weyl può essere usata per descrivere il movimento di una particella quantistica per la seguente ragione. In primo luogo,  $\xi^* \xi$  è una quantità localmente conservata. Per mostrare questo, scriviamo le equazioni di Weyl per  $\xi$  e  $\xi^*$  nel seguente modo

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= -\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \xi \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \xi^*}{\partial t} &= -\xi^* \boldsymbol{\sigma} \cdot \overleftarrow{\nabla} \end{aligned}$$

dove  $\overleftarrow{\nabla}$  significa che l’operatore agisce su funzioni alla sua sinistra. Allora

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \xi^* \xi = \frac{\partial \xi^*}{\partial t} \xi + \xi^* \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\xi^* \overleftarrow{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} \xi - \xi^* \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \xi = -\nabla \cdot \xi^* \boldsymbol{\sigma} \xi$$

Quindi vale l’equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

per  $\rho = \xi^* \xi$  e  $\mathbf{J} = c \xi^* \boldsymbol{\sigma} \xi$ . Questa equazione può essere scritta in forma manifestamente Lorentz-invariante  $\partial \cdot J = 0$  introducendo il 4-vettore  $J = (c \xi^* \xi, c \xi^* \boldsymbol{\sigma} \xi)$ .

Un’importante conseguenza dell’equazione di continuità è la seguente: se  $\xi^* \xi$  è normalizzata ad un qualche istante di tempo,

$$\int_{\text{spazio}} \xi^* \xi dV = 1$$

la normalizzazione è mantenuta a tutti gli istanti di tempo. Questo significa che  $\xi^* \xi$  può essere interpretata come una densità di probabilità che evolve nella direzione della densità di flusso di probabilità  $\mathbf{J} = c \xi^* \boldsymbol{\sigma} \xi$ . Ma  $\xi^* \boldsymbol{\sigma} \xi$  è il vettore associato a  $\xi$ . Quindi  $\xi^* \xi = |\mathbf{J}|$ .

Allora  $J^2 = 0$  e quindi  $J$  è un 4-vettore di tipo luce. Ne segue che l'equazione di Weyl descrive particelle che si propagano alla velocità della luce.

In particolare, se consideriamo un'onda piana  $\xi = \xi_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)}$ , l'equazione di Weyl diventa

$$\sigma(\mathbf{k})\xi_{\mathbf{k}} = \frac{\omega}{c}\xi_{\mathbf{k}} \quad (6.69)$$

Poiché  $\sigma(\mathbf{k})^2 = |\mathbf{k}|^2$ , ne segue che  $\omega^2 = c|\mathbf{k}|^2$ , che è la stessa relazione di dispersione delle onde elettromagnetiche. Si osservi che  $\omega/c = +|\mathbf{k}|$  è l'autovalore positivo di  $\sigma(\mathbf{k})$ , mentre l'altro autovalore è  $\omega/c = -|\mathbf{k}|$  ed è negativo. Quindi se applichiamo brutalmente la relazione di Einstein-de Broglie  $\mathcal{E} = \hbar\omega$ , la particella avrà un'energia negativa in corrispondenza dell'autovalore negativo, il che non è fisicamente accettabile.

Questo difetto può essere curato con l'idea di Dirac che il vuoto fisico  $|0\rangle$  corrisponda a tutti gli stati di energia negativa occupati. Questo stato è usualmente chiamato mare di Dirac. In seguito analizzeremo questo problema da un punto di vista più fondamentale e vedremo come si possa giungere alle stesse conclusioni di Dirac evitando di introdurre una struttura così artificiale come il mare di Dirac. Temporaneamente, assegneremo significato fisico solo alle soluzioni ad energia positiva.

### Particelle e antiparticelle

Si potrebbe ritenere che un altro difetto dell'equazione di Weyl sia il fatto che essa non è invariante per parità. Infatti, operando l'inversione spaziale  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$  si passa all'equazione

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \eta = 0 \quad (6.70)$$

che è chiaramente differente dall'equazione di Weyl. La chiameremo la seconda equazione di Weyl per differenziarla dalla prima equazione di Weyl data dalla (6.68). La scoperta della violazione della parità nei decadimenti deboli ha trasformato questo difetto in una virtù e ha reso l'equazione di Weyl un buon candidato per descrivere i neutrini.

Il flusso di probabilità associato alla seconda equazione di Weyl è  $-\mathbf{J}$  e quindi il 4-vettore associato è ottenuto da  $J$  per inversione di parità. Questo significa che gli spinori che sono soluzioni delle due equazioni di Weyl hanno chiralità opposta:  $\xi$  è uno spinore destro e  $\eta$  uno spinore sinistro. Poiché non esiste alcun sistema di riferimento in cui  $\xi$  diventa  $\eta$ , come abbiamo già sottolineato,  $\xi$  e  $\eta$  descrivono due tipi diversi di particelle:  $\xi$  descrive una particella con chiralità destra e  $\eta$  una con chiralità sinistra. La prima particella è nota come anti-neutrino (di Weyl) e la seconda come neutrino (di Weyl).

### Moto della particella guidata da un'onda piana

Vediamo come evolve una particella guidata dall'onda piana  $\xi = \xi_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t)}$  con  $\omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|$  e  $\xi_{\mathbf{k}}$  autovettore di autovalore  $+1$  di  $\sigma(\hat{\mathbf{k}})$  (come segue da (6.69) per  $\omega/c = |\mathbf{k}|$ ). Allora il flusso di probabilità è  $\mathbf{J} = c\hat{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}}^* \xi_{\mathbf{k}}$ . Quindi la particella si muove con velocità  $c\hat{\mathbf{k}}$  e ha un impulso

$$\mathbf{p} = \mathbf{v} \frac{\mathcal{E}}{c^2} = (c\hat{\mathbf{k}}) \left( \frac{\hbar c |\mathbf{k}|}{c^2} \right) = \hbar \mathbf{k},$$

in accordo con la relazione di Einstein-de Broglie  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ . Il suo 4-impulso è  $p = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p})$  ed è di tipo luce. La particella ha massa zero. Un ragionamento analogo porta alla stessa conclusione per l'anti-particella.

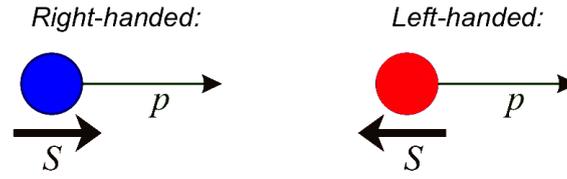


Figura 6.1: I cerchi rosso e blu rappresentano due tipi di particelle. Entrambe hanno massa zero e spin  $1/2$ . La rossa ha una chiralità differente dalla blu: la blu è “destra”, la rossa è “sinistra”. Questa proprietà ha a che fare con le proprietà di trasformazione rispetto al gruppo di Lorentz ed è sufficiente a distinguere le due particelle. È quindi legittimo chiamarle diversamente e rappresentarle con colore differente (neutrino la rossa e anti-neutrino la blu). L’elicità è sempre negativa per la particella che chiamiamo neutrino e sempre positiva per la particella che chiamiamo anti-neutrino.

### Schema riassuntivo

Le equazioni di Weyl sono

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \sigma(\nabla)\xi = 0 \quad (6.71)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \sigma(\nabla)\eta = 0 \quad (6.72)$$

dove  $\xi$  è uno spinore destro e  $\phi$  uno spinore sinistro. Ad esse sono associate particelle e anti-particelle che si propagano alla velocità della luce. Lo sviluppo in onde piane delle soluzioni,  $\xi = \xi_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)}$  e  $\eta = \eta_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)}$  fornisce le equazioni di Weyl in trasformata di Fourier

$$\frac{\omega}{c} \xi_{\mathbf{k}} - \sigma(\mathbf{k})\xi_{\mathbf{k}} = 0 \quad (6.73)$$

$$\frac{\omega}{c} \eta_{\mathbf{k}} + \sigma(\mathbf{k})\eta_{\mathbf{k}} = 0 \quad (6.74)$$

### Elicità e chiralità

L’elicità è definita come la proiezione dello spin  $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}$  sulla direzione dell’impulso  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  della particella guidata dall’onda piana di numero d’onde  $\mathbf{k}$  ed è quindi data dall’operatore

$$\frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \frac{1}{2}\hbar \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$

Poiché  $\omega = c|\mathbf{k}|$  (consideriamo solo soluzioni ad energia positiva), vediamo che gli spinori  $\xi_{\mathbf{k}}$  sono auto-stati dell’elicità di autovalore positivo (lo spin è lungo la direzione di propagazione), mentre gli spinori  $\eta_{\mathbf{k}}$  descrivono auto-stati dell’elicità di autovalore negativo (lo spin è opposto alla direzione di propagazione). In altre parole, le particelle, che hanno chiralità destra (anti-neutrini), hanno elicità positiva e le anti-particelle, che hanno chiralità sinistra (neutrini), hanno elicità negativa.

### 6.5.2 Equazione di Dirac

Abbiamo visto che gli spinori  $\xi$  e  $\eta$  presi separatamente descrivono particelle a massa zero (che si muovono alla velocità della luce). Ci si domanda se è possibile usarli in coppia per descrivere particelle di massa non nulla. Per fare questo proviamo ad accoppiare lo spinore destro  $\xi$  con lo spinore sinistro  $\eta$  introducendo a secondo membro delle (6.73) e (6.74) un

termine di interazione che mescoli i due spinori, passando così al sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{\omega}{c}\xi_{\mathbf{k}} - \sigma(\mathbf{k})\xi_{\mathbf{k}} = \mu\eta_{\mathbf{k}} \\ \frac{\omega}{c}\eta_{\mathbf{k}} + \sigma(\mathbf{k})\eta_{\mathbf{k}} = \mu\xi_{\mathbf{k}} \end{cases} \quad (6.75)$$

dove  $\mu$  è una costante con le dimensioni dell'inverso di una lunghezza che rompe l'invarianza di scala delle equazioni di Weyl. Per decidere se il programma ha successo, dobbiamo determinare la relazione di dispersione associata al sistema di equazioni (6.75).

Riscriviamo il sistema (6.75) in forma di matrice  $4 \times 4$  (scritta a blocchi di matrici  $2 \times 2$ )

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\omega}{c}\mathbb{1} + \sigma(\mathbf{k}) \\ \frac{\omega}{c}\mathbb{1} - \sigma(\mathbf{k}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{\mathbf{k}} \\ \eta_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \xi_{\mathbf{k}} \\ \eta_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il quadrato della matrice a primo membro

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\omega}{c}\mathbb{1} + \sigma(\mathbf{k}) \\ \frac{\omega}{c}\mathbb{1} - \sigma(\mathbf{k}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\omega}{c}\mathbb{1} + \sigma(\mathbf{k}) \\ \frac{\omega}{c}\mathbb{1} - \sigma(\mathbf{k}) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} - |\mathbf{k}|^2 & 0 \\ 0 & \frac{\omega^2}{c^2} - |\mathbf{k}|^2 \end{pmatrix}$$

Deve quindi valere la relazione

$$\frac{\omega^2}{c^2} - |\mathbf{k}|^2 = \mu^2$$

che è proprio la relazione di dispersione

$$\omega^2 = c^2|\mathbf{k}|^2 + c^2\mu^2 \quad (6.76)$$

di una particella di massa  $m$ , con  $\mu = mc/\hbar$  l'inverso della sua lunghezza Compton. Ne concludiamo che il sistema di equazioni (6.75) descrive una particella di massa  $m$  non nulla. Questo sistema di equazioni non è altro che l'equazione di Dirac libera (in trasformata di Fourier) per il vettore a 4 componenti complesse

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

detto spinore di Dirac o bi-spinore, dove  $\xi$  è uno spinore destro e  $\eta$  uno spinore sinistro.

### Matrici gamma

Usualmente, l'equazione di Dirac è scritta in forma compatta. A tal fine, si definiscono le 4 matrici  $4 \times 4$

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{cioè } \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3,$$

che formano il 4-vettore di matrici  $\gamma = (\gamma_0, \boldsymbol{\gamma})$ , e si introduce il 4-vettore  $k = (\omega/c, \mathbf{k})$ , per cui

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\omega}{c}\mathbb{1} + \sigma(\mathbf{k}) \\ \frac{\omega}{c}\mathbb{1} - \sigma(\mathbf{k}) & 0 \end{pmatrix} = k_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \mathbf{k} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = k_0\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} = \boldsymbol{\gamma}k$$

dove  $\boldsymbol{\gamma}k$  è il prodotto scalare di Minkowski di  $\boldsymbol{\gamma}$  e  $k$ .

Allora l'equazione di Dirac in trasformata di Fourier può essere scritta come

$$\left(\gamma k - \frac{mc}{\hbar}\right) \Psi_{\mathbf{k}} = 0. \quad (6.77)$$

Si passa dall'equazione in trasformata di Fourier all'equazione per il campo  $\Psi = \Psi(x)$  nello spazio-tempo di Minkowski, mediante la sostituzione

$$k^0 \rightarrow i\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{k} \rightarrow -i\nabla, \quad \text{ossia} \quad k \rightarrow i\partial \equiv i\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$$

da cui segue la forma Lorentz-invariante dell'equazione di Dirac per il campo (classico)  $\Psi = \Psi(x)$ :

$$\left(i\gamma\partial - \frac{mc}{\hbar}\right) \Psi = 0 \quad (6.78)$$

Fissato un sistema di riferimento per cui  $x = (ct, \mathbf{x})$ , si ha

$$\gamma\partial = \gamma_0\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla$$

da cui

$$i\frac{1}{c}\gamma_0\frac{\partial\Psi}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\Psi = \frac{mc}{\hbar}\Psi \quad \Rightarrow \quad i\hbar\gamma_0\frac{\partial\Psi}{\partial t} + i\hbar c\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\Psi = mc^2\Psi$$

Inoltre, osservando che  $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$ , si possono moltiplicare ambo i membri di questa equazione per  $\gamma^0$ , da cui segue la **forma di Schrödinger dell'equazione di Dirac**

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\Psi + \beta mc^2\Psi \quad (6.79)$$

avendo definito

$$\beta \equiv \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} \equiv \gamma_0\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \quad (6.80)$$

Per l'hamiltoniana di Dirac si ottiene così l'espressione

$$H = -i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta mc^2 = c\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\alpha} + \beta mc^2 \quad (6.81)$$

### 6.5.3 Algebra di Dirac

La costruzione dell'algebra di Dirac segue gli stessi passi che abbiamo seguito nella costruzione dell'algebra di Pauli. Fissata una base  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  nello spazio di Minkowski  $\mathbb{M}^4$  e stabilita l'associazione

$$\mathbf{e}_0 \rightarrow \gamma_0, \quad \mathbf{e}_1 \rightarrow -\gamma_1, \quad \mathbf{e}_2 \rightarrow -\gamma_2, \quad \mathbf{e}_3 \rightarrow -\gamma_3, \quad (6.82)$$

la si estende per linearità a tutti i 4-vettori  $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$

$$a = a_0\mathbf{e}_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \rightarrow a_0\gamma_0 - a_1\gamma_1 - a_2\gamma_2 - a_3\gamma_3 \equiv \gamma(a).$$

di modo che  $\gamma(a)$  è la matrice che prima avevamo denotato  $\gamma a$ . Per costruzione,  $\gamma(\mathbf{e}_0) = \gamma_0$ ,  $\gamma(\mathbf{e}_1) = -\gamma_1$ ,  $\gamma(\mathbf{e}_2) = -\gamma_2$  e  $\gamma(\mathbf{e}_3) = -\gamma_3$  e  $\gamma(a)$  è la matrice

$$\gamma(a) = \begin{pmatrix} 0 & a_0\mathbb{1} + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{a}) \\ a_0\mathbb{1} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{a}) & 0 \end{pmatrix}$$

La proprietà algebrica più importante dell'algebra di Dirac è la relazione di anti-commutazione:

$$\gamma(a)\gamma(b) + \gamma(b)\gamma(a) = 2ab \quad (6.83)$$

dove  $a$  e  $b$  sono 4-vettori e  $ab$  è il loro prodotto scalare di Minkowski. Questa relazione si dimostra immediatamente con passaggi algebrici analoghi a quelli che ci hanno portato alla (6.76). Per  $\gamma(a)\gamma(b)$  abbiamo

$$\begin{pmatrix} 0 & a_0\mathbb{1} + \sigma(\mathbf{a}) \\ a_0\mathbb{1} - \sigma(\mathbf{a}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_0\mathbb{1} + \sigma(\mathbf{b}) \\ a_0\mathbb{1} - \sigma(\mathbf{b}) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0b_0 - \sigma(\mathbf{a})\sigma(\mathbf{b}) & 0 \\ 0 & a_0b_0 - \sigma(\mathbf{a})\sigma(\mathbf{b}) \end{pmatrix}$$

vale a dire,

$$\gamma(a)\gamma(b) = a_0b_0 - \sigma(\mathbf{a})\sigma(\mathbf{b})$$

e scambiando  $a$  con  $b$  otteniamo

$$\gamma(b)\gamma(a) = a_0b_0 - \sigma(\mathbf{b})\sigma(\mathbf{a})$$

Dalla relazione di anti-commutazione dell'algebra di Pauli (4.48), segue la (6.83). In particolare, per  $a = b$  si ha  $\gamma(a)^2 = a^2$ .

Molto altro ci sarebbe da dire sull'algebra di Dirac ...

#### 6.5.4 Simmetrie e leggi di conservazione

##### 4-vettore associato allo spinore di Dirac ed equazione di continuità

Allo spinore di Dirac  $\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \eta \end{pmatrix}$  risulta associato il 4-vettore

$$J = c\Psi^* \gamma_0 \gamma \Psi$$

(la ragione di  $\gamma_0$  e  $c$  risulterà chiara tra breve). La componente temporale di  $J$  è

$$J_0 = c\Psi^* \gamma_0 \gamma_0 \Psi = c\Psi^* \Psi = c \begin{pmatrix} \xi^* & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = c(\xi^* \xi + \eta^* \eta)$$

e quella spaziale è

$$\mathbf{J} = c\Psi^* \gamma_0 \gamma \Psi = c\Psi^* \boldsymbol{\alpha} \Psi = c \begin{pmatrix} \xi^* & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = c\xi^* \boldsymbol{\sigma} \xi - c\eta^* \boldsymbol{\sigma} \eta$$

Si osservi che  $J_0$  è strettamente positivo essendo uguale all'usuale norma del vettore complesso  $\sqrt{c}\Psi$ , dunque non esiste alcun sistema di riferimento in cui la componente temporale di  $J$  si annulla e quindi  $J$  è di tipo tempo o di tipo luce.

##### Aggiunto di Dirac

È consuetudine introdurre lo spinore di Dirac (riga)

$$\bar{\Psi} = \Psi^* \gamma_0$$

detto **aggiunto di Dirac** di  $\Psi$ , in termini del quale il 4-vettore associato assume la forma

$$J = c\bar{\Psi} \gamma \Psi$$

Poiché  $\gamma_0$  scambia  $\xi$  con  $\eta$ , se  $\Psi$  risolve l'equazione di Dirac (6.78), allora  $\bar{\Psi}$  risolve l'equazione

$$\bar{\Psi} \left( i\overleftarrow{\gamma} \overleftarrow{\partial} + \frac{mc}{\hbar} \right) = 0$$

dove  $\overleftarrow{\partial}$  significa che l'operatore agisce su funzioni alla sua sinistra.

**Equazione di continuità**

Mostriamo che se  $\Psi$  è soluzione dell'equazione di Dirac allora  $J$  soddisfa l'equazione di continuità

$$\partial J = 0$$

Si ha infatti

$$\frac{1}{c}\partial J = \partial(\bar{\Psi}\gamma\Psi) = \bar{\Psi}\overleftarrow{\partial}\gamma\Psi + \bar{\Psi}\partial\gamma\Psi = i\frac{mc}{\hbar}\bar{\Psi}\gamma\Psi - i\frac{mc}{\hbar}\bar{\Psi}\gamma\Psi = 0$$

In un dato sistema di riferimento l'equazione di continuità assume la forma usuale

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

per  $\rho = J_0/c = \Psi^*\Psi$  e  $\mathbf{J} = c\Psi^*\boldsymbol{\alpha}\Psi$  e per essa valgono le stesse considerazioni che abbiamo fatto a proposito dell'equazione di Weyl: se la quantità  $\Psi^*\Psi$  è normalizzata ad un qualche istante di tempo,

$$\int_{\text{spazio}} \Psi^*\Psi dV = 1$$

la normalizzazione è mantenuta a tutti gli istanti di tempo. Questo significa che

$$\rho = \Psi^*\Psi = \xi^*\xi + \eta^*\eta \quad (6.84)$$

può essere interpretata come una densità di probabilità che evolve nella direzione della densità di flusso di probabilità

$$\mathbf{J} = c\Psi^*\boldsymbol{\alpha}\Psi = c\xi^*\boldsymbol{\sigma}\xi - c\eta^*\boldsymbol{\sigma}\eta \quad (6.85)$$

La differenza sostanziale con l'equazione di Weyl è che adesso  $J$  può essere un 4-vettore di tipo tempo.

**6.5.5 Il problema delle soluzioni di energia negativa****Analisi in onde piane e moto della particelle**

La sostanza fisica dell'equazione di Dirac è nel sistema di equazioni (6.75), che per comodità riscriviamo

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{c}\xi_{\mathbf{k}} - \sigma(\mathbf{k})\xi_{\mathbf{k}} &= \mu\eta_{\mathbf{k}} \\ \frac{\omega}{c}\eta_{\mathbf{k}} + \sigma(\mathbf{k})\eta_{\mathbf{k}} &= \mu\xi_{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (6.75)$$

e nella relazione di dispersione (6.76)

$$\omega^2 = c^2|\mathbf{k}|^2 + c^2\mu^2 \quad (6.76)$$

Quel che abbiamo visto dopo è interessante e utile, ma si tratta pur sempre di sviluppi formali fondati su queste relazioni. Il sistema (6.75) è un'equazione per le ampiezze delle onde piane  $\psi = \xi_{\mathbf{k}}e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x}-\omega t)}$  e  $\eta = \eta_{\mathbf{k}}e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x}-\omega t)}$  che formano lo spinore di Dirac. Quando sappiamo che cosa fanno le onde piane, per linearità sappiamo tutto (o quasi).

Se riscriviamo la (6.75) così

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{k})\xi_{\mathbf{k}} + \mu\eta_{\mathbf{k}} &= \frac{\omega}{c}\xi_{\mathbf{k}} \\ \mu\xi_{\mathbf{k}} - \sigma(\mathbf{k})\eta_{\mathbf{k}} &= \frac{\omega}{c}\eta_{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (6.86)$$

vediamo che essa è un'equazione agli autovalori per le ampiezze delle onde piane, vale a dire, per un dato numero d'onda  $\mathbf{k}$ , gli stati del sistema sono gli autovettori della matrice

$$\begin{pmatrix} \sigma(\mathbf{k}) & \mu \\ \mu & -\sigma(\mathbf{k}) \end{pmatrix}$$

associati agli autovalori  $\omega/c$ . La (6.76) ci dice che ci sono due autovalori uguali in modulo, ma di segno opposto,  $+\omega(\mathbf{k})/c$  e  $-\omega(\mathbf{k})/c$ , dove  $\omega(\mathbf{k}) = c\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \mu^2}$ . Quindi ad ogni autovalore è associato un auto-spazio bidimensionale in  $\mathbb{C}^4$ . L'autospazio dell'autovalore positivo è lo spazio i cui elementi soddisfano il vincolo (6.86) per  $\omega = +\omega(\mathbf{k})/c$ , l'autospazio dell'autovalore negativo è invece dato dal vincolo (6.86) per  $\omega = -\omega(\mathbf{k})/c$ .

Ci troviamo davanti alla situazione incontrata con l'equazione di Weyl: se applichiamo brutalmente la relazione di Einstein-de Broglie  $\mathcal{E} = \hbar\omega$ , la particella avrà un'energia negativa in corrispondenza dell'autovalore negativo, il che non è fisicamente accettabile. Dirac introdusse l'idea che il vuoto fisico  $|0\rangle$  corrisponda a tutti gli stati di energia negativa occupati proprio per risolvere questo problema per l'equazione di Dirac. Temporaneamente, assegneremo significato fisico solo alle soluzioni ad energia positiva.

## 6.6 Anti-particelle classiche\*

I

## 7. Sistemi lineari classici

### 7.1 Teoria classica delle piccole oscillazioni

I sistemi a molti gradi di libertà possono mostrare un comportamento molto complicato in prossimità di un equilibrio stabile. Tuttavia, questo comportamento può sempre essere considerato come la sovrapposizione di movimenti armonici di gradi di libertà indipendenti, i *modi normali di oscillazione*.

#### 7.1.1 Piccole oscillazioni di un sistema di particelle

Supponiamo di avere un sistema di particelle con  $r$  coordinate generalizzate  $q = (q_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  descritto da una lagrangiana standard  $L = T - V$  con energia cinetica  $T$  della forma (1.5) e potenziale  $V$ :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q). \quad (1.5)$$

I punti critici di  $V$ , cioè punti  $\bar{q}$  tali che

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q} \right|_{q=\bar{q}} = 0$$

definiscono le configurazioni di equilibrio del sistema. Supponiamo che l'equilibrio sia stabile, cioè, che  $\bar{q}$  sia un minimo (locale) di  $V$ .

Approssimiamo il movimento nell'intorno di un punto di equilibrio definendo

$$\delta q = q - \bar{q}$$

ed espandiamo la lagrangiana in una serie di Taylor intorno a  $\delta q = 0$ . Al primo ordine non banale otteniamo

$$L \approx \frac{1}{2} \sum_{ij} \left[ M_{ij} \delta \dot{q}_i \delta \dot{q}_j - K_{ij} \delta q_i \delta q_j \right]$$

dove

$$M_{ij} = a_{ij}(q_0), \quad K_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q^i \partial q^j}(q_0)$$

e abbiamo abbandonato la costante additiva irrilevante  $V(q_0)$ , cioè abbiamo regolato lo zero di energia potenziale per essere in  $q_0$ . Abbiamo che  $M_{ij} = M_{ji}$  e supponiamo che l'energia potenziale sia sufficientemente liscia in modo che la matrice delle derivate parziali seconde sia simmetrica nel punto critico  $q_0$ , cioè  $K_{ij} = K_{ji}$ .

Ricordiamo che se  $q_0$  è un punto di equilibrio stabile allora la matrice simmetrica  $K$  è positiva definita, cioè può avere solo autovalori positivi.<sup>1</sup> Questo perché un autovalore negativo o nullo corrisponde a spostamenti  $\delta q$  che abbassano o non cambiano l'energia potenziale in un intorno arbitrariamente piccolo del punto di equilibrio, il che contraddice la nostra ipotesi di equilibrio stabile. Viceversa, poiché ogni matrice simmetrica può essere diagonalizzata se gli autovalori sono tutti positivi, allora il punto  $q_0$  è un minimo. In altre parole,  $q_0$  è un punto di equilibrio stabile se e solo se la forma quadratica

$$\sum_{ij} K_{ij} \delta q_i \delta q_j$$

è definita positiva. Fisicamente, ciò significa che qualsiasi spostamento  $\delta q$  dall'equilibrio aumenterà l'energia potenziale. Allo stesso modo, la positività dell'energia cinetica implica che in qualsiasi applicazione fisica la matrice simmetrica  $M_{ij}$  deve essere definita positiva. In ciò che segue assumeremo che queste condizioni siano soddisfatte.

Per semplificare le notazioni, d'ora in poi denotiamo  $\delta q$  con  $\mathbf{q}$ , vale a dire, stipuliamo che il vettore  $\mathbf{q}$  di componenti  $q_1, \dots, q_r$  rappresenti gli scostamenti dalla punto di equilibrio stabile del potenziale che è quindi caratterizzato dalla configurazione  $\mathbf{q} = 0$ . Usiamo la notazione vettoriale perché il sistema è lineare e lo spazio delle configurazioni può essere trattato come un spazio vettoriale. Allora la lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} [M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - K_{ij} q_i q_j] = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, M \dot{\mathbf{q}} \rangle - \frac{1}{2} \langle \mathbf{q}, K \mathbf{q} \rangle \quad (7.1)$$

approssima al prim'ordine la lagrangiana originaria; nel secondo passaggio abbiamo introdotto le matrici

$$M = (M_{ij}), \quad K = (K_{ij}).$$

Una lagrangiana di questo tipo con matrici  $M$  e  $K$  definite positive definisce il modello matematico per la teoria delle *piccole oscillazioni*. Le equazioni di Eulero-Lagrange sono (esercizio)

$$\sum_j (M_{ij} \ddot{q}_j + K_{ij} q_j) = 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad (7.2)$$

ovvero, in notazione vettoriale

$$M \ddot{\mathbf{q}} + K \mathbf{q} = 0. \quad (7.3)$$

---

<sup>1</sup>Si noti che una matrice simmetrica, reale, ammette sempre un insieme completo di autovettori con autovalori reali.

### 7.1.2 Soluzione delle piccole oscillazioni = diagonalizzazione della matrice dinamica

Invece di risolvere direttamente l'equazione (7.2) (come di solito si fa in un corso di meccanica analitica), preferiamo passare alla formulazione hamiltoniana della teoria delle piccole oscillazioni, il che ci sarà d'aiuto quando estenderemo la teoria ai sistemi quantistici. Il vettore impulso  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_r)$  è (esercizio)

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = M\dot{\mathbf{q}}$$

e quindi l'hamiltoniana associata alla lagrangiana (7.1) è (esercizio)

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{p}, M^{-1}\mathbf{p}) + \frac{1}{2}(\mathbf{q}, K\mathbf{q}) \quad (7.4)$$

Consideriamo adesso la seguente trasformazione canonica

$$\mathbf{q} = M^{1/2}\mathbf{q} \quad \mathbf{p} = M^{-1/2}\mathbf{p} \quad (7.5)$$

(esercizio: mostrare che la trasformazione è canonica). In termini delle nuove variabili, l'hamiltoniana diventa

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + \frac{1}{2}(\mathbf{q}, \mathcal{D}\mathbf{q}) \quad (7.6)$$

dove

$$\mathcal{D} = M^{-1/2}KM^{-1/2} \quad (7.7)$$

è la cosiddetta *matrice dinamica*. Si tratta di una matrice auto-aggiunta<sup>2</sup> e definita positiva.

Le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili sono (esercizio):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\mathcal{D}\mathbf{q}. \end{cases} \quad (7.8)$$

da cui seguono le equazioni del moto

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\mathcal{D}\mathbf{q}. \quad (7.9)$$

Lo studio delle soluzioni delle equazioni ricalca i metodi della meccanica quantistica, in particolare si utilizza il teorema spettrale. Poiché  $\mathcal{D}$  è una matrice auto-aggiunta, il problema agli autovalori

$$\mathcal{D}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

ammette una soluzione completa: la matrice ha  $r$  auto-valori  $\lambda_M$ ,  $M = 1, \dots, r$ , alcuni dei quali eventualmente coincidenti (degenerazione); i corrispondenti auto-vettori  $\mathbf{u}_M$  sono ortogonali tra loro e, presi per comodità normalizzati a uno, formano una base ortonormale in  $\mathbb{R}^r$ . Poiché  $\mathcal{D}$  è definita positiva, gli autovalori sono positivi e d'ora in poi verranno denotati  $\omega_M^2$ ,  $M = 1, \dots, r$ . Allora, per il teorema spettrale,

$$\mathcal{D} = \sum_M \omega_M^2 |\mathbf{u}_M\rangle\langle\mathbf{u}_M|, \quad \sqrt{\mathcal{D}} = \sum_M \omega_M |\mathbf{u}_M\rangle\langle\mathbf{u}_M|, \text{ con } \omega_M \text{ positivo}$$

<sup>2</sup>Più precisamente, simmetrica, visto che lo spazio vettoriale è reale.

Possiamo esprimere la soluzione delle equazioni del moto come

$$\begin{cases} \mathbf{q}(t) = \cos(\sqrt{\mathcal{D}}t) \mathbf{q} + \sqrt{\mathcal{D}}^{-1} \sin(\sqrt{\mathcal{D}}t) \mathbf{p} \\ \mathbf{p}(t) = -\sqrt{\mathcal{D}} \sin(\sqrt{\mathcal{D}}t) \mathbf{q} + \cos(\sqrt{\mathcal{D}}t) \mathbf{p} \end{cases} \quad (7.10)$$

come può essere facilmente verificato per sostituzione;  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(0)$  e  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(0)$  sono le condizioni iniziali. Il teorema spettrale garantisce che la funzione di un operatore auto-aggiunto è ben definita. In particolare sono ben definite le funzioni trigonometriche di  $\sqrt{\mathcal{D}}$  che compaiono in (7.10). Si ha

$$\cos(\sqrt{\mathcal{D}}t) = \sum_M \cos(\omega_M t) |\mathbf{u}_M\rangle \langle \mathbf{u}_M|$$

e analogamente per le altre funzioni. Quindi, espandendo  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}$  nella base  $\mathbf{u}_M$ ,

$$\mathbf{q} = \sum_M \langle \mathbf{u}_M | \mathbf{q} \rangle \mathbf{u}_M \quad \text{e} \quad \mathbf{p} = \sum_M \langle \mathbf{u}_M | \mathbf{p} \rangle \mathbf{u}_M$$

dove

$$Q_M = \langle \mathbf{u}_M | \mathbf{q} \rangle \quad \text{e} \quad P_M = \langle \mathbf{u}_M | \mathbf{p} \rangle \quad (7.11)$$

sono le cosiddette *coordinate normali*, la formula per  $\mathbf{q}(t)$  diventa

$$\mathbf{q}(t) = \sum_M \left[ \cos(\omega_M t) Q_M \mathbf{u}_M + \frac{\sin(\omega_M t)}{\omega_M} P_M \mathbf{u}_M \right] \quad (7.12)$$

e analogamente per  $\mathbf{p}(t)$ .

Si osservi che se le condizioni iniziali sono lungo la direzione di un autovettore, diciamo  $\mathbf{u}_M$ , vale a dire,

$$\mathbf{q} = Q_M \mathbf{u}_M \quad \text{e} \quad \mathbf{p} = P_M \mathbf{u}_M,$$

allora l'evoluzione temporale è

$$\mathbf{q}(t) = \cos(\omega_M t) Q_M \mathbf{u}_M + \frac{\sin(\omega_M t)}{\omega_M} P_M \mathbf{u}_M. \quad (7.13)$$

Infine, si osservi infine che l'hamiltoniana (7.6) può essere riscritta come (esercizio)

$$H = \sum_M \frac{1}{2} P_M^2 + \omega_M^2 Q_M^2, \quad (7.14)$$

Il significato fisico è il seguente. Gli autovalori  $\omega_M$ ,  $M = 1, \dots, r$ , sono le *frequenze caratteristiche* del sistema. I corrispondenti autovettori rappresentano i modi normali del sistema. Quando viene eccitato un solo modo normale, l'evoluzione del sistema è quella di un moto armonico: tutte le parti del sistema si muovono sinusoidalmente con la stessa frequenza e stessa fase, come espresso dalla (7.13). Il movimento più generale del sistema è una sovrapposizione dei modi normali, come espresso dalla (7.12). I modi sono normali nel senso che possono muoversi in modo indipendente, vale a dire che un'eccitazione di un modo non causerà mai l'eccitazione di un modo differente. Questa è una conseguenza del fatto che i modi normali sono ortogonali tra loro. In altre parole, come espresso dalla (7.14), il sistema consiste in un insieme di oscillatori armonici indipendenti.

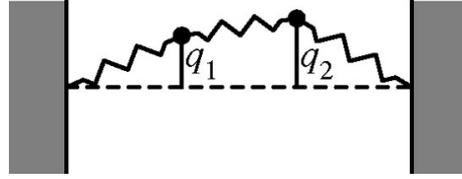


Figura 7.1: Un sistema a due particelle, che mostra le posizioni  $q_1$  e  $q_2$  delle due masse (punti), che sono vincolate a muoversi verticalmente e sono collegate da molle. (Figura tratta da [Johnson2002].)

Concludiamo questo argomento con una formula esplicita per le coordinate normali, in termini delle coordinate originarie  $q_1, \dots, q_r, p_1, \dots, p_r$ . Se  $\mathbf{e}_n$ ,  $n = 1, \dots, r$ , è la base in  $\mathbb{R}^r$  che corrisponde alle coordinate originarie, cioè  $q = \sum_n q_n \mathbf{e}_n$  e  $p = \sum_n p_n \mathbf{e}_n$ , allora la (7.11), tenuto conto della (7.5), diventa

$$\begin{aligned} Q_M &= \langle \mathbf{u}_M | \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{u}_M | M^{1/2} \mathbf{q} \rangle = \sum_n \langle \mathbf{u}_M | M^{1/2} \mathbf{e}_n \rangle q_n \\ P_M &= \langle \mathbf{u}_M | \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{u}_M | M^{-1/2} \mathbf{p} \rangle = \sum_n \langle \mathbf{u}_M | M^{-1/2} \mathbf{e}_n \rangle p_n \end{aligned} \quad (7.15)$$

Si osservi che la trasformazione  $(q_n, p_n) \rightarrow (Q_M, P_M)$  è canonica (esercizio).

**Box 7.1 — Due oscillatori accoppiati linearmente.** Come esempio molto semplice dello studio dei modi normali e delle frequenze caratteristiche, consideriamo un sistema descritto dall'hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q_2^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 (q_1 - q_2)^2$$

Questo sistema può essere visto come due oscillatori armonici unidimensionali identici di frequenza naturale  $\omega$ , con un accoppiamento da una forza armonica di stessa frequenza naturale  $\omega$ . Vedere la figura 7.1. (Si lascia come esercizio lo studio del caso in cui la frequenza naturale dell'accoppiamento è diversa da  $\omega$ ).

Questa Hamiltoniana è della forma (7.4) per

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \text{ e } \quad K = m\omega^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice dinamica è

$$\mathcal{D} = M^{-1/2} K M^{-1/2} = \omega^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  è  $(2 - \lambda)^2 - 1 = 0$  e quindi gli autovalori di  $A$  sono dati da

$$2 - \lambda_1 = 1, \quad 2 - \lambda_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

Dunque, le frequenze caratteristiche del sistema sono

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega \\ \omega_2 = \sqrt{3}\omega \end{cases}$$

Gli autovettori (normalizzati)  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  associati agli autovalori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono dati dalle equazioni

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ponendo  $\lambda = \lambda_{1,2}$ . Con un calcolo elementare, si trova

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Le coordinate normali (equazione (7.15)) sono

$$Q_1 = \sqrt{m} \langle \mathbf{u}_1 | q \rangle = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}} (q_1 + q_2), \quad P_1 = \langle u_1 | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2m}} (p_1 + p_2)$$

e

$$Q_2 = \sqrt{m} \langle \mathbf{u}_2 | q \rangle = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}} (q_1 - q_2), \quad P_2 = \frac{1}{\sqrt{m}} \langle u_2 | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2m}} (p_1 - p_2)$$

Si veda la figura 7.2. Allora l'hamiltoniana in coordinate normali diventa

$$H = \frac{1}{2} (P_1^2 + \omega_1^2 Q_1^2) + \frac{1}{2} (P_2^2 + \omega_2^2 Q_2^2)$$

e, come si può verificare semplicemente per calcolo diretto, coincide con l'hamiltoniana di partenza.

**Box 7.2 — Catena armonica con condizioni di Dirichlet.** L'esempio paradigmatico di sistema le cui equazioni del moto sono della forma (7.3) è la catena armonica del box 1.4. Riprendiamo l'esempio risolvendo le equazioni del moto con tutti i crismi del caso.

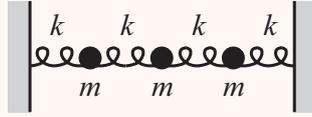
Il sistema è una catena di  $N$  punti materiali di massa  $m$ , collegati da molle di identica costante di richiamo  $k$  e di lunghezza di equilibrio  $a$ . Le equazioni del moto per gli scostamenti  $q_n$  dalle posizioni di equilibrio di una catena armonica,

$$\ddot{q}_n = \omega_0^2 (q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}), \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (1.43)$$

possono essere riscritte nella forma (7.3) con  $M$  la matrice identica e  $K$  la matrice



vincolate a delle pareti; per esempio, per 3 masse, la situazione è



(7.20)

e quindi, come si può facilmente vedere,

$$\Delta = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (7.21)$$

Risolviamo le equazioni (7.17) per separazione delle variabili, cerchiamo cioè soluzioni della forma  $\mathbf{q}(t) = f(t)\mathbf{u}$  dove  $f(t)$  è uno scalare che dipende solo da  $t$  e  $\mathbf{u}$  è un vettore che non dipende da  $t$ . Per comodità, useremo la notazione  $\phi(n, t) = f(t)u(n)$  per le componenti del vettore. Sostituendo nella (1.43) si ottiene

$$\ddot{f}(t)\mathbf{u} = \omega_0^2 f(t)\Delta\mathbf{u}$$

Introduciamo una costante di separazione  $-\omega^2$ , col segno meno e  $\omega$  reale, affinché le soluzioni siano limitate, di modo che  $f(t)$  soddisfi l'equazione

$$\ddot{f} = -\omega^2 f \quad (7.22)$$

Allora  $\mathbf{u}$  dovrà soddisfare l'equazione

$$-\Delta\mathbf{u} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\mathbf{u} \quad (7.23)$$

L'equazione (7.22) ci dice che  $f(t)$  è un moto armonico di cui sappiamo vita morte e miracoli, in particolare sappiamo che la  $f$  soluzione è della forma

$$f_\omega(t) = \mathcal{A} \cos(\omega t + \gamma) \quad (7.24)$$

Scriviamo l'equazione (7.23) per le componenti  $u(n)$  del vettore  $\mathbf{u}$ :

$$u(n+1) - 2u(n) + u(n-1) = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2}u(n)$$

che riconosciamo come l'equazione agli autovalori per il laplaciano discreto in una dimensione. Facciamo allora l'ipotesi che  $u_n$  sia della forma  $e^{in\theta}$ , con  $\theta$  da determinarsi sostituendo  $e^{in\theta}$  nella (7.23):

$$e^{in\theta}e^{i\theta} - 2e^{in\theta} + e^{in\theta}e^{-i\theta} = -\frac{\omega^2}{2\omega_0^2}2e^{in\theta}$$

Quindi, per  $\theta$  tale che

$$\cos\theta = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2}, \quad (7.25)$$

$e^{in\theta}$  è proprio soluzione della (7.23). Ma se  $e^{in\theta}$  è soluzione, lo è anche  $e^{-in\theta}$  che è linearmente indipendente da  $e^{in\theta}$ . Quindi,  $u(n)$  può essere espresso come combinazione lineare di  $e^{in\theta}$  e  $e^{-in\theta}$  o, equivalentemente, come combinazione lineare di seni e coseni, vale a dire come

$$a \cos(n\theta) + b \sin(n\theta),$$

dove  $a$  e  $b$  sono costanti reali. Allora, le soluzioni a variabili separabili sono della forma

$$q(n, t) = \cos(\omega t + \gamma) [a \cos(n\theta) + b \sin(n\theta)] \quad (7.26)$$

dove abbiamo assorbito la costante  $\mathcal{A}$  della (7.24) nelle costanti arbitrarie  $a$  e  $b$ . Il significato fisico della separabilità delle variabili è che una soluzione di questo tipo rappresenta un *modo normale*: tutte le masse della catena nel corso oscillano all'unisono in modo sinusoidale con stessa frequenza  $\omega$  e stessa fase  $\gamma$ .

L'equazione (7.25) è di solito scritta esprimendo  $\omega^2$  in funzione di  $\theta$ , cioè come  $\omega^2 = 2\omega_0^2(1 - \cos\theta)$  e poiché  $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$ , si ha

$$\omega = 2\omega_0 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \quad (7.27)$$

(abbiamo la radice positiva, poiché la convenzione è che  $\omega$  sia positiva). Questa equazione (o equivalentemente la (7.25)) stabilisce il legame tra il parametro  $\theta$ , che regola il profilo spaziale del modo, e la frequenza  $\omega$  di oscillazione del modo. L'equazione (7.27) è detta *relazione di dispersione*. È importante osservare che la relazione di dispersione è determinata unicamente dalle equazioni del moto e non dalle condizioni al contorno. Le condizioni al contorno fissano dei vincoli sui possibili valori di  $\theta$  (che per il momento è arbitrario) e quindi su  $\omega$ .

*Condizioni al contorno di Dirichlet.* Per tenere conto del vincolo alle pareti introduciamo due particelle fittizie una all'inizio e l'altra alla fine della catena tali che le loro posizioni sono costantemente mantenute uguali a zero

$$q_0(t) = 0, \quad q_{N+1}(t) = 0 \quad (7.28)$$

Studiamo le soluzioni (7.26) sotto queste condizioni. La condizione al primo estremo della catena implica  $a = 0$ , per cui

$$q_n(t) = b \cos(\omega t + \gamma) \sin(n\theta)$$

e la condizione di annullamento al secondo estremo

$$b \cos(\omega t + \gamma) \sin[(N+1)\theta] = 0$$

che deve valere per tutti i tempi  $t$  porta alla condizione

$$(N+1)\theta = M\pi \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{M\pi}{N+1}, \quad M = 1, 2, \dots, N$$

In corrispondenza di questi valori di  $\theta$ , la relazione di dispersione (7.27) diventa

$$\omega = \omega_M = 2\omega_0 \sin \left[ \frac{M\pi}{2(N+1)} \right], \quad M = 1, 2, \dots, N \quad (7.29)$$

Ci sono quindi  $N$  modi normali rappresentati dai vettori  $\mathbf{q}_M(t)$ ,  $M = 1, 2, \dots, N$  di componenti

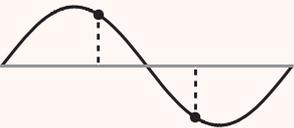
$$q_M(n, t) \propto \cos(\omega_M t + \gamma) \sin \left[ \frac{nM\pi}{N+1} \right] \quad (7.30)$$

dove la costante di proporzionalità può dipendere da  $M$ . Quindi le ampiezze e le frequenze d'oscillazione dell' $M$ -esimo modo sono, rispettivamente

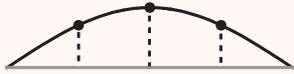
$$\mathcal{A}_M(n) \propto \sin \left[ \frac{nM\pi}{N+1} \right], \quad \omega_M = 2\omega_0 \sin \left[ \frac{M\pi}{2(N+1)} \right] \quad (7.31)$$

Per esempio, per  $N = 2$  si hanno due modi

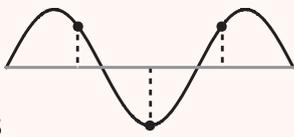
$M = 1$    $\mathcal{A}_1 \propto \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$   $\omega_1 = 2\omega_0 \sin \left( \frac{\pi}{6} \right)$

$M = 2$    $\mathcal{A}_2 \propto \begin{pmatrix} \sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{4\pi}{3} \end{pmatrix}$   $\omega_2 = 2\omega_0 \sin \left( \frac{\pi}{3} \right)$

Mentre per  $N = 3$  si hanno tre modi

$M = 1$    $\mathcal{A}_1 \propto \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{3\pi}{4} \end{pmatrix}$   $\omega_1 = 2\omega_0 \sin \left( \frac{\pi}{8} \right)$

$M = 2$    $\mathcal{A}_2 \propto \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \pi \\ \sin \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}$   $\omega_2 = 2\omega_0 \sin \left( \frac{\pi}{4} \right)$

$M = 3$    $\mathcal{A}_3 \propto \begin{pmatrix} \sin \frac{3\pi}{4} \\ \sin \frac{3\pi}{2} \\ \sin \frac{9\pi}{4} \end{pmatrix}$   $\omega_3 = 2\omega_0 \sin \left( \frac{3\pi}{8} \right)$

Conviene definire delle ampiezze normalizzate:

$$u_M(n) = \mathcal{N} \sin \left[ \frac{nM\pi}{N+1} \right], \quad M = 1, 2, \dots, N \quad (7.32)$$

con  $\mathcal{N}$  tale che

$$\|\mathbf{u}_M\|^2 = \langle \mathbf{u}_M, \mathbf{u}_M \rangle = \sum_n u_M(n)^2 = 1.$$

Con un pochino di algebra e trigonometria si dimostra che (esercizio)

$$\sin^2 \left[ \frac{M\pi}{N+1} \right] + \sin^2 \left[ \frac{2M\pi}{N+1} \right] + \dots + \sin^2 \left[ \frac{Nm\pi}{N+1} \right] = \frac{N+1}{2}$$

per ogni  $M = 1, 2, \dots, N$ . Quindi  $\mathcal{N} = \sqrt{2/(N+1)}$  e

$$u_M(n) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \left[ \frac{nM\pi}{N+1} \right], \quad M = 1, 2, \dots, N \quad (7.33)$$

Possiamo allora riscrivere la (7.30) come

$$\mathbf{q}_M(t) \propto \cos(\omega_M t + \gamma) \mathbf{u}_M \quad (7.34)$$

I vettori  $\mathbf{u}_M$  sono gli autovettori normalizzati della matrice  $\Delta$ . Per le condizioni al contorno di Dirichlet,  $\Delta$  è una matrice simmetrica, come la (7.21). Allora i vettori  $\mathbf{u}_M$  sono ortogonali tra loro, e poiché sono normalizzati, si ha

$$\langle \mathbf{u}_M, \mathbf{u}_{M'} \rangle = \sum_n u_M(n) u_{M'}(n) = \delta_{MM'} \quad (7.35)$$

Dunque i vettori  $\mathbf{u}_M$ ,  $M = 1, 2, \dots, N$ , formano una base ortonormale.

Poiché  $\{\mathbf{u}_M\}$  è una base ortonormale, una qualunque soluzione delle equazioni del moto (1.43) può essere espressa come combinazione lineare delle (7.34):

$$\mathbf{q}(t) = \sum_M c_M \cos(\omega_M t + \gamma) \mathbf{u}_M \quad (7.36)$$

dove le costanti  $c_M$  sono determinate dalle condizioni iniziali. Per  $t = 0$  si ha

$$\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}(0) = \sum_M c_M \cos \gamma \mathbf{u}_M.$$

Definiamo variabili  $Q_M$  ponendo

$$c_M \cos \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{m}} Q_M.$$

Perché mai dividiamo per la massa è, a questo stadio, del tutto incomprensibile; la sua utilità risulterà chiara alla fine. Sia come sia, con queste stipulazioni, la configurazione al tempo iniziale è

$$\mathbf{q} = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_M Q_M \mathbf{u}_M \quad (7.37a)$$

Moltiplicando scalarmente ambo i membri di questa equazione per  $\sqrt{m}\mathbf{u}_M$ , otteniamo  $\sqrt{m}\langle \mathbf{u}_{M'}, \mathbf{q} \rangle = \sum_M Q_M \langle \mathbf{u}_{M'}, \mathbf{u}_M \rangle = Q_{M'}$  (per la (7.35)). Quindi  $Q_M = \sqrt{m}\langle \mathbf{u}_M, \mathbf{q} \rangle$ , vale a dire,

$$Q_M = \sqrt{m} \sum_n q_M(n) u_M(n) \quad (7.37b)$$

Le (7.37) definiscono una trasformazione invertibile dal vettore  $\mathbf{q}$  al vettore  $\mathbf{Q}$  di componenti  $Q_M$ ,  $M = 1, \dots, N$ . Osserviamo che esse sono (per  $m = 1$ ) le usuali *trasformate-seno di Fourier discrete* che si usano nel calcolo numerico. In teoria delle piccole oscillazioni, le  $\mathbf{Q}$  sono chiamate *coordinate normali*.

Consideriamo adesso la velocità che segue dalla (7.36):

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \sum_M c_M(-\omega_M) \sin(\omega_M t + \gamma) \mathbf{u}_M \quad (7.38)$$

Per  $t = 0$  abbiamo

$$\dot{\mathbf{q}} \equiv \dot{\mathbf{q}}(0) = \sum_M c_M(-\omega_M) \sin(\gamma) \mathbf{u}_M.$$

Analogamente a prima, definiamo variabili  $\dot{Q}_M$  ponendo

$$c_M(-\omega_M) \sin(\gamma) \equiv \frac{1}{\sqrt{m}} \dot{Q}_M,$$

per cui la velocità iniziale può essere espressa come

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_M \dot{Q}_M \mathbf{u}_M \quad (7.39)$$

Il significato fisico delle coordinate normali  $Q_M$  e  $\dot{Q}_M$  risulta chiaro se calcoliamo l'energia totale (7.19). Essendo l'energia una costante del moto, ci basta valutarla per  $t = 0$ . L'energia cinetica per  $t = 0$  è

$$T = \frac{1}{2} m \langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle = \frac{1}{2} m \left\langle \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_M \dot{Q}_M \mathbf{u}_M, \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{M'} \dot{Q}_{M'} \mathbf{u}_{M'} \right\rangle = \frac{1}{2} \sum_M \dot{Q}_M^2$$

e l'energia potenziale per  $t = 0$  è

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} m \omega_0^2 \langle \mathbf{q}, -\Delta \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \left\langle \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_M Q_M \mathbf{u}_M, \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{M'} Q_{M'} (-\Delta) \mathbf{u}_{M'} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \omega_0^2 \left\langle \sum_M Q_M \mathbf{u}_M, \sum_{M'} Q_{M'} \frac{\omega_{M'}^2}{\omega_0^2} \mathbf{u}_{M'} \right\rangle = \frac{1}{2} \sum_M \omega_M^2 Q_M^2 \end{aligned}$$

Arriviamo così alla seguente formula per l'energia

$$\mathcal{E} = \sum_M \left[ \frac{1}{2} \dot{Q}_M^2 + \frac{1}{2} \omega_M^2 Q_M^2 \right] \quad (7.40)$$

Il sistema è dunque una *collezione di oscillatori armonici indipendenti* di massa unitaria e frequenze  $\omega_M$ ; le variabili che oscillano indipendentemente l'una dall'altra sono le coordinate normali.

È istruttivo considerare questo risultato dal punto di vista delle trasformazioni canoniche. In primo luogo, osserviamo che la funzione di Hamilton definita da  $\mathcal{E}$  è

$$H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \frac{1}{2} \sum_M [P_M^2 + \omega_M^2 Q_M^2] = \frac{1}{2} \langle \mathbf{P}, \mathbf{P} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{Q}, \Omega^2 \mathbf{Q} \rangle \quad (7.41)$$

dove  $\Omega^2$  è la matrice diagonale di componenti  $\omega_M^2 \delta_{MM'}$ . Le soluzioni delle equazioni di Hamilton,

$$\begin{aligned} Q_M(t) &= \cos(\omega_M t) Q_M + \frac{\sin(\omega_M t)}{m\omega_M} P_M \\ P_M(t) &= -m\omega_M \sin(\omega_M t) Q_M + \cos(\omega_M t) P_M, \end{aligned}$$

sono proprio le soluzioni per l'oscillatore armonico in funzione delle condizioni iniziali  $Q_M \equiv Q_M(0)$  e  $P_M \equiv P_M(0)$ .

L'hamiltoniana nelle variabili originarie è

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m} \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{q}, \mathcal{D} \mathbf{q} \rangle, \quad \text{con } \mathcal{D} \equiv -m\omega_0^2 \Delta \quad (7.42)$$

dove  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{q}}$ . Le equazioni (7.37) e (7.39) definiscono la trasformazione canonica tale che  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ .

Per verificare questo, si introduca la matrice  $U$  le cui colonne sono i vettori  $\mathbf{u}_M$ :

$$U = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_N) \quad (7.43)$$

allora la (7.37) può essere riscritta come

$$\mathbf{q} = \frac{1}{\sqrt{m}} U \mathbf{Q} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q} = \sqrt{m} U^{-1} \mathbf{q} \quad (7.44)$$

Si osservi che  $U$  è ortogonale perché i vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N$  formano una base ortonormale e quindi  $U^T = U^{-1}$ . In particolare (ricordi di algebra e geometria), è la matrice che diagonalizza  $\mathcal{D}$ :

$$U^{-1} \mathcal{D} U = \Omega^2. \quad (7.45)$$

Similmente, dalla (7.39) segue la legge di trasformazione per l'impulso

$$\mathbf{p} = \sqrt{m} U \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{m}} U^{-1} \mathbf{p} \quad (7.46)$$

A questo punto, si vede che la trasformazione è del tipo (3.40) con  $B = C = 0$  e

$$A = \sqrt{m} U^{-1}, \quad D = \frac{1}{\sqrt{m}} U^{-1}.$$

Allora

$$AD^T = U^{-1} (U^{-1})^T = U^{-1}U = \mathbb{1}$$

e la condizione (3.42) è quindi soddisfatta. Dunque la trasformazione è canonica.

### 7.1.3 C'è ancora qualcosa da dire sull'oscillatore armonico?

Forse sì. Sidney Coleman, un noto fisico teorico esperto di teoria dei campi morto una decina di anni fa, una volta disse: “La carriera di un giovane fisico teorico consiste nel trattare l'oscillatore armonico in livelli di astrazione sempre più elevati.”

L'equazione del movimento per un semplice oscillatore armonico di massa  $m$  e frequenza  $\omega$  segue all'hamiltoniana

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 Q^2 \quad (1.17)$$

dove  $Q$  è la posizione dell'oscillatore e  $P$  il suo impulso coniugato. Lo stato del sistema al tempo  $t$  è completamente determinato dalle coordinate  $(Q(t), P(t))$  e l'evoluzione di temporale è data dalle equazioni di Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{P}{m} \\ \dot{P} &= -\frac{\partial H}{\partial Q} = -m\omega^2 Q, \end{aligned}$$

che si riducono alla forma familiare delle equazioni del moto di un oscillatore armonico semplice  $\ddot{Q} = -\omega^2 Q$ . Usando il formalismo complesso è naturale scrivere la soluzione di questa equazione come

$$\alpha(t) = \alpha(0)e^{-i\omega t}, \quad (7.47)$$

dove  $\alpha(0)$  è un numero complesso. Allora  $Q(t)$  e  $P(t)$  sono ottenute da  $\alpha(t)$  prendendone la parte reale e la parte immaginaria. Se vogliamo che  $\alpha$  sia adimensionale, le espressioni per  $Q$  e  $P$  diventano

$$Q(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\bar{\alpha}(t) + \alpha(t)) \quad (7.48)$$

$$P(t) = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (\bar{\alpha}(t) - \alpha(t)) \quad (7.49)$$

dove  $\hbar$  è una costante che ha le dimensioni di un'azione. Questo può essere riscritto per rendere più chiari i significati di  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$ :

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left[ \sqrt{m\omega} Q(t) + \frac{i}{\sqrt{m\omega}} P(t) \right] \quad (7.50)$$

$$\bar{\alpha}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left[ \sqrt{m\omega} Q(t) - \frac{i}{\sqrt{m\omega}} P(t) \right]. \quad (7.51)$$

Dunque, lo stato del sistema per questo oscillatore armonico è determinato da un punto nello spazio di fase  $(Q(t), P(t))$ , ma ogni coppia ordinata di numeri può essere scritta come un numero complesso e  $\alpha$  fa proprio questo. Quindi,  $\alpha$  è una rappresentazione compatta dello stato  $(Q, P)$  nello spazio delle fasi del sistema. Inoltre, l'hamiltoniana può essere riscritta come

$$H = \hbar\omega\bar{\alpha}\alpha = \hbar\omega|\alpha|^2 \quad (7.52)$$

### 7.1.4 Forma complessa delle equazioni canoniche\*

Il gioco formale per rappresentare l'oscillatore armonico in forma complessa (in modo del tutto analogo a quello che si fa per i circuiti elettrici) ha un significato più profondo e vale per un qualunque sistema hamiltoniano di coordinate canoniche  $q = (q_1, \dots, q_r)$  e  $p = (p_1, \dots, p_r)$ . Si consideri una hamiltoniana generica  $H = H(q, p)$  che genera le equazioni canoniche

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned} \quad (1.12b)$$

e si operi il seguente cambiamento di variabili

$$\alpha = aq + ibp, \quad \bar{\alpha} = \bar{a}q - i\bar{b}p \quad (7.53)$$

dove adesso  $\alpha$  è un vettore complesso e  $a$  e  $b$  sono numeri complessi che possono essere scelti a nostro piacimento; ci riserviamo di sceglierli in maniera opportuna per semplificare la funzione di Hamilton. Nel caso unidimensionale, La formula di inversione è

$$q = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{a + \bar{a}} = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2\operatorname{Re}(a)}, \quad p = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{i(b + \bar{b})} = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i\operatorname{Im}(b)}, \quad (7.54)$$

Allora la funzione di Hamilton  $H$  diventa una funzione (ovviamente a valori reali) delle variabili complesse  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$  (trattate come variabili indipendenti).

Dalle equazioni di Hamilton si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= a \frac{\partial H}{\partial p} - ib \frac{\partial H}{\partial q} = a \left( \frac{\partial H}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial \bar{\alpha}} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial p} \right) - ib \left( \frac{\partial H}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial \bar{\alpha}} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial q} \right) \\ &= a \left( \frac{\partial H}{\partial \alpha} ib + \frac{\partial H}{\partial \bar{\alpha}} (-i\bar{b}) \right) - ib \left( \frac{\partial H}{\partial \alpha} a + \frac{\partial H}{\partial \bar{\alpha}} \bar{a} \right) = -i(a\bar{b} + b\bar{a}) \frac{\partial H}{\partial \bar{\alpha}} \end{aligned}$$

Quindi, posto

$$\frac{1}{\hbar} \equiv a\bar{b} + b\bar{a}, \quad (7.55)$$

le equazioni per  $\alpha$  assumono la forma

$$i\hbar\dot{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial \bar{\alpha}} \quad (7.56)$$

Si osservi che se si scelgono le costanti  $a$  e  $b$  in modo tale che  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$  siano quantità adimensionate, allora  $\hbar$  ha le dimensioni di un'azione; poichè la scelta di  $a$  e  $b$  è convenzionale, anche il valore di  $\hbar$  è convenzionale.

Nel formalismo complesso, la parentesi di Poisson (3.26) diventa (esercizio)

$$\{f, g\} = -\frac{i}{\hbar} \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial g}{\partial \bar{\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right). \quad (7.57)$$

Risulta utile introdurre la parentesi di Poisson complessa

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial g}{\partial \bar{\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial \alpha} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \frac{\partial g}{\partial \bar{\alpha}_i} - \frac{\partial f}{\partial \bar{\alpha}_i} \frac{\partial g}{\partial \alpha_i} \quad (7.58)$$

e riscrivere la (7.57) come

$$\{f, g\} = -\frac{i}{\hbar} [f, g]. \quad (7.59)$$

Si lascia come esercizio verificare la (7.57) e mostrare che valgono le *relazioni canoniche complesse*

$$[\alpha_i, \alpha_j] = 0 \quad [\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j] = 0 \quad [\alpha_i, \bar{\alpha}_j] = \delta_{ij} \quad (7.60)$$

Queste relazioni sono l'analogo delle relazioni canoniche (3.31) e giocano, nel formalismo complesso, lo stesso ruolo. In particolare, permettono di caratterizzare una trasformazione canonica complessa.

**Box 7.3 — Oscillatore armonico.** Riotteniamo la formulazione complessa dell'oscillatore armonico. Operando la sostituzione (7.54) nell'hamiltoniana (1.17), si ottiene un'espressione che coinvolge solo le parti reali di  $a$  e  $b$ . Quindi, senza perdita di generalità, possiamo assumere che le parti immaginarie di  $a$  e  $b$  siano nulle. Otteniamo così

$$H = -\frac{1}{8mb^2}(\alpha - \bar{\alpha})^2 + \frac{m\omega^2}{8a^2}(\alpha + \bar{\alpha})^2$$

Si possono scegliere  $a$  e  $b$  in modo da semplificare la funzione di Hamilton. Se si sceglie

$$\frac{1}{8mb^2} = \frac{m\omega^2}{8a^2} = \frac{\omega}{4}, \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} \quad (7.61)$$

allora  $H = \omega\bar{\alpha}\alpha = \omega|\alpha|^2$ , per cui

$$\frac{1}{\hbar} = 2\sqrt{\frac{m\omega}{2}} \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} = 1$$

Se si vuole avere  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$  adimensionati, invece delle espressioni per  $a$  e  $b$  date dalla (7.61), si dovrà prendere

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}.$$

Con questa scelta si ottiene per  $\alpha$  la formula (7.50) e  $H = \hbar\omega\bar{\alpha}\alpha = \hbar\omega|\alpha|^2$ . Per la (7.56), chiaramente le equazioni per  $\alpha$  non cambiano (abbiamo semplicemente moltiplicato e diviso per la stessa costante).

## 7.2 Analisi in modi normali del campo scalare

### 7.2.1 Un singolo modo di un campo libero è un oscillatore armonico

Incominciamo con l'equazione campo più semplice, l'equazione di D'Alembert per la corda vibrante  $\ddot{\phi} = c^2\phi''$ . Ne cerchiamo soluzioni a variabili separabili, cioè della forma

$$\phi(x, t) = Q(t)u(x).$$

In termini fisici, soluzioni di questa forma rappresentano i *modi normali* della corda. Inserendo una funzione di questo tipo nell'equazione otteniamo  $\ddot{Q}u = c^2Qu''$ , ossia  $\ddot{Q}/Q = c^2u''/u$ . Allora ciascuno dei due termini deve essere uguale ad una costante, che porremo

uguale a  $-\omega^2$ , per garantire che le soluzioni rimangano limitate nel corso del tempo, e l'equazione di D'Alembert si separa nelle due equazioni

$$\ddot{Q} + \omega^2 Q = 0 \quad (7.62)$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0 \quad (7.63)$$

La prima è l'equazione dell'oscillatore armonico, la seconda ha soluzioni indipendenti  $e^{ikx}$  e  $e^{-ikx}$ , dove  $k^2 \equiv \omega^2/c^2$ . Per procedere, occorre tenere conto delle condizioni al contorno. Per una corda vibrante tenuta fissa agli estremi 0 e  $L$ , se scegliamo per comodità pari a zero il valore del campo agli estremi, le condizioni al bordo sono di Dirichlet omogenee:  $u(0) = u(L) = 0$ . Questo implica che l'unica combinazione ammessa delle due soluzioni indipendenti è  $\sin kx = (e^{ikx} - e^{-ikx})/(2i)$  e che  $\sin kL = 0$ . Da quest'ultima condizione segue che i soli valori ammessi di  $k$  sono quelli che soddisfano  $kL = M\pi$ ,  $M = 1, 2, 3, \dots$ , da cui  $k = k_M = M\pi/L$  ("M" sta per "modo"). Osserviamo che l'insieme di funzioni  $u_M = C_L \sin(k_M x)$ , per  $M = 1, 2, 3, \dots$  e  $C_L$  costante di normalizzazione, è una base ortogonale, cioè

$$\int u_M u_{M'} dx = 0 \quad \text{per } M \neq M'.$$

(se scegliamo  $C_L = \sqrt{2/L}$ , le funzioni  $u_M$  hanno norma  $L^2$  unitaria). Ciascuna di queste funzioni, detta *funzione di modo*, moltiplicata per una soluzione  $Q_M(t)$  dell'oscillatore armonico di frequenza  $\omega = ck_M = cM\pi/L$ ,  $M = 1, 2, 3, \dots$ ,

$$\phi(x, t) = Q_M(t) u_M(x) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_M}} [\bar{\alpha}_M(t) + \alpha_M(t)] u_M(x), \quad (7.64)$$

è un modo normale della corda vibrante vincolata agli estremi, cioè un movimento in cui tutte le parti della corda si muovono sinusoidalmente con la stessa frequenza e con una relazione di fase fissa. La seconda uguaglianza nella (7.64) esprime la coordinata dell'oscillatore in termini delle variabili complesse  $\alpha_M$  e  $\bar{\alpha}_M$ .

Spesso si usa un altro insieme di funzioni modali che non corrisponde a nessuna condizione al contorno fisica, ma che è molto utile nell'analisi teorica di un campo nello spazio libero. È ottenuto imponendo le cosiddette *condizioni al contorno periodiche* che furono introdotte da Born nello studio dei reticoli cristallini. Le condizioni al contorno periodiche richiedono che il campo sia periodico nello spazio e che non cambi quando le coordinate spaziali sono spostate di un tratto pari al "periodo del reticolo". Nel caso della corda, questo equivale a richiedere che  $u(x+L) = u(x)$ , che può essere interpretata come una corda sul cerchio. In questo caso, l'insieme ortonormale è parametrizzato dal numero d'onde  $k = k_M = 2\pi M/L$ , dove adesso  $M$  assume valori interi positivi e negativi  $M = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  e ciascun membro dell'insieme ha la forma

$$u_M = C_L e^{ikx}, \quad (7.65)$$

dove  $C_L$  è una costante di normalizzazione.

La frequenza di ciascun modo normale è soggetta alla stessa *relazione di dispersione*  $\omega = c|k|$  della corda vincolata (essendo indipendente dalle condizioni al contorno). Adesso è conveniente utilizzare la rappresentazione complessa dell'oscillatore armonico e scrivere per il singolo modo normale

$$\phi(x, t) = \alpha_M(t) u_M(x) + \bar{\alpha}_M(t) \bar{u}_M(x), \quad (7.66)$$

con il secondo termine che garantisce che il campo  $\phi$  sia reale, come deve essere. La funzione  $\alpha_M(t)$  è data dalla (7.47) per  $\omega = \omega_M$ . Quindi  $\phi(x, t)$  è della forma

$$\phi(x, t) = \mathcal{A} \cos(kx - \omega t + \theta)$$

e descrive, per  $k > 0$ , un'onda sinusoidale che si muove verso destra e, per  $k < 0$ , un'onda sinusoidale che si muove verso sinistra;  $\mathcal{A}$  e  $\theta$  sono, rispettivamente, l'ampiezza e la fase dell'onda. Si osservi che mentre nel caso della corda vincolata agli estremi, a  $\omega^2$  corrisponde una sola funzione di modo, nel caso di condizioni al contorno periodiche, a  $\omega^2$  corrispondono due funzioni modali; detto in altri termini, la (7.76), vista come equazione agli autovalori  $\lambda = -\omega^2/c^2$  del laplaciano in una dimensione, nel primo caso ha autovalori non degeneri, mentre nel secondo caso gli autovalori sono doppiamente degeneri.

### 7.2.2 Energia e impulso di un modo normale

Analizziamo il contenuto di energia e impulso di un modo normale.

#### Energia

La densità di energia  $u$  è la componente "00" del tensore energia-impulso (6.14)  $T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \frac{1}{2} (\partial\phi)^2$ , cioè

$$u = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{c^2} (\partial_t \phi)^2 + (\partial_x \phi)^2 \right].$$

Per semplicità di notazione facciamo cadere l'indice M e scriviamo  $\phi(x, t) = Q(t)u(x)$  per un generico modo normale  $\phi(x, t) = Q(t)u(x)$  della corda vibrante con condizioni al contorno di Dirichlet. Allora

$$u = \frac{1}{c^2} \frac{1}{2} \dot{Q}^2 u^2 + \frac{1}{2} Q^2 (\partial_x u)^2 = \frac{C_L^2}{2c^2} \left( \dot{Q}^2 \sin^2(kx) + c^2 k^2 Q^2 \cos^2(kx) \right)$$

L'energia  $\mathcal{E}$  del modo normale è ottenuta integrando  $u$  tra 0 e  $L$ . Le integrazioni di  $\sin^2$  e  $\cos^2$  forniscono ciascuna  $(1/2)L$ . Quindi, scegliendo la costante di normalizzazione (che è arbitraria)  $C_L = c\sqrt{2/L}$ , otteniamo

$$\mathcal{E} = \int_0^L u dx = \frac{1}{2} \dot{Q}^2 + \frac{1}{2} c^2 k^2 Q^2 = \hbar \omega \bar{\alpha} \alpha \quad (7.67)$$

che è l'energia di un oscillatore armonico di massa  $m = 1$  e frequenza  $\omega = c|k|$ ; nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la formula (7.52) per esprimere l'energia in termini delle coordinate complesse adimensionate  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$ .

L'analisi dell'oscillatore armonico con condizioni al contorno periodiche ci porta alla stessa formula (7.67) per l'energia. Infatti, adesso  $\phi(x, t) = \alpha(t)u(x) + \bar{\alpha}(t)\bar{u}(x)$  e quindi

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2c^2} (-i\omega\alpha u + i\omega\bar{\alpha}\bar{u})^2 + \frac{1}{2} (ik\alpha u - ik\bar{\alpha}\bar{u})^2 = -\frac{\omega^2}{2c^2} (\alpha u - \bar{\alpha}\bar{u})^2 - \frac{1}{2} k^2 (\alpha u - \bar{\alpha}\bar{u})^2 \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\omega^2}{c^2} + k^2 \right) (\alpha u - \bar{\alpha}\bar{u})^2 = -k^2 (\alpha^2 u^2 - 2|\alpha|^2 |u|^2 + \bar{\alpha}^2 \bar{u}^2) \end{aligned}$$

avendo usato la relazione di dispersione nell'ultimo passaggio. L'energia è l'integrale di  $u$ , ma le integrazioni del primo e dell'ultimo termine non danno contributo (per la periodicità di  $u$ ) e  $|u|^2 = C_L^2$ , per cui

$$\mathcal{E} = 2k^2 |\alpha|^2 \int_0^L |u|^2 dx = 2k^2 C_L^2 L |\alpha|^2$$

Se scegliamo la costante di normalizzazione (che è arbitraria)

$$C_L = \sqrt{\frac{c^2 \hbar}{2\omega L}}, \quad (7.68)$$

otteniamo  $\mathcal{E} = \hbar\omega\bar{\alpha}\alpha$  con  $\omega = c|k|$ , che è proprio la formula (7.67).

### Impulso

Passiamo adesso alla densità di impulso  $G = (1/c)T^{0x} = -(1/c^2)(\partial_t\phi)(\partial_x\phi)$ . Per la corda vincolata agli estremi, si ha

$$G = -(1/c^2)\dot{Q}uqQ\partial_x u$$

L'impulso  $\mathcal{P}$  è ottenuto per integrazione,

$$\mathcal{P} = \int_0^L G dx,$$

ma  $2 \int u \partial_x u dx = u^2(L) - u^2(0) = 0$  per le condizioni di annullamento agli estremi. Quindi, in questo caso  $\mathcal{P} = 0$  come ovvio che sia per ragioni fisiche.

Nel caso di condizioni al contorno periodiche, si ha

$$\begin{aligned} G &= -\frac{1}{c^2}(\partial_t\phi)(\partial_x\phi) = (-i\omega\alpha u + i\omega\bar{\alpha}\bar{u})(ik\alpha u - ik\bar{\alpha}\bar{u}) \\ &= \frac{1}{c^2}2\omega k|\alpha|^2|u|^2 + \text{termini che danno contributo nullo all'integrale} \end{aligned}$$

da cui, tenuto conto della normalizzazione (7.68) (che ovviamente non possiamo più cambiare), otteniamo

$$\mathcal{P} = \int_0^L G dx = \frac{1}{c^2}2\omega k|\alpha|^2 \frac{c^2 \hbar}{2\omega} = \hbar k|\alpha|^2 \quad (7.69)$$

Questa formula ha un certo sapore quantistico, ma non dobbiamo farci fuorviare,  $\hbar$  è meramente una unità arbitraria di azione: usando le relazioni  $\mathcal{E} = \hbar\omega|\alpha|^2$  e  $k/\omega = 1/c$ , dall'espressione precedente otteniamo la nota formula

$$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{E}}{c} \frac{k}{|k|}. \quad (7.70)$$

da cui segue che il flusso di energia ("vettore di Poynting") è  $S = c^2 P = c\mathcal{E}k/|k|$ .

### Ridefinizione delle funzioni modali

Talvolta è utile lavorare con un sistema ortogonale di funzioni normalizzate. A tal fine possiamo ridefinire le funzioni modali come

$$u_M = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx} \quad (7.71)$$

che sono normalizzate a 1 nella norma  $L^2$ . Allora la rimanente parte della costante  $C_L$  nella (7.68), vale a dire  $\sqrt{c^2 \hbar / 2L}$ , la raccogliamo come fattore nella definizione del campo e scriviamo

$$\phi(x, t) = \sqrt{\frac{c^2 \hbar}{2\omega}} [\alpha(t)u(x) + \bar{\alpha}(t)\bar{u}(x)], \quad (7.72)$$

dove  $\omega = \omega_M$ ,  $\alpha = \alpha_M$  e adesso le funzioni di modo  $u = u_M$  soddisfano la relazione di ortonormalità

$$\langle u_M | u_{M'} \rangle = \delta_{MM'}. \quad (7.73)$$

**Box 7.4 — Campo scalare in una scatola di dimensione  $D$  con condizioni periodiche.** Siamo interessati al caso  $D = 3$ , ma un po' di generalità non guasta visto che la si ottiene a poco prezzo. Costa poco anche estendere la trattazione al campo di Klein-Gordon. Assumiamo che il campo  $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$  sia definito in una regione  $\mathcal{R}$  dello spazio  $D$ -dimensionale; quando imponremo condizioni al contorno periodiche, assumeremo che  $\mathcal{R}$  sia il cubo  $D$ -dimensionale di lato  $L$ .

Risolviamo l'equazione di campo

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \phi - \mu^2 \phi \quad (1.68)$$

( $\Delta$  è il laplaciano in  $D$  dimensioni), procedendo in maniera parallela al caso della corda vibrante, saltando quei passaggi che sono ovvie generalizzazioni del caso unidimensionale (lo studente è comunque invitato, come utile esercizio, a riempire tutti i passaggi mancanti). Per separazione delle variabili, il campo avrà la forma che naturalmente generalizza la (7.72), cioè

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \text{cost.} [\alpha(t)u(\mathbf{x}) + \bar{\alpha}(t)\bar{u}(\mathbf{x})], \quad (7.74)$$

dove  $\alpha$  e  $u$  sono complessi e la costante non è per il momento specificata. Sostituendo questa espressione nell'equazione di campo, si ottengono le equazioni

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0 \quad (7.75)$$

$$\Delta u + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \mu^2 \right) u = 0 \quad (7.76)$$

La prima è equivalente alla forma complessa dell'equazione dell'oscillatore armonico,  $\ddot{\alpha} = -i\omega\alpha$ . La seconda, nota come *equazione di Helmholtz*, va vista come equazione agli autovalori  $\lambda \equiv \omega^2/c^2$  per l'operatore differenziale  $\mathcal{D} = -\Delta + \mu^2$  in  $\mathcal{R}$ , soggetto alle appropriate condizioni al contorno; i corrispondenti autovettori  $u$  di  $\mathcal{D}$  sono le funzioni modali.

Se  $\mathcal{R}$  è il cubo  $D$ -dimensionale di lato  $L$  e si assumono condizioni al contorno periodiche, allora gli autovettori, cioè le funzioni modali, sono

$$u_M(\mathbf{x}) = C_L e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (7.77)$$

dove  $C_L$  è una costante di normalizzazione e  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z, \dots)$  è il vettore numero d'onda con

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L}, \quad \dots \quad (7.78)$$

dove  $n_x, n_y, n_z, \dots$  sono interi arbitrari (positivi o negativi). Quindi il modo normale  $M$  è caratterizzato da  $D$  numeri interi:

$$M = (n_x, n_y, n_z, \dots) \quad (7.79)$$

Inserendo  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  equazione di Helmholtz si ottiene l'equazione algebrica  $-|\mathbf{k}|^2 + \omega^2/c^2 - \mu^2 = 0$ , cioè la nota relazione di dispersione

$$\omega = \omega_{\mathbf{k}} = c\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \mu^2} \quad (7.80)$$

(che è indipendente dalle condizioni al contorno). Allora, per condizioni al contorno periodiche, la frequenza del modo  $M = (n_x, n_y, n_z, \dots)$  (cioè l'autovalore associato alla funzione di modo  $u_M$ ) è

$$\omega = c\sqrt{\left(\frac{2\pi n_x}{L}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n_y}{L}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n_z}{L}\right)^2 + \dots + \mu^2} \quad (7.81)$$

Si osservi che la degenerazione dell'autovalore cresce molto al crescere dei numeri d'onda. Per esempio, per  $D = 3$  e  $\mu = 0$ , si ha la relazione

$$\frac{\omega^2 L^2}{(2\pi)^2 c^2} = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \quad (7.82)$$

che è l'equazione di una sfera nello spazio  $n_x, n_y, n_z$ . Allora per  $n_x, n_y, n_z \gg 1$  il numero di funzioni modali corrispondenti alla stessa frequenza è proporzionale all'area della superficie sferica cioè a  $\omega^2 L^2$ .

È conveniente normalizzare a 1 le funzioni modali (7.77). Allora  $C_L$  nella (7.77) vale  $1/\sqrt{V}$ , dove  $V = L^D$  è il volume del cubo, e quindi le funzioni

$$u_M(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (7.83)$$

soddisfano la condizione di ortonormalità (7.73). Con la scelta della costante moltiplicativa come nella (7.72), il campo del modo risulta

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\frac{c^2 \hbar}{2\omega}} [\alpha(t)u(\mathbf{x}) + \bar{\alpha}(t)\bar{u}(\mathbf{x})], \quad (7.84)$$

e si può facilmente dimostrare (esercizio) che per questa scelta della costante moltiplicativa, le formule per l'energia e l'impulso sono del tutto analoghe al caso della corda vibrante:

$$\mathcal{E} = \int_{\mathcal{R}} u dV = \hbar\omega |\alpha|^2 \quad (7.85)$$

$$\mathcal{P} = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{G} dV = \hbar\mathbf{k} |\alpha|^2 \quad (7.86)$$

Ovviamente adesso non vale più la relazione di dispersione della corda vibrante, ma  $\omega = c\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \mu^2}$ .

### 7.2.3 Campo libero come insieme di oscillatori indipendenti

Fino ad ora abbiamo considerato il campo per un singolo modo. La linearità dell'equazione di campo (1.68) ci permette di scrivere la sua soluzione come

$$\phi = \sum_M \phi_M = \sum_M \sqrt{\frac{c^2 \hbar}{2\omega_M}} [\alpha_M(t)u_M(\mathbf{x}) + \bar{\alpha}_M(t)\bar{u}_M(\mathbf{x})] \quad (7.87)$$

La completezza in  $L^2$  della base  $u_M$  garantisce che questa è la soluzione generale dell'equazione (1.68). Nel box sotto si dimostra che l'energia e l'impulso del campo sono

$$\mathcal{E} = \sum_M \mathcal{E}_M \quad \text{e} \quad \mathbf{P} = \sum_M \mathbf{P}_M. \quad (7.88)$$

Il campo è dunque un insieme di oscillatori indipendenti: l'energia totale e l'impulso totale sono la somma delle energie e degli impulsi di ciascun singolo oscillatore.

**Box 7.5 — Energia e impulso in termini delle variabili complesse.** Dimostrare che

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int \left[ \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + (\nabla \phi)^2 + \mu^2 \phi^2 \right] dV = \sum_M \hbar \omega_M \bar{\alpha}_M \alpha_M \quad (7.89)$$

e

$$\mathcal{P} = \sum_M \hbar \mathbf{k} \bar{\alpha}_M \alpha_M \quad (7.90)$$

*Soluzione.* Per semplificare le notazioni, assorbiamo la costante in  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$  (la porteremo fuori alla fine del calcolo) e scriviamo  $\phi = \sum_M \alpha_M u_M + \bar{\alpha}_M \bar{u}_M$ . Allora

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} [(I) + (II) + (III)]$$

con ovvio significato dei simboli. Ciascun termine è l'integrale di una doppia somma su  $M$  e  $M'$ . Scambiando la somma con l'integrale, per esempio per il primo termine, si ha

$$(I) = \int \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 dV = \frac{1}{c^2} \sum_{MM'} \int [\dot{\alpha}_M u_M + \dot{\alpha}_M \bar{u}_M] [\dot{\alpha}_{M'} u_{M'} + \dot{\alpha}_{M'} \bar{u}_{M'}] dV$$

Per la ortonormalità dei vettori  $u_M$  solo i termini  $M = M'$  sopravvivono; per periodicità, gli integrali di  $u_M^2$  e  $\bar{u}_M^2$  sono nulli e quindi

$$(I) = \frac{1}{c^2} \sum_M 2 |\dot{\alpha}_M|^2 \|u_M\|^2 = 2 \sum_M \frac{\omega_M^2}{c^2} |\alpha_M|^2$$

Procedendo in maniera analoga per il secondo e terzo termine si ottiene

$$(II) + (III) = 2 \sum_M k_M^2 |\alpha_M|^2 + 2\mu^2 |\alpha_M|^2 = 2 \sum_M \frac{\omega_M^2}{c^2} |\alpha_M|^2$$

Allora

$$(I) + (II) + (III) = 4 \sum_M \frac{\omega_M^2}{c^2} |\alpha_M|^2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = 2 \sum_M \frac{\omega_M^2}{c^2} |\alpha_M|^2$$

Adesso, se estraiamo la costante che avevamo assorbito in  $\alpha$  e ritorniamo alla definizione originaria di  $\alpha$ , otteniamo

$$\mathcal{E} = 2 \sum_M \frac{\omega_M^2}{c^2} \frac{c^2 \hbar}{2\omega_M} |\alpha_M|^2 = \sum_M \hbar \omega_M |\alpha_M|^2$$

Nello stesso modo si ottiene l'espressione per  $\mathcal{P}$ .

#### 7.2.4 Analisi in modi normali in una scatola = analisi di Fourier

Lo sviluppo in modi normali del campo è equivalente allo sviluppo di Fourier del campo. Sostituendo infatti nella (7.87) le soluzioni di oscillatore armonico  $\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}$ , con  $\omega_{\mathbf{k}}$  dato dalla relazione di dispersione (7.80), e l'espressione (7.83) per le funzioni modali, si

ottiene

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{c^2 \hbar}{2\omega_{\mathbf{k}} V}} \left[ \alpha_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + \bar{\alpha}_{\mathbf{k}} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \right] \quad (7.91)$$

che è proprio lo sviluppo in integrale di Fourier di una soluzione generica dell'equazione del campo di Klein-Gordon (1.68) (vedere box stto).

Possiamo passare al "limite termodinamico", cioè il limite di volume infinito, prendendo il limite  $V \rightarrow \infty$  del secondo membro della (7.91). Prendendo per comodità i lati del parallelepipedo uguali a  $L$ , abbiamo  $V = L^D$ , dove  $D$  è la dimensione dello spazio, per cui  $V \rightarrow \infty$  è equivalente a  $L \rightarrow \infty$ . In questo limite la spaziatura tra numeri d'onda consecutivi,

$$\Delta k_1 = \frac{2\pi}{L}, \quad \Delta k_2 = \frac{2\pi}{L}, \quad \Delta k_3 = \frac{2\pi}{L}, \quad \dots$$

tende a 0 e la somma dello (7.91) è identificata con la somma di Riemann di un integrale. Più precisamente, osservando che

$$V = L^D = \frac{(2\pi)^D}{\Delta k_1 \Delta k_2 \Delta k_3 \dots},$$

si ha

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta k_1 \Delta k_2 \Delta k_3 \dots}{(2\pi)^D} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D \mathbf{k} \quad (7.92)$$

e la variabile  $\mathbf{k}$  diventa una variabile continua. Affinché il limite sia finito occorre passare dalle ampiezze  $\alpha_{\mathbf{k}}$  (che vanno a zero nel limite) alle funzioni continue

$$\alpha(\mathbf{k}) = \sqrt{V} \alpha_{\mathbf{k}} \quad (7.93)$$

che restano finite nel limite. Dunque, lo sviluppo in serie di Fourier (7.91) nel limite di volume infinito diventa lo sviluppo in integrale di Fourier del campo:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \sqrt{\frac{c^2 \hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left\{ \alpha(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + \bar{\alpha}(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \right\} \frac{d^D \mathbf{k}}{(2\pi)^D} \quad (7.94)$$

**Box 7.6 — Soluzione dell'equazione di Klein-Gordon.** In questo Box mostriamo come ottenere la (7.94) risolvendo direttamente l'equazione di Klein-Gordon in modo relativisticamente invariante. Per comodità, fissiamo  $D = 3$ .

Introduciamo la trasformata di Fourier Lorentz-invariante

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ik \cdot x} \hat{\phi}(k) d^4 k = \frac{1}{c(2\pi)^4} \int e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \hat{\phi}(\omega/c, \mathbf{k}) d\omega d^3 \mathbf{k} \quad (7.95a)$$

$$\hat{\phi}(k) = \int e^{ik \cdot x} \phi(x) d^4 x = \int e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \phi(ct, \mathbf{x}) c dt d^3 \mathbf{x} \quad (7.95b)$$

dove, per simmetria, abbiamo denotato l'elemento invariante di volume nello spazio di Minkowski con  $d^4 x$  invece di  $d\Omega$  e, similmente, abbiamo denotato  $dV$  con  $d^3 \mathbf{x}$ . Allora, ricordando la regola  $\partial \rightarrow -ik$ , l'equazione di Klein-Gordon

$$(\square + \mu^2)\phi(x) = 0 \quad (7.96)$$

in trasformata di Fourier diventa

$$(-k^2 + \mu^2)\hat{\phi}(k) = 0 \quad (7.97)$$

(dove, come al solito,  $k^2 = \omega^2/c^2 - |\mathbf{k}|^2$ ). Si osservi che la condizione di realtà del campo

$$\phi = \bar{\phi} = \int e^{-ik \cdot x} \overline{\hat{\phi}(k)} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} = \int e^{ik \cdot x} \hat{\phi}(k) \frac{d^4k}{(2\pi)^4} = \int e^{-ik \cdot x} \overline{\hat{\phi}(-k)} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \quad (7.98)$$

(dove nell'ultimo passaggio si è fatto il cambiamento di variabili  $k \rightarrow -k$ ), implica che

$$\overline{\hat{\phi}(-k)} = \hat{\phi}(k). \quad (7.99)$$

L'equazione (7.97) stabilisce che  $\hat{\phi}(k)$  è una funzione altamente singolare: deve annullarsi per tutti i quadrivettori  $k$ , eccetto che per quelli che soddisfano la relazione (di dispersione)  $k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 = \mu^2$  e quando questa relazione è soddisfatta, i valori di  $\hat{\phi}(k)$  sono arbitrari. Allora  $\hat{\phi}(k)$  è una distribuzione della forma

$$\hat{\phi}(k) = 2\pi\delta(k^2 - \mu^2)f(k)$$

dove  $\delta$  è la *delta di Dirac*, e il fattore  $2\pi$  è stato introdotto solo per convenienza;  $f(k)$  è una qualunque funzione di  $k$  che soddisfa la condizione di realtà del campo, vale a dire

$$\overline{f(-k)} = f(k). \quad (7.100)$$

Inserendo nello sviluppo in integrale di Fourier, si ottiene la soluzione generale

$$\phi(x) = \int e^{ik \cdot x} \phi(k) f(k) \delta(k^2 - \mu^2) \frac{d^4k}{(2\pi)^3}$$

Si osservi che  $\delta(k^2 - \mu^2)d^4x$  è una misura invariante nello spazio di Minkowski degli impulsi concentrata sulle due falde dell'iperboloide  $k_0 = \omega_{\mathbf{k}}/c$  e  $k_0 = -\omega_{\mathbf{k}}/c$ , dove, come al solito,  $\omega_{\mathbf{k}} = c\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \mu^2}$ . Usando la proprietà della delta di Dirac (corso di metodi matematici)

$$\delta(u^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(u + a) + \delta(u - a)] \quad (7.101)$$

per  $a = \omega_{\mathbf{k}}/c$ , lo sviluppo in integrale di Fourier diventa:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int f(k_0, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - k_0 ct)} \frac{c}{2\omega_{\mathbf{k}}} [\delta(k_0 + \omega_{\mathbf{k}}/c) + \delta(k_0 - \omega_{\mathbf{k}}/c)] \frac{dk_0 d^3\mathbf{k}}{2\pi^3}.$$

L'integrazione in  $k_0$  fornisce:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{c}{2\omega_{\mathbf{k}}} [f(\omega_{\mathbf{k}}/c, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + f(-\omega_{\mathbf{k}}/c, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega_{\mathbf{k}} t)}] \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \quad (7.102)$$

Consideriamo adesso il secondo integrale: integrare su  $\mathbf{k}$  o su  $-\mathbf{k}$  produce lo stesso risultato (come nella (7.98)), per cui

$$\int \frac{c}{2\omega_{\mathbf{k}}} f(-\omega_{\mathbf{k}}/c, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \omega_{\mathbf{k}}t)} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \int \frac{c}{2\omega_{\mathbf{k}}} f(-\omega_{\mathbf{k}}/c, -\mathbf{k}) e^{i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \omega_{\mathbf{k}}t)} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3},$$

avendo usato che  $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{-\mathbf{k}}$ . Quindi,

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{c}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left[ f(\omega_{\mathbf{k}}/c, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} + f(-\omega_{\mathbf{k}}/c, -\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right] \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}, \quad (7.103)$$

Infine, tenendo conto della condizione di realtà del campo (7.100), otteniamo

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{c}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left[ f(\omega_{\mathbf{k}}/c, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} + \overline{f(\omega_{\mathbf{k}}/c, \mathbf{k})} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right] \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \quad (7.104)$$

Poiché i valori di  $f(k)$  che non sono sull'iperboloide (“mass shell”) non contribuiscono, posto  $\eta(\mathbf{k}) = f(\omega_{\mathbf{k}}/c, \mathbf{k})$ , lo sviluppo del campo diventa

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \left[ \eta(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} + \overline{\eta(\mathbf{k})} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right] \frac{cd^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} \quad (7.105)$$

che è proprio la (7.94) per

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} \eta(\mathbf{k}).$$

Si osservi che ai fini della soluzione generale dell'equazione di Klein-Gordon come ridefiniamo i coefficienti dello sviluppo in integrale di Fourier è inessenziale, proprio perché stiamo scrivendo la soluzione generale dell'equazione e i coefficienti (comunque li scriviamo) sono determinati dalle condizioni iniziali. Per esempio, una rappresentazione del tipo

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \left( \chi^+(\mathbf{k}) e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t]} + \chi^-(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \omega_{\mathbf{k}}t)} \right) \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \quad (7.106)$$

con  $\chi^-(\mathbf{k}) = \overline{\chi^+(-\mathbf{k})}$ , è probabilmente la rappresentazione più naturale per l'analisi in un dato sistema di riferimento. Una rappresentazione della forma (7.105), è invece preferibile per avere una rappresentazione Lorentz-invariante della soluzione in quanto l'integrazione è rispetto ad una misura che è Lorentz-invariante. Infine, la rappresentazione (7.94) ha il merito di mettere in evidenza la struttura del campo come insieme di oscillatori armonici. Sia come sia, la morale è che l'analisi in modi normali del campo è equivalente alla sua analisi di Fourier.

### 7.2.5 Campo scalare con sorgente esterna

Ora vogliamo introdurre interazioni. Il modo più semplice che ci permette di rimanere nell'ambito dei sistemi lineari è far interagire il campo scalare con un potenziale esterno. Questo potenziale è descritto da una funzione nota come corrente sorgente  $J(x)$  che interagisce con il campo, dando un contributo  $-J(x)\phi(x)$  all'energia potenziale. La lagrangiana risultante è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}\phi^2\mu^2 + J\phi \quad (7.107)$$

da cui seguono le equazioni del moto

$$(\square + \mu^2)\phi(x) = J(x) \quad (7.108)$$

Questa è un'equazione differenziale non omogenea per il campo  $\phi$  detta *equazione di Klein-Gordon non omogenea*. Per teoremi generali sulle equazioni differenziali,  $\phi$  è della forma

$$\phi = \phi_0 + \phi_J, \quad (7.109)$$

è cioè la somma di una soluzione  $\phi_0$  dell'omogenea associata, cioè dell'equazione di Klein-Gordon (7.96), e di una soluzione particolare  $\phi_J$ .

**Box 7.7 — Soluzione dell'equazione di Klein-Gordon non omogenea: 1. Funzione di Green ritardata.** In trasformata di Fourier (7.95), la soluzione particolare  $\phi_J$  di (7.108) deve soddisfare l'uguaglianza

$$(-k^2 + \mu^2)\hat{\phi}_J = \hat{J} \quad (7.110)$$

dove  $\hat{J}$  è la trasformata di Fourier di  $J$ . Quindi,

$$\hat{\phi}_J = \hat{G}(k)\hat{J} \quad \text{con} \quad \hat{G}(k) = \frac{1}{-k^2 + \mu^2}. \quad (7.111)$$

Allora, per il teorema di convoluzione

$$\phi_J(x) = G^{\text{ret}} \star J(x) = \int G(x-y)J(y) d^4y \quad (7.112)$$

dove

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ik \cdot x} \hat{G}(k) d^4k = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ik \cdot x} \frac{1}{-k^2 + \mu^2} d^4k. \quad (7.113)$$

Semberebbe che abbiamo finito, ma non è così: l'integrale è singolare per  $k^2 = \mu^2$  ed è quindi mal definito.

Per analizzare la situazione, esplicitiamo l'integrale in un sistema di riferimento ponendo, come al solito,  $\omega_{\mathbf{k}} = c\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \mu^2}$ :

$$G(\mathbf{x}, t) = c \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{-1}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}$$

Vediamo che la funzione integrata in  $d\omega$  ha poli  $\omega_{\pm} = \pm\omega_{\mathbf{k}}$  sull'asse reale per cui, affinché l'integrale sia ben definito, occorre deformare il cammino lungo l'asse reale in un cammino nel piano complesso che escluda le singolarità. In effetti, la situazione è analoga a quella incontrata nel Box 1.3 quando abbiamo studiato l'oscillatore armonico forzato. Per come è stata definita,  $G$  è soluzione dell'equazione inomogenea

$$(\square + \mu^2)\phi(x) = \delta(x-y) \quad (7.114)$$

e quindi ha, dal punto di vista fisico, un significato semplice: rappresenta il campo nel punto  $x$  generato da una corrente impulsiva localizzata in  $y$ . Dal punto di vista matematico, è una funzione di Green dell'equazione di Klein-Gordon. Se poi consideriamo

$$G_\omega = \frac{-1}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} = \frac{-1}{(\omega - \omega_{\mathbf{k}})(\omega + \omega_{\mathbf{k}})} \quad (7.115)$$

vediamo che coincide con la formula (1.30) per  $G_\omega$  con  $\omega_0 = \omega_{\mathbf{k}}$ . Il che non deve sorprendere: l'analisi in modi di Fourier fornisce una rappresentazione del campo come un insieme di oscillatori indipendenti, parametrizzati dal numero d'onde  $\mathbf{k}$  e di frequenza  $\omega_{\mathbf{k}}$ , soggetti ad una forzante esterna

$$J_{\mathbf{k}}(t) = \int J(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x}$$

In altre parole, per ogni modo  $\mathbf{k}$ , la situazione non solo è analoga a quella del Box 1.3, è *identica*. Facciamo allora tesoro della morale che avevamo tratto a suo tempo riguardo all'ambiguità nella scelta della deformazione del cammino nel piano complesso: *diverse deformazioni corrispondono a diverse condizioni al contorno e a diverse condizioni al contorno corrispondono diverse funzioni di Green*.

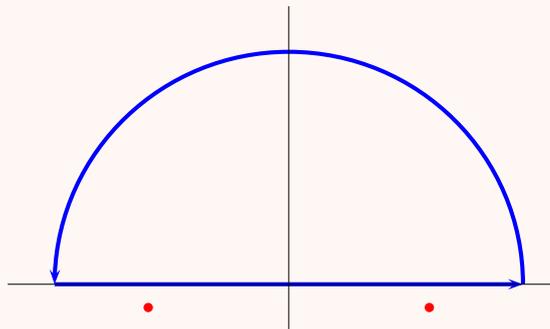
Passiamo al piano delle frequenze complesse e spostiamo i due poli  $\omega_{\pm} = \pm\omega_{\mathbf{k}}$  di  $G_\omega$  un pelino sotto l'asse reale,  $\pm\omega_{\mathbf{k}} \rightarrow \pm\omega_{\mathbf{k}} - i\epsilon$ .



Allora per garantire la convergenza dell'integrale

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{-1}{(\omega - \omega_{\mathbf{k}} + i\epsilon)(\omega + \omega_{\mathbf{k}} + i\epsilon)}$$

per  $t > 0$  occorre deformare il contorno in un semicerchio nel semipiano negativo ( $e^{-i\omega t} = e^{-iut} e^{vt}$ ); per  $t < 0$  il cammino va chiuso nel semipiano superiore, ma qui, essendo la funzione analitica, l'integrale è nullo.



Dunque,  $G_{\mathbf{k}}^{\text{ret}}(t)$  la funzione di Green ritardata che si ottiene per questa deformazione del cammino, è nulla per  $t < 0$ . Applicando il teorema dei residui al semipiano inferiore, si ottiene  $G_{\mathbf{k}}^{\text{ret}}(t)$  per  $t > 0$ . Poiché abbiamo già svolto il calcolo nel Box 1.3, ricopiamo il risultato (1.34) ottenuto allora, sostituendo  $\omega_0$  con  $\omega_{\mathbf{k}}$  e introducendo un suffisso  $\mathbf{k}$ :

$$G_{\mathbf{k}}^{\text{ret}}(t) = \left[ \Delta_{\mathbf{k}}^+(t) + \Delta_{\mathbf{k}}^-(t) \right] \vartheta(t) \quad (7.116)$$

dove  $\vartheta(t)$  è la funzione a scalino di Heaviside ( $=1$  per  $t > 0$  e  $=0$  per  $t < 0$ ), che assicura che  $G^{\text{ret}}(t)$  sia nulla per  $t < 0$ ;  $\Delta_{\mathbf{k}}^+$  e  $\Delta_{\mathbf{k}}^-$  sono i contributi dei due poli:

$$\Delta_{\mathbf{k}}^+(t) = i \frac{e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \quad (7.117a)$$

$$\Delta_{\mathbf{k}}^-(t) = -i \frac{e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}}{2\omega_{\mathbf{k}}} = -\Delta_{\mathbf{k}}^+(-t) \quad (7.117b)$$

(si osservi che queste formule sono ben definite qualunque sia il segno di  $t$ ).

Dallo sviluppo in integrale di Fourier di  $\Delta_{\mathbf{k}}^+(t)$ ,

$$\Delta^+(\mathbf{x}, t) = ic \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \quad (7.118)$$

otteniamo lo sviluppo in integrale di Fourier della funzione di Green ritardata:

$$G^{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) = [\Delta^+(\mathbf{x}, t) - \Delta^+(\mathbf{x}, -t)] \theta(t) \quad (7.119)$$

(avendo usato la (7.117b)). Osserviamo che  $\Delta^+(\mathbf{x}, t)$  è una funzione pari di  $\mathbf{x}$ , per cui  $\Delta^+(\mathbf{x}, t) = \Delta^+(-\mathbf{x}, t)$  e che, essendo  $d^3\mathbf{k}/\omega_{\mathbf{k}}$  è una misura Lorentz invariante,  $\Delta^+(x) = \Delta^+(\mathbf{x}, t)$  risulta un campo scalare di Lorentz (indipendentemente dalla scelta del sistema di riferimento). Da queste due osservazioni risulta definita la funzione di Green ritardata,

$$G^{\text{ret}}(x) = [\Delta^+(x) - \Delta^+(-x)] \theta(t), \quad (7.120)$$

come funzione invariante rispetto al gruppo di Lorentz ortocrono (che non cambia il segno di  $t$ ). Si osservi che  $G^{\text{ret}}(x) = 0$  per  $x$  di tipo spazio (se  $x$  è di tipo spazio esiste un sistema di riferimento in cui la componente temporale è nulla, ed essendo  $\Delta^+$  una funzione pari di  $\mathbf{x}$ , il secondo membro della (10.23) si annulla). Dunque, non solo  $G^{\text{ret}}$  è ritardata, ma è anche *causale*.

In particolare,  $G^{\text{ret}}(x - y)$  ha supporto dentro il cono di luce futuro centrato in  $y$  ed è nulla al di fuori di esso. Poiché  $G^{\text{ret}}(x - y)$  è soluzione di (7.114), questo significa che il campo prodotto da una corrente impulsiva concentrata in un punto  $y$  dello spazio-tempo si propaga a velocità inferiore (o al limite uguale) alla velocità della luce  $c$ ; questa è una proprietà invariante, cioè indipendente dalla scelta del sistema di riferimento. Il campo  $\phi_J$ , soluzione particolare dell'equazione non omogenea di Klein Gordon (7.108) è, per il teorema di convoluzione (7.112), semplicemente la somma pesata di tutti i contributi al campo delle sorgenti puntiformi che sono nella regione dove la corrente  $J$  è non nulla, cioè

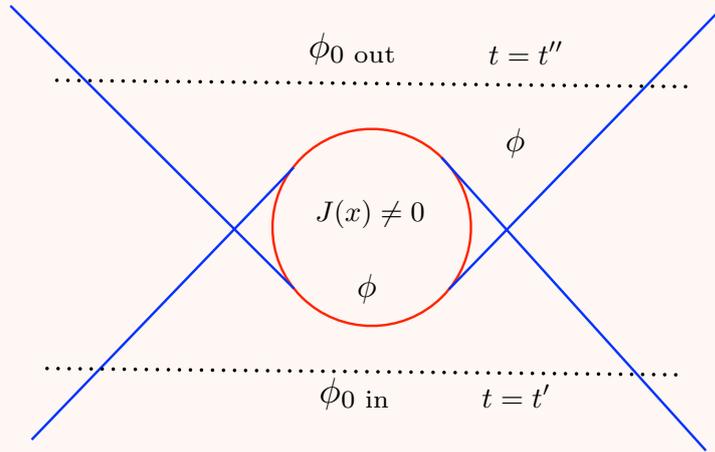
$$\phi_J(x) = G^{\text{ret}} \star J(x) = \int G^{\text{ret}}(x - y) J(y) d^4y. \quad (7.121)$$

Consideriamo adesso la soluzione completa (7.109). Valgono pari-pari le considerazioni che avevamo fatto nel Box 1.3 a proposito dell'oscillatore armonico forzato: la funzione di Green ritardata corrisponde alla scelta di condizioni di Cauchy del campo  $\phi_0$  soluzione dell'omogenea nel passato, cioè prima che sia stata accesa la corrente. Per semplicità assumiamo che il supporto della corrente abbia un'estensione spaziale

limitata e resti accesa solo per un intervallo di tempo limitato (come nella figura sotto). Se denotiamo tale campo libero con  $\phi_{0 \text{ in}}$ , la soluzione completa è

$$\phi = \phi_{0 \text{ in}} + G^{\text{ret}} \star J. \tag{7.122}$$

La figura sotto riassume la situazione (anticipando il prossimo argomento che è la funzione di Green anticipata )



**Box 7.8 — Soluzione dell’equazione di Klein-Gordon non omogenea: 2. Funzione di Green anticipata.** Supponiamo adesso di spostare i poli di  $G_\omega$  data dalla (7.115) un pelino sopra l’asse reale,  $\pm\omega_{\mathbf{k}} \rightarrow \pm\omega_{\mathbf{k}} + i\epsilon$ .



Allora l’integrale

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{-1}{(\omega - \omega_{\mathbf{k}} - i\epsilon)(\omega + \omega_{\mathbf{k}} - i\epsilon)},$$

per  $t > 0$  va calcolato lungo un semicerchio nel semipiano negativo, ed essendo qui la funzione analitica, è nullo; per  $t < 0$ , l’integrale nel semipiano superiore raccoglie i contributi dei residui nei poli. Il risultato (7.123) ottenuto nel Box 1.3 ci dà  $G_{\mathbf{k}}^{\text{adv}}(t) = G_{\mathbf{k}}^{\text{ret}}(-t)$ . Ne concludiamo che

$$G^{\text{adv}}(x) = G^{\text{ret}}(-x) \tag{7.123}$$

La differenza delle due funzioni di Green

$$\Delta(x) = G^{\text{ret}}(x) - G^{\text{adv}}(x) \tag{7.124}$$

è una soluzione della equazione omogenea  $(\square + \mu^2)\phi = 0$  e gioca un ruolo importante nelle applicazioni.

Infine, sotto le stesse ipotesi riassunte dalla figura alla fine del Box precedente, possiamo scrivere la soluzione completa (7.109) con dati di Cauchy nel futuro:

$$\phi = \phi_{0 \text{ out}} + G^{\text{adv}} \star J. \quad (7.125)$$

Dalla

**Box 7.9 — Equazione inomogenea delle onde ( $D = 3, \mu = 0$ ).** Sostituendo la (7.117a) nella (7.119), si ottiene

$$G^{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) = c \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \frac{\sin(\omega_{\mathbf{k}} t)}{\omega_{\mathbf{k}}} \vartheta(t). \quad (7.126)$$

Adesso poniamo  $\mu =$ , per cui  $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}| = c\kappa$ , avendo introdotto la variabile non negativa  $\kappa$  per il modulo di  $|\mathbf{k}|$  (per evitare confusioni con il 4-vettore numero d'onde  $k$ ); per la stessa ragione denoteremo con  $r$  il modulo di  $\mathbf{x}$ . Allora la (7.126) diventa

$$G^{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \frac{\sin c\kappa t}{\kappa} \theta(t)$$

Usando la formula

$$\int d^3 \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} f(\kappa) = \frac{4\pi}{r} \int_0^\infty f(\kappa) \sin(\kappa r) \kappa d\kappa \quad (7.127)$$

(ottenuta passando a coordinate sferiche e integrando su  $\varphi$  e  $\theta$ ), si ottiene

$$G^{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty d\kappa \sin(c\kappa t) \sin(\kappa r) \vartheta(t).$$

Il teorema integrale di Fourier fornisce

$$\int_0^\infty d\kappa \sin(c\kappa t) \sin(\kappa r) = \frac{\pi}{2} [\delta(r - ct) - \delta(r + ct)] \quad (7.128)$$

e quindi ( $r = |\mathbf{x}|, t > 0$ )

$$G^{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta(ct - |\mathbf{x}|)}{4\pi r} \vartheta(t). \quad (7.129)$$

Usando la formula (7.101) per la delta, possiamo riscrivere il secondo membro della (7.129) in forma Lorentz-invariante:

$$G^{\text{ret}}(x) = \frac{1}{2\pi} \delta(x^2) \vartheta(t) \quad (7.130)$$

Dalla (7.123), si ottiene

$$G^{\text{adv}}(x) = \frac{1}{2\pi} \delta(x^2) \vartheta(-t) \quad (7.131)$$

Introducendo la funzione segno  $\epsilon(t) = 1$  per  $t > 0$  e  $\epsilon(t) = -1$  per  $t < 0$  (che è invariante per trasformazioni di Lorentz ortocrone), si ha

$$\Delta(x) = G^{\text{ret}}(x) - G^{\text{adv}}(x) = \frac{1}{2\pi} \delta(x^2) \epsilon(t). \quad (7.132)$$

### 7.3 Analisi in modi normali del campo di Maxwell

Nel vuoto, cioè per  $\rho = 0$  e  $\mathbf{J} = 0$ , le equazioni di Maxwell diventano

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (7.133a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.133b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7.133c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (7.133d)$$

Queste equazioni hanno soluzioni di tipo onda piana per i campi elettrici e magnetici nello spazio libero, come è noto dalla fisica generale e come richiameremo brevemente nella prossima sezione. In quella successiva vedremo come queste onde possono essere “catturate” come onde stazionarie in una regione  $\mathcal{R}$  dello spazio libero delimitato da materiali conduttori — *una cavità elettromagnetica*.

#### 7.3.1 Campo elettromagnetico libero

Il campo elettromagnetico libero corrisponde all'idealizzazione in cui si assume che le equazioni (7.133) valgano ovunque, che è un'idealizzazione adeguata per descrivere il campo in zone lontane dalle cariche. Sviluppando  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  in integrali di Fourier

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega} \quad (7.134a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \mathbf{B}_{\mathbf{k},\omega} \quad (7.134b)$$

dove

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega} = \int dt \int d^3\mathbf{x} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \quad \mathbf{B}_{\mathbf{k},\omega} = \int dt \int d^3\mathbf{x} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \quad (7.134c)$$

le equazioni di Maxwell nel vuoto diventano

$$\begin{cases} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega} = 0 \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega} = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}_{\mathbf{k},\omega} \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_{\mathbf{k},\omega} = 0 \\ \mathbf{k} \times \mathbf{B}_{\mathbf{k},\omega} = -\frac{\omega}{c} \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega} \end{cases} \quad (7.135)$$

Sostituendo la legge di Faraday nella legge di Ampère-Maxwell, si ottiene

$$\frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}) = -\frac{\omega}{c} \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}$$

Notando che  $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}) \mathbf{k} - k^2 \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega} = -|\mathbf{k}|^2 \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}$ , si vede che le componenti di  $\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}$  soddisfano l'equazione

$$(-\omega^2 + c^2 |\mathbf{k}|^2) \phi_{\mathbf{k},\omega} = 0. \quad (7.136)$$

Analogamente, si mostra che anche le componenti di  $\mathbf{B}_{\mathbf{k},\omega}$  soddisfano la stessa equazione. In altre parole, come era peraltro ovvio, i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  soddisfano l'equazione omogenea delle onde

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \mathbf{E} = 0, \quad (7.137a)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \mathbf{B} = 0. \quad (7.137b)$$

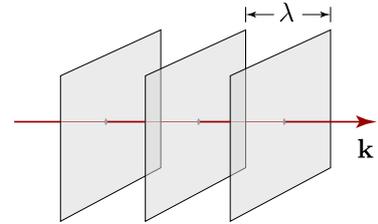
Valgono quindi le considerazioni fatte sopra per il campo scalare ponendo  $\mu = 0$ . Le onde del campo elettromagnetico sono dunque non dispersive. Scriviamo le onde piane progressive così:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega_{\mathbf{k}} t)} \quad (7.138a)$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega_{\mathbf{k}} t)} \quad (7.138b)$$

sottintendendo che si prenda la parte reale di quanto è a secondo membro.

L'analisi di Fourier ci fa ritrovare quanto è ben noto dalla Fisica Generale: i campi liberi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  possono essere rappresentati come sovrapposizioni lineari (sviluppi in integrale di Fourier) di onde piane, cioè, *planari*, nel senso che per tutti i punti del piano fissato dalla condizione  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = C^{\text{te}}$  la fase del onda è identica, ossia l'insieme dei punti  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = C^{\text{te}}$  definisce un *fronte d'onda* perpendicolare al vettore d'onda  $\mathbf{k}$ . La spaziatura tra fronti d'onda consecutivi con la stessa fase è dato dalla lunghezza d'onda  $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$ . Il periodo di oscillazione temporale dei fronti d'onda è dato da  $2\pi/c|\mathbf{k}|$ . Infine, le onde sono *non-dispersive*, in quanto



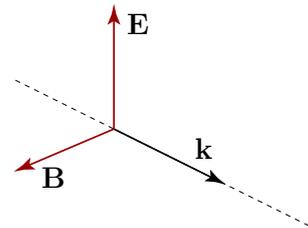
$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = c \hat{\mathbf{k}}, \quad \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \quad (\text{velocità di gruppo})$$

dipende solo dalla direzione  $\hat{\mathbf{k}}$  di propagazione dell'onda piana.

Inoltre le ampiezze  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$  e  $\mathbf{B}_{\mathbf{k}}$  delle onde piane non sono arbitrarie, ma devono soddisfare i vincoli imposti dalle equazioni di Maxwell (7.135) in trasformata di Fourier, che, tenuto conto della relazione di dispersione  $\omega = ck$ , riscriviamo come

$$\begin{cases} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}} = 0 \\ \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k}} = \mathbf{B}_{\mathbf{k}} \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_{\mathbf{k}} = 0 \\ \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B}_{\mathbf{k}} = -\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \end{cases} \quad (7.139)$$

dove  $\hat{\mathbf{k}}$  è il versore nella direzione  $\mathbf{k}$ . Il loro significato geometrico è il seguente. Le ampiezze  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$  e  $\mathbf{B}_{\mathbf{k}}$  giacciono nel piano ortogonale a  $\mathbf{k}$ , sono cioè *trasversali* rispetto alla direzione di propagazione; inoltre, sono ortogonali tra loro e hanno lo stesso modulo, cioè  $|\mathbf{E}_{\mathbf{k}}| = |\mathbf{B}_{\mathbf{k}}|$ . Questo significa che una volta che è assegnato uno dei due, l'altro è automaticamente determinato. In altre parole, i *gradi di libertà* indipendenti



del campo elettromagnetico libero sono 2, ad esempio le due componenti trasversali di  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ . Questi gradi di libertà corrispondono ai possibili stati di polarizzazione delle onde elettromagnetiche.

**Box 7.10 — Polarizzazione.** Si scelga un sistema di coordinate ortogonali definito dai versori  $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ , con  $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{k}}$ , e si consideri l'onda piana

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) = (E_{\mathbf{k}1}\hat{\mathbf{e}}_1 + E_{\mathbf{k}2}\hat{\mathbf{e}}_2) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)}$$

Descrivere lo stato più generale di polarizzazione (polarizzazione ellittica) e ricavare i casi particolari di polarizzazione circolare e lineare.

**Box 7.11 — Energia e quantità di moto delle onde piane.** Calcoliamo la densità di energia  $u$  e il vettore di Poynting  $\mathbf{S}$  di un'onda elettromagnetica piana descritta dai campi

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \phi) \quad (7.140a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \phi) \quad (7.140b)$$

Allora

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = E_0^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \phi) \quad (7.141a)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = c\mathbf{E} \times \mathbf{B} = c\hat{\mathbf{k}}E_0^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \phi). \quad (7.141b)$$

Confrontando le due equazioni (7.141), vediamo che

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = c\hat{\mathbf{k}}u(\mathbf{x}, t), \quad (7.142)$$

in accordo con ciò che ci aspetta per un'onda viaggiante, vale a dire, che la densità di flusso di energia  $\mathbf{j}_e$  è legato alla sua densità di energia associata  $\rho_e$  dalla relazione  $\mathbf{j}_e = \mathbf{v}\rho_e$  dove  $\mathbf{v}$  è la velocità di  $\rho_e$ .

Il vettore di Poynting espresso nell'equazione (7.141) è una quantità dipendente dallo spazio e dal tempo. Tuttavia, spesso siamo più interessati alla media temporale di questa quantità. In generale, la media temporale di una funzione periodica di periodo  $T$  è data da

$$\bar{A} = \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt$$

Con questa definizione, la media temporale di  $\mathbf{S}$  è

$$\bar{\mathbf{S}} = cE_0^2\hat{\mathbf{k}} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T dt \cos^2 \left( \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \frac{2\pi}{T}t + \phi \right) \right\}$$

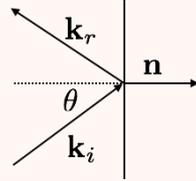
Poiché la media temporale di una funzione sinusoidale al quadrato è 1/2, tenuto conto della (7.142), abbiamo

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{c}{2} E_0^2 \hat{\mathbf{k}} = c\hat{\mathbf{k}}\bar{u} \equiv I\hat{\mathbf{k}}. \quad (7.143)$$

dove  $\bar{u}$  è la media temporale della densità di energia. In ottica,  $I = |\bar{\mathbf{S}}|$  è noto come l'*intensità* dell'onda elettromagnetica. Il prodotto scalare di  $\bar{\mathbf{S}}$  con il versore  $\hat{\mathbf{n}}$  normale ad una qualche superficie,

$$\bar{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = I \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

dà la potenza media per unità di area incidente su quella superficie.



L'onda trasporta quantità di moto: per la (6.66) si avrà che la media temporale della quantità di moto associata all'onda è

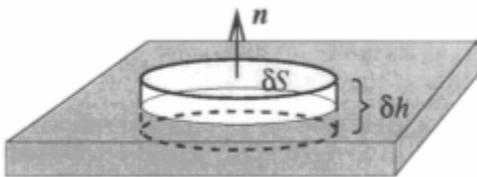
$$\bar{\mathbf{P}}_{\text{e.m.}} = \frac{I \hat{\mathbf{k}}}{c^2} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \bar{u}. \quad (7.144)$$

Quindi la quantità di moto che attraversa una superficie con versore normale  $\hat{\mathbf{n}}$  per unità di tempo e unità di superficie è  $\hat{\mathbf{k}} \bar{u} \cos \Theta$ , dove  $\Theta$  è l'angolo compreso tra  $\hat{\mathbf{k}}$  e  $\hat{\mathbf{n}}$ . Se la superficie è una parete conduttrice ideale (per cui tutta la radiazione incidente viene riflessa secondo la legge della riflessione ideale (vedere figura), la pressione  $P$  esercitata dall'onda sarà pari alla variazione della componente normale di  $\hat{\mathbf{k}} \bar{u} \cos \theta$ , che è pari a  $\bar{u} \cos^2 \theta$ . Essendo la riflessione ideale, si avrà

$$P = 2\bar{u} \cos^2 \theta. \quad (7.145)$$

Questa è la formula per la pressione di radiazione di un'onda monocromatica su uno specchio piatto perfettamente conduttore. Si osservi che la pressione non dipende dalla polarizzazione dell'onda, ma solo dall'angolo di incidenza.

### 7.3.2 Campo elettromagnetico in una cavità



L'interazione tra i campi e le cariche libere del conduttore è estremamente complicata, tuttavia può essere drasticamente semplificata esprimendo tale interazione in termini di *condizioni al contorno*. In altre parole, si assume che i campi soddisfino le equazioni di Maxwell nel vuoto in  $\mathcal{R}$  supplementate da opportune condizioni sul bordo  $\partial \mathcal{R}$  della cavità. Le onde stazionarie che

ne risultano sono determinate da queste condizioni e dalla geometria della cavità.

Si assume noto dalla fisica generale come le equazioni di Maxwell permettono di ricavare le condizioni al contorno, analizzando un cilindro infinitesimo con una delle sue facce sulla superficie della cavità e l'altra dentro la parete. (Nella figura accanto l'altezza del cilindro è  $\delta h$  e  $\delta S$  è l'area di ciascuna delle sue facce.) Queste condizioni in generale sono: la conservazione della componente tangenziale  $E_t$  di  $\mathbf{E}$  e della componente normale  $B_n$  di  $\mathbf{B}$ . Per un conduttore ideale la componente tangenziale di  $\mathbf{E}$  e la componente normale di  $\mathbf{B}$  saranno nulle. Quindi i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  in una cavità ideale devono soddisfare le condizioni

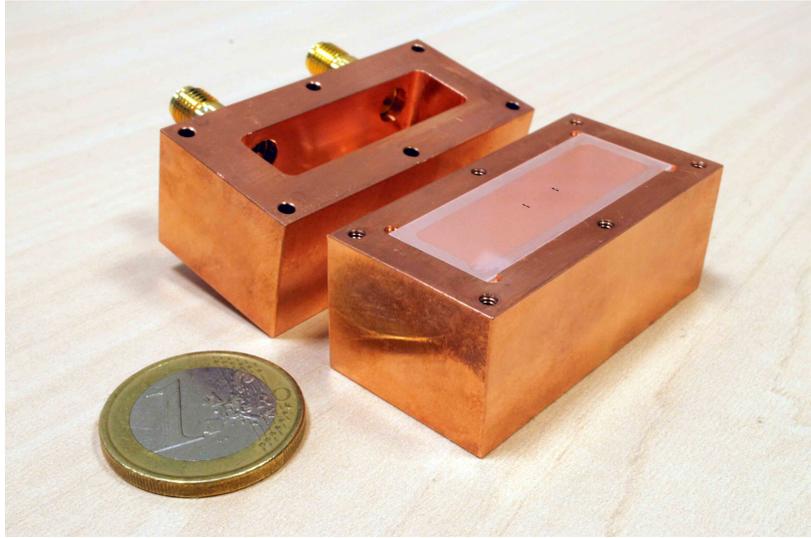


Figura 7.3: Una cavità a microonde di rame aperta con il chip contenente due qubit superconduttori. Gli impulsi di microonde entrano ed escono nella cavità attraverso le due porte, visibile nella parte superiore dell'immagine.

al contorno

$$E_{\parallel} = 0, \quad B_{\perp} = 0 \quad (7.146)$$

Le onde piane del caso libero non soddisfano queste condizioni al contorno. Tuttavia possiamo applicare il metodo di separazione delle variabili e cercare soluzioni delle (7.133) della forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = P(t)\mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = Q(t)\mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (7.147)$$

(il perché delle notazioni sarà chiaro tra un attimo). Sostituendo queste espressioni nelle equazioni (7.133), otteniamo, dalle prime due, che i campi  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  devono essere a divergenza nulla,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , e dalla terza, otteniamo l'equazione

$$P \nabla \times \mathbf{u} = -\frac{1}{c} \dot{Q} \mathbf{v}$$

che è risolta da  $P = \dot{Q}$  e  $\mathbf{v} = -c \nabla \times \mathbf{u}$ . Inserendo questa soluzione nella quarta equazione di Maxwell, otteniamo

$$Q(-c \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}) = \frac{1}{c} \dot{P} \mathbf{u}, \quad \text{cioè} \quad c^2 \Delta \mathbf{u} = \frac{\dot{P}}{Q} \mathbf{u}.$$

Poiché  $\mathbf{u}$  dipende solo da  $\mathbf{x}$  e  $Q$  e  $P$  solo da  $t$ , il termine  $\dot{P}/Q$  deve essere una costante (la costante di separazione) che poniamo uguale a  $-\omega^2$ . Allora, le equazioni di Maxwell per campi della forma (7.147) si separano in

$$\begin{cases} \dot{Q} = P \\ \dot{P} = -\omega^2 Q \end{cases} \Rightarrow \ddot{Q} + \omega^2 Q = 0 \quad (7.148)$$

che è la solita equazione dell'oscillatore armonico, e nell'equazione di Helmholtz per  $\mathbf{u}$ :

$$\left( \Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{u} = 0 \quad (7.149)$$

Come per la corda vibrante, l'equazione di Helmholtz va intesa come un'equazione agli autovalori  $\omega^2/c^2$ .

Assumiamo che esista un insieme completo di funzioni vettoriali  $\mathbf{u}_M = \mathbf{u}_M(\mathbf{x})$ , *gli autovettori dell'equazione di Helmholtz* o *funzioni modali*, con autovalori corrispondenti  $\omega_M$ , le *frequenze di oscillazione* dei modi, che soddisfano:

1. l'equazione di Helmholtz per  $\omega = \omega_M$ ;
2. la condizione di divergenza nulla;
3. le condizioni di ortonormalità

$$\int \mathbf{u}_M \cdot \mathbf{u}_{M'} dV = \delta_{MM'}$$

4. le condizioni al contorno (7.146), cioè  $u_{M\parallel} = 0$ .

Nella maggior parte dei casi di interesse fisico un tale insieme esiste. Un tale insieme forma una *base orto-normale* nello spazio dei campi vettoriali. Nel box sotto si determina tale base per una cavità rettangolare.

Dunque, data le funzioni  $\mathbf{u}_M$ , si può espandere il campo vettoriale  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ , per ogni  $t$  nella serie

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_M P_M(t) \mathbf{u}_M(\mathbf{x}) \quad (7.150a)$$

e, analogamente, per il campo vettoriale  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  si ha

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \sum_M Q_M(t) \mathbf{v}_M(\mathbf{x}) \quad \text{con} \quad \mathbf{v}_M = -c \nabla \times \mathbf{u}_M \quad (7.150b)$$

Il calcolo dell'energia totale del campo,

$$\mathcal{E} = \int u dV = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) dV \quad (7.151)$$

completa la riduzione del campo elettromagnetico a un insieme di oscillatori armonici. L'inserimento nell'integrale della rappresentazione dei vettori del campo in termini dell'insieme completo di funzioni  $\mathbf{u}_M$  porta alla seguente formula

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_M (P_M^2 + \omega_M^2 Q_M^2) \quad (7.152)$$

*La dipendenza dal tempo è stata omessa perché l'energia è una costante del moto.* La dimostrazione di questa formula richiede un briciolo di finezza matematica ed è data nel Box sotto.

Che il campo elettromagnetico in una cavità possa essere rappresentato come una collezione di oscillatori armonici è stato scoperto da Rayleigh. Questo è stato il passo cruciale che, passando per lo studio delle proprietà termiche della radiazione in una cavità, ha poi portato alla distribuzione di Planck e alla nascita della meccanica quantistica.

**Box 7.12 — Dimostrazione della formula (7.152).** Il primo termine è facile: dall'ortonormalità delle funzioni  $\mathbf{u}_M$  si ha

$$\int_{\mathcal{R}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV = \int_{\mathcal{R}} \sum_{MM'} P_M P_{M'} \mathbf{u}_M \cdot \mathbf{u}_{M'} = \sum_{MM'} P_M P_{M'} \int_{\mathcal{R}} \mathbf{u}_M \cdot \mathbf{u}_{M'} dV = \sum_M P_M^2$$

Per quel che riguarda il secondo termine, procedendo in maniera analoga, otteniamo

abbiamo

$$\int_{\mathcal{R}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} dV = \sum_{MM'} Q_M Q_{M'} \int_{\mathcal{R}} \mathbf{v}_M \cdot \mathbf{v}_{M'} dV = \sum_{MM'} Q_M Q_{M'} c^2 \int_{\mathcal{R}} (\nabla \times \mathbf{u}_M) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_{M'}) dV \quad (7.153)$$

Per valutare l'integrale, sfruttiamo il fatto che il rotore è simmetrico (autoaggiunto), quando agisce su campi che hanno componenti tangenziali nulle sul bordo:

$$\int_{\mathcal{R}} \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) dV = \int_{\mathcal{R}} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} dV, \quad (7.154)$$

(Questa proprietà del rotore segue dalla formula di Green per il rotore, usualmente non menzionata nei corsi di calcolo vettoriale,

$$\int_{\mathcal{R}} [\mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})] dV = \int_{\partial \mathcal{R}} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS$$

per ogni regione  $\mathcal{R}$  con un bordo  $\partial \mathcal{R}$  sufficientemente regolare; se i campi hanno componenti tangenziali nulle sul bordo, il secondo membro si annulla e segue la (7.154).)

Allora

$$\int_{\mathcal{R}} (\nabla \times \mathbf{u}_M) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_{M'}) dV = - \int_{\mathcal{R}} \mathbf{u}_M \cdot \Delta \mathbf{u}_{M'} dV$$

dove nel secondo passaggio abbiamo usato la formula  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = -\Delta \mathbf{F} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$  e tenuto conto che  $\nabla \cdot \mathbf{u}_{M'} = 0$ . Ma l'equazione di Helmholtz (7.149) implica che  $\Delta \mathbf{u}_{M'} = -(\omega_{M'}^2/c^2)\mathbf{u}_{M'}$ , per cui

$$\int_{\mathcal{R}} (\nabla \times \mathbf{u}_M) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_{M'}) dV = \frac{\omega_{M'}^2}{c^2} \int_{\mathcal{R}} \mathbf{u}_M \cdot \mathbf{u}_{M'} dV = \frac{\omega_{M'}^2}{c^2} \delta_{MM'}$$

Sostituendo nella (7.153), si ottiene

$$\int_{\mathcal{R}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} dV = \sum_M \omega_M^2 Q_M^2$$

e la formula (7.152) risulta così dimostrata.

### 7.3.3 Dominio di validità del modello matematico di cavità elettromagnetica

Nel modello matematico appena descritto, il numero dei modi normali è infinito. Tuttavia, per una modellizzazione realistica occorre introdurre un taglio sui modi di frequenza elevata perché per *frequenze sufficientemente elevate una piastra metallica cessa di essere un conduttore e non influenza il campo elettromagnetico*.

Ciascun conduttore ha infatti una frequenza di plasma

$$\omega_p = \frac{4\pi n_e e^2}{m_e}$$

dove  $n_e$  è il numero di elettroni per unità di volume,  $e$  e  $m_e$  sono, rispettivamente, la carica e la massa dell'elettrone, che è la frequenza massima che un conduttore può sopportare. Per  $\omega < \omega_p$ , le pareti si comportano come un conduttore perfetto — riflettono le onde elettromagnetiche — ma per  $\omega > \omega_p$  gli elettroni possono oscillare in risonanza con le onde; il che significa che il conduttore è trasparente alle onde per frequenze superiori ad un certo valore massimo  $\omega = \omega_p$  e le condizioni al contorno non valgono più.

A causa di questo, il modello va corretto introducendo in tutte le somme su modi normali una *funzione di taglio*  $f(|\mathbf{k}|/k_m)$ , avente le proprietà

$$f\left(\frac{|\mathbf{k}|}{k_m}\right) \rightarrow 1, \quad |\mathbf{k}| \ll k_m \quad (7.155a)$$

$$f\left(\frac{|\mathbf{k}|}{k_m}\right) \rightarrow 0, \quad |\mathbf{k}| \gg k_m \quad (7.155b)$$

La forma esplicita di  $f(|\mathbf{k}|/k_m)$ , e il valore della frequenza di taglio  $k_m/c$  dipendono dalla natura del materiale.

### 7.3.4 Cavità metallica di forma rettangolare

L'esempio più semplice di un insieme completo di modi normali è quello ottenuto per una cavità metallica di forma rettangolare di lati  $L_x$ ,  $L_y$  e  $L_z$ . In questo caso le auto-funzioni  $\mathbf{u}_M$  possono essere espresse in termini di funzioni trigonometriche. Per determinarle, occorre risolvere l'equazione di Helmholtz per questa geometria. Questo verrà fatto sotto forma di esercizio guidato nel Box sotto. Qui riassumiamo i risultati.

Ciascun modo  $M$  è indicizzato da un vettore numero d'onde  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ , dove

$$k_x = \frac{\pi n_x}{L_x}, \quad k_y = \frac{\pi n_y}{L_y}, \quad k_z = \frac{\pi n_z}{L_z} \quad (7.156)$$

con  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$  interi non negativi (almeno due dei quali devono essere non nulli) e da una variabile discreta  $\lambda$  che può assumere due valori 1 e 2. La corrispondente funzione modale è  $\mathbf{u}_M = \mathbf{u}_{\mathbf{k},\lambda}$  di componenti

$$[\mathbf{u}_{\mathbf{k},\lambda}]_x(x, y, z) = \mathcal{N} \epsilon_{x\lambda} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \quad (7.157a)$$

$$[\mathbf{u}_{\mathbf{k},\lambda}]_y(x, y, z) = \mathcal{N} \epsilon_{y\lambda} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \quad (7.157b)$$

$$[\mathbf{u}_{\mathbf{k},\lambda}]_z(x, y, z) = \mathcal{N} \epsilon_{z\lambda} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \quad (7.157c)$$

dove  $\mathcal{N} = \sqrt{8/(L_x L_y L_z)}$  è una costante di normalizzazione e  $\hat{\epsilon}_\lambda = (\epsilon_{x\lambda}, \epsilon_{y\lambda}, \epsilon_{z\lambda})$ ,  $\lambda = 1, 2$  sono due versori nel piano ortogonale a  $\mathbf{k}$  e ortogonali tra loro, cioè tali che  $\mathbf{k} \cdot \hat{\epsilon}_\lambda = 0$  e  $\hat{\epsilon}_1 \cdot \hat{\epsilon}_2 = 0$ ; questi due versori definiscono due direzioni di polarizzazione lineare del campo elettromagnetico. L'autovalore associato alla funzione modale  $\mathbf{u}_{\mathbf{k},\lambda}$  è

$$\frac{\omega_{\mathbf{k}}^2}{c^2} = |\mathbf{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2. \quad (7.158)$$

con  $k_x$ ,  $k_y$  e  $k_z$  dati dalla (7.156). Infine, l'espansione dei campi (7.150) diventano

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} P_{\mathbf{k}\lambda}(t) \mathbf{u}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}) \quad (7.159a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} Q_{\mathbf{k}\lambda}(t) \nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}) \quad (7.159b)$$

dove la somma si estende su tutti i valori consentiti di  $\mathbf{k}$  e sui due valori di  $\lambda$ ;  $Q_{\mathbf{k}\lambda}$  e  $P_{\mathbf{k}\lambda}$  sono posizione e impulso di due oscillatori di massa unitaria e stessa frequenza  $\omega_{\mathbf{k}}$ .<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Si possono anche scrivere esplicitamente le ampiezze dei modi normali per una cavità di forma cilindrica o sferica. Esse comportano funzioni di Bessel e si ottengono risolvendo l'equazione di Helmholtz in coordinate cilindriche e sferiche, rispettivamente.

**Box 7.13** — **Cavità metallica di forma rettangolare.** Vista la geometria del problema cerchiamo soluzioni della forma

$$u_i = X_i(x)Y_i(y)Z_i(z), \quad i = x, y, z.$$

che, sostituite nella (7.149), danno per ogni componente (per semplicità di notazione omettiamo il pedice “ $i$ ”)

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' + \frac{\omega^2}{c^2}XYZ = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\frac{\omega^2}{c^2}$$

(avendo diviso la prima equazione per  $XYZ$ ). La seconda uguaglianza deve essere vera per ogni  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Quindi ciascun termine nel lato sinistro della seconda equazione deve essere indipendente dagli altri termini e deve perciò essere una costante. Quindi abbiamo

$$\frac{X''}{X} = -k_x^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -k_y^2, \quad \frac{Z''}{Z} = -k_z^2$$

con  $k_x$ ,  $k_y$  e  $k_z$  costanti reali tali che

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (7.160)$$

Consideriamo l'equazione per la componente  $Z = Z_x$  di  $u_x$ :

$$\frac{Z''}{Z} = -k_z^2.$$

La soluzione generale è  $Z = Z_C \cos k_z z + Z_S \sin k_z z$ . Tuttavia, deve soddisfare le condizioni al contorno  $u_x = 0$  per  $z = 0$  e  $z = L_z$ . Quindi deve essere  $Z_C = 0$  e

$$k_z = \frac{n_z \pi}{L_z}$$

dove  $n_z$  è un intero non negativo. Riassumendo, il termine  $Z = Z_x(z)$  di  $u_x$  che soddisfa le condizioni al contorno  $u_x = 0$  per  $z = 0$  e  $z = L_z$  è

$$Z(z) = Z_S \sin k_z z, \quad \text{con} \quad k_z = \frac{n_z \pi}{L_z}.$$

Similmente, troviamo

$$Y(y) = Y_S \sin k_y y, \quad \text{con} \quad k_y = \frac{n_y \pi}{L_y}.$$

dove  $n_y$  è un intero non negativo. Quindi otteniamo

$$u_x = (X_C \cos k_x x + X_S \sin k_x x) \sin k_y y \sin k_z z$$

(dove abbiamo assorbito le costanti  $Y_S$  e  $Z_S$  in  $X_C$  e  $X_S$ ) e seguendo la stessa procedura otteniamo

$$\begin{aligned} u_y &= \sin k'_x x \left( Y_C \cos k'_y y + Y_S \sin k'_y y \right) \sin k'_z z \\ u_z &= \sin k''_x x \sin k''_y y \left( Z_C \cos k''_z z + Z_S \sin k''_z z \right) \end{aligned}$$

Il campo  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  deve essere a divergenza nulla:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (7.161)$$

Imponendo questa condizione alle espressioni sopra per le componenti del campo si trova  $k_x = k'_x = k''_x$ , e similmente per le direzioni  $y$  e  $z$ . Inoltre, si trova che  $X_S = Y_S = Z_S = 0$ . Ne concludiamo che

$$\begin{aligned} u_x &= X_C \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \\ u_y &= Y_C \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \\ u_z &= Z_C \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \end{aligned}$$

Si osservi che almeno due interi su tre del vettore  $(n_x, n_y, n_z)$  devono essere diversi da zero, altrimenti la funzione modale si annullerebbe in tutte le sue componenti. Inoltre, le costanti moltiplicative  $X_C$ ,  $Y_C$  e  $Z_C$  non possono essere assegnate in modo arbitrario: dovendo valere la condizione (7.161) di divergenza nulla, devono essere tali che

$$k_x X_C + k_y Y_C + k_z Z_C = 0,$$

il che significa che il vettore  $(X_C, Y_C, Z_C)$  deve essere ortogonale a  $\mathbf{k}$ . Un vettore di questo tipo può essere espresso come combinazione lineare di due versori  $\hat{\mathbf{e}}_\lambda$ ,  $\lambda = 1, 2$  nel piano ortogonale a  $\mathbf{k}$  e ortogonali tra loro, cioè tali che  $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\lambda = 0$  e  $\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = 0$ . In altre parole, per dati  $(k_x, k_y, k_z)$ , si scelgono due vettori  $\hat{\mathbf{e}}_1$  e  $\hat{\mathbf{e}}_2 = 0$  che soddisfano queste condizioni; questi vettori definiscono *due stati di polarizzazione lineare*. Allora la base ortonormale degli autovettori dell'equazione di Helmholtz è data dalla (7.157) (la normalità è garantita dalla costante di normalizzazione  $\mathcal{N} = \sqrt{8/(L_x L_y L_z)}$ ). L'autovalore associato al modo normale  $\mathbf{u}_{\mathbf{k}, \lambda}$  è

$$\frac{\omega_{\mathbf{k}}^2}{c^2} = |\mathbf{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2.$$

con  $k_x$ ,  $k_y$  e  $k_z$  dati dalla (7.156).

### 7.3.5 Densità dei modi normali

Di particolare utilità per lo studio delle proprietà termodinamiche della radiazione è la distribuzione dei modi normali in funzione della loro frequenza.

Assumiamo, per semplicità che la cavità sia cubica. Allora dalle (7.156) per  $L_x = L_y = L_z = L$  abbiamo

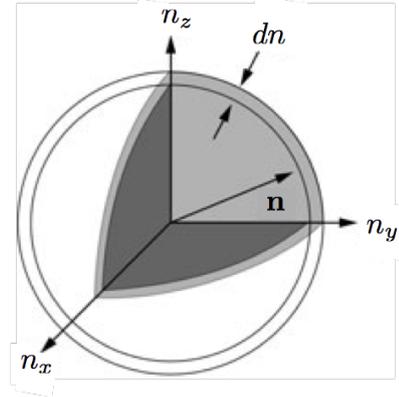
$$\frac{\omega L}{\pi c} = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \equiv n. \quad (7.162)$$

Così ogni oscillatore è specificato da tre numeri interi positivi  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$  e il compito di contare il numero di oscillatori  $dN_\omega$  nell'intervallo di frequenza  $[\omega, \omega + d\omega]$  è equivalente a contare tutti i punti, etichettati da  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$ , nello spazio 3-dimensionale. Essendo

interessati alle proprietà termodinamiche, considereremo valori elevati di  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$ . Poiché abbiamo un insieme denso di punti, questo conteggio corrisponde al volume nello spazio  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$ :

$$dN_\omega = \frac{2 \times 4\pi n^2 dn}{8}$$

Qui  $4\pi n^2$  è la superficie di una sfera di raggio  $n$  e il fattore di 2 tiene conto dei due stati di polarizzazione. Abbiamo il fattore 8 nel denominatore, perché il conteggio deve essere limitato al quadrante positivo della sfera ( $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$  sono tutti positivi). Questo è il fattore mancante nel calcolo originale di Rayleigh e successivamente corretto da Jeans (non si avrebbe questo fattore se si considerasse una scatola periodica). La sostituzione della variabile  $n$  con la frequenza  $\omega$  come nella (7.162), tenuto conto che  $V = L^3$ , fornisce



$$\frac{dN_\omega}{V} = \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} \quad (7.163)$$

Questa è la formula per il numero di modi normali della radiazione in una cavità nell'intervallo di frequenza  $[\omega, \omega + d\omega]$  e per unità di volume.

## 7.4 Campo elettromagnetico generato da sorgenti esterne

Le equazioni di Maxwell per il campo elettromagnetico ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ) generato da cariche e correnti esterne  $\rho$  e  $\mathbf{J}$ ,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (1.47a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.47b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.47c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \quad (1.47d)$$

sono, dal punto di vista matematico, un sistema di equazioni lineari inomogenee. Ricordiamo che affinché queste equazioni siano consistenti, occorre che i campi esterni  $\rho$  e  $\mathbf{J}$  soddisfino l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (7.164)$$

In componenti, le equazioni di Maxwell sono 8 per le 6 incognite  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$  e  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$  (due equazioni per le divergenze e due equazioni per il loro rotore, ciascuna corrispondente a 3 equazioni). Il problema sembra sovra-determinato, ma in effetti non lo è, come risulterà chiaro dalle considerazioni che seguono.

### 7.4.1 Struttura delle equazioni di Maxwell

Le equazioni che governano l'evoluzione temporale dei campi sono le equazioni di Faraday e di Ampère-Maxwell,

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}\end{aligned}$$

e se prendiamo la divergenza di queste equazioni e teniamo conto dell'equazione di continuità della carica elettrica (7.164), arriviamo alle equazioni

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{\partial}{\partial t} (4\pi\rho) \quad (7.165)$$

che *sembrano* identiche alle leggi di Gauss per  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , il che potrebbe far pensare che queste leggi siano ridondanti.

A questo punto, per comprendere la situazione è conveniente invocare un teorema fondamentale del calcolo vettoriale, noto come *teorema di Helmholtz*. Nel 1858 Helmholtz mostrò (in un contesto idrodinamico) che qualunque campo vettoriale, diciamo  $\mathbf{E}$ , che si annulla in maniera sufficientemente rapida all'infinito può essere decomposto come

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp} \quad (7.166)$$

dove le componenti *longitudinali* (irrotazionali) e *trasversali* (rotazionali)  $\mathbf{E}_{\parallel}$  e  $\mathbf{E}_{\perp}$  obbediscono

$$\nabla \times \mathbf{E}_{\parallel} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_{\perp} = 0$$

Il teorema di decomposizione di Helmholtz deriva dal fatto che l'operatore divergenza e l'operatore rotore possono essere pensati come operatori ortogonali. Questo perché il rotore del gradiente è sempre zero e la divergenza del rotore è sempre zero.<sup>4</sup>

Ritorniamo alle equazioni (7.165). La presenza della derivata rispetto al tempo è cruciale. Queste equazioni non fissano le componenti longitudinali dei campi elettrici e magnetici, fissano solo quale sia l'evoluzione temporale delle loro componenti longitudinali. Abbiamo ancora bisogno delle leggi di Gauss per  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  al fine di trovare le componenti longitudinali *iniziali*. Questo spiega anche perché le equazioni di Maxwell non sono sovradeterminate. Le leggi di Gauss per  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono necessarie per determinare univocamente una soluzione, ma sono necessarie *solo come condizioni iniziali* e non come parte del sistema dinamico di equazioni differenziali. Una volta che esse sono utilizzate per trovare lo stato iniziale delle componenti longitudinali dei campi, sono poi le equazioni di Faraday e di Ampère-Maxwell che dettano l'evoluzione temporale delle componenti longitudinali in ogni momento futuro, come esplicitato dalle equazioni (7.165). In altre parole, se le leggi di Gauss per  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono verificate ad un qualche tempo, come conseguenza della struttura delle equazioni di Maxwell, sono verificate a tutti i tempi.

Osservando che  $\mathbf{B}$  è solo trasversale, la decomposizione di Helmholtz può essere usata per separare le equazioni di Maxwell in due blocchi: un blocco per la parte longitudinale

<sup>4</sup>Si noti che c'è un'altra parte per il campo vettoriale che è al tempo stesso a rotore e divergenza nulli. Questa è detta la "parte laplaciana" del campo in quanto questa parte può essere espressa come il gradiente di una soluzione dell'equazione di Laplace. Questa parte è determinata unicamente dalle condizioni al contorno. Per questo motivo, possiamo assumere che le condizioni al contorno sono correttamente applicate in modo che le parti laplaciane sono determinate in modo univoco senza entrare in ulteriori dettagli.

del campo elettrico

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}_{\parallel} = 4\pi\rho \\ \frac{\partial \mathbf{E}_{\parallel}}{\partial t} = -4\pi\mathbf{J}_{\parallel} \end{cases} \quad (7.167)$$

e un blocco per la parte trasversale del campo elettrico e per il campo magnetico

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}_{\perp} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}_{\perp} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{J}_{\perp} \end{cases} \quad (7.168)$$

Si osservi che la seconda equazione del primo blocco non è altro che l'equazione di continuità per la carica elettrica.

Helmholtz mostrò anche che per un qualunque campo vettoriale (che si annulla in maniera sufficientemente rapida all'infinito) si ha

$$\mathbf{E}_{\parallel} = -\nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{E}}{4\pi r} dV, \quad \mathbf{E}_{\perp} = -\nabla \times \int \frac{\nabla' \times \mathbf{E}}{4\pi r} dV, \quad (7.169)$$

da cui segue immediatamente che la parte longitudinale del campo elettrico è data da

$$\mathbf{E}_{\parallel} = -\nabla \int \frac{\rho}{r} dV = \int \frac{\rho \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV \quad (7.170)$$

e che quindi coincide con la soluzione dell'elettrostatica, l'unica differenza è che adesso  $\rho$  può dipendere anche del tempo. Questo fatto ha confuso generazione di studenti (e talvolta di esperti). Sembrerebbe che una variazione delle distribuzioni di carica qui-ora possa cambiare istantaneamente il campo elettrico sulla luna. Le cose non stanno così anche se la matematica è ovviamente corretta. Ritourneremo su questo punto nel seguito, ma per il momento invitiamo lo studente a ragionarci sopra.

Ritorniamo alle equazioni di Maxwell nella loro forma originaria. Un metodo diretto di soluzione è stato introdotto da Riemman. Si basa sull'osservazione che le equazioni di Maxwell possono essere ricombinate in modo tale da assumere la forma dell'equazione delle onde: basta prendere il rotore della seconda coppia di equazioni, usare la nota formula di calcolo vettoriale

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = -\Delta \mathbf{F} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}). \quad (7.171)$$

e usare le espressioni per le divergenze dei campi. In questo modo si dimostra facilmente che i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  soddisfano le equazioni

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E} = -\rho - \frac{4\pi}{c^2} \mathbf{j} \quad (7.172a)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{B} = \frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{J} \quad (7.172b)$$

Quindi i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  soddisfano separatamente l'equazione inomogenea delle onde

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi = j \quad (7.173)$$

dove  $\phi$  sta per una qualunque delle componenti  $E_1, E_2, E_3, B_1, B_2, B_3$  e  $j$  per le corrispondenti componenti a secondo membro delle (7.172). Nel seguito forniremo la soluzione dell'equazione inomogenea delle onde e avremo così anche la soluzione delle equazioni di Maxwell.

Si osservi che le equazioni (7.172) *insieme con le leggi di Gauss per  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$* ,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.174)$$

formano un sistema di equazioni del tutto *equivalente* alle equazioni di Maxwell. Si osservi che dobbiamo includere le leggi di Gauss per ottenere una soluzione unica, per la stessa ragione che nella loro forma originale, come discusso sopra. Anche in questo caso, le leggi di Gauss per  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  servono come condizioni iniziali e le (7.172) rappresentano sei equazioni differenziali lineari a sei incognite.

È importante avere chiaro che trasformare le equazioni di Maxwell nella forma (7.172) non riduce il numero di equazioni fisicamente rilevanti. Ciò che questa trasformazione realizza è di disaccoppiare completamente tutte le variabili dipendenti. Ciascuna delle sei equazioni differenziali dinamiche contiene ora una e una sola variabile dipendente (un componente di campo). Il disaccoppiamento è ciò che rende le equazioni di Maxwell nella forma dell'equazione delle onde così desiderabile, non il fatto che abbiamo ridotto il numero di incognite o il numero di equazioni. In questa forma, la soluzione delle equazioni di Maxwell è semplicemente ricondotta alla *soluzione dell'equazione inomogenea delle onde* (7.173) *per un campo scalare  $\phi$  con sorgente scalare  $j$* .

## 7.5 La transizione verso la meccanica quantistica

Consideriamo le proprietà del campo di radiazione all'interno di una cavità le cui pareti sono mantenute ad una data temperatura e sono tali da assorbire tutta la radiazione che le colpisce senza farne passare alcuna parte o rifletterla (corpo nero). È stato lo studio di questo problema che ha portato alla scoperta distribuzione di Planck e alla nascita della meccanica quantistica.

### 7.5.1 Distribuzione spettrale della radiazione in una cavità

Se le pareti di una cavità completamente vuota sono portate ad una temperatura (assoluta)  $T$ , al suo interno si produce radiazione elettromagnetica. Dopo un certo periodo di tempo, la radiazione all'interno della cavità raggiungerà un equilibrio termico causato dall'emissione e dall'assorbimento dalle pareti. Se questo equilibrio è raggiunto, le pareti assorbono tanta energia di radiazione quanta ne emettono e il campo di radiazione non varierà più nel corso del tempo. Questa radiazione è rappresentata dalla sua densità di energia

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}). \quad (??)$$

La distribuzione spettrale dell'energia è denotata  $u_\omega$ ;  $u_\omega d\omega$  è la parte di energia dei modi normali della radiazione nell'intervallo di frequenza  $[\omega, \omega + d\omega]$ , di modo che

$$u = \int_0^\infty u_\omega d\omega. \quad (7.175)$$

Fu scoperto da Kirchhoff che, ad una data temperatura, la funzione  $u_\omega$  non dipende dalla natura del materiale di cui sono fatte le pareti della cavità, ma dipende soltanto dalla temperatura  $T$ . Questo fatto, noto come *teorema di Kirchhoff*, segue solamente dalla seconda legge della termodinamica. Dopo la scoperta di Kirchhoff si pose il problema di determinare la *funzione universale*  $u_\omega = u_\omega(T)$ .

**Problemi**

**Box 7.14** Spiegare perché se il campo di radiazione in equilibrio termico con le pareti non fosse isotropo e indipendente dal forma della cavità o del materiale delle sue pareti e non avesse le stesse proprietà in ogni punto della cavità sarebbe violata la seconda legge della termodinamica.

**7.5.2 Termodinamica della radiazione**

Un passo importante nello studio delle proprietà termodinamiche della radiazione fu compiuto nel 1884 da Boltzmann con il riconoscimento che una radiazione isotropa esercita su una superficie perfettamente riflettente una pressione  $u/3$ . Questo perché, come abbiamo visto nel capitolo precedente, un'onda piana esercita una pressione  $2u$  su una superficie riflettente su cui incide normalmente. Per onde piane che si propagano con uguale intensità in entrambe le direzioni normali alla superficie, questo è ridotto ad  $u$ , e infine a  $u/3$  se la radiazione è isotropa. Dunque, l'equazione "meccanica" di stato, cioè l'equazione che mette in relazione  $P$ ,  $V$  e  $U$  è<sup>5</sup>

$$P = \frac{1}{3} \frac{U}{V}. \quad (7.176a)$$

Si osservi che l'equazione (7.176a) è analoga all'equazione "meccanica" di stato del gas perfetto  $PV = 2U/3$ . La differenza dei fattori moltiplicativi di  $U$  può essere facilmente compresa trattando i treni d'onda monocromatici della radiazione come "particelle" viaggianti a velocità  $c$  e energia  $cp$  e procedendo ad un'analisi *à la* Clausius, come per il gas perfetto.

Boltzmann considerò la radiazione di corpo nero confinata in un cilindro di volume  $V$ , una cui estremità è un pistone perfettamente riflettente. La pressione di radiazione sul pistone aumenta il volume  $dV$  e al fine per mantenere una temperatura costante, per la prima legge della termodinamica, deve essere fornita una quantità di calore

$$dQ = dU + PdV = d(uV) + \frac{1}{3}udV = Vdu + \frac{4}{3}udV.$$

Dal teorema di Kirchhoff sappiamo che  $u$  è una funzione della sola temperatura  $T$ , per cui

$$dQ = V \frac{du}{dT} dT + \frac{4}{3}udV.$$

All'espansione del cilindro è associato un aumento di entropia

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} dT + \frac{4}{3} \frac{u}{T} dV$$

che, per la seconda legge della termodinamica, deve essere un differenziale esatto. Perciò

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} \quad \text{e} \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{4}{3} \frac{u}{T}$$

<sup>5</sup>Più esplicitamente, l'equazione (7.176) si ricava dalla formula (7.145) sommando il contributo  $P_\theta = 2\bar{u} \cos^2 \theta$  su tutti i valori di  $k$  relativi alla radiazione che colpisce la parete (in cui, cioè,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} > 0$ ). Per una distribuzione isotropa della radiazione, questo corrisponde  $P = 2\bar{u} \langle \cos^2 \theta \rangle$ , dove

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \cos^2 \theta = \frac{1}{6},$$

da cui segue immediatamente la (7.176a) per  $U_\omega = \bar{u}V$  e poi integrando su tutti gli  $\omega$ .

e dall'uguaglianza delle derivate miste

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$$

segue l'equazione

$$\frac{1}{T} V \frac{du}{dT} = \frac{4}{3} \frac{d}{dT} \frac{u}{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dT} = \frac{4u}{T}.$$

Quindi,  $u \propto T^4$ , una relazione che era stata proposta da Stefan nel 1879 sulla base dell'analisi dei dati sperimentali. Ovviamente, l'analisi termodinamica di Boltzmann non fissa il valore numerico della costante di proporzionalità che, a questo stadio, può essere determinata solo sperimentalmente. Arriviamo così all'equazione

$$\frac{U}{V} = \sigma T^4 \quad (7.176b)$$

dove  $\sigma$  è la costante di Stefan-Boltzmann [=  $7.56 \times 10^{-16}$  J/(m<sup>3</sup> K<sup>4</sup>)]. Questa è la *legge di Stefan-Boltzmann*, detta anche "equazione di stato termica" della radiazione. Si osservi che le equazioni di stato (7.176) sono funzioni di  $U$  e  $V$ , ma non del numero di particelle  $N$ . Questo corrisponde al fatto che nella cavità "vuota" non esistono particelle conservate da contare con un parametro  $N$ .

Ricordiamo che tutte le proprietà termodinamiche di un sistema sono fissate dalla relazione fondamentale definisce l'entropia  $S$  come funzione delle variabili estensive. La radiazione elettromagnetica all'interno della cavità è governata da una equazione fondamentale della forma  $S = S(U, V)$  in cui ci sono solo due invece di tre parametri estensivi indipendenti, che è dunque ottenuta dall'equazione generale (cfr. [callen2006thermodynamics]) senza la variabile  $N$ ,

$$S = \frac{1}{T} U + \frac{P}{T} V, \quad (7.177)$$

Riscrivendo le equazioni di stato nella forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= \sigma^{1/4} \frac{V^{1/4}}{U^{1/4}} \\ \frac{P}{T} &= \frac{1}{3} \sigma^{1/4} \frac{U^{3/4}}{V^{3/4}}, \end{aligned}$$

dalla (7.177) otteniamo che la relazione fondamentale della radiazione elettromagnetica è

$$S = \frac{4}{3} \sigma^{1/4} U^{3/4} V^{1/4} \quad (7.178)$$

Si osservi che il terzo postulato della termodinamica è soddisfatto. Infatti, la relazione fondamentale in funzione di temperatura e volume è

$$S = \frac{4}{3} \sigma V T^3$$

e quindi  $S \rightarrow 0$  quando  $T \rightarrow 0$ . Questo fatto è abbastanza sorprendente, tenuto conto che fluidi classici, come il gas perfetto o il fluido di van der Waals non soddisfano questo postulato.

### 7.5.3 Le leggi di Wien, Rayleigh-Jeans e Planck

La pura analisi termodinamica della radiazione può essere spinta oltre per ottenere informazioni sulla distribuzione spettrale  $u_\omega$  dell'energia. Questo passo fu fatto da Wien nel 1893. Wien sostanzialmente seguì il modello di Boltzmann della radiazione contenuta in un cilindro con un pistone, ma tenne conto dello spostamento Doppler della radiazione riflessa dal pistone mobile. Un principio generale della termodinamica è che uno stato di equilibrio termico, quando è fatto evolvere molto lentamente rimane in equilibrio termico. Il principio adiabatico permise a Wien di concludere che per ogni modo normale di frequenza  $\omega$ , l'*invariante adiabatico*<sup>6</sup>  $u_\omega/\omega$  è solamente una funzione dell'altro invariante adiabatico,  $\omega/T$ , cioè  $u_\omega/\omega = f(\omega/T)\omega^2$ , dove il fattore  $\omega^2$  tiene conto della densità degli stati (7.163), vale a dire,

$$u_\omega = \omega^3 f(\omega/T), \quad (7.179)$$

Questa è la legge di Wien, grazie alla quale il problema di Kirchhoff di determinare la *funzione universale*  $u_\omega = u_\omega(T)$  delle due variabili  $\omega$  e  $T$  è ridotto al problema di determinare la funzione universale  $f$  della sola variabile  $\omega/T$ .

È importante sottolineare che la legge di Stefan-Boltzmann (e quindi la formula per l'entropia della radiazione) e la legge di Wien sono una pura conseguenza delle leggi generali della termodinamica applicate alla radiazione elettromagnetica.

Si può ottenere maggiore informazione sulla funzione  $u_\omega$  utilizzando i metodi della meccanica statistica, in particolare il teorema di Boltzmann dell'equipartizione dell'energia. Secondo questo teorema, in equilibrio termico a temperatura  $T$ , l'energia media di ogni termine quadratico dell'energia è pari a  $\frac{1}{2}kT$ , dove  $k$  è la costante di Boltzmann. Ma un modo del campo elettromagnetico nella cavità è un oscillatore armonico. Allora,

$$\bar{\epsilon} = \text{energia media di ciascun oscillatore} = k_B T \quad (7.180)$$

(poiché ciascun oscillatore ha due termini quadratici che contribuiscono all'energia). Dunque,

$$u_\omega d\omega = \bar{\epsilon} \times [\text{numero di oscillatori tra } \omega \text{ e } \omega + d\omega] = \bar{\epsilon} \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}, \quad (7.181)$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la formula (7.163) per il numero di oscillatori tra  $\omega$  e  $\omega + d\omega$ . Allora,

$$u_\omega = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \omega^2, \quad (7.182)$$

che è la *legge di Rayleigh-Jeans* per la distribuzione dell'energia della radiazione di corpo nero in una cavità. Questa distribuzione è in accordo con i dati sperimentali solo a basse frequenze ed è in flagrante contrasto con la legge di Stefan-Boltzmann in quanto da (7.182) segue che  $u = \int u_\omega d\omega = \infty$ , la cosiddetta *catastrofe ultravioletta*.

Questa difficoltà fu superata dall'ipotesi quantistica avanzata nel 1900 da Planck<sup>7</sup>. Se  $\bar{\epsilon}$  nella (7.181) è sostituito dal valore richiesto dalla teoria quantistica,

$$\bar{\epsilon} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \quad (7.183)$$

<sup>6</sup>Per la nozione di invariante adiabatico, si veda [landau1976mechanics].

<sup>7</sup>Sorprendentemente che la catastrofe ultravioletta fosse un'inevitabile conseguenza dei principi della fisica classica fu riconosciuto solo dopo la scoperta di Planck. La legge di Rayleigh-Jeans fu ottenuta qualche anno dopo la scoperta di Planck.

il risultato è la legge di Planck, che rimane finita anche quando  $\omega$  tende all'infinito:

$$u_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (7.184)$$

### Problemi

**Box 7.15** Ricavare la legge di Stefan-Boltzmann dalla legge di Wien e indicare quale condizione  $f$  deve soddisfare affinché la derivazione sia valida.

**Box 7.16** Ricavare dalla legge di Wien la cosiddetta *legge di spostamento di Wien* che stabilisce che i massimi della distribuzione spettrale dell'energia della radiazione di corpo nero sono inversamente proporzionali alla temperatura.

**Box 7.17** Utilizzare la legge di Planck per determinare il valore della costante di Stefan-Boltzmann.

**Box 7.18** Mostrare che la legge di Planck ammette le seguenti approssimazioni

$$\hbar\omega \gg kT : \quad u_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} e^{-\hbar\omega/kT} \quad (\text{approssimazione di Wien}) \quad (7.185)$$

$$\hbar\omega \ll kT : \quad u_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2c^3} kT \quad (\text{approssimazione di Rayleigh-Jeans}) \quad (7.186)$$

### 7.5.4 Coefficienti $A$ e $B$ di Einstein

Le derivazioni della legge di Planck, a partire da Planck prima e di Einstein dopo con la sua teoria dell'effetto foto-elettrico del 1905, richiedono in un modo o nell'altro l'introduzione di elementi estranei alla teoria classica dell'interazione tra materia e radiazione. Queste derivazioni sono ovviamente superate dalla teoria quantistica moderna del campo di radiazione, di cui ci occuperemo nel seguito. C'è però una derivazione della legge di Planck ottenuta da Einstein del 1917 che è basata su principi generali di termodinamica statistica ed è tale che gli sviluppi successivi dal 1917 ad oggi non ne richiedono alcuna modificazione. Questa derivazione richiede un numero minimo di assunzioni di base, che sono le seguenti.

1. Un atomo (o molecola) ha livelli di energia discreti. Se  $E_a$  ed  $E_b$  sono due livelli dell'atomo che assumeremo non degeneri<sup>8</sup>, in conseguenza dell'interazione con la radiazione in una cavità l'atomo può assorbire o emettere energia pari a  $E_b - E_a = \hbar\omega$ .
2. Nella cavità sono presenti un certo numero di atomi (ad esempio un gas ideale di atomi) a temperatura  $T$ . In particolare

$$N_a = \text{numero di atomi nel livello } E_a \quad (7.187a)$$

$$N_b = \text{numero di atomi nel livello } E_b \quad (7.187b)$$

Allora quando il sistema è in equilibrio termico, dalla formula di base della fisica statistica segue che

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{e^{-E_b/kT}}{e^{-E_a/kT}} \quad (7.188a)$$

<sup>8</sup>Per semplicità ignoriamo la possibilità di degenerazione dei livelli che non influisce sul risultato per la densità spettrale di radiazione termica.

e quindi

$$\frac{N_b}{N_a} = e^{-\hbar\omega/kT}. \quad (7.188b)$$

3. Nel caso limite  $\hbar\omega \ll kT$ , vale l'approssimazione di Rayleigh-Jeans

$$u_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT \quad (7.189)$$

Siano adesso  $N_a$  e  $N_b$  il numero di atomi di livelli di energia  $E_a$  ed  $E_b$ , rispettivamente. Assumiamo che il tasso di variazione di  $N_a$  a causa dell'assorbimento di radiazione, con conseguente transizione dell'atomo al livello energetico superiore  $E_b$ , sia proporzionale a  $N_a$  e alla densità spettrale  $u_\omega$ . Dunque,

$$\left(\dot{N}_a\right)_{\text{assorbimento}} = -B_{ab}N_a u_\omega.$$

Einstein propose due tipi di processi di emissione per cui un atomo può saltare dal livello  $E_b$  al livello  $E_a$  con l'emissione di radiazioni di frequenza  $\omega$ . Uno è l'*emissione spontanea*, che può avvenire *in assenza* del campo di radiazione ed è descritto dal tasso costante  $A_{ba} \equiv A$ :

$$\left(\dot{N}_a\right)_{\text{emissione spontanea}} = AN_b.$$

L'altro è l'*emissione stimolata* (o forzata) che si assume procedere ad un tasso proporzionale sia a  $N_b$  sia a  $u_\omega$

$$\left(\dot{N}_a\right)_{\text{emissione stimolata}} = B_{ba}N_b u_\omega.$$

L'emissione stimolata corrisponde in fisica classica ad un oscillatore che può estrarre energia da un'onda elettrica incidente, o trasferirne ad essa, a seconda dell'angolo di fase tra l'oscillazione e il campo elettrico dell'onda.

La condizione per l'equilibrio è

$$\left(\dot{N}_a\right)_{\text{assorbimento}} + \left(\dot{N}_a\right)_{\text{emissione spontanea}} + \left(\dot{N}_a\right)_{\text{emissione stimolata}} = 0$$

ossia,

$$AN_b + B_{ba}N_b u_\omega = B_{ab}N_a u_\omega, \quad (7.190)$$

da cui

$$u_\omega = \frac{A/B_{ba}}{(B_{ab}/B_{ba})(N_a/N_b) - 1}$$

Dalla (7.188b) segue che

$$u_\omega = \frac{A/B_{ba}}{(B_{ab}/B_{ba})e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (7.191)$$

A temperature molto elevate  $u_\omega$  diventa così grande che l'emissione spontanea è molto meno probabile dell'emissione stimolata. Allora dalla (7.190) dobbiamo avere

$$B_{ba} = B_{ab} \equiv B \quad (7.192)$$

e, dalla (7.191),

$$u_\omega = \frac{A/B}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}. \quad (7.193)$$

Per  $kT \gg \hbar\omega$ , si ha

$$u_\omega = \frac{A kT}{B \hbar\omega}$$

In questo regime deve valere la legge di Rayleigh-Jeans (7.188b), dunque

$$\frac{A kT}{B \hbar\omega} = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{B} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \quad (7.194)$$

e l'equazione (7.193) allora diventa la legge di distribuzione di Planck per  $u_\omega$ .

La novità della derivazione di Einstein della legge di Planck è l'introduzione della nozione di *emissione stimolata* e l'aver stabilito la relazione

$$A = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} B \quad (7.195)$$

tra il tasso di emissione spontanea  $A$  e il tasso di emissione stimolata  $B$ . Sorprendentemente, l'analisi di Einstein non richiede alcuna modifica alla luce degli sviluppi della fisica dopo il 1917.

## 8. Ruolo dell'azione in meccanica quantistica\*

### 8.1 Propagatore quantistico

Consideriamo l'equazione di Schrödinger per la funzione d'onda  $\psi = \psi(q, t)$ ,

$$i\hbar \frac{\partial \psi(q, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(q) \right] \psi(q, t) \quad (8.1)$$

e assumiamo che  $V$  non dipenda dal tempo

Gli elementi di matrice di

$$U_{t''-t'} = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t''-t')} \quad (8.2)$$

in rappresentazione posizione sono

$$K(q'', t''; q', t') = \langle q'' | U_{t''-t'} | q' \rangle = \langle q'' | e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t''-t')} | q' \rangle. \quad (8.3)$$

Questa funzione è usualmente detta *propagatore*.

Il propagatore soddisfa le condizioni

$$i\hbar \frac{\partial K}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta'' + V(q'') \right] K \quad (8.4)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} K(q'', t''; q', t') = \delta(q'' - q') \quad (8.5)$$

dove  $t = t'' - t'$  e il laplaciano con il doppio primo indica che la derivazione è fatta rispetto a  $q''$ . È conveniente imporre la condizione  $K(q'', t''; q', t') = 0$  per  $t'' < t'$ .

Studiamo l'asintotica di  $K(q'', t''; q', t')$  a piccoli tempi  $\delta t = t'' - t'$ . Espandendo  $K$  per  $\delta t$  piccolo, si ottiene

$$K(q'', t' + \delta t; q', t') = \langle q'' | q' \rangle - \frac{i\delta t}{\hbar} \left\langle q'' \left| \left( \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{Q}) \right) \right| q' \right\rangle + O(\delta t^2) \quad (8.6)$$

Valutiamo (8.6) inserendo un insieme completo di autostati di posizione e impulso con autovalori  $q$  e  $p$ , rispettivamente. Perciò otteniamo (tralasciando gli ordini superiori in  $\delta t$ )

$$K(q'', t' + \delta t; q', t') = \delta(q'' - q') \left[ 1 - \frac{i\delta t}{\hbar} \bar{V}(q'', q') \right] - \frac{i\delta t}{\hbar} \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p(q'' - q')} \frac{p^2}{2m} \quad (8.7)$$

dove  $\bar{V}(q'', q')$  è una media opportuna del potenziale. Poiché  $\bar{V}(q'', q')$  è moltiplicato per  $\delta(q'' - q')$  è irrilevante quale media si faccia (a meno che il potenziale non dipenda dalla velocità).<sup>1</sup>

Completiamo la valutazione del propagatore all'ordine  $\delta t$  riscrivendo la (8.7) come

$$\begin{aligned} K(q'', t' + \delta t; q', t') &= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p(q'' - q')} \left[ 1 - \frac{i\delta t}{\hbar} \left( \frac{p^2}{2m} + \bar{V}(q'', q') \right) \right] \\ &= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i\delta t}{\hbar} \left[ \frac{p(q'' - q')}{\delta t} - \frac{p^2}{2m} - \bar{V}(q'', q') \right]} \end{aligned} \quad (8.8)$$

Il calcolo dell'integrale gaussiano fornisce

$$K(q'', t' + \delta t; q', t') = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\delta t}} e^{\frac{i}{\hbar} \left[ m \frac{(q'' - q')^2}{2\delta t} - \delta t \bar{V}(q'', q') \right]} \quad (8.9)$$

Riconosciamo nell'esponenziale lo sviluppo a piccoli tempi della funzione principale di Hamilton (esempio 2.7, eq. (2.62)) e quindi possiamo sostituire l'equazione (8.9) con

$$K(q'', t' + \delta t; q', t') = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\delta t}} e^{\frac{i}{\hbar} S(q'', t' + \delta t; q', t')} \quad (8.10)$$

Questo importante ruolo della funzione principale di Hamilton in meccanica quantistica fu scoperto da Dirac nel 1933.

## 8.2 Integrale sui cammini di Dirac-Feynman

Supponiamo adesso di suddividere l'intervallo di tempo  $[t', t'']$  in  $N$  intervalli  $t_n - t_{n-1} = \delta t = t/N$ . Dalla definizione di propagatore si ha

$$K(q'', t''; q', t') = \int dq_{N-1} \cdots \int dq_1 K(q'', t''; q_{N-1}, t_{N-1}) \cdots K(q_1, t_1; q', t')$$

Se adesso sostituiamo in questa formula l'espressione per il propagatore data dalla (8.10), otteniamo

$$\begin{aligned} K(q'', t''; q', t') &= \left( \frac{m}{2\pi\hbar\delta t} \right)^{N/2} \int dq_{N-1} \cdots \int dq_1 e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_N} \\ &= \left( \frac{mN}{2\pi\hbar(t'' - t')} \right)^{N/2} \int dq_{N-1} \cdots \int dq_1 e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_N} \end{aligned} \quad (8.11)$$

(avendo sostituito  $\delta t = t/N = (t'' - t')/N$ ), dove

$$\mathcal{S}_N = S(q'', t''; q_{N-1}, t'' - \delta t) + \dots + S(q_1, t_1; q', t').$$

<sup>1</sup>Notiamo che all'ordine  $O(\delta t^2)$  l'espansione dell'esponenziale è sensibile alla non commutatività di  $\hat{Q}$  e  $\hat{P}$ , mentre all'ordine  $\delta t$  gli operatori  $\hat{Q}$  e  $\hat{P}$  si comportano come se fossero variabili classiche.

Osserviamo che  $\mathcal{S}_N$  non è altro che l'integrale d'azione (2.1) calcolato per un *cammino poligonale*  $q^N = q^N(t)$  nello spazio delle configurazioni definito dalla successione di punti

$$(q, t') = (q_0, t_0), \dots, (q_{N-1}, t_{N-1}), (q_N, t_N) = (q'', t'')$$

con i punti collegati da segmenti retta. Quindi abbiamo

$$\mathcal{S}_N = \mathcal{S}[q^N] \quad (8.12)$$

Se adesso introduciamo l'elemento di volume  $N$ -dimensionale nello spazio dei cammini poligonali

$$\mathcal{D}q^N = \left( \frac{mN}{2\pi\hbar(t'' - t')} \right)^{N/2} dq_{N-1} \dots dq_1$$

possiamo riscrivere la (8.11) come

$$K(q'', t''; q', t') = \int e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}[q^N]} \mathcal{D}q^N \quad (8.13)$$

Questa formula esprime il propagatore come integrale sui cammini poligonali di fasi  $e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}[q^N]}$  espresse in termini dell'integrale d'azione classico. L'idea di rappresentare il propagatore in questo modo è di Dirac e fu successivamente sviluppata da Feynman.

La formula (8.13) è completamente rigorosa dal punto di vista matematico e vale per qualunque  $N$  arbitrariamente grande. In particolare, si ha

$$K(q'', t''; q', t') = \lim_{N \rightarrow \infty} \int e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}[q^N]} \mathcal{D}q^N \quad (8.14)$$

Questa formula è nota come l'*integrale sui cammini di Feynman* per il propagatore.

Di solito, si chiama anche integrale di Feynman l'espressione formale che si ottiene scambiando il limite con l'integrale

$$K(q'', t''; q', t') = \int e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}[q]} \mathcal{D}q \quad (8.15)$$

dove adesso  $q = q(t)$  è un qualunque cammino da  $q'$  a  $q''$  e  $\mathcal{D}q$ , il limite di  $\mathcal{D}q^N$ , dovrebbe essere l'elemento di volume sullo spazio infinito-dimensionale di tutti i cammini. Sfortunatamente, si può dimostrare che questo limite non esiste: *non esiste un elemento di volume sullo spazio dei tutti i cammini che assegna lo stesso peso a ciascun cammino*, come fa  $\mathcal{D}q^N$ . In breve, il lato sinistro della (8.15) non ha alcun significato matematico.

Tuttavia, la situazione non è così negativa come potrebbe sembrare. In verità, con qualche cautela, possiamo manipolare il lato sinistro della (8.15) *come se* fosse un integrale ben definito, la ragione essendo che per  $N$  arbitrariamente grande, ma finito, l'integrale (8.13) è ben definito: il lato sinistro della (8.15) va sempre inteso come una forma abbreviata della (8.13) per  $N$  arbitrariamente grande. La situazione qui è analoga alla delta di Dirac che sotto il segno di integrale può essere manipolata come se fosse una funzione, e questo è giustificato dal fatto che le approssimanti  $\delta_n$  della delta, per  $n$  arbitrariamente grande, sono funzioni.

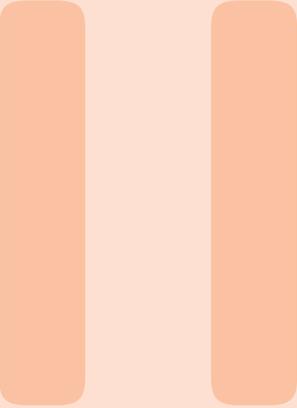
### 8.3 Calcolo di propagatori mediante il metodo di Feynman

/DA SCRIVERE/

**Box 8.1** — Particella libera.

**Box 8.2** — Oscillatore armonico.

**Box 8.3** — Oscillatore armonico forzato.



# Seconda Quantizzazione

<b>9</b>	<b>Sistemi lineari quantistici</b> .....	<b>231</b>
9.1	L'oscillatore armonico quantistico	
9.2	Piccole oscillazioni quantistiche e la nozione di fonone	
9.3	Risposta lineare, formula di Kubo e rappresentazione interazione	
<b>10</b>	<b>Campo di Klein-Gordon quantistico</b> .....	<b>253</b>
10.1	Il campo scalare reale	
10.2	Relazioni di commutazione e propagatore di Feynman	
<b>11</b>	<b>Campo di Maxwell quantistico</b> .....	<b>261</b>
11.1	Il campo elettromagnetico come sistema quantistico	
11.2	Rudimenti di ottica quantistica	
<b>12</b>	<b>Formalismo di seconda quantizzazione</b> .....	<b>277</b>
12.1	Seconda quantizzazione del campo di Schrödinger	
12.2	Intermezzo: teoria cinetica ed entropia di Boltzmann	
12.3	Operatori in seconda quantizzazione	
12.4	Dinamica di bosoni e fermioni	
12.5	Quasi-particelle e buche per un sistema di fermioni	
12.6	Interazione tra fermioni mediata da bosoni	
<b>13</b>	<b>Campo di Dirac e campi quantistici relativistici</b>	<b>313</b>



## 9. Sistemi lineari quantistici

### 9.1 L'oscillatore armonico quantistico

In meccanica quantistica lo stato del sistema è rappresentato dal vettore di stato  $|\Psi\rangle$  o, equivalentemente, dalla sua funzione d'onda  $\Psi(q) = \langle q|\Psi\rangle$ . Gli operatori possono trasformare tali vettori ad altri vettori all'interno dello spazio. L'operatore  $\hat{Q}\Psi(q) = q\Psi(q)$  rappresenta la posizione, nel senso che se il sistema è nello stato  $|\Psi\rangle$ , la distribuzione di probabilità di una misura di posizione è  $\rho(q) = \langle \Psi | \delta(q - \hat{Q}) | \Psi \rangle = |\Psi(q)|^2$ . Analogamente, l'operatore  $\hat{k} = -i\partial/\partial q$  rappresenta l'impulso: la distribuzione di probabilità di una misura di impulso  $p = \hbar k$  è  $\rho(k) = \langle \Psi | \delta(k - \hat{k}) | \Psi \rangle = |\Psi_k|^2$ , dove  $\Psi_k = \langle k | \Psi \rangle$  è la trasformata di Fourier di  $\Psi(q)$ . Gli operatori  $\hat{Q}$  e  $\hat{P}$  soddisfano la relazione di commutazione

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = \hat{Q}\hat{P} - \hat{P}\hat{Q} = i\hbar \quad (9.1)$$

e per ogni stato  $\Psi$  vale la relazione di incertezza di Heisenberg  $\Delta\hat{Q}\Delta\hat{P} \geq \hbar/2$ . L'equazione di evoluzione dello stato (in assenza di processi di misura) è

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi \quad (9.2)$$

che per l'operatore hamiltoniano  $\hat{H}$  corrispondente all'Hamiltoniana classica  $H = p^2/(2m) + V(q)$  si riduce all'usuale equazione di Schrödinger.

#### 9.1.1 Operatori di creazione e distruzione

L'hamiltoniano dell'oscillatore armonico è

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{Q}^2. \quad (9.3)$$

(preferiamo da adesso in poi usare le maiuscole per denotare posizione e impulso di un oscillatore armonico). L'operatore corrispondente alla (7.50) è

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left[ \sqrt{m\omega}\hat{Q} + \frac{i}{\sqrt{m\omega}}\hat{P} \right] = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{Q} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat{P} \equiv a \quad (9.4)$$

(adesso  $\hbar$  è proprio la costante di Planck!). Questo non è un operatore autoaggiunto; il suo aggiunto è

$$\hat{\alpha}^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{Q} - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat{P} \equiv a^* \quad (9.5)$$

ed è quindi differente da  $a$ . Analogamente al caso classico (equazioni (7.48) e (7.49)), la formula di inversione è

$$\hat{Q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^* + a) \quad (9.6)$$

$$\hat{P} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a^* - a) \quad (9.7)$$

Dalle relazioni di commutazione (9.1) per  $\hat{Q}$  e  $\hat{P}$  seguono immediatamente le relazioni di commutazione per  $a$  e  $a^*$ :

$$[a, a^*] = aa^* - a^*a = 1 \quad (9.8)$$

Inoltre, l'analogo quantistico dell'hamiltoniana classica (7.52) è

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}(a^*a + aa^*) = \hbar\omega\left(a^*a + \frac{1}{2}\right) \quad (9.9)$$

che segue immediatamente dall'hamiltoniana classica per simmetrizzazione (poiché  $a^*a \neq aa^*$ ) e che, ovviamente, coincide con l'hamiltoniana (9.4) dell'oscillatore quantistico.

Tutti avranno riconosciuto che  $a$  e  $a^*$  sono, rispettivamente, gli usuali operatori di distruzione e creazione e che, pur seguendo una strada leggermente diversa da quella usuale, siamo arrivati alle formule note per l'oscillatore armonico quantistico, che è utile riassumere.

- L'hamiltoniano ha uno stato  $|0\rangle$  di minima energia  $E_0 = \hbar\omega/2$  (stato fondamentale)

$$\Phi_0(q) \equiv \langle Q|0\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega Q^2}{2\hbar}} \quad (9.10)$$

- Gli autovalori di  $\hat{H}$  sono  $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$  e i corrispondenti autovettori sono ottenuti dallo stato fondamentale mediante ripetuta applicazione di  $a^*$ :

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^*)^n|0\rangle, \quad (9.11)$$

formula che si ottiene mostrando preliminarmente che

$$a^*|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (9.12)$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (9.13)$$

- $\hat{N} = a^*a$  è l'operatore *numero di quanti di energia*  $\hbar\omega$  presenti in uno stato.

### 9.1.2 Rappresentazione di Heisenberg

Adesso passiamo alla rappresentazione di Heisenberg della dinamica dell'oscillatore armonico quantistico. Ricordiamo che nella rappresentazione di Heisenberg lo stato quantistico  $\Psi$  è "congelato" e la dinamica quantistica è rappresentata da un'evoluzione temporale degli operatori. Per collegare l'usuale rappresentazione di Schrödinger con quella di

Heisenberg si fissa un tempo arbitrario  $t_0$  in cui gli operatori delle due rappresentazioni coincidono e si congela lo stato di Heisenberg al valore  $\Psi(t_0)$ . Poiché  $t_0$  è arbitrario, scegliamo una scala dei tempi tale che  $t_0 = 0$ . Allora l'evoluzione temporale di un operatore è definita dalla condizione che le due rappresentazioni forniscano le stesse previsioni statistiche. Per esempio per l'operatore di posizione  $\hat{Q}(t)$  si deve avere  $\langle \Psi(t) | \hat{Q}(0) | \Psi(t) \rangle = \langle U_t \Psi(0) | \hat{Q}(t) | U_t \Psi(0) \rangle = \langle \Psi(0) | U_t^* \hat{Q}(0) U_t | \Psi(0) \rangle$ , da cui,

$$\hat{Q}(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{Q}(0) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \quad \text{e similmente per l'impulso} \quad \hat{P}(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{P}(0) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}.$$

Allora gli operatori  $\hat{Q}(t)$  e  $\hat{P}(t)$  soddisfano le equazioni

$$\frac{d\hat{Q}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{Q}(t)], \quad \frac{d\hat{P}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{P}(t)]$$

note come *equazioni di Heisenberg*.

In particolare, se  $\hat{H}$  è della forma  $\hat{H} = \hat{P}^2/(2m) + V(\hat{Q})$ , queste equazioni diventano

$$\frac{d\hat{Q}}{dt} = \frac{\hat{P}}{m}, \quad \frac{d\hat{P}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \hat{Q}},$$

da cui,

$$m \frac{d^2 \hat{Q}}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial \hat{Q}}$$

*Dunque, le equazioni di Heisenberg hanno la stessa forma delle equazioni di Newton!* Poiché  $\hat{Q}$  e  $\hat{P}$  non commutano questo **non** vuol dire che in generale anche le soluzioni abbiano la stessa forma.

Tuttavia, per l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico (9.3) la corrispondenza è completa. Questo si dimostra immediatamente osservando che l'equazione di Heisenberg per  $a(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} a(0) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}$  è

$$\frac{da}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, a] = i\omega(a^* a a - a a^* a) = -i\omega[a, a^*]a = -i\omega a \quad (9.14)$$

da cui la soluzione

$$a(t) = e^{-i\omega t} a(0). \quad (9.15)$$

che ha esattamente la stessa forma della soluzione classica (7.47); si osservi che  $a(0) = a$ , l'usuale operatore di distruzione in rappresentazione di Schrödinger. Risulta così dimostrato che

$$a(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} a e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} = e^{-i\omega t} a \quad (9.16)$$

Adesso, usando le (9.6) e (9.7), otteniamo l'evoluzione temporale di  $\hat{Q}(t)$  e  $\hat{P}(t)$ :

$$\hat{Q}(t) = \cos(\omega t) \hat{Q}(0) + \frac{\sin(\omega t)}{m\omega} \hat{P}(0) \quad (9.17)$$

$$\hat{P}(t) = -m\omega \sin(\omega t) \hat{Q}(0) + \cos(\omega t) \hat{P}(0), \quad (9.18)$$

dove  $\hat{Q}(0)$  e  $\hat{P}(0)$  sono l'operatore posizione e l'operatore impulso al tempo  $t = 0$  (e quindi coincidenti con gli usuali operatori posizione e impulso in rappresentazione di Schrödinger.)

Vista l'identità formale delle soluzioni quantistiche con le soluzioni classiche, sembrerebbe improbabile che esse contengano informazioni sui livelli di energia e sugli elementi di matrice. Invece è proprio così: *le soluzioni delle equazioni di Heisenberg e le regole di commutazione canonica* permettono di risolvere completamente il problema quantistico senza dover risolvere l'equazione di Schrödinger. La procedura per l'oscillatore armonico è illustrata nel Box sotto.

**Box 9.1 — Calcolo dello spettro dell'oscillatore armonico in rappresentazione di Heisenberg.**

Mostriamo come usare le soluzioni delle equazioni di Heisenberg per calcolare lo spettro dell'hamiltoniano dell'oscillatore armonico.

Supponiamo che  $\hat{H}$  abbia un autostato  $|n\rangle$  con energia  $E_n$  e un altro autostato  $|n'\rangle$  con energia  $E_{n'}$ . Consideriamo gli elementi di matrice di  $a(t)$  e  $a^*(t)$ :

$$\langle n'|a(t)|n\rangle = \langle n'|e^{iHt/\hbar}ae^{-iHt/\hbar}|n\rangle = e^{i(E_{n'}-E_n)t/\hbar}\langle n'|a|n\rangle \quad (9.19)$$

$$\langle n'|a^*(t)|n\rangle = \langle n'|e^{iHt/\hbar}a^*e^{-iHt/\hbar}|n\rangle = e^{i(E_{n'}-E_n)t/\hbar}\langle n'|a^*|n\rangle \quad (9.20)$$

Questi sono gli elementi di matrice del lato sinistro delle equazioni

$$a(t) = e^{-i\omega t}a, \quad a^*(t) = e^{i\omega t}a^*$$

che devono essere uguali agli elementi di matrice del lato destro, cioè,

$$e^{i(E_{n'}-E_n)t/\hbar}\langle n'|a|n\rangle = e^{-i\omega t}\langle n'|a|n\rangle \quad (9.21)$$

$$e^{i(E_{n'}-E_n)t/\hbar}\langle n'|a^*|n\rangle = e^{i\omega t}\langle n'|a^*|n\rangle \quad (9.22)$$

Supponiamo che  $E_{n'} > E_n$ . Allora la prima equazione è soddisfatta solo se

$$\langle n'|a|n\rangle = 0 \quad (9.23)$$

mentre dalla seconda otteniamo

$$E_{n'} - E_n = \hbar\omega \Rightarrow E_{n'} = E_n + \hbar\omega$$

sotto la condizione che  $\langle n'|a^*|n\rangle \neq 0$ . Assumiamo che un tale stato esista. Adesso applichiamo lo stesso argomento all'elemento di matrice  $\langle n''|a^*|n'\rangle$ . Se  $E_{n''} > E_{n'}$ , troveremo di nuovo che

$$E_{n''} = E_{n'} + \hbar\omega$$

a patto che  $\langle n'|a^*|n'\rangle \neq 0$ . Utilizzando questo argomento ripetutamente, troviamo una successione di livelli

$$E_n, E_n + \hbar\omega, E_n + 2\hbar\omega, E_n + 3\hbar\omega + \dots,$$

senza limite superiore a condizione che l'elemento matrice di  $a^*$  tra uno stato e quello successivo non sia nullo. Ritorneremo più avanti sulla domanda di quali elementi di matrice di  $a^*$  sono non nulli. Prima di fare ciò, esploriamo il caso in cui  $E_{n'} < E_n$ . Tornando alle equazioni (9.21) e (9.22), questa volta sono gli elementi di matrice di  $a$  che devono annullarsi, dando

$$\langle n'|a^*|n\rangle = 0 \quad (9.24)$$

e dalla (9.21) segue che

$$E_{n'} - E_n = -\hbar\omega \Rightarrow E_{n'} = E_n - \hbar\omega$$

Così abbiamo trovato uno stato con un'energia inferiore di  $\hbar\omega$ , a patto che  $\langle n'|a|n\rangle \neq 0$ . A prima vista sembra che questo processo possa essere ripetuto indefinitamente. Tuttavia, ciò comporterebbe che a un certo punto gli autovalori di  $\hat{H}$  diventino negativi. Ma questo è impossibile. Si consideri il valore atteso di  $\hat{H}$  in uno stato  $\Psi$ :

$$\langle \Psi, \hat{H}\Psi \rangle = \frac{1}{2m} \langle \Psi, \hat{P}^2\Psi \rangle + \frac{m\omega^2}{2} \langle \Psi, \hat{Q}^2\Psi \rangle = \frac{1}{2m} \langle \hat{P}\Psi, \hat{P}\Psi \rangle + \frac{m\omega^2}{2} \langle \hat{P}\Psi, \hat{Q}\Psi \rangle \quad (9.25)$$

Ogni termine sul lato destro dell'equazione (9.25) è certamente positivo, indipendentemente dal particolare stato  $\Psi$ . La conseguenza è che  $\hat{H}$  non può avere alcun autovalore negativo. Ciò significa che l'argomento che abbiamo utilizzato non può generare una successione infinita di livelli al di sotto di un dato livello, ma è consentita una successione infinita al di sopra di un dato livello. La conseguenza è che ci deve essere uno stato fondamentale di minima energia  $E_0$ , che indichiamo  $|0\rangle$ . È quindi naturale indicare la sequenza dei livelli sopra a  $|0\rangle$  come  $|n\rangle$ , dove

$$E_n = E_0 + n\hbar\omega$$

e  $n$  è un intero positivo. Sia  $\mathcal{F}$  lo spazio di Hilbert generato dagli stati  $|n\rangle$ .

Infine, esaminiamo la questione di quali elementi di matrice di  $a$  e  $a^*$  siano non nulli. Incominciamo con lo stato più basso,  $|0\rangle$ . Dalla discussione sopra, sia  $a$  e  $a^*$ , che agiscono su  $|0\rangle$  devono portare ad uno stato di energia più elevata. Prendiamo gli elementi di matrice tra  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ . Questo ci mette nel caso coperto dall'equazione (9.23), così abbiamo

$$\langle 1|a|0\rangle = 0.$$

Per ottenere un risultato più potente, si considerino gli elementi di matrice tra  $|0\rangle$  e  $|n\rangle$  per  $n > 1$ . È facile vedere che tutti gli elementi di matrice  $\langle n|a|0\rangle$  devono annullarsi (esercizio). Consideriamo adesso il vettore  $a|0\rangle$ . Questo vettore non ha componenti lungo  $|0\rangle$  (esercizio) e, per quanto appena visto non ha componenti lungo  $|n\rangle$ ,  $n \geq 1$ , poiché  $\langle n|a|0\rangle = 0$ . Quindi abbiamo che

$$a|0\rangle = 0 \quad (9.26)$$

Possiamo applicare qualsiasi operatore all'equazione (9.26) e ancora ottenere un risultato nullo, quindi abbiamo anche

$$\hbar\omega a^* a|0\rangle = 0$$

Ma dalla (9.9) abbiamo che

$$\hbar\omega a^* a = \hat{H} - \frac{\hbar\omega}{2}.$$

Quindi

$$\hat{H}|0\rangle - \frac{\hbar\omega}{2}|0\rangle = 0, \quad \text{ossia} \quad E_0|0\rangle - \frac{\hbar\omega}{2}|0\rangle = 0,$$

da cui

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}.$$

Riassumendo, abbiamo trovato tutta la successione dei livelli di energia dell'oscillatore armonico. È anche facile dimostrare che  $a$  e  $a^*$  hanno solo elementi di matrice tra  $|n\rangle$  e  $|n \pm 1\rangle$ , ad eccezione di  $n = 0$ , dove gli unici elementi di matrice sono con  $|1\rangle$ . Con un po' di lavoro in più si ottengono i valori di questi elementi di matrice (esercizio).

**Problema 9.1** Usare i metodi Heisenberg per mostrare che

$$a^*|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (9.27)$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (9.28)$$

e ottenere così dalla (9.27) la nota formula

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^*)^n|0\rangle \quad (9.29)$$

**Problema 9.2** Utilizzare la (9.26) per ottenere la nota espressione dello stato fondamentale come funzione della coordinata  $q$

$$\Phi_0(Q) \equiv \langle Q|0\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega Q^2}{2\hbar}} \quad (9.30)$$

*Aiuto.* In rappresentazione posizione, la (9.26) corrisponde all'equazione differenziale del prim'ordine

$$\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}Q + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{d}{dQ}\right)\Psi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Phi_0}{dQ} = -\frac{m\omega}{\hbar}Q\Phi_0 \quad (9.31)$$

da cui segue immediatamente che

$$\Phi_0(Q) = Ce^{-\frac{m\omega Q^2}{2\hbar}},$$

La costante  $C$  si ottiene imponendo la normalizzazione a 1 di  $|\Phi_0|^2$ .

**Problema 9.3** Calcolare gli scarti quadratici medi di posizione e impulso,

$$\Delta Q = \sqrt{\langle \hat{Q} \rangle^2 - \langle \hat{Q} \rangle^2} \quad (9.32)$$

$$\Delta P = \sqrt{\langle \hat{P} \rangle^2 - \langle \hat{P} \rangle^2} \quad (9.33)$$

per gli stati  $|n\rangle$  e mostrare che

$$\Delta Q \Delta P = \frac{\hbar}{2}(2n+1) \quad (9.34)$$

*Aiuto.* Dalla (9.6)

$$\begin{aligned}\langle \hat{Q}^2 \rangle &\equiv \langle n | \hat{Q}^2 | n \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n | (aa + a^*a^* + a^*a + aa^*) | n \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n | (a^*a + aa^*) | n \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} (2n + 1)\end{aligned}$$

*Nota.* Si osservi che (9.34) è (ovviamente!) in accordo con la relazione di incertezza di Heisenberg

$$\Delta Q \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} \quad (9.35)$$

e che lo stato fondamentale  $|0\rangle$  è uno stato di minima incertezza, cioè uno stato per cui

$$\Delta Q \Delta P = \frac{\hbar}{2} \quad (9.36)$$

### 9.1.3 Operatore di Weyl

L'operatore di Weyl è così definito

$$D_{q,p} = e^{\frac{i}{\hbar}(p\hat{Q} - q\hat{P})}, \quad (9.37)$$

dove  $q$  e  $p$  sono numeri reali. Chiaramente, è un operatore unitario.

L'identità operatoriale (formula di Baker-Hausdorff)

$$e^{iA+iB} = e^{\frac{1}{2}[A,B]} e^{iA} e^{iB} \quad (9.38)$$

per  $[A, B]$  che commuta sia con  $A$  sia con  $B$ , è dimostrata nel box sotto. Poiché  $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$ , applicando questa formula ad  $A = \frac{p}{\hbar}\hat{Q}$  e  $B = -\frac{q}{\hbar}\hat{P}$ , possiamo riscrivere l'operatore di Weyl come

$$D_{q,p} = e^{-\frac{i}{2\hbar}pq} e^{\frac{i}{\hbar}p\hat{Q}} e^{-\frac{i}{\hbar}q\hat{P}} \quad (9.39)$$

Naturalmente, possiamo anche applicare la formula ad  $A = -\frac{q}{\hbar}\hat{P}$  e  $B = \frac{p}{\hbar}\hat{Q}$  e ottenere la formula equivalente

$$D_{q,p} = e^{\frac{i}{2\hbar}pq} e^{-\frac{i}{\hbar}q\hat{P}} e^{\frac{i}{\hbar}p\hat{Q}} \quad (9.40)$$

(Osserviamo che uguagliando le due formule che abbiamo ottenuto per l'operatore di Weyl si ottiene la relazione

$$e^{\frac{i}{\hbar}p\hat{Q}} e^{-\frac{i}{\hbar}q\hat{P}} = e^{\frac{i}{\hbar}pq} e^{-\frac{i}{\hbar}q\hat{P}} e^{\frac{i}{\hbar}p\hat{Q}},$$

che può essere pensata come una forma esponenziata della relazione canonica tra  $\hat{Q}$  e  $\hat{P}$ .)

Analizziamo adesso come si trasforma l'operatore posizione sotto l'azione dell'operatore di Weyl:

$$D_{q,p}\hat{Q}D_{q,p}^{-1} = D_{q,p}\hat{Q}D_{q,p}^* = e^{-\frac{i}{\hbar}q\hat{P}} e^{\frac{i}{\hbar}p\hat{Q}} \hat{Q} e^{-\frac{i}{\hbar}p\hat{Q}} e^{\frac{i}{\hbar}q\hat{P}} = e^{-\frac{i}{\hbar}q\hat{P}} \hat{Q} e^{\frac{i}{\hbar}q\hat{P}} = \hat{Q} - q$$

Si osservi che è stato comodo usare la forma (9.40) dell'operatore di Weyl; l'ultima uguaglianza può essere verificata prendendo  $q$  infinitesimo:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}q\hat{P}}\hat{Q}e^{\frac{i}{\hbar}q\hat{P}} = \left(\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}q\hat{P}\right)\hat{Q}\left(\mathbb{1} + \frac{i}{\hbar}q\hat{P}\right) = \hat{Q} + \frac{i}{\hbar}q[\hat{Q}, \hat{P}] = \hat{Q} - q$$

Procedendo in maniera analoga, si vede che che l'operatore impulso è traslato dall'operatore di Weyl di una quantità  $p$  (adesso risulta utile usare la forma (9.39) dell'operatore di Weyl).

Riassumendo, l'azione dell'operatore di Weyl sugli operatori posizione e impulso è

$$D_{q,p}\hat{Q}D_{q,p}^{-1} = \hat{Q} - q \quad (9.41)$$

$$D_{q,p}\hat{P}D_{q,p}^{-1} = \hat{P} - p \quad (9.42)$$

Possiamo quindi interpretare i numeri  $q$  e  $p$  come le coordinate di un punto nello spazio delle fasi del sistema classico associato e l'operatore di Weyl come un *operatore di traslazione nello spazio delle fasi*.

L'azione dell'operatore di Weyl su una funzione d'onda  $\Psi = \Psi(Q)$  è facilmente ottenuta:

$$D_{q,p}\Psi(Q) = e^{-\frac{i}{2\hbar}pq}e^{\frac{i}{\hbar}p\hat{Q}}e^{-\frac{i}{\hbar}q\hat{P}}\Psi(Q) = e^{-\frac{i}{2\hbar}pq}e^{\frac{i}{\hbar}pQ}\Psi(Q - q) \quad (9.43)$$

Osserviamo infine che parametrizzando  $q$  e  $p$  con il numero complesso  $\alpha$  dato dalla (7.50), che riscriviamo con posizione e impulso minuscoli,

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left[ \sqrt{m\omega}q + \frac{i}{\sqrt{m\omega}}p \right], \quad (9.44)$$

si ha

$$D_{q,p} = e^{\alpha a^* - \bar{\alpha} a} \equiv D_\alpha \quad (9.45)$$

dove  $a$  e  $a^*$  sono gli operatori di creazione e distruzione. La dimostrazione di questo è lasciata per esercizio. Alla luce della (9.45), nel seguito faremo uso delle notazioni  $D_\alpha$  e  $D_{q,p}$  interscambiabilmente.

**Box 9.2 — Formula di Baker-Hausdorff.** Consideriamo la funzione  $f(x) = e^{xA}Be^{-xA}$  ed espandiamola in serie di Taylor intorno all'origine

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \dots \quad (9.46)$$

Si ha che  $f(0) = B$ , mentre  $f'(x) = Af(x) - f(x)A = [A, f(x)]$ , da cui  $f'(0) = [A, B]$ , e ancora  $f''(x) = [A, f'(x)] = [A, [A, f(x)]]$ , da cui  $f''(0) = [A, [A, B]]$ . Sostituendo nella (9.46) si ottiene

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \dots, \quad (9.47)$$

Sia adesso  $g(x) = e^{xA}e^{xB}$ ; allora  $g'(x) = Ag(x) + e^{xA}Be^{xB} = (A + e^{xA}Be^{-xA})g(x) = (A + f(x))g(x)$ , dove  $f(x)$  è la stessa funzione utilizzata per dimostrare la (9.47). Giungiamo quindi alla seguente equazione differenziale per  $g$ :

$$g'(x) = (A + B + [A, B]x)g(x) \quad (9.48)$$

che può essere immediatamente integrata se l'operatore  $[A, B]$  commuta sia con  $A$  sia con  $B$ :

$$g(x) = e^{\{(A+B)x + \frac{1}{2}[A, B]x^2\}} = e^{xA} e^{xB} \quad (9.49)$$

da cui segue la (9.38) per  $x = i$ .

#### 9.1.4 Stati coerenti

Finora non abbiamo fatto alcun riferimento all'oscillatore (il riferimento agli operatori di creazione e distruzione non conta essendo la loro definizione puramente cinematica). Adesso restringiamo la nostra attenzione all'oscillatore armonico quantistico e definiamo un'importante famiglia di stati, gli *stati coerenti*.

Uno *stato coerente*  $|q, p\rangle \equiv |\alpha\rangle$  è definito mediante l'operatore di Weyl come

$$|q, p\rangle = D_{q,p}|0\rangle \equiv |\alpha\rangle = D_\alpha|0\rangle \quad (9.50)$$

dove  $|0\rangle$  è lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico,  $q$  e  $p$  è una coppia qualunque di numeri reali e  $\alpha$  è il corrispondente numero complesso (9.44). In altre parole, uno stato coerente è definito come una traslazione nello spazio delle fasi dello stato fondamentale dell'oscillatore. Poiché l'operatore  $D$  è unitario, è chiaro che  $\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle 0|0\rangle = 1$ .

#### Funzione d'onda di uno stato coerente e distribuzioni di probabilità

La funzione d'onda di uno stato coerente segue immediatamente dalla (9.43) e dalla formula (9.30) per la funzione d'onda dello stato fondamentale  $\Phi_0$  dell'oscillatore armonico:

$$\Phi_\alpha(Q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{\frac{i}{\hbar}pQ} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(Q-q)^2} \quad (9.51)$$

dove abbiamo trascurato il fattore di fase costante. La distribuzione di probabilità della posizione è dunque

$$|\Phi_\alpha(Q)|^2 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}(Q-q)^2}. \quad (9.52)$$

Quella dell'impulso è il modulo quadro della trasformata di Fourier di  $\Phi_\alpha(Q)$ , il cui calcolo è lasciato per esercizio. Il risultato è  $|\hat{\Psi}_\alpha(P)|^2 = |\hat{\Psi}_0(P-p)|^2$ . Dunque, le distribuzioni di probabilità di posizione ed impulso di uno stato coerente  $|q, p\rangle$  sono quelle dello stato fondamentale, traslate dall'origine dello spazio delle fasi al punto  $(q, p)$ . È evidente che uno stato coerente è, come lo stato fondamentale, uno stato di minima incertezza, cioè uno stato per cui  $\Delta Q \Delta P = \frac{\hbar}{2}$ .

#### Evoluzione temporale degli stati coerenti

Il valor medio dell'operatore posizione in uno stato coerente è

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\hat{Q}|\alpha\rangle &= \langle 0|D_\alpha^* \hat{Q} D_\alpha|0\rangle = \langle 0|D_\alpha^{-1} \hat{Q} D_\alpha|0\rangle \\ &= \langle 0|D_{-\alpha} \hat{Q} D_{-\alpha}^{-1}|0\rangle = \langle 0|(\hat{Q} + q)|0\rangle = q \end{aligned} \quad (9.53)$$

Analogamente per l'impulso,

$$\langle\alpha|\hat{P}|\alpha\rangle = p. \quad (9.54)$$

In rappresentazione di Heisenberg, questi valori medi evolvono secondo le soluzioni  $q(t), p(t)$  dell'oscillatore classico corrispondente. Dunque l'evoluzione temporale di uno stato coerente

è ancora uno stato coerente ed è completamente parametrizzata dalla soluzione classica. In particolare, l'evoluzione temporale della funzione d'onda (9.51) è

$$\Phi_\alpha(Q, t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{\frac{i}{\hbar}p(t)Q} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}[Q-q(t)]^2} \quad (9.55)$$

dove  $q(t), p(t)$  è una soluzione dell'oscillatore classico corrispondente.

### Stati coerenti come autovettori dell'operatore di distruzione

Facciamo agire  $D_\alpha$  su  $a|0\rangle = 0$ ,

$$0 = D_\alpha a|0\rangle = D_\alpha a D_\alpha^{-1} D_\alpha |0\rangle = (a - \alpha)|\alpha\rangle \quad (9.56)$$

da cui,

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (9.57)$$

Dal momento che  $a$  non è Hermitiano, l'autovalore  $\alpha$  non è necessariamente reale. L'equazione duale è  $\langle\alpha|a^* = \alpha^*\langle\alpha|$ . Ne segue che una qualsiasi funzione degli operatori di creazione e di distruzione che sia ordinata con gli operatori di creazione a sinistra e gli operatori di distruzione a destra, cioè del tipo  $f(a^*)g(a)$ , può essere banalmente calcolata in uno stato coerente

$$\langle\alpha|f(a^*)g(a)|\alpha\rangle = f(\alpha^*)g(\alpha). \quad (9.58)$$

**Box 9.3 — Modo alternativo per ottenere la funzione d'onda di uno stato coerente.** In maniera del tutto analoga a come l'equazione (9.26) che caratterizza lo stato fondamentale diventa l'equazione differenziale (9.31), l'equazione (9.57) diventa un'equazione differenziale per la funzione d'onda  $\Phi_\alpha = \langle Q|\alpha\rangle$ ,

$$\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}Q + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{d}{dQ}\right)\Phi_\alpha = \alpha\Phi_\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Phi_\alpha}{dQ} = \left(\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\alpha - \frac{m\omega}{\hbar}Q\right)\Phi_\alpha,$$

da cui segue immediatamente che

$$\Phi_\alpha(Q) = C e^{\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\alpha Q} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}Q^2},$$

La costante  $C$  si ottiene imponendo la normalizzazione a 1 nella norma  $L^2$ . Si lascia come esercizio la dimostrazione che la funzione d'onda così ottenuta coincide con la (9.51) (a meno di una fase irrilevante).

### Stati coerenti nella rappresentazione $n$

Uno stato coerente  $|\alpha\rangle$  può essere espanso in termini degli autovettori numero  $|n\rangle$ . Troviamo questo sviluppo utilizzando la formula di Baker-Hausdorff (9.38), da cui segue che

$$D_\alpha \equiv e^{\alpha a^* - \alpha^* a} = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) e^{\alpha a^*} e^{-\alpha^* a} \quad (9.59)$$

Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= D_\alpha |0\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) e^{\alpha a^*} e^{-\alpha^* a} |0\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) e^{\alpha a^*} |0\rangle, \quad (\text{usando } a|0\rangle = 0), \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (a^*)^n |0\rangle \end{aligned} \quad (9.60)$$

e, ricordando che  $|n\rangle = (n!)^{-1/2}(a^*)^n|0\rangle$ , otteniamo l'espansione desiderata

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle \quad (9.61)$$

#### Statistica dei quanti d'energia in uno stato coerente

La distribuzione dell'operatore  $\hat{N}$  (= numero di quanti di energia  $\hbar\omega$ ) in uno stato coerente  $|\alpha\rangle$  può essere determinata direttamente dall'espansione (9.61), dalla quale otteniamo

$$\text{Prob}(n|\alpha) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!} \quad (9.62)$$

La probabilità di trovare un numero totale  $n$  di quanti è dunque governata dalla *distribuzione di Poisson*.

**Box 9.4 — Media e varianza del numero di quanti di energia in uno stato coerente.** Le medie  $\langle \hat{N} \rangle$  e  $\langle \hat{N}^2 \rangle$  possono essere ottenute dalle note proprietà della distribuzione di Poisson. Calcoliamo direttamente questi estimatori statistici usando il formalismo quantistico. Il numero medio di quanti in uno stato coerente  $|\alpha\rangle$  è

$$\langle \hat{N} \rangle = \langle \alpha | a^* a | \alpha \rangle = \bar{\alpha} \alpha = |\alpha|^2 \quad (9.63)$$

La media di  $\hat{N}^2$  è

$$\langle \hat{N}^2 \rangle = \langle \alpha | a^* a a^* a | \alpha \rangle \quad (9.64)$$

$$= \bar{\alpha} \langle \alpha | a a^* | \alpha \rangle \alpha |\alpha|^2 \langle \alpha | (a^* a + 1) | \alpha \rangle \quad (9.65)$$

$$= |\alpha|^2 (|\alpha|^2 + 1) \quad (9.66)$$

Quindi la varianza nel numero di quanti d'energia nello stato  $|\alpha\rangle$  è

$$\langle (\hat{N} - \langle \hat{N} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2 = |\alpha|^2 \quad (9.67)$$

La fluttuazioni relative del numero di quanti di energia è

$$\frac{\langle (\hat{N} - \langle \hat{N} \rangle)^2 \rangle^{1/2}}{\langle \hat{N} \rangle} = \frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{\langle \hat{N} \rangle^{1/2}} \quad (9.68)$$

Quindi per stati coerenti  $|\alpha\rangle$  con  $\langle \hat{N} \rangle = |\alpha| \gg 1$  le fluttuazioni quantistiche scompaiono e lo stato si comporta classicamente.

#### Gli stati coerenti come insieme completo

L'insieme di vettori  $\{|\alpha\rangle\}$  può essere utilizzato come base, ma le sue proprietà sono sensibilmente differenti da quelle dei normali insiemi ortonormali. Sebbene anche per i vettori di stato coerente sia valida la solita normalizzazione,  $\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$ , essi *non sono ortogonali*. Utilizzando la (9.61) deduciamo che

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \alpha' \rangle &= \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\alpha'|^2)\right] \sum_n \sum_m \langle n | m \rangle \frac{(\alpha^*)^n (\alpha')^m}{(n!m!)^{1/2}} = \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\alpha'|^2) + \alpha^* \alpha'\right] \end{aligned} \quad (9.69)$$

Il valore assoluto del prodotto scalare è

$$|\langle \alpha | \alpha' \rangle| = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha - \alpha'|^2\right) \quad (9.70)$$

da cui vediamo che, sebbene due stati coerenti non siano ortogonali, la sovrapposizione fra i due è molto piccola se si trovano abbastanza distanti nel piano complesso  $\alpha$ .

**Box 9.5 — Relazione di completezza per gli stati coerenti.** Gli stati coerenti soddisfano una *relazione di completezza*,

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha = I \quad (9.71)$$

dove  $I$  è l'operatore identità. L'integrazione è su tutta l'area del piano complesso  $\alpha$ . Se  $\alpha = x + iy$ , allora  $d^2\alpha = dx dy = r d\theta dr$ . Per dimostrare la (9.71), utilizziamo nuovamente l'espansione (9.61):

$$\begin{aligned} \int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha &= \int \exp(-|\alpha|^2) \sum_n \sum_m |n\rangle\langle m| \frac{\alpha^n (\alpha^*)^m}{(n!m!)^{1/2}} d^2\alpha = \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp(-r^2) \sum_n \sum_m |n\rangle\langle m| \frac{r^{n+m}}{(n!m!)^{1/2}} e^{i(n-m)\theta} r d\theta dr = \\ &= 2\pi \sum_n |n\rangle\langle n| \int_0^\infty \exp(-r^2) \frac{r^{2n+1}}{n!} dr = \\ &= \pi \sum_n |n\rangle\langle n| = \pi I \end{aligned} \quad (9.72)$$

che prova la relazione di completezza. Per mezzo di questa relazione, possiamo esprimere un vettore arbitrario  $|\psi\rangle$  come una combinazione lineare continua di stati coerenti:

$$|\psi\rangle = I|\psi\rangle = \pi^{-1} \int |\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle d^2\alpha \quad (9.73)$$

## 9.2 Piccole oscillazioni quantistiche e la nozione di fonone

### 9.2.1 Due modi normali

Analizziamo l'analogo quantistico dei due oscillatori accoppiati linearmente del Box 7.1. Cerchiamo vettori di stato  $\Psi = \Psi(t)$  che soddisfano l'equazione di Schrödinger (9.2) con hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}_2^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{q}_1 - \hat{q}_2)^2$$

Questo hamiltoniano in rappresentazione posizione  $q = (q_1, q_2)$  non dà luogo ad un'equazione di Schrödinger con variabili separabili a causa del termine  $(\hat{q}_1 - \hat{q}_2)^2$ . Tuttavia nelle coordinate normali  $Q = (Q_1, Q_2)$ ,

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{P}_1^2 + \omega_1^2\hat{Q}_1^2) + \frac{1}{2}(\hat{P}_2^2 + \omega_2^2\hat{Q}_2^2)$$

dà luogo ad un'equazione di Schrödinger con variabili separabili; qui  $\omega_1 = \omega$  e  $\omega_2 = \sqrt{3}\omega$  sono le frequenze di oscillazione dei modi normali del sistema.

Poiché l'equazione d'onda si separa nelle coordinate normali, le soluzioni dell'equazione di Schrödinger per questo sistema sono il prodotto delle soluzioni dell'oscillatore armonico unidimensionale e combinazioni lineari di questi prodotti. Per esempio, lo stato fondamentale del sistema è il prodotto degli stati fondamentali per  $Q_1$  e per  $Q_2$ ,

$$\Phi_0(Q_1, Q_2) = \left(\frac{\omega_1}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{\omega_1 Q_1^2}{2\hbar}} \left(\frac{\omega_2}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{\omega_2 Q_2^2}{2\hbar}} = \langle Q|0\rangle$$

dove  $|0\rangle \equiv |0,0\rangle$  rappresenta lo stato fondamentale del sistema ed è della forma  $|n_1, n_2\rangle$ . dove  $n_1$  e  $n_2$  indicano gli autostati dell'energia degli oscillatori normali  $Q_1$  e  $Q_2$ , rispettivamente. Quindi  $n_1 = 0$  e  $n_2 = 0$  significa che il sistema è nello stato fondamentale dei due oscillatori normali  $Q_1$  e  $Q_2$ .

Per ciascun modo  $M = 1, 2$  risultano definiti operatori di creazione e distruzione

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left[ \sqrt{m\omega} \hat{Q}_1 + \frac{i}{\sqrt{m\omega}} \hat{P}_1 \right] \\ a_1^* = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left[ \sqrt{m\omega} \hat{Q}_1 - \frac{i}{\sqrt{m\omega}} \hat{P}_1 \right] \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left[ \sqrt{m\omega} \hat{Q}_2 + \frac{i}{\sqrt{m\omega}} \hat{P}_2 \right] \\ a_2^* = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left[ \sqrt{m\omega} \hat{Q}_2 - \frac{i}{\sqrt{m\omega}} \hat{P}_2 \right] \end{cases} \quad (9.74)$$

Si osservi che operatori associati a modi diversi commutano tra loro e quindi valgono le relazioni di commutazione

$$[a_M, a_{M'}^*] = \delta_{MM'} \quad [a_M, a_{M'}] = 0 \quad (9.75)$$

per  $M, M' = 1, 2$ . Gli operatori di creazione e distruzione operano nel modo familiare in maniera indipendente:

$$\begin{cases} a_1^* |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_1 + 1} |n_1 + 1, n_2\rangle \\ a_1^* |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_1} |n_1 - 1, n_2\rangle \end{cases} \quad \begin{cases} a_2^* |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_2 + 1} |n_1, n_2 + 1\rangle \\ a_2^* |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_2} |n_1, n_2 - 1\rangle \end{cases} \quad (9.76)$$

Ne segue che agendo con gli operatori di creazione sullo stato fondamentale si ottengono tutti gli stati eccitati stazionari del sistema secondo la ovvia estensione della nota formula:

$$|n_1, n_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!}} \frac{1}{\sqrt{n_2!}} (a_1^*)^{n_1} (a_2^*)^{n_2} |0\rangle \quad (9.77)$$

Dunque, ciascun operatore di creazione  $a_M^*$  agendo su un qualunque stato aggiunge un'eccitazione di energia  $\hbar\omega_M$ . Queste eccitazioni del sistema con energia  $\hbar\omega_M$  sono interpretate come *fononi*:  $|n_1, n_2\rangle$  è lo stato con  $n_1$  fononi nel modo 1 e  $n_2$  fononi nel modo 2. D'ora in poi ci riferiremo allo stato fondamentale anche come *stato di vuoto*, cioè come lo stato privo di fononi.

I vettori  $|n_1, n_2\rangle$  sono una base ortonormale nello spazio degli stati del sistema  $\mathcal{F} = L^2(\mathbb{R}^2)$  (esercizio: dimostrare questo) e forniscono la cosiddetta *rappresentazione numero d'occupazione* degli stati: il modulo quadrato dell'ampiezza  $\Psi_{n_1, n_2} = \langle n_1, n_2 | \Psi \rangle$  fornisce la probabilità di trovare  $n_1$  fononi nel modo normale 1 e  $n_2$  fononi nel modo normale 2 quando il sistema è nel generico stato  $\Psi \in \mathcal{F}$ .

### Stati a singolo fonone

I vettori di stato della forma  $a_M^* |0\rangle$ , cioè gli stati  $|1, 0\rangle$  e  $|0, 1\rangle$  descrivono *stati a singolo fonone*. Le loro funzioni d'onda sono

$$\Phi_{10}(Q_1, Q_2) = \Phi_1^{(1)}(Q_1) \Phi_0^{(2)}(Q_2), \quad \Phi_{01}(Q_1, Q_2) = \Phi_0^{(1)}(Q_1) \Phi_1^{(2)}(Q_2) \quad (9.78)$$

dove  $\Phi_0^{(1)}$  e  $\Phi_0^{(2)}$  sono gli stati fondamentali dei due oscillatori (l'indice in alto indica l'oscillatore) e  $\Phi_1^{(1)}$  e  $\Phi_1^{(2)}$  sono i loro primi stati eccitati. Questi stati sono in corrispondenza con i modi normali classici del sistema — sono stati a *modo definito*. Tuttavia, nel caso quantistico sono possibili tutte le sovrapposizioni lineari di questi stati. Il vettore

$$|\Psi\rangle = c_1 |1, 0\rangle + c_2 |0, 1\rangle = c_1 a_1^* |0\rangle + c_2 a_2^* |0\rangle.$$

descrive il generico stato di singolo fonone: quando il sistema si trova in uno stato di questo tipo la frequenza del modo non è definita, ma ha una distribuzione di probabilità:  $|c_1|^2$  è la probabilità che il sistema si trovi nel modo  $M = 1$  e  $|c_2|^2$  quella di trovarsi nel modo  $M = 2$ .

**Stati a 2 fononi**

I vettori di stato

$$|2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^*)^2|0\rangle, \quad |0,2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_2^*)^2|0\rangle, \quad |1,1\rangle = a_1^*a_2^*|0\rangle \quad (9.79)$$

descrivono *stati a 2 fononi*. Questi stati possono essere infatti riscritti in termini degli stati di singolo fonone. Per i primi due è immediato,

$$|2,0\rangle = |1,0\rangle|1,0\rangle, \quad |0,2\rangle = |0,1\rangle|0,1\rangle,$$

dove il prodotto tra vettori va inteso nel senso del prodotto tensore:  $|1,0\rangle|1,0\rangle$  è la notazione abbreviata usata dai fisici per l'espressione  $|1,0\rangle \otimes |1,0\rangle$ . Per quel che riguarda lo stato  $|1,1\rangle$ , si osservi che dalle relazioni di commutazione (9.75) segue che  $a_1^*a_2^*|0\rangle = a_2^*a_1^*|0\rangle$ . Quindi  $|1,1\rangle$  è necessariamente la parte simmetrica del prodotto tensore  $|1,0\rangle|0,1\rangle$ , vale a dire,

$$|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle|0,1\rangle + |0,1\rangle|1,0\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle \otimes |0,1\rangle + |0,1\rangle \otimes |1,0\rangle)$$

Da un punto di vista fisico, questo significa che i fononi sono *bosoni*: lo stato di 2 fononi è simmetrico per lo scambio dei due fononi. Lo spazio degli stati di due fononi ha dunque dimensione 3, essendo uno generico stato  $\Psi$  una combinazione lineare dei tre vettori di base (9.79).

**Stati a  $p$  fononi**

Con abuso di notazione, denotiamo con  $u_1$  e  $u_2$  i due vettori di singolo fonone  $|1,0\rangle$  e  $|0,1\rangle$ , rispettivamente. L'abuso sta nel fatto che questa è la notazione che abbiamo usato per le funzioni modali classiche, ma, come abbiamo sottolineato, c'è una corrispondenza biunivoca tra le funzioni modali e i due vettori di singolo fonone, anche se le loro rappresentazioni sono profondamente differenti: sul versante classico abbiamo due vettori che rappresentano le funzioni modali classico, mentre sul versante quantistico abbiamo le funzione d'onda (9.78).

Sia come sia, denotiamo con  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$  lo spazio di Hilbert di singolo fonone. Naturalmente, per il caso in esame,  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ , ma abbiamo in mente la generalizzazione a spazi di singolo fonone ben più grandi e quindi un po' di generalità non guasta. Abbiamo visto che lo spazio degli stati di 2 fononi è generato dalla base

$$u_1 \otimes u_1, \quad u_2 \otimes u_2, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}[u_1 \otimes u_2 + u_2 \otimes u_1]$$

Quindi questo spazio, chiamiamolo  $\mathcal{H}_2$ , è lo spazio dei tensori simmetrici di rango 2, vale a dire  $\mathcal{H}_2 = \mathcal{S}_n(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ , cioè il sottospazio simmetrico del prodotto tensore di  $\mathcal{H}$  con se stesso.

Se adesso consideriamo gli stati a 3 fononi, agendo sul vuoto secondo la formula (9.77), otteniamo gli stati

$$|3,0\rangle, \quad |2,1\rangle, \quad |1,2\rangle, \quad |0,3\rangle.$$

Lo spazio che essi generano è  $\mathcal{H}_3 = \mathcal{S}_n(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ , cioè il sottospazio simmetrico del prodotto tensore di  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ , che ha dimensione 4.

**Rappresentazione di Fock**

Similmente, lo spazio a  $p$  fononi è

$$\mathcal{H}_p = \underbrace{S_n(\mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \cdots \otimes \mathcal{H})}_{p \text{ volte}} \quad (9.80)$$

È importante notare che *stati a numero differente di fononi sono ortogonali tra loro*. Si consideri infatti l'operatore numero totale di particelle  $\hat{N} = \sum_M a_M^* a_M$ ; stati a numero differente di fononi appartengono ad autovalori differenti di questo operatore, che è chiaramente autoaggiunto, e quindi sono ortogonali tra loro. Questo vuol dire che lo spazio degli stati del sistema  $\mathcal{F} = L^2(\mathbb{R}^2)$  si decompone nella somma ortogonale

$$\mathcal{F} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{H}_p \quad (9.81)$$

dove  $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}$  è lo spazio unidimensionale generato dallo stato di vuoto. Una decomposizione dello spazio degli stati di questo tipo è chiamata *rappresentazione di Fock*.

**Stati coerenti**

Ciascun modo quantistico può trovarsi in uno stato coerente: abbiamo così stati  $|\alpha_1, 0\rangle$  o  $|0, \alpha_2\rangle$  o  $|\alpha_1, \alpha_2\rangle$ .

**9.2.2 Sistema con un numero finito di modi normali**

Quanto visto finora si generalizza facilmente ad un sistema con  $N$  modi normali, come la catena armonica con  $N$  particelle. Quando la catena è rappresentata in coordinate normali, il suo hamiltoniano è della forma (7.41) e quindi in coordinate normali è

$$\hat{H}_N = \frac{1}{2} \sum_{M=1}^N [\hat{P}_M^2 + \omega_M^2 \hat{Q}_M^2] = \sum_{M=1}^N \frac{\hbar\omega_M}{2} (a_M^* a_M + a_M a_M^*) = \sum_{M=1}^N \hbar\omega_M \left( a_M^* a_M + \frac{1}{2} \right) \quad (9.82)$$

Naturalmente l'analisi in fononi del sistema prescinde dal sistema di partenza, quello che conta è che l'hamiltoniano nelle coordinate normali abbia la forma (9.82).

Allora, il vettore

$$|n_1, n_2, \dots, n_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!}} \frac{1}{\sqrt{n_2!}} \cdots \frac{1}{\sqrt{n_N!}} (a_1^*)^{n_1} (a_2^*)^{n_2} \cdots (a_N^*)^{n_N} |0\rangle \quad (9.83)$$

descrive uno stato con  $n_1$  fononi nel modo 1,  $n_2$  fononi nel modo 2,  $\dots$ ,  $n_N$  fononi nel modo  $N$ . Gli operatori di creazione e distruzione soddisfano le relazioni di commutazione (9.75) e  $|0\rangle \equiv |0, 0, \dots, 0\rangle$  è lo stato di vuoto di fononi. Valgono le rappresentazioni (9.80) dello spazio a  $p$  fotoni e la decomposizione di Fock (12.22) dello spazio degli stati, ma adesso lo spazio di singolo fonone ha dimensione  $N$  perché ci sono  $N$  modi normali. La dimensione  $D$  dello spazio a  $p$  fononi la si ricava con una formula di calcolo combinatorio: coincide con il numero di modi distinti con cui si possono riempire  $N$  scatole con  $p$  palline (le scatole sono i modi normali e le palline sono i fononi). Questo problema è stato risolto nel Box 4.4. La soluzione è

$$D = \binom{N+p-1}{p} = \frac{(N+p-1)!}{(N-1)p!} \quad (9.84)$$

### 9.2.3 Sistema con un numero infinito di modi normali

Se adesso passiamo al limite  $N \rightarrow \infty$  otteniamo un sistema con un numero infinito di modi. Questo limite presenta serie difficoltà sia dal punto di vista fisico sia dal punto di vista matematico. Adesso l'analogo dei vettori (9.83) sono le successione infinite  $|n_1, n_2, \dots\rangle$  e occorre garantire che siano a quadrato integrabile, stessa richiesta per le ampiezze. Il modo migliore per ottenere questo è *definire* lo spazio degli stati in termini della rappresentazione di Fock (12.22). Si osservi che in questo caso lo spazio di  $p$  fononi, eccetto  $p = 0$  ha dimensione infinita. Inoltre, l'hamiltoniano (9.82) chiaramente diverge nel limite  $N \rightarrow \infty$ .

Tuttavia, nelle applicazioni alla fisica della materia (la corda vibrante, un cristallo) questo problema non sussiste: il numero di modi non è mai infinito in quanto il limite continuo è solo una utile approssimazione di un sistema discreto. Per esempio, la corda elastica è una approssimazione di un sistema di particelle a distanza  $a$  per cui modi normali con frequenze maggiori della frequenza di taglio  $\omega_T = c/a$  sono prive di significato fisico. Più in generale, la frequenza Debye di un cristallo fornisce una stima della frequenza di vibrazione massima per gli atomi che costituiscono il cristallo, cioè della frequenza di taglio  $\omega_T$ . Analogo discorso vale per il campo elettromagnetico in una cavità metallica, come discusso nella sezione 7.3.3.

Se si insiste che il sistema ha un numero infinito di gradi di libertà, come si richiede nella fisica delle alte energie per avere una formulazione Lorentz-invariante (il taglio in frequenza dipenderebbe dal sistema di riferimento), occorre regolarizzare la somma affinché si abbia un hamiltoniano ben definito. Un modo per regolarizzare la somma è in termini di *prodotto normale*. Il prodotto normale  $:ABC\dots:$  di un gruppo di operatori di creazione e di distruzione è un prodotto di questi operatori riordinati in modo che tutti gli operatori di creazione siano a sinistra di tutti gli operatori di distruzione. Perciò, per esempio, abbiamo

$$:aa^* := a^*a \quad \text{e} \quad :aa^*aa^*a^* := (a^*)^3a^2$$

In particolare, prendendo il prodotto normale nella (9.82), si ottiene

$$:\hat{H}_N := \sum_{M=1}^N \frac{\hbar\omega_M}{2} : (a_M^*a_M + a_M a_M^*) := \sum_{M=1}^N \hbar\omega_M a_M^* a_M \quad (9.85)$$

Che è semplicemente un modo un po' sofisticato di dire che si sottrae l'energia di vuoto. Allora l'hamiltoniano regolarizzato per il sistema a infiniti gradi di libertà è

$$\hat{H} = \lim_{N \rightarrow \infty} :\hat{H}_N := \sum_{M=1}^{\infty} \hbar\omega_M a_M^* a_M \quad (9.86)$$

### 9.3 Risposta lineare, formula di Kubo e rappresentazione interazione

Supponiamo di avere un sistema governato da un hamiltoniano  $H_0$  che ad un certo tempo viene accoppiato ad un campo esterno, cosicché l'hamiltoniano diventa  $H = H_0 - g(t)B$ , dove  $B$  è un operatore e  $g = g(t)$  è una funzione del tempo. Siamo interessati a come risponde nel corso del tempo un altro operatore  $A$ , al primo ordine in  $g$ , cioè quando la perturbazione esterna è così piccola che termini di ordine superiore a  $g$  sono trascurabili. Il problema si risolve con i metodi della teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo, che richiamiamo sinteticamente.

È data un hamiltoniano  $H = H_0 + V$ , dove  $V$  è una funzione del tempo. Siano

$$U = U(t) = e^{-iHt/\hbar}, \quad U_0 = U_0(t) = e^{-iH_0t/\hbar} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{i}{\hbar}H, \quad \frac{dU_0}{dt} = -\frac{i}{\hbar}H_0$$

Si definisca  $U_{\text{int}} = U_0^* U$ . Allora

$$\begin{aligned} \frac{dU_{\text{int}}}{dt} &= \frac{dU_0^*}{dt} U + U_0^* \frac{dU}{dt} = \frac{i}{\hbar} H_0 U_0^* U + U_0^* \left( -\frac{i}{\hbar} H \right) U \\ &= \frac{i}{\hbar} U_0^* (H - H) U = -\frac{i}{\hbar} U_0^* V U = -\frac{i}{\hbar} U_0^* V U U_0^* U \\ &= -\frac{i}{\hbar} U_0^* V U_0 U_{\text{int}} \end{aligned}$$

Quindi, se si definisce

$$V_{\text{int}} = U_0^* V U_0, \quad (9.87)$$

si vede che  $U_{\text{int}}$  soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{dU_{\text{int}}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} V_{\text{int}} U_{\text{int}}, \quad (9.88)$$

che può essere espressa equivalentemente come equazione integrale

$$U_{\text{int}} = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \int_0^t V_{\text{int}}(t') U_{\text{int}}(t') dt' \quad (9.89)$$

Questa equazione può essere risolta sostituendo l'intero lato destro per  $U_{\text{int}}$  sotto il segno di integrale e iterando. Ne segue uno sviluppo in serie che discuteremo nella sezione 9.3.3. Qui ci limitiamo a riportare il termine più basso non nullo,

$$U_{\text{int}} = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \int_0^t V_{\text{int}}(t') dt' + \text{termini di ordine superiore in } V_{\text{int}} \quad (9.90)$$

Siamo interessati a come evolve un operatore  $A$  in rappresentazione di Heisenberg in conseguenza della perturbazione  $V$ , vale a dire, l'operatore che vogliamo calcolare è

$$A(t) \equiv U^* A U = (U_0 U_{\text{int}})^* A U_0 U_{\text{int}} = U_{\text{int}}^* U_0^* A U_0 U_{\text{int}} = U_{\text{int}}^* A_0(t) U_{\text{int}},$$

dove abbiamo denotato con  $A(t)$  la dinamica perturbata di  $A$  e con  $A_0(t)$  la sua dinamica imperturbata. Sostituendo in quest'ultima equazione l'espressione per  $U_{\text{int}}$  (9.90), tralasciando termini di ordine superiore in  $V_{\text{int}}$ , otteniamo

$$A(t) = \left( \mathbb{1} + \frac{i}{\hbar} \int_0^t V_{\text{int}}(t') dt' \right) A_0(t) \left( \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \int_0^t V_{\text{int}}(t') dt' \right) \quad (9.91)$$

$$= A_0(t) + \frac{i}{\hbar} \int_0^t V_{\text{int}}(t') A_0(t) dt' - \frac{i}{\hbar} \int_0^t A_0(t) V_{\text{int}}(t') dt' \quad (9.92)$$

$$= A_0(t) + \frac{i}{\hbar} \int_0^t [V_{\text{int}}(t'), A_0(t)] dt' \quad (9.93)$$

Questa è la *risposta lineare* (cioè al prim'ordine in  $V$ ) alla sollecitazione esterna  $V$ . In particolare, per  $V = -g(t)B$  si ha

$$A(t) = A_0(t) + \frac{i}{\hbar} \int_0^t [A_0(t), B_0(t')] g(t') dt'. \quad (9.94)$$

Se poi  $g(t') = \epsilon \delta(t' - s)$ ,  $0 < s < t$ , cioè la sollecitazione esterna ha carattere impulsivo a  $t' = s$ , e si definisce  $\delta A(t) = A(t) - A_0(t)$ , la formula diventa

$$\delta A(t) = \epsilon \frac{i}{\hbar} [A_0(t), B_0(s)]. \quad (9.95)$$

Questa formula rende totalmente trasparente e chiaro il significato fisico del commutatore a tempi differenti. Si osservi che in meccanica classica vale un risultato analogo con la parentesi di Poisson che sostituisce il commutatore ( $[A, B] \rightarrow i\hbar\{A, B\}$ ).

### 9.3.1 Formula di Kubo

La risposta lineare è di solito applicata alla seguente situazione:

- il sistema è in equilibrio termico e quindi descritto da una matrice densità  $\rho_{\text{eq.}} = Z^{-1}e^{-\beta H}$ ;
- l'hamiltoniano  $H$  non ha una dipendenza temporale esplicita;
- ad un certo tempo si applica un debole campo dipendente dal tempo al sistema, cioè si aggiunge un termine  $-g(t)B$  all'hamiltoniano;
- si osserva la risposta di qualche altra osservabile, il cui operatore in rappresentazione di Schrodinger è  $A$ ;
- dalla (9.94) si ottiene il valore medio  $\langle A \rangle_{\text{n.eq.}}(t)$  di non equilibrio

$$\langle A \rangle_{\text{n.eq.}}(t) = \langle A \rangle_{\text{eq.}} + \frac{i}{\hbar} \int_0^t \langle [A_0(t), B_0(t')] \rangle_{\text{eq.}} g(t') dt', \quad (9.96)$$

dove  $\langle \bullet \rangle_{\text{eq.}}$  è la media di equilibrio rispetto alla matrice densità  $\rho_{\text{eq.}}$ .

La quantità

$$\chi_{AB}(t-t') = \frac{i}{\hbar} \langle [A_0(t), B_0(t')] \rangle_{\text{eq.}} \quad (9.97)$$

è detta *funzione di risposta lineare* o *suscettività* di  $A$  rispetto a  $B$  (che si dimostra dipendere solo da  $t-t'$ ). La (9.96) è detta *formula di Kubo*.

### 9.3.2 Rappresentazione interazione ed effetto di una perturbazione all'ordine più basso

L'evoluzione temporale

$$\Psi_{\text{int}}(t) = U_{\text{int}}(t)\Psi_i, \quad (9.98)$$

fornisce la dinamica quantistica di uno stato iniziale  $\Psi_i = \Psi(0)$  nella cosiddetta *rappresentazione interazione*. Affinché si abbiano le stesse previsioni statistiche, in questa rappresentazione si dovrà far evolvere gli operatori secondo la dinamica libera. Infatti, poiché  $U_0 = UU_{\text{int}}$ , si deve avere

$$\langle U\Psi_i | A | U\Psi_i \rangle = \langle UU_{\text{int}}^* U_{\text{int}} \Psi_i | A | UU_{\text{int}}^* U_{\text{int}} \Psi_i \rangle = \langle \Psi_{\text{int}} | U_0^* A U_0 | \Psi_{\text{int}} \rangle$$

Quindi, se gli stati evolvono secondo la (9.98), gli operatori devono evolvere secondo la dinamica imperturbata:

$$A_{\text{int}}(t) = U_0^*(t) A U_0(t). \quad (9.99)$$

Utilizzando la (9.90), si ottiene l'evoluzione dello stato in rappresentazione interazione all'ordine perturbativo più basso:

$$\Psi_{\text{int}}(t) = \Psi_i - \frac{i}{\hbar} \int_0^t V_{\text{int}}(t') \Psi_i dt'. \quad (9.100)$$

Poiché  $\Psi_{\text{int}} = U_{\text{int}}\Psi_i = U_0^*U\Psi_i$ , lo stato in rappresentazione di Schrödinger è

$$\Psi(t) = U_0(t)\Psi_i - \frac{i}{\hbar} \int_0^t U_0(t)V_{\text{int}}(t')\Psi_i dt'$$

Ne segue che l'ampiezza di probabilità che il sistema sia trovato al tempo  $t$  nello stato finale  $\Psi_f$ :

$$\langle \Psi_f | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi_f | U_0 \Psi_i \rangle - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \langle \Psi_f | U_0(t) V_{\text{int}}(t') | \Psi_i \rangle dt' \quad (9.101)$$

Questa formula è particolarmente utile quando si considera l'ampiezza di probabilità della transizione da uno stato iniziale  $\Psi_i = |i\rangle$  ad uno stato finale  $\Psi_f = |f\rangle$ , dove  $|i\rangle$  e  $|f\rangle$  sono autostati di  $H_0$  corrispondenti alle energie  $E_f = \hbar\omega_f$  e  $E_i = \hbar\omega_i$ . Allora il primo termine della (9.102) è nullo perché gli stati sono ortogonali e la formula diventa

$$\langle b|\Psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}e^{i\omega_b} \int_0^t \langle b|V_{\text{int}}(t')|a\rangle dt' \quad (9.102)$$

Da cui segue la probabilità  $P_{i \rightarrow f}(t)$  che il sistema sia trovato in  $|f\rangle$  al tempo  $t$  se al tempo 0 era in  $|i\rangle$ :

$$P_{i \rightarrow f}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t \langle f|V_{\text{int}}(t')|i\rangle dt' \right|^2 \quad (9.103)$$

### 9.3.3 Serie di Dyson\*

Diamo un cenno a come si determinano i termini di ordine superiore. Ritorniamo all'equazione (9.89) che riscriviamo fissando  $t = t_0$  il tempo iniziale anziché  $t = 0$ ; inoltre, per semplificare le notazioni, sopprimiamo il suffisso "int" che è da ritenersi sottinteso e assorbiamo il fattore  $1/\hbar$  in  $V$ . Con queste stipulazioni, l'equazione (9.89) diventa

$$U(t, t_0) = \mathbb{1} - i \int_{t_0}^t V(t_1)U(t_1, t_0)dt_1$$

(essendo  $U(t_0, t_0) = \mathbb{1}$ ) che risolviamo iterativamente

$$U(t, t_0) = \mathbb{1} - i \int_{t_0}^t V(t_1)dt_1 + (-i)^2 \int_{t_0}^t V(t_1)dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 V(t_2) + \dots$$

Introduciamo l'operatore di *ordinamento cronologico*  $T$ ,

$$T\{A(t)A(t')\} = \begin{cases} A(t)A(t'), & \text{se } t > t' \\ A(t')A(t), & \text{se } t' > t \end{cases} \quad (9.104)$$

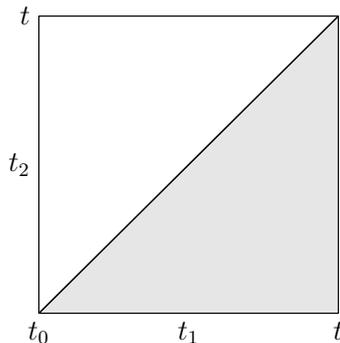
vale a dire, gli operatori sono scritti in ordine cronologico con il tempo che scorre da sinistra a destra. Allora, il secondo termine della serie

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 V(t_1)V(t_2)$$

può essere scritto come

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T\{V(t_1)V(t_2)\} \quad (9.105)$$

La ragione è che  $T\{V(t_1)V(t_2)\}$  è una funzione (operatoriale) simmetrica in  $t_1$  e  $t_2$  per cui la sua integrazione nel dominio originario  $t_0 < t_1 < t$ ,  $t_0 < t_2 < t_1$  (in grigio nella figura sotto) è uguale a quella ottenuta scambiando  $t_1$  e  $t_2$  (in bianco nella figura sotto).



Quindi,

$$U(t_1, t_2) = \mathbb{1} - i \int_{t_0}^t V(t_1) U(t_1, t_0) dt_1 + \frac{(-i)^2}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T\{V(t_1)V(t_2)\} + \dots$$

Con considerazioni analoghe si arriva alla conclusione che il termine  $n$ -esimo della serie è

$$\frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \cdots \int_{t_0}^t dt_n T\{V(t_1)V(t_2)\cdots V(t_n)\}$$

La serie così ottenuta

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \cdots \int_{t_0}^t dt_n T\{V(t_1)V(t_2)\cdots V(t_n)\} \quad (9.106)$$

è nota come *serie di Dyson*. Di solito, si usa una notazione abbreviata e si scrive

$$U(t, t_0) = T \left\{ e^{-i \int_{t_0}^t V(s) ds} \right\} \quad (9.107)$$

dove il secondo membro di questa equazione è per definizione la serie a secondo membro nella (9.106).

I



## 10. Campo di Klein-Gordon quantistico

### 10.1 Il campo scalare reale

Per descrivere l'analogo quantistico di un modo di un campo classico, descriviamo semplicemente il corrispondente oscillatore armonico quantistico. Incominciamo col considerare il caso più semplice, la corda di di D'Alembert, con condizioni al contorno periodiche, per passare poi al campo di Klein-Gordon.

#### 10.1.1 Analogo quantistico del modo normale della corda

I modi della corda sono, come espresso dalla (7.76), oscillatori di frequenza  $\omega = c|k|$  e massa  $m = 1$ ; per il numero d'onde si ha  $k = k_M = 2\pi M/L$  con  $M$  che assume valori interi positivi e negativi. Allora il sistema quantistico corrispondente è governato dall'hamiltoniano (9.3) per  $m = 1$ , equivalentemente espressa dalla (9.9) in termini di operatori di creazione e distruzione (con  $m = 1$ ). Ma, sulla base di quanto abbiamo visto, questo è equivalente a passare dalla variabile complessa classica  $\alpha(t) = \alpha(0)e^{-i\omega t}$  all'operatore di distruzione in rappresentazione di Heisenberg  $a(t) = ae^{-i\omega t}$ . Quindi, l'operatore di campo in rappresentazione di Heisenberg per un modo normale è ottenuto dalla (7.72) semplicemente sostituendo  $\alpha(t)$  con  $a(t)$ . Questo vuol dire che il campo classico (7.72) va sostituito con l'operatore

$$\hat{\phi}(x, t) = \sqrt{\frac{c^2 \hbar}{2\omega}} [a(t)u(x) + a^*(t)\bar{u}(x)], \quad (10.1)$$

dove  $u = u_M$  sono le funzioni modali che soddisfano la relazione di ortonormalità (7.73). L'hamiltoniano del campo è semplicemente l'hamiltoniano dell'oscillatore armonico

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( a^* a + \frac{1}{2} \right). \quad (9.9)$$

Gran parte di quanto detto per l'oscillatore armonico non-relativistico resta vero per l'hamiltoniano del campo quantistico. Tuttavia, alcune quantità devono essere reinterpretate alla luce del fatto il campo quantistico non è esattamente un oscillatore armonico come una massa attaccata ad una molla.

Il familiare oscillatore armonico non-relativistico descrive una particella che ammette funzioni d'onda stazionarie di energia definita  $E_n = \omega(n + \frac{1}{2})$ , cosicché il numero  $n$  è semplicemente un'abbreviazione per l'energia della particella in uno stato stazionario  $|n\rangle$ . Al contrario, l'oscillatore armonico che descrive il campo quantistico lo fa per un particolare modo normale  $M$  e lo stato  $|n\rangle_M$  è interpretato come lo stato stazionario della corda che contiene  $n$  o *fononi* nel modo normale  $M$ . Ciascun quanto contribuisce con un'energia  $E = \hbar\omega_M$ . Il numero di quanti è dell'oscillatore armonico è rappresentato dall'operatore  $\hat{N} = a^*a$  e quindi  $\hat{N}_M$  conta il numero di quanti presenti in uno stato stazionario della corda ( $\hat{N}_M|n\rangle_M = n|n\rangle_M$ ).

Gli stati stazionari del modo normale  $|n\rangle_M$ , sono dunque a numero definito di quanti, ma gli stati stazionari sono solo un'infima parte degli stati possibili dell'oscillatore armonico quantistico. Per uno stato non stazionario  $\Psi$  del modo normale  $M$  il numero di quanti è soggetto a fluttuazioni statistiche espresse da valori non nulli dei momenti  $\langle \Psi | \hat{N}_M^m | \Psi \rangle$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , dell'operatore numero di quanti  $\hat{N}_M$ .

La differenza fondamentale tra un modo del campo quantistico e l'oscillatore armonico è che ad un modo del campo è associato l'operatore impulso che è ottenuto dalla (7.69) semplicemente sostituendo  $\alpha(t)$  con  $a(t)$  e simmetrizzando:

$$\hat{P} = \hbar k \left( a^*a + \frac{1}{2} \right) \quad (10.2)$$

per cui lo stato  $|n\rangle_M$  ha un impulso definito  $P_M = \hbar k_M(n + \frac{1}{2})$ . Dunque, lo stato "stazionario"  $|n\rangle_M$  non è realmente "stazionario" ma ha caratteristiche dinamiche: descrive un fenomeno di propagazione: un'onda che propagandosi lungo la corda trasporta impulso (qui le condizioni al contorno periodiche sono essenziali). Gli  $n$  quanti contenuti lo stato  $|n\rangle_M$  non solo contribuiscono all'energia dello stato, ma ciascuno di essi contribuisce all'impulso dello stato con un impulso  $P = \hbar k_M$ . Questo aspetto è (ovviamente) del tutto assente nel familiare oscillatore armonico non-relativistico che descrive una particella. In maniera paradossale si può dire che l'impulso è più importante dell'energia, nel senso che rende manifesto che il campo quantistico è associato a *fenomeni di trasporto* (di energia e impulso) analogamente ad un campo classico.

Consideriamo adesso lo stato fondamentale. Lo stato  $|0\rangle_M$ , cioè lo stato fondamentale dell'oscillatore associato al modo  $M$ , è di solito chiamato *stato di vuoto* (del modo  $M$ ). È chiamato così perché non contiene quanti:  $\hat{N}|0\rangle_M = 0$ . Ha tuttavia caratteristiche non banali, in particolare ha energia e impulso non nulli:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_M, \quad P_0 = \frac{1}{2}\hbar k_M \quad (10.3)$$

Questo vuol dire che quello che classicamente è lo stato a riposo della corda, nella descrizione quantistica diventa uno stato che ha proprietà dinamiche.

### 10.1.2 Sviluppo del campo in modi normali

La generalizzazione da un modo ad un sistema a molti modi è chiara. Si tratta di sommare su tutti modi. Sviluppiamo adesso il formalismo per una dimensione spaziale arbitraria  $D$  e per la relazione di dispersione  $\omega_{\mathbf{k}} = c\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \mu^2}$ . D'ora in poi, per semplificare le notazioni, non useremo l'accento circonflesso per denotare le quantità quantistiche e scriveremo  $\phi$  per l'operatore di campo o  $H$  per l'hamiltoniano; se sarà necessario per evitare confusioni scriveremo  $\phi$  o  $H_{cl}$  per le quantità classiche.

In virtù della corrispondenza tra soluzioni classiche e soluzioni quantistiche di sistemi lineari, l'operatore di campo  $\phi(\mathbf{x}, t)$  è ottenuto dalla (7.91) sostituendo le variabili dinamiche

classiche  $\alpha$  è  $\bar{\alpha}$  con gli operatori di distruzione e creazione  $a_M(t) = a_M e^{-i\omega_M t}$  e  $a_M^*(t) = a_M^* e^{i\omega_M t}$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{c^2 \hbar}{2\omega_{\mathbf{k}} V}} \left[ a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + a_{\mathbf{k}}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \right] \quad (10.4)$$

dove i modi normali sono parametrizzati dal vettore numero d'onda  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z, \dots)$  con

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L}, \quad \dots \quad (10.5)$$

e  $n_x, n_y, n_z, \dots$  interi arbitrari (positivi o negativi). L'operatore di campo soddisfa l'equazione di Klein-Gordon

$$(\square + \mu^2) \phi = 0 \quad (1.69)$$

e la sua "natura quantistica" è espressa dalle relazioni di commutazione (9.75), che per modi parametrizzati da  $\mathbf{k}$  diventano

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^*] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = 0 \quad (10.6)$$

Queste relazioni sono usualmente chiamate CCR ("canonical commutation relations") del campo. Nel seguito, ci sarà anche utile la decomposizione del campo nelle sue componenti a frequenza positiva e a frequenza negativa, cioè,

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi^+(\mathbf{x}, t) + \phi^-(\mathbf{x}, t) \quad (10.7a)$$

con

$$\phi^+(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{c^2 \hbar}{2\omega_{\mathbf{k}} V}} a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \quad (10.7b)$$

$$\phi^-(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{c^2 \hbar}{2\omega_{\mathbf{k}} V}} a_{\mathbf{k}}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \quad (10.7c)$$

Dal punto di vista matematico, il campo (10.4) è un operatore autoaggiunto nello spazio di Hilbert degli stati che verrà caratterizzato sotto. Dal punto di vista fisico, è il "mattoncino fondamentale" per la caratterizzazione della dinamica del sistema (vale a dire, della suo hamiltoniano), dello spazio degli stati e delle osservabili del sistema. Per quel che riguarda i primi due punti, la trattazione sarà succinta perché ricalca pari-pari quello che abbiamo visto nel capitolo precedente.

### 10.1.3 Hamiltoniano e impulso

Se si sostituisce formalmente il campo (10.7) nelle formule per l'operatore energia e l'operatore impulso

$$H = \frac{1}{2} \int \left[ \frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2 + (\nabla \phi)^2 + \mu \phi^2 \right] dV \quad (10.8)$$

$$\mathbf{P} = -\frac{1}{c^2} \int \frac{1}{2} \left( \dot{\phi} \nabla \phi + (\nabla \phi) \dot{\phi} \right) \quad (10.9)$$

si ottiene (esercizio)

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2} [a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^*] = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left[ a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right] \quad (10.10)$$

e

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} [a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^*] = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \mathbf{k} \left[ a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right] \quad (10.11)$$

(La risoluzione dell'esercizio è formalmente identica a quella data nel Box 7.5 per il campo classico.)

Dalla (10.10) segue che il sistema ha uno stato fondamentale  $|0\rangle$  caratterizzato dalla condizione

$$a_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{k} \quad (10.12)$$

o, equivalentemente,

$$\phi(\mathbf{x}, t)|0\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{x}, t \quad (10.13)$$

Se la somma si estende su tutti i  $\mathbf{k}$ , l'energia dello stato fondamentale è infinita e si presenta il problema incontrato nella sezione (9.2.3). Come abbiamo sottolineato allora, questo passaggio al limite non è richiesto in fisica della materia, dove esiste sempre una frequenza di taglio. Nelle applicazioni alle alte energie, si utilizza il prodotto normale, vale a dire, si sottrae il contributo di vuoto. In questo modo, si ridefiniscono, la lagrangiana, l'energia, l'impulso e tutte le altre osservabili in termini di prodotto normale.

#### 10.1.4 Spazio degli stati

Quel che abbiamo chiamato fononi, in fisica delle alte energie sono chiamati “mesoni” (particelle a spin 0). In entrambi i casi, queste “particelle” sono “eccitazioni collettive” che per non scontentare nessuno chiameremo *phioni* (i quanti del campo  $\phi$ ). Gli stati di singolo phione sono generati dal vuoto (di phioni) nel modo che abbiamo visto nel capitolo precedente:  $a_{\mathbf{k}}^*|0\rangle$  descrive un phione con numero d'onda  $\mathbf{k}$ . Il generico stato  $|\Psi^{(1)}\rangle$  di singolo phione si ottiene per combinazione lineare al variare di  $\mathbf{k}$  tra tutti i valori possibili:

$$|\Psi^{(1)}\rangle = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^{(1)}|0\rangle.$$

I phioni sono bosoni: i numeri di occupazione del modo  $\mathbf{k}$  possono assumere qualunque valore  $n_{\mathbf{k}} = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Inoltre, gli stati più particelle sono simmetrici nello scambio delle etichette di particella:  $a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}'}^*|0\rangle$ ,  $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$  è uno stato a due phioni, uno nello stato  $\mathbf{k}$  e l'altro nello stato  $\mathbf{k}'$ , invariante rispetto allo scambio di etichette (phione 1 e phione 2) in quanto  $a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}'}^*|0\rangle = a_{\mathbf{k}'}^* a_{\mathbf{k}}^*|0\rangle$ . Si osservi che essendo l'operatore numero totale di particelle  $N = \sum_{\mathbf{k}} a^* a$  hermitiano, stati a numero differente di phioni, che corrispondono a differenti autovalori di questo operatore, sono ortogonali tra loro

Un generico stato  $\Psi^{(2)}$  a due phioni può essere rappresentato come

$$\Psi^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2!}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{(2)} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}'}^* |0\rangle$$

Più in generale, un generico stato  $\Psi$  dello spazio di Hilbert  $\mathcal{F}$  del sistema, ammette la decomposizione

$$|\Psi\rangle = c_0|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{1!}} \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^{(1)}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2!}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{(2)} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}'}^* |0\rangle + \dots \quad (10.14)$$

che è semplicemente conseguenza della struttura di Fock di  $\mathcal{F}$  che abbiamo già incontrato nell'eq. (12.22).

## 10.2 Relazioni di commutazione e propagatore di Feynman

Alcuni calcoli ci permetteranno di chiarire il significato fisico del campo quantistico.

### 10.2.1 Relazioni di commutazione del campo

Calcoliamo il commutatore

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, s)] = \phi(\mathbf{x}, t)\phi(\mathbf{y}, s) - \phi(\mathbf{y}, s)\phi(\mathbf{x}, t)$$

utilizzando la sua decomposizione (10.7) nelle componenti a frequenza positiva e negativa. Notiamo che

$$[\phi^+(\mathbf{x}, t), \phi^+(\mathbf{y}, s)] = [\phi^-(\mathbf{x}, t), \phi^-(\mathbf{y}, s)] = 0$$

perché  $\phi^+$  contiene solo operatori di distruzione e  $\phi^-$  solo operatori di creazione che commutano in virtù delle CCR. Quindi,

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, s)] = [\phi^+(\mathbf{x}, t), \phi^-(\mathbf{y}, s)] + [\phi^-(\mathbf{x}, t), \phi^+(\mathbf{y}, s)].$$

Dalle (10.7) otteniamo

$$\begin{aligned} [\phi^+(\mathbf{x}, t), \phi^-(\mathbf{y}, s)] &= \frac{\hbar c^2}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}} [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^*] e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} e^{i\omega_{\mathbf{k}'}s} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} \\ &= \frac{\hbar c^2}{2V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-s)} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \end{aligned} \quad (10.15)$$

Il calcolo continua nel box sotto.

**Box 10.1 — Calcolo esplicito delle relazioni di commutazione del campo.** Passiamo adesso al limite di volume infinito della (10.15), ricordando che

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k}. \quad (7.92)$$

Allora, in questo limite,

$$[\phi^+(\mathbf{x}, t), \phi^-(\mathbf{y}, s)] = \frac{\hbar c}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{-i[\omega_{\mathbf{k}}(t-s) - \mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})]} \quad (10.16)$$

Introduciamo la definizione

$$\Delta^+(\mathbf{x}, t) = \frac{ic}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \quad (10.17)$$

poiché questa funzione e simili ricorrono ripetutamente nel seguito. L'equazione (10.16) può allora essere riscritta

$$[\phi^+(\mathbf{x}, t), \phi^-(\mathbf{y}, s)] = -i\hbar c \Delta^+(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \quad (10.18)$$

e

$$[\phi^-(\mathbf{x}, t), \phi^+(\mathbf{y}, s)] = i\hbar c \Delta^+(\mathbf{y} - \mathbf{x}, s - t) \equiv -i\hbar c \Delta^-(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \quad (10.19)$$

che definisce la funzione  $\Delta^-(\mathbf{x}, t)$ . Dalle equazioni precedenti segue che

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, s)] = -i\hbar c \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \quad (10.20)$$

con

$$\Delta(\mathbf{x}, t) = \Delta^+(\mathbf{x}, t) + \Delta^-(\mathbf{x}, t) = \Delta^+(\mathbf{x}, t) - \Delta^+(-\mathbf{x}, -t) \quad (10.21)$$

$$= \frac{c}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} \sin(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (10.22)$$

È importante osservare che (10.22) è una funzione reale dispari in tutte le variabili,  $\Delta(-\mathbf{x}, -t) = -\Delta(\mathbf{x}, t)$ , come richiesto dal commutatore (10.20). Inoltre  $\Delta(\mathbf{x}, t)$ , come  $\Delta^+(\mathbf{x}, t)$  e  $\Delta^-(\mathbf{x}, t)$ , soddisfa l'equazione di Klein-Gordon

$$(\square + \mu^2) \Delta(\mathbf{x}, t) = 0$$

Al contrario,  $\Delta^+(\mathbf{x}, t)$  è una funzione pari di  $\mathbf{x}$ , per cui  $\Delta^+(\mathbf{x}, t) = \Delta^+(-\mathbf{x}, t)$ . Inoltre, essendo  $d^3\mathbf{k}/\omega_{\mathbf{k}}$  è una misura Lorentz invariante,  $\Delta^+(x) = \Delta^+(\mathbf{x}, t)$  risulta un campo scalare di Lorentz (indipendentemente dalla scelta del sistema di riferimento). Da queste due osservazioni risulta definita

$$\Delta(x) = \Delta^+(x) - \Delta^+(-x), \quad (10.23)$$

come funzione invariante rispetto al gruppo di Lorentz ortocrono (che non cambia il segno di  $t$ ).

Si osservi che  $\Delta(x) = 0$  per  $x$  di tipo spazio (se  $x$  è di tipo spazio esiste un sistema di riferimento in cui la componente temporale è nulla, ed essendo  $\Delta^+$  una funzione pari di  $\mathbf{x}$ , il secondo membro della (10.23) si annulla). In particolare,  $\Delta(x - y)$ , e quindi il commutatore  $[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, s)]$  ha supporto dentro il cono di luce futuro centrato in  $y$  ed è nullo al di fuori di esso.

### 10.2.2 Propagatore di Feynman

Adesso deriviamo una funzione che è di grande importanza in teoria dei campi. Incominciamo con l'osservare che la funzione  $\Delta^+$  può essere scritta come il valor medio sul vuoto del prodotto di due operatori di campo. Dalla (10.18) abbiamo che

$$\begin{aligned} -i\hbar c \Delta^+(x - x') &= \langle 0 | [\phi(x), \phi(x')] | 0 \rangle = \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle \end{aligned} \quad (10.24)$$

Definiamo il *prodotto cronologico*  $\mathbb{T}$  dei campi (cfr. sezione 9.3.3, equazione (9.104))

$$\mathbb{T}\{\phi(x)\phi(x')\} = \begin{cases} \phi(x)\phi(x'), & \text{se } t > t' \\ \phi(x')\phi(x), & \text{se } t' > t \end{cases} \quad (10.25)$$

( $t = x^0/c$ ) vale a dire, gli operatori sono scritti in ordine cronologico con il tempo che scorre da sinistra a destra. Usando la funzione a scalino di Heaviside  $\vartheta(t)$  il  $\mathbb{T}$ -prodotto può essere scritto così

$$\mathbb{T}\{\phi(x)\phi(x')\} = \vartheta(t - t')\phi(x)\phi(x') + \vartheta(t' - t)\phi(x')\phi(x) \quad (10.26)$$

Il propagatore di Feynman è definito come il valor medio sul vuoto di questo T-prodotto:

$$-i\hbar c G^F(x-x') \equiv \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(x') \} | 0 \rangle \quad (10.27)$$

Dalle equazioni precedenti segue la sua definizione esplicita

$$G^F(x) = \vartheta(t) \Delta^+(x) - \vartheta(-t) \Delta^-(x) \quad (10.28)$$

Perciò

$$G^F(x) = \pm \Delta^\pm(x), \quad \text{se } t \gtrless 0 \quad (10.29)$$

È importante osservare che  $G^F(x)$  è una funzione di Green dell'equazione di Klein-Gordon. Con riferimento alla trattazione e alle notazioni dei box 7.7 e 7.8, si dimostra che (esercizio!)  $G^F(x)$  corrisponde al cammino



**Box 10.2 — Schema riassuntivo.** Le funzioni (generalizzate o distribuzioni)

$$\begin{aligned} \Delta^+(x) &= \frac{ic}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} = \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{-ik\cdot x} \delta(k^2 - \mu^2) \vartheta(k^0), \\ \Delta^-(x) &= -\Delta^+(-x), \\ \Delta(x) &= \Delta^+(x) + \Delta^-(x) \end{aligned}$$

sono soluzioni dell'equazione omogenea di Klein-Gordon classica  $(\square + \mu^2)\phi(x) = 0$  e giocano un ruolo importante anche per il corrispondente campo quantistico:

$$\begin{aligned} \Delta^+(x-x') &= \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle \\ \Delta^-(x-x') &= -\langle 0 | \phi(x') \phi(x) | 0 \rangle \\ \Delta(x-x') &= \frac{i}{\hbar c} [\phi(x), \phi(x')] \end{aligned}$$

$G^{\text{ret}}(x)$ ,  $G^{\text{adv}}(x)$  e  $G^F(x)$  sono funzioni di Green, cioè soluzioni dell'equazione  $(\square + \mu^2)\phi(x) = \delta(x-x')$ . Per esse valgono le relazioni

$$\begin{aligned} G^{\text{ret}}(x-x') &= [\Delta^+(x-x') + \Delta^-(x-x')] \theta(t) \\ G^{\text{adv}}(x-x') &= G^{\text{ret}}(x'-x) \\ G^F(x-x') &= \vartheta(t-t') \Delta^+(x-x') - \vartheta(t'-t) \Delta^-(x-x') = \frac{i}{\hbar c} \equiv \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(x') \} | 0 \rangle \end{aligned}$$



## 11. Campo di Maxwell quantistico

### 11.1 Il campo elettromagnetico come sistema quantistico

In questa sezione studiamo l'analogo quantistico del campo elettromagnetico classico. È utile partire dal campo confinato in una scatola e, per comodità, consideriamo condizioni al contorno corrispondenti a pareti conduttrici (se la scatola è grande, è ininfluyente quali condizioni al contorno consideriamo). Prima di passare al caso quantistico, riassumiamo i punti salienti della sezione 7.3.2. Il campo elettromagnetico classico soddisfa le equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti (7.133) e le sue funzioni modali, cioè le autofunzioni  $u_M(\mathbf{x})$  dell'equazione di Helmholtz corrispondenti agli autovalori  $\omega_M$ , formano una base ortonormale per i campi a divergenza nulla,

$$\int \mathbf{u}_M \cdot \mathbf{u}_{M'} dV = \delta_{MM'},$$

e soddisfano le condizioni al contorno corrispondenti a pareti conduttrici. Per una scatola rettangolare abbiamo visto che ciascun modo  $M$  è indicizzato da un vettore numero d'onde  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ , dove  $k_x = \pi n_x / L_x, k_y = \pi n_y / L_y, k_z = \pi n_z / L_z$  con  $n_x, n_y$  e  $n_z$  interi non negativi, e da una variabile discreta  $\lambda$  che può assumere due valori (stati di polarizzazione). Abbiamo inoltre visto che, grazie alla completezza del sistema delle funzioni modali, una generica soluzione delle equazioni di Maxwell nella scatola ammette lo sviluppo di Fourier generalizzato

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_M P_M(t) \mathbf{u}_M(\mathbf{x}) \quad (11.1a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \sum_M Q_M(t) \mathbf{v}_M(\mathbf{x}) \quad \text{con} \quad \mathbf{v}_M = -c \nabla \times \mathbf{u}_M \quad (11.1b)$$

dove i coefficienti di Fourier  $Q_M(t)$  e  $P_M(t)$  sono posizione e impulso di un oscillatore armonico di massa unitaria e frequenza  $\omega_M$ . Infine,

$$\frac{1}{2} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) dV = \frac{1}{2} \sum_M (P_M^2 + \omega_M^2 Q_M^2) \quad (11.2)$$

è l'energia del sistema.

### 11.1.1 Seconda quantizzazione del campo di Maxwell

Il metodo di seconda quantizzazione consiste nel passaggio dalle soluzioni classiche del moto (11.1) alla dinamica quantistica in rappresentazione di Heisenberg. In questo passaggio, le funzioni modali non cambiano, ma le variabili  $Q_M(t)$  e  $P_M(t)$  diventano gli operatori posizione e impulso di un oscillatore quantistico di massa unitaria e frequenza  $\omega_M$ . In questo modo risultano definiti gli operatori di campo

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_M i \sqrt{\frac{\hbar \omega_M}{2}} [a_M^*(t) - a_M(t)] \mathbf{u}_M(\mathbf{x}) \quad (11.3)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = - \sum_M \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_M}} [a_M^*(t) + a_M(t)] \nabla \times \mathbf{u}_M(\mathbf{x}) \quad (11.4)$$

Le relazioni

$$a_M |0\rangle = 0 \quad \text{per tutti gli } M \quad (11.5a)$$

$$[a_M, a_{M'}^*] = \delta_{MM'} \quad [a_M, a_{M'}] = 0 \quad (11.5b)$$

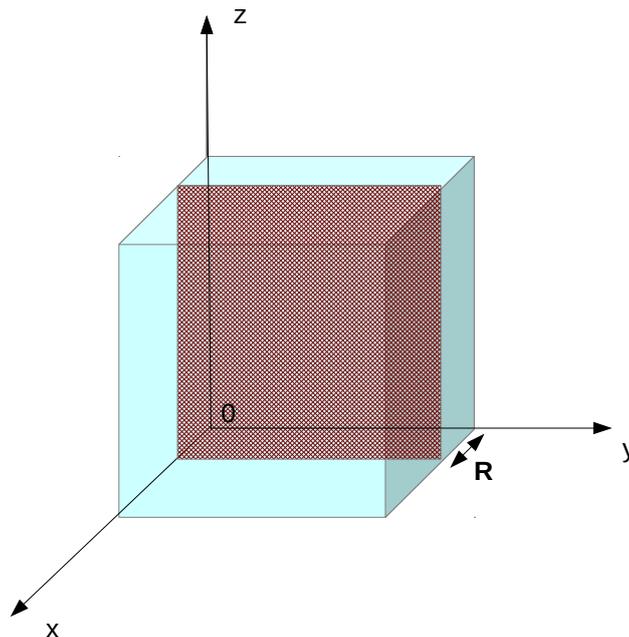
definiscono lo spazio degli stati del sistema  $\mathcal{F}$  come spazio di Fock costruito a partire dallo stato di vuoto  $|0\rangle$ , come già visto nella sezione 9.2. Inoltre, la (11.2) diventa l'operatore Hamiltoniano  $H$  del sistema. Dunque,

$$H = \sum_M \hbar \omega_M \left( a_M^* a_M + \frac{1}{2} \right) \quad (11.6)$$

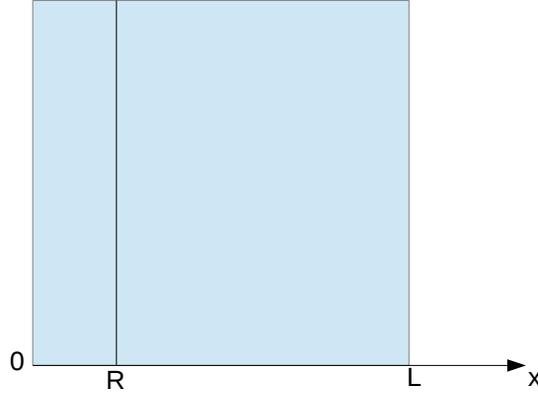
e, come già sottolineato nella sezione 9.2.3, questo operatore risulta mal definito in generale, a causa dell'energia infinita di punto zero (o di vuoto)  $\langle 0|H|0\rangle = \sum_M (1/2)\omega_M$ . Tuttavia, come già discusso a livello classico nella sezione 7.3.3, questa conclusione non si applica al campo in una scatola metallica dove valgono condizioni naturali di taglio sulle alte frequenze. Il prossimo argomento riguarda proprio questa situazione.

### 11.1.2 Effetto Casimir

Consideriamo una grande cavità di dimensioni  $L \times L \times L$  circondata da pareti conduttrici. Una piastra conduttrice viene inserita a una distanza  $R$  da una delle facce  $yz$  ( $R \ll L$ ).



La nuova condizione al contorno in  $x = R$  altera l'energia di ciascun modo del campo. Seguendo Casimir, calcoliamo la variazione di energia come una funzione di  $R$ .



Denotiamo con  $\mathcal{E}_X$  l'energia elettromagnetica dentro una cavità di lunghezza  $X$  nella direzione  $x$ . La variazione nell'energia dovuta all'inserimento della piastra in  $x = R$  sarà

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_R + \mathcal{E}_{L-R} - \mathcal{E}_L \quad (11.7)$$

Ogni modo ha un'energia di punto zero pari a  $\frac{1}{2}\hbar\omega_{\mathbf{k}}$ ,  $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$ , e l'energia totale è la somma delle energie di punto zero di tutti i modi. In particolare, per  $\mathcal{E}_L$  si ha

$$\mathcal{E}_L = 2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\mathbf{k}} f(|\mathbf{k}|/k_m) \quad (11.8)$$

dove il fattore 2 che moltiplica la somma tiene conto dei due gradi di libertà di polarizzazione. Abbiamo inoltre introdotto una funzione di taglio  $f$ , definita dalle condizioni (7.155), che rende finita la somma e tiene conto della condizione fisica che il campo sia intrappolato nella cavità metallica. Si osservi che la funzione di taglio fa sì che la piastra a  $x = R$  non abbia effetti sulle energie ad alte frequenze, che quindi non danno alcun contributo a  $\Delta\mathcal{E}$ . La forma esplicita di  $f(k/k_m)$ , e il valore di  $k_m$  dipendono dalla natura del materiale, tuttavia questi dettagli non modificano  $\Delta\mathcal{E}$  nell'approssimazione al primo ordine come vedremo sotto.

Se le dimensioni della cavità sono molto grandi, possiamo rimpiazzare la somma su modi discreti con un integrale secondo l'usuale regola

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k}$$

Se poi restringiamo l'integrale al primo ottante, otteniamo

$$\mathcal{E}_L = 2 \frac{L^3}{(2\pi)^3} \times 8 \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \int_0^\infty dk_z \frac{1}{2} \hbar c |\mathbf{k}| f(|\mathbf{k}|/k_m) = \frac{L^3}{\pi^3} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \int_0^\infty dk_z \hbar c |\mathbf{k}| f(|\mathbf{k}|/k_m)$$

Similmente,

$$\mathcal{E}_{L-R} = \frac{(L-R)L^2}{\pi^3} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \int_0^\infty dk_z \hbar c |\mathbf{k}| f(|\mathbf{k}|/k_m),$$

per cui

$$\mathcal{E}_{L-R} - \mathcal{E}_L = -\frac{RL^2}{\pi^3} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \int_0^\infty dk_z \hbar c |\mathbf{k}| f(|\mathbf{k}|/k_m).$$

Il fatto che  $k_x$  sia una grandezza discreta deve essere tenuto in considerazione per il calcolo di  $\mathcal{E}_R$  (dato che  $R \ll L$ ), quindi abbiamo

$$\mathcal{E}_R = \sum_{n=0}^{\infty} 2\theta_n \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^\infty dk_y \int_0^\infty dk_z \frac{1}{2} \hbar c |\mathbf{k}_n| f(|\mathbf{k}|/k_m) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^\infty dk_y \int_0^\infty dk_z \hbar c |\mathbf{k}_n| f(|\mathbf{k}|/k_m)$$

con

$$|\mathbf{k}_n| = \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{R^2} + k_y^2 + k_z^2}$$

e  $\theta_n = 1$  se  $n > 0$ ,  $\theta_n = \frac{1}{2}$  se  $n = 0$ . Il fattore  $\theta_n$  va incluso poiché ci sono due stati di polarizzazione per  $n > 0$  ma solo uno per  $n = 0$ . Introducendo la funzione

$$g(k_x) = \int_0^\infty dk_y \int_0^\infty dk_z |\mathbf{k}| f\left(\frac{|\mathbf{k}|}{k_m}\right) dk_y dk_z \quad (11.9)$$

otteniamo

$$\mathcal{E}_R = \sum_{n=0}^{\infty} 2\theta_n \frac{L^2}{\pi^2} g\left(\frac{n\pi}{R}\right)$$

e

$$\mathcal{E}_{L-R} - \mathcal{E}_L = -\frac{RL^2}{\pi^3} \int_0^\infty g(k_x) dk_x$$

Mettendo insieme i risultati ottenuti, si ottiene

$$\Delta \mathcal{E} = \hbar c \frac{L^2}{\pi^2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n g\left(\frac{n\pi}{R}\right) - \frac{R}{\pi} \int_0^\infty g(k_x) dk_x \right] \quad (11.10)$$

L'espressione integrale per  $g(k_x)$  può essere semplificata effettuando alcune sostituzioni.

1. Passaggio a coordinate polari  $\rho$  e  $\theta$ :

$$dk_y dk_z = \rho d\rho d\theta, \quad \rho = \sqrt{k_y^2 + k_z^2} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

(la condizione che  $\theta$  vari nel primo quadrante è perché  $k_x$  e  $k_y$  sono quantità positive).

Allora

$$g(k_x) = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \sqrt{k_x^2 + \rho^2} f\left(\frac{\sqrt{k_x^2 + \rho^2}}{k_m}\right) \rho d\rho \quad (11.11)$$

2. Introduzione di variabili adimensionali  $n$  e  $m$  al posto di  $k_x = \frac{n\pi}{R}$  e  $\rho = \frac{\alpha\pi}{R}$ :

$$g(k_x) = \frac{\pi}{2} \frac{\pi^3}{R^3} \int_0^\infty \sqrt{n^2 + \alpha^2} f\left(\frac{\pi \sqrt{n^2 + \alpha^2}}{R k_m}\right) \alpha d\alpha \quad (11.12)$$

3. Sostituzione  $w = n^2 + \alpha^2$ ,  $dw = 2\alpha d\alpha$ :

$$g(k_x) = \frac{\pi^4 F(n)}{4R^3} \quad (11.13)$$

con

$$F(n) = \int_{n^2}^{\infty} \sqrt{w} f\left(\frac{\pi\sqrt{w}}{Rk_c}\right) dw \quad (11.14)$$

In conseguenza di queste sostituzioni, la (11.10) diventa

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{\hbar c L^2 \pi^4}{4\pi^2 R^3} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n F(n) - \int_0^{\infty} F(n) dn \right\} \quad (11.15)$$

La somma discreta nell'espressione (11.15) è una nota approssimazione numerica dell'integrale, conosciuta come approssimazione trapezoidale. La differenza tra la somma e l'integrale può essere stimata per mezzo della *formula di Eulero-Maclaurin*,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n F(n) - \int_0^{\infty} F(n) dn = \frac{-1}{6 \times 2!} F'(0) + \frac{1}{30 \times 4!} F'''(0) - \dots \quad (11.16)$$

Dalla (11.14), otteniamo

$$\begin{aligned} F'(n) &= -2n \times n f\left(\frac{\pi n}{Rk_m}\right) = -2n^2 f\left(\frac{\pi n}{Rk_m}\right), \\ F''(n) &= -4n f\left(\frac{\pi n}{Rk_m}\right) - 2n^2 f'\left(\frac{\pi n}{Rk_m}\right) \left(\frac{\pi}{Rk_m}\right), \\ F'''(n) &= -4f\left(\frac{\pi n}{Rk_m}\right) - 8n f'\left(\frac{\pi n}{Rk_m}\right) \left(\frac{\pi}{Rk_m}\right) - 2n^2 f''\left(\frac{\pi n}{Rk_m}\right) \left(\frac{\pi}{Rk_m}\right)^2 \end{aligned} \quad (11.17)$$

Per via della (??),

$$F'(0) = 0 \quad \text{e} \quad F'''(0) = -4.$$

Otteniamo così il risultato

$$\Delta\mathcal{E} = -\hbar c \frac{\pi^2}{720} \frac{L^2}{R^3} \quad (11.18)$$

per la variazione dell'energia dovuta alla piastra conduttrice inserita in  $x = R$ .

È chiaro dal calcolo appena svolto che i contributi delle derivate di ordine superiore omessi dalla (11.16) sono proporzionali a qualche potenza di  $1/Rk_m$ , e quindi il risultato (11.18) sarà valido se  $Rk_m \gg 1$ . Equivalentemente, possiamo dire che il risultato è valido se  $R \gg \lambda_m$ , dove  $\lambda_m = 2\pi/k_m$  è la lunghezza d'onda della radiazione alla frequenza di taglio.

Nel limite  $L \rightarrow \infty$ , la variazione di energia produce una forza per unità di area tra le piastre conduttrici in  $x = 0$  e  $x = R$ :

$$F = -\frac{1}{L^2} \frac{\partial \Delta\mathcal{E}}{\partial R} = -\frac{\hbar c}{240} \frac{\pi^2}{R^4} \quad (11.19)$$

Il segno meno indica che la forza è attrattiva. Misure sperimentali, anche piuttosto recenti, hanno confermato la predizione teorica di Casimir.

**Box 11.1** — Effetto Casimir per campo scalare in  $D = 1$ .

$$\mathcal{E}_X = \frac{1}{2} \sum_k \hbar c k e^{-k/k_m} = \frac{1}{2} \sum_k \hbar c \frac{n\pi}{X} e^{-n\pi/(Xk_m)} = \frac{1}{2} \frac{\hbar c \pi}{X} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\alpha n}, \quad \alpha \equiv \frac{\pi}{k_m X}$$

$$S(\alpha) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\alpha n} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} = \frac{1}{4 \sinh^2(\alpha/2)}$$

$$k_m X \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha \ll 1$$

$$4 \sinh^2 \frac{\alpha}{2} = 4 \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{6} \left( \frac{\alpha}{2} \right)^3 + \dots \right)^2 = \alpha^2 \left( 1 + \frac{1}{24} \alpha^2 + \dots \right)^2$$

$$(1 \pm u)^p \approx 1 \pm pu + \frac{p(p-1)}{2} u^2 + \dots \quad \Rightarrow \quad S(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{12} + \dots$$

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}_R + \mathcal{E}_{L-R} - \mathcal{E}_L \approx -\frac{\hbar c \pi}{24R} \quad (R \ll L)$$

$$F = -\frac{\partial}{\partial R} \left( -\frac{\hbar c \pi}{24R} \right) = -\frac{\hbar c \pi}{24R^2}$$

## 11.2 Rudimenti di ottica quantistica

Ritorniamo alla teoria di Einstein dei coefficienti  $A$  (emissione stimolata) e  $B$  (emissione spontanea) e alla formula (7.195)

$$A = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} B \quad (7.195)$$

che li collega. Questa formula fu dedotta da Einstein da condizioni molto generali di equilibrio termico e mantiene la sua validità anche alla luce degli sviluppi della fisica successivi al 1917. La teoria di Einstein non fornisce però una espressione esplicita per i coefficienti  $A$  e  $B$ . Il calcolo di questi coefficienti richiede la meccanica quantistica.

Consideriamo un atomo in interazione con il campo elettromagnetico e limitiamo la nostra trattazione alla cosiddetta *approssimazione di dipolo*, che è valida ogniqualvolta la lunghezza d'onda della radiazione è molto maggiore del diametro dell'atomo. Quindi considereremo il seguente operatore di interazione:

$$V = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}, \quad (11.20)$$

dove  $\mathbf{D}$  è l'operatore momento di dipolo dell'atomo e  $\mathbf{E}$  è l'operatore campo elettrico (11.3) calcolato nella posizione dell'atomo. L'approssimazione di dipolo è adeguata se la variazione del campo elettrico nella regione occupata dall'atomo è trascurabile e si può trascurare il campo magnetico.

### 11.2.1 Emissione stimolata

Nel processo di emissione stimolata un'onda elettromagnetica di una frequenza specifica  $\omega$  può interagire con l'atomo nello stato eccitato  $|i\rangle$  di energia  $E_i$ , facendolo decadere in uno stato  $|f\rangle$  di minore energia  $E_f$ . Il calcolo del tasso di transizione di questo processo può essere fatto ad un livello elementare trattando il campo elettromagnetico come un campo esterno classico che agisce per un intervallo di tempo limitato  $0 < t < T$ . Questo significa che possiamo trascurare  $H_{\text{em}}$  nella (11.26) e considerare quindi l'hamiltoniana

$$H' = H_{\text{at}} + V,$$

con

$$V = \begin{cases} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_0 (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) & \text{per } 0 < t < T \\ 0 & \text{per } t < 0, t > T \end{cases} \quad (11.21)$$

La probabilità  $P_{i \rightarrow f}(T)$  che il sistema sia trovato in  $|i\rangle$  al tempo  $t > T$  se al tempo 0 era in  $|f\rangle$  è data dalla (9.103),

$$P_{i \rightarrow f}(T) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^T \langle f | V_{\text{int}}(t) | i \rangle dt \right|^2 \quad (11.22)$$

Gli elementi di matrice nell'integrale sono

$$\begin{aligned} \langle f | V_{\text{int}}(t) | i \rangle &= \langle f | e^{itH_{\text{at}}/\hbar} V e^{-itH_{\text{at}}/\hbar} | i \rangle = e^{i\omega_{fi}t} \langle f | V | i \rangle \\ &= [e^{i(\omega_{fi}-\omega)t} + e^{i(\omega_{fi}+\omega)t}] \mathbf{E}_0 \cdot \langle f | \mathbf{D} | i \rangle \end{aligned}$$

dove  $\omega_{fi} = \omega_i - \omega_f$ .

L'integrale (11.22) è quindi facilmente calcolato e la sua dipendenza da  $T$  è data dalla funzione

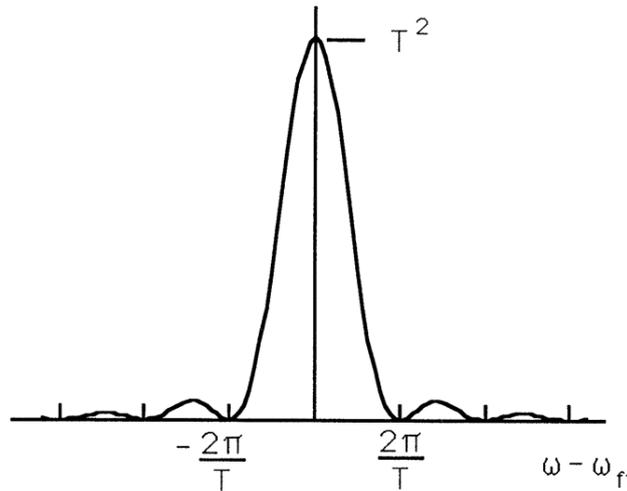
$$\int_0^T e [e^{i(\omega_{fi}-\omega)t} + e^{i(\omega_{fi}+\omega)t}] dt = \frac{e^{i(\omega_{fi}-\omega)T} - 1}{i(\omega_{fi}-\omega)} + \frac{e^{i(\omega_{fi}+\omega)T} - 1}{i(\omega_{fi}+\omega)}$$

Consideriamo il comportamento di questa funzione per  $|\omega T| \gg 1$ . A meno che i denominatori non si annullino, questa funzione rimane limitata quando  $T$  aumenta. Ma se  $\omega_{fi} - \omega \rightarrow 0$  il primo termine cresce proporzionalmente a  $T$  e se  $\omega_{fi} + \omega \rightarrow 0$  è il secondo termine a crescere proporzionalmente a  $T$ . Queste sono entrambe *condizioni di risonanza*. Se  $\omega > 0$ , allora la prima di queste,  $\omega = \omega_{fi}$ , è la condizione per l'*assorbimento risonante* di energia da parte dell'atomo, e la seconda è la condizione per l'*emissione risonante* di energia.

Vicino alla risonanza si può tenere solo il termine dominante. Così se consideriamo il caso di assorbimento risonante, la probabilità diventa (per  $t > T$ )

$$\begin{aligned} P_{i \rightarrow f}(T) &= \frac{1}{\hbar^2} \left| \frac{e^{i(\omega_{fi}-\omega)T} - 1}{i(\omega_{fi}-\omega)} \right|^2 |\mathbf{E}_0 \cdot \langle i | \mathbf{D} | f \rangle|^2 \\ &= \left\{ \frac{\sin \left[ \frac{1}{2}(\omega - \omega_{fi})T \right]}{\frac{1}{2}(\omega - \omega_{fi})} \right\}^2 |\mathbf{E}_0 \cdot \langle f | \mathbf{D} | i \rangle|^2 \end{aligned} \quad (11.23)$$

La funzione di  $T$  che compare in questa formula è raffigurata nella figura sotto.



L'altezza del picco è  $T^2$ , la larghezza è proporzionale a  $1/T$  e l'area sotto la curva è  $2\pi T$ . La maggior parte dell'area è sotto al picco centrale e trascurando i massimi secondari possiamo dire che la probabilità di assorbimento è significativa solo se  $|\omega_{fi} - \omega| < 2\pi/T$ . Quindi, se passiamo al limite di  $T$  molto grande, possiamo sostituire questa funzione con  $2\pi T\delta(\omega - \omega_{fi})$ .

Se la radiazione non è polarizzata, possiamo mediare su tutte le direzioni di  $\mathbf{E}_0$  e sostituire  $|\mathbf{E}_0 \cdot \langle b|\mathbf{D}|i\rangle|^2$  con  $(1/3)|\mathbf{E}_0|^2 |\langle b|\mathbf{D}|i\rangle|^2$ . Inoltre, il campo elettrico nella (11.21) è  $\mathbf{E} = 2\mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$ , cosicché la media di  $|\mathbf{E}|^2$  su un ciclo di oscillazione è  $2|\mathbf{E}_0|^2$ . Quindi è appropriato sostituire  $|\mathbf{E}|_0^2$  con  $(1/2)u_\omega d\omega$ , dove  $u_\omega$  è l'energia mediata nel tempo per unità di  $\omega$ . In questo modo otteniamo il tasso di transizione per assorbimento

$$\Gamma = \frac{1}{T} \int \frac{1}{\hbar^2} 2\pi T \delta(\omega - \omega_{fi}) \frac{1}{6} u_\omega d\omega |\langle f|\mathbf{D}|i\rangle|^2 = \frac{\pi}{3\hbar^2} u_{\omega_{fi}} |\langle f|\mathbf{D}|i\rangle|^2 \quad (11.24)$$

il confronto con la definizione del coefficiente  $B$  di Einstein ci porta a concludere che

$$B = \frac{\pi}{3\hbar^2} |\langle f|\mathbf{D}|i\rangle|^2 \quad (11.25)$$

Il tasso di trasmissione per emissione stimolata è lo stesso per l'assorbimento.

### 11.2.2 Emissione spontanea

È ben noto che un atomo in uno stato eccitato emetterà spontaneamente radiazioni e ritornerà al suo stato fondamentale. Questo fenomeno non è predetto dal modello considerato sopra in cui solo la materia viene trattata come un sistema quantistico, ma la radiazione viene trattata come un campo classico esterno. Tuttavia, emerge naturalmente da un modello in cui anche il campo elettromagnetico è trattato come sistema quantistico, e l'hamiltoniano del sistema è della forma

$$H' = H_{\text{at}} + H_{\text{em}} + V, \quad (11.26)$$

dove  $H_{\text{at}}$  è l'hamiltoniano dell'atomo e  $H_{\text{em}}$  è l'hamiltoniano del campo elettromagnetico (11.6). Questi due operatori commutano dal momento che operano su diversi gradi di libertà. Se non ci fosse interazione tra l'atomo e il campo, gli stati stazionari del sistema sarebbero della forma  $|\psi\rangle = |\text{atomo}\rangle \otimes |\text{campo}\rangle$ , che è un autovettore sia di  $H_{\text{at}}$  che di  $H_{\text{em}}$ . Tuttavia il termine di interazione  $V$  non commuta con  $H_{\text{at}}$  e con  $H_{\text{em}}$ , quindi un prodotto di autovettori di  $H_{\text{at}}$  e  $H_{\text{em}}$  non è autovettore di  $H$  e non rappresenta uno stato stazionario. Come prima, limitiamo la trattazione all'approssimazione di dipolo  $V = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$ , dove  $\mathbf{D}$  è l'operatore momento di dipolo dell'atomo e  $\mathbf{E}$  è l'operatore campo elettrico (11.3) calcolato nella posizione dell'atomo (in accordo con l'approssimazione di dipolo).

Calcoliamo il tasso di transizione spontanea all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni utilizzando la regola d'oro di Fermi

$$\Gamma_s = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle|^2 n(\epsilon_f) \quad (11.27)$$

Questa formula si ricava sotto l'assunzione che la perturbazione agisca per un certo tempo  $T$ , prendendo poi il limite per  $T \rightarrow \infty$ . Possiamo pensare di poterla utilizzare per un'interazione che è sempre presente e non può essere accesa o spenta. Il fattore  $n(\epsilon_f)$  è la densità di stati finali per unità di energia. Il nostro sistema include il campo elettromagnetico, i cui stati sono continui, e l'atomo i cui stati sono discreti, quindi  $n(\epsilon_f)$  sarà la densità di stati fotonici. Se i modi del campo sono confinati dentro una cavità di volume  $V$ , ci sarà

un valore permesso  $\mathbf{k}$  in una porzione dello spazio dei  $k$  il cui volume è  $(2\pi)^3/V$  (vedere sezione 7.3.5). Quindi la densità di stati fotonici per unità di energia è

$$n(\epsilon_f) = 2 \times V(2\pi)^{-3} \times 4\pi k^2 \times \frac{dk}{d\epsilon} = \frac{V\omega^2}{\pi^2 \hbar c^3} \quad (11.28)$$

Il fattore 2 iniziale tiene conto dei due stati di polarizzazione; abbiamo introdotto la frequenza  $\omega = c|\mathbf{k}|$ , e l'energia del fotone  $\epsilon = \hbar\omega$  (la (11.28) è semplicemente la (7.163) per  $d\omega = d\epsilon/\hbar$ .)

Consideriamo come stato iniziale  $|\Psi_i\rangle = |i\rangle \otimes |0\rangle$ , dove  $|i\rangle$  è lo stato iniziale atomico, e  $|0\rangle$  è lo stato a zero fotoni del campo elettromagnetico. Lo stato finale nella formula (11.27) sarà della forma  $|\Psi_f\rangle = |f\rangle \otimes |n_m = 1\rangle$ , dove  $|f\rangle$  è lo stato finale dell'atomo, e  $|n_m = 1\rangle$  è uno stato a singolo fotone tale che la condizione  $\epsilon_i - \epsilon_f = \hbar\omega$  di conservazione dell'energia sia soddisfatta.<sup>1</sup> Quindi l'elemento di matrice al quadrato è

$$|\langle\Psi_f|V|\Psi_i\rangle|^2 = \frac{\hbar\omega}{2} |\langle f|\mathbf{D}\cdot\mathbf{u}_m|i\rangle|^2 \quad (11.29)$$

e quindi

$$\Gamma_s = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{\hbar\omega}{2} |\langle f|\mathbf{D}\cdot\mathbf{u}_m|i\rangle|^2 \frac{V\omega^2}{\pi^2 \hbar c^3} = \frac{\omega^3}{\pi \hbar c^3} |\langle f|\mathbf{D}|i\rangle|^2 \frac{V}{3} |\mathbf{u}_m|^2 \quad (11.30)$$

Il fattore  $1/3$  proviene dalla media angolare di  $(\mathbf{D}\cdot\mathbf{u}_m)^2$ . Se le funzioni modali  $\mathbf{u}_m(\mathbf{x})$  sono onde piane, come è appropriato per un atomo che irradia nello spazio vuoto, allora abbiamo  $|\mathbf{u}_m|^2 = V^{-1}$ . Allora il tasso di emissione spontanea diviene

$$\Gamma_s = \frac{\omega^3}{3\pi \hbar c^3} |\langle f|\mathbf{D}|i\rangle|^2 = A \quad (11.31)$$

Quindi la relazione di Einstein (7.195) risulta verificata.

### 11.2.3 Rivelatori di fotoni

Essenzialmente, un rivelatore fotoelettrico consiste in un atomo che può essere ionizzato dall'assorbimento di un fotone. In questa sezione calcoleremo la probabilità di ionizzazione al primo ordine in teoria delle perturbazioni, utilizzando lo stesso hamiltoniano (11.26) in approssimazione di dipolo, cioè con  $V = -\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}$ . Assumiamo che a  $t = 0$  il rivelatore atomico sia preparato in uno stato  $|i\rangle$  non correlato con lo stato iniziale del campo elettromagnetico  $|\Phi_i\rangle$ , per cui il vettore di stato iniziale del sistema è

$$|\Psi_i\rangle = |i\rangle \otimes |\Phi_i\rangle. \quad (11.32)$$

Siccome il nostro obiettivo consiste nel misurare qualcosa che riguarda il campo, dobbiamo ammettere che lo stato iniziale del campo  $|\Phi_i\rangle$  sia arbitrario.

Sia  $\Psi(t)$  lo stato del sistema al tempo  $t$  e  $\Psi_f = |f\rangle \otimes |\Phi_f\rangle$  un possibile stato finale, ortogonale a  $|a\rangle \otimes |\Phi_i\rangle$ . A questo riguardo, si osservi che per garantire l'ortogonalità, e quindi usare la formula (9.102) per il calcolo della probabilità di transizione  $\Psi_i \rightarrow \Psi_f$ , è sufficiente che  $|f\rangle$  sia ortogonale a  $|i\rangle$ , senza porre alcun vincolo sullo stato finale del campo. Risulta tuttavia assumere per il momento che  $\Phi_f$  sia un autostato dell'hamiltoniano del

<sup>1</sup>La condizione di conservazione dell'energia è implicita nella (11.27) ed appare esplicitamente nella sua derivazione.

campo. Inoltre, se assumiamo che  $|i\rangle$  e  $|f\rangle$  siano autostati dell'hamiltoniano atomica la loro ortogonalità è garantita. Allora, possiamo applicare la formula (9.103), cioè

$$P_{\Psi_i \rightarrow \Psi_f}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t \langle \Psi_f | V_{\text{int}}(t') | \Psi_i \rangle dt' \right|^2 \quad (11.33)$$

per la probabilità di transizione all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni.

L'operatore  $V_{\text{int}}(t')$  nell'integrale è  $-\mathbf{D}(t) \cdot \mathbf{E}(t)$ , dove l'evoluzione degli operatori è quella libera, cioè

$$\mathbf{E}(t) = e^{iH_{\text{em}}t/\hbar} \mathbf{E} e^{-iH_{\text{em}}t/\hbar}, \quad \mathbf{D}(t) = e^{iH_{\text{at}}t/\hbar} \mathbf{D} e^{-iH_{\text{at}}t/\hbar} \quad (11.34)$$

Abbiamo così

$$\begin{aligned} \langle \Psi_f | V_{\text{int}}(t) | \Psi_i \rangle &= -\langle f | \otimes \langle \Phi_f | \mathbf{D}(t) \cdot \mathbf{E}(t) | i \rangle \otimes | \Phi_i \rangle \\ &= \langle f | e^{iH_{\text{at}}t/\hbar} \mathbf{D} e^{-iH_{\text{at}}t/\hbar} | i \rangle \cdot \langle \Phi_f | \mathbf{E}(t) | \Phi_i \rangle \\ &= e^{i(\omega_f - \omega_i)t} \langle f | \mathbf{D} | i \rangle \cdot \langle \Phi_f | \mathbf{E}(t) | \Phi_i \rangle \end{aligned}$$

Quindi l'ampiezza di transizione nella (11.33) è

$$\int_0^t \langle \Psi_f | V_{\text{int}}(t') | \Psi_i \rangle dt' = \langle f | \mathbf{D} | i \rangle \cdot \int_0^t e^{i\omega_{fi}t'} \langle \Phi_f | \mathbf{E}(t') | \Phi_i \rangle dt' \quad (11.35)$$

dove  $\omega_{fi} = \omega_f - \omega_i$ .

Ora, l'operatore campo elettrico (11.3) è costituito da due parti,  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}^{(-)}(t) + \mathbf{E}^{(+)}(t)$ , dove

$$\mathbf{E}^{(-)}(t) = i \sum_{\mathbf{M}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{M}}}{2}} a_{\mathbf{M}}^* e^{i\omega_{\mathbf{M}}t} \mathbf{u}_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) \quad (11.36)$$

$$\mathbf{E}^{(+)}(t) = -i \sum_{\mathbf{M}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{M}}}{2}} a_{\mathbf{M}} e^{-i\omega_{\mathbf{M}}t} \mathbf{u}_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) \quad (11.37)$$

La prima è la componente a *frequenza negativa* e la seconda, la componente a *frequenza positiva*. È evidente che l'ampiezza di transizione (11.35) contiene la componente di Fourier del campo alla frequenza  $\omega = \omega_{fi}$  (nel limite di grandi tempi  $t$ ). Se l'atomo avesse solo due stati, si comporterebbe come un rivelatore unicamente a questa frequenza particolare. In un vero rivelatore fotoelettrico, lo stato iniziale  $|i\rangle$  è lo stato fondamentale dell'atomo, e lo stato finale  $|f\rangle$  dell'atomo ionizzato è in un continuo, quindi abbiamo  $\omega_{fi} > 0$ . L'integrale nella (11.35) sarà dominato dalle componenti del campo elettrico di frequenza vicina a  $\omega_{fi}$ . Il contributo delle componenti a frequenza negativa dell'operatore campo elettrico all'integrando sono funzioni di  $t'$  rapidamente oscillanti e il loro contributo netto all'integrale è molto piccolo. In ogni misurazione ottica il tempo di osservazione sarà molto più lungo del periodo di oscillazione della radiazione, ovvero  $\omega_{fi}t \gg 1$ , è quindi una buona approssimazione trascurare il contributo delle frequenze negative dalla (11.35). Pertanto solo la componente a frequenza positiva (operatore di distruzione) dell'operatore campo elettrico contribuisce significativamente alla probabilità di ionizzazione. Questo fatto può essere interpretato pensando che un atomo nel suo stato fondamentale può solo assorbire radiazione, annichilendo un fotone, ma non può emettere un fotone. Quindi rimpiazziamo l'operatore campo elettrico  $\mathbf{E}(t)$  con la sua componente di frequenza positiva  $\mathbf{E}^{(+)}(t)$  la formula per la probabilità di transizione (11.33) diventa

$$P_{\Psi_i \rightarrow \Psi_f}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \sum_{j=1}^3 \langle f | D_j | i \rangle \int_0^t e^{i\omega_{fi}t'} \langle \Phi_f | E_j^{(+)}(t') | \Phi_i \rangle dt' \right|^2 \quad (11.38)$$

La (11.38) fornisce (al prim'ordine) la probabilità di transizione verso un certo stato particolare del sistema *atomo+campo*. Ma ciò che sarà rivelato sarà solo lo stato dell'atomo, non del campo, dato che è solo tramite i suoi effetti sulla materia che noi possiamo ottenere informazioni sul campo. Quindi sommiamo la probabilità di transizione su tutti gli stati finali del campo. Sia  $M(f)$  la probabilità che un fotoelettrone, eccitato allo stato  $f$ , sia registrato dagli strumenti di misura. (Questo fattore tiene conto delle amplificazioni necessarie e dell'elettronica che noi non stiamo considerando.) Allora la probabilità al tempo  $t$  che un tale evento sia avvenuto e sia stato registrato dal nostro apparato è

$$P_{i \rightarrow f}(t) = M(f) \sum_{\Phi_f} P_{\Psi_i \rightarrow \Psi_f}(t) \quad (11.39)$$

Questa è la probabilità che una transizione  $i \rightarrow f$  dell'atomo sia avvenuta e sia stata registrata, indipendentemente dallo stato finale del campo. La dipendenza di questa probabilità dal campo elettromagnetico si manifesta chiaramente attraverso la quantità

$$\begin{aligned} \sum_{\Phi_f} \overline{\langle \Phi_f | E_j^{(+)}(t'') | \Phi_i \rangle \langle \Phi_f | E_k^{(+)}(t') | \Phi_i \rangle} &= \sum_{\Phi_f} \langle \Phi_i | E_j^{(-)}(t'') | \Phi_f \rangle \langle \Phi_f | E_k^{(+)}(t') | \Phi_i \rangle \\ &= \langle \Phi_i | E_j^{(-)}(t'') E_k^{(+)}(t') | \Phi_i \rangle \end{aligned}$$

Dove abbiamo usato la relazione  $[E_\mu^{(+)}]^* = E_\mu^{(-)}$ . Osserviamo inoltre che un *rivelatore a banda larga* non è in grado di discriminare il particolare stato finale  $f$  dell'elettrone, dunque la probabilità che esso sia stato registrato nel tempo  $t$ , cioè la *probabilità di rivelazione* dell'elettrone, è

$$P(t) = \int P_{i \rightarrow f}(t) n(\epsilon_f) d\epsilon_f \quad (11.40)$$

dove  $n(\epsilon_f)$  è la densità di stati disponibile al fotoelettrone di energia  $\epsilon_f = \epsilon_i + \hbar\omega_{fi}$ .

Combinando le relazioni ottenute, concludiamo che la probabilità di rivelazione è data dalla formula

$$P(t) = \int_0^t \int_0^t \sum_{j,k} s_{kj}(t' - t'') \langle E_j^{(-)}(t'') E_k^{(+)}(t') \rangle dt' dt'' \quad (11.41)$$

In questa formula entrano una funzione che caratterizza il rivelatore e una funzione che dipende dallo stato del campo elettrico. Le caratteristiche del rivelatore sono sintetizzate nella *funzione di sensibilità*,

$$s_{kj}(t' - t'') = \frac{1}{\hbar^2} \int M(f) \langle f | D_k | i \rangle \overline{\langle f | D_j | i \rangle} e^{i\omega_{fi}(t' - t'')} n(\epsilon_f) d\epsilon_f, \quad (11.42)$$

che determina la selettività del rivelatore rispetto sia alla frequenza sia alla polarizzazione della radiazione. Lo stato del campo entra in gioco attraverso la *funzione di correlazione*  $\langle E_j^{(-)}(t'') E_k^{(+)}(t') \rangle$ . Se lo stato iniziale del campo è lo stato puro  $|\Phi_i\rangle$ , come è stato assunto fino a ora, la funzione di correlazione è

$$\langle E_j^{(-)}(t'') E_k^{(+)}(t') \rangle = \langle \Phi_i | E_j^{(-)}(t'') E_k^{(+)}(t') | \Phi_i \rangle \quad (11.43)$$

Se lo stato iniziale del campo non è uno stato puro, ma è descritto da una matrice densità  $\rho = \sum_i \omega_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ , allora la funzione di correlazione sarà

$$\langle E_j^{(-)}(t'') E_k^{(+)}(t') \rangle = \text{Tr} \left[ \rho E_j^{(-)}(t'') E_k^{(+)}(t') \right] \quad (11.44)$$

La forma generale (11.41) della probabilità di rivelazione è valida indipendentemente dalla natura dello stato del campo. Dato che  $E_k^{(+)}(t')$  contiene solo operatori di distruzione, la funzione di correlazione del campo si annullerà nello stato di vuoto. Più in generale, non conterrà alcun contributo dalle fluttuazioni di punto zero di ciascun modo del campo che si trovi nel suo stato fondamentale. Si osservi che questo non equivale a dire che le fluttuazioni di punto zero non hanno effetti fisici, ma solo che questi non possono essere rivelati dall'assorbimento di fotoni.

È evidente dalla (11.41) che la probabilità di assorbire un fotone a un certo istante  $t$  non dipende solamente dal campo al tempo  $t$ , ma dai campi considerati in un intervallo di tempo che dipende dalla natura dell'apparato di misura. Se l'integrando della (11.42) fosse indipendente dalla frequenza (o dall'energia), fatta eccezione per il fattore  $e^{i\omega_{fi}(t'-t')}$ , allora la funzione di sensibilità  $s_{jk}(t'-t'')$  sarebbe proporzionale a  $\delta(t'-t'')$ , e la probabilità non coinvolgerebbe più la correlazione di campi a due tempi diversi. Questo limite ideale è rigorosamente impossibile poiché, come anticipato prima, solo le frequenze positive ( $\omega_{fi} > 0$ ) corrispondono all'assorbimento di fotoni, e tutte le frequenze da  $-\infty$  a  $+\infty$  sarebbero necessarie per formare una delta funzione del tempo. Tuttavia, nella pratica, questa limitazione può essere spesso sorvolata. Scriviamo la funzione di sensibilità (11.42) come

$$s_{jk}(t'-t'') = \int e^{i\omega(t'-t'')} s_{jk}(\omega) d\omega \quad (11.45)$$

dove  $s_{\nu\mu}(\omega)$  è chiamata *funzione risposta in frequenza del rivelatore*. Allora la probabilità di rivelazione (11.41) può essere scritta come

$$P(t) = \sum_{j,k} \int_0^t dt' \int d\omega s_{kj}(\omega) \int_0^{t'} e^{i\omega_{fi}(t'-t'')} \langle E_j^{(-)}(t'') E_k^{(+)}(t') \rangle dt'' \quad (11.46)$$

Solitamente l'integrale più a destra sarà apprezzabilmente maggiore di zero solo su determinati intervalli di frequenza, che chiamiamo *larghezza di banda* della radiazione. Solo i valori di  $s_{kj}(\omega)$  su tale larghezza di banda potranno influenzare il valore di  $P(t)$ . Quindi, se la risposta in frequenza del rivelatore è pressoché costante sulla larghezza di banda della radiazione, possiamo sostituire  $s_{kj}(\omega)$  con un valore costante  $s_{kj}$ , e formalmente estendere l'integrazione su  $\omega$  da  $-\infty$  a  $+\infty$ . È chiaro che tutto ciò è equivalente a sostituire la funzione di sensibilità  $s_{kj}(t'-t'')$  con  $s_{kj}\delta(t'-t'')$ . Con questa approssimazione, otteniamo un *tasso di rivelazione* (probabilità per unità di tempo) uguale a

$$\Gamma(t) \equiv \frac{dP(t)}{dt} = \sum_{j,k} s_{kj} \langle E_j^{(-)}(t) E_k^{(+)}(t) \rangle \quad (11.47)$$

che dipende esclusivamente dalla funzione di correlazione del campo elettrico a un singolo tempo. È importante ricordare che questa espressione, è valida solo nell'ipotesi che la larghezza di banda del rivelatore sia più grande della larghezza di banda della radiazione.

### Rivelazione di $n$ fotoni

Possiamo generalizzare l'analisi svolta nelle pagine precedenti per trattare la rivelazione di  $n$  fotoni in  $n$  diversi punti spazio-temporali. Senza entrare nei dettagli, dovrebbe essere chiaro che questo comporta che si debbano considerare le componenti a frequenza positiva del campo elettrico nelle posizioni degli  $n$  atomi differenti che costituiscono il nostro rivelatore ideale, e l'ampiezza di transizione includerà  $\langle \psi_f | E^{(+)}(\mathbf{x}_n, t_n) \dots E^{(+)}(\mathbf{x}_1, t_1) | \psi_i \rangle$ . (Per semplicità omettiamo gli indici di polarizzazione.) Quando si eleva al quadrato e si

somma su tutti gli stati finali del campo questa ampiezza, avremo

$$\begin{aligned} \sum_f \langle \psi_i | E^{(-)}(\mathbf{x}_1, t_1) \dots E^{(-)}(\mathbf{x}_n, t_n) | \psi_f \rangle \langle \psi_f | E^{(+)}(\mathbf{x}_n, t_n) \dots E^{(+)}(\mathbf{x}_1, t_1) | \psi_i \rangle = \\ = \langle \psi_i | E^{(-)}(\mathbf{x}_1, t_1) \dots E^{(-)}(\mathbf{x}_n, t_n) E^{(+)}(\mathbf{x}_n, t_n) \dots E^{(+)}(\mathbf{x}_1, t_1) | \psi_i \rangle \end{aligned} \quad (11.48)$$

Quindi la probabilità di rivelare  $n$  fotoni in coincidenza (o in coincidenza ritardata) è direttamente in relazione con funzioni di correlazione del campo elettrico di ordine più alto.

#### 11.2.4 Funzioni di correlazione e interferenza

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto che la probabilità di assorbire uno o più fotoni è determinata da certe correlazioni del campo elettromagnetico. Adesso definiremo le funzioni di correlazione del campo in termini generali, e mostreremo quanto esse siano utili in diversi esperimenti di ottica. È conveniente adottare una notazione abbreviata, scrivendo  $E_j(\mathbf{x}_n, t_n) = E(x_n)$ . Da adesso in poi  $x_n$  contiene informazioni riguardo a variabili spaziali, temporali e di polarizzazione ( $\mathbf{x}_n, t_n, j$ ). Definiamo la *funzione di correlazione di grado  $n$*  come

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{2n}) \\ = \langle E^{(-)}(x_1) \dots E^{(-)}(x_n) E^{(+)}(x_{n+1}) \dots E^{(+)}(x_{2n}) \rangle \end{aligned} \quad (11.49)$$

Nella precedente sezione è stato mostrato che la probabilità di rivelare un fotone in ognuno dei punti spazio-temporali  $x_1, \dots, x_n$  è proporzionale alla funzione di correlazione diagonale  $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_n, \dots, x_1)$  con il fattore di proporzionalità dipendente dalla sensibilità del rivelatore. Se i nostri metodi di misura del campo elettromagnetico consistono solo nel conteggio di fotoni, allora le funzioni di correlazione diagonale rappresentano le uniche quantità misurabili. Tuttavia, se possiamo campionare e combinare i campi da due o più punti spazio-temporali, allora l'interferenza tra di loro ci permette, in effetti, di misurare funzioni di correlazione non diagonali.

#### Correlazioni al prim'ordine: interferenza

Il tasso di rivelazione di fotoni (di una certa polarizzazione non indicata esplicitamente nella notazione) nel punto spazio-temporale  $x = (\mathbf{x}, t)$  è proporzionale a

$$G^{(1)}(x; x) = \langle E^{(-)}(\mathbf{x}, t) E^{(+)}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{\hbar}{2} \sum_{MM'} \sqrt{\omega_M \omega_{M'}} u_M(\mathbf{x}) u_{M'}(\mathbf{x}) e^{i(\omega_M - \omega_{M'})t} \langle a_M^* a_{M'} \rangle$$

La forma spaziale della figura di interferenza è data dal prodotto delle funzioni modali,  $u_n(\mathbf{x}) u_m(\mathbf{x})$ , ed è la stessa della teoria elettromagnetica classica. Tuttavia, l'ampiezza della figura di interferenza rispecchia lo stato quantistico attraverso la quantità  $\langle a_n^* a_m \rangle$ . Ovviamente affinché si verifichi interferenza devono essere eccitati almeno due modi.

Un modello semplice ma molto utile consiste nel considerare due modi di onda piana. In questo modello, gli unici modi eccitati sopra lo stato fondamentale sono  $e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}}$  e  $e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}}$ , con  $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = \omega/c$ . Dato che i modi del campo nel loro stato fondamentale non contribuiscono alla probabilità di rivelazione dei fotoni; dobbiamo considerare solo quei termini degli operatori di campo che corrispondono a modi eccitati. Quindi possiamo sostituire gli operatori di campo con

$$\begin{aligned} E^{(+)}(\mathbf{x}, t) &= C(a_1 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} + a_2 e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}}) e^{-i\omega t} \\ E^{(-)}(\mathbf{x}, t) &= C(a_1^* e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} + a_2^* e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}}) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

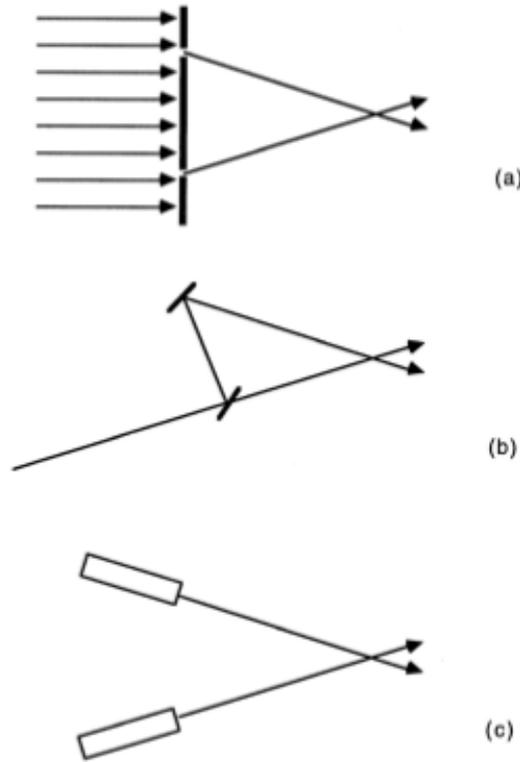


Figura 11.1: Diversi tipi di interferenza.

dove diverse costanti sono state inglobate nel fattore  $C$ . Il tasso di rivelazione per questo modello sarà proporzionale a

$$\begin{aligned} G^{(1)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, t) &= C^2 \{ \langle a_1^* a_1 \rangle + \langle a_2^* a_2 \rangle + \langle a_1^* a_2 \rangle e^{-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} + \langle a_2^* a_1 \rangle e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \} \\ &= C^2 \{ \langle a_1^* a_1 \rangle + \langle a_2^* a_2 \rangle + 2|\langle a_1^* a_2 \rangle| \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x} - \phi] \} \end{aligned} \quad (11.50)$$

dove la fase  $\phi$  proviene da  $\langle a_1^* a_2 \rangle = |\langle a_1^* a_2 \rangle| e^{i\phi}$ .

Alcune realizzazioni sperimentali del modello a due onde piane sono mostrati in Fig. 11.1. Nella figura più in alto (a), che descrive la diffrazione da doppia fenditura, i modi del campo sulla destra sarebbero in realtà onde cilindriche, ma lontano dalle fessure possono essere localmente approssimate da onde piane. In tutte e tre le figure, il modello non è applicabile a tutti i punti dello spazio, ma rappresenta una valida approssimazione locale nella regione in cui i due fasci si sovrappongono. Secondo la (11.50), il tasso di rivelazione può variare periodicamente nello spazio nella direzione di  $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ , che corrisponde con la direzione verticale nella figura.

**Box 11.2 — Stato a singolo fotone.** Consideriamo un vettore di stato per il campo elettromagnetico della forma

$$|\Psi_1\rangle = u|1,0\rangle + v|0,1\rangle, \quad |u|^2 + |v|^2 = 1, \quad (11.51)$$

dove il vettore  $|1,0\rangle = a_1^*|0\rangle$  descrive un fotone nel modo 1 e  $|0,1\rangle = a_2^*|0\rangle$  descrive un fotone nel modo 2. Il vettore di stato  $|\Psi_1\rangle$  è un autovettore dell'operatore numero totale di fotoni  $N = \sum_m a_m^* a_m$ , anche se il numero di fotoni in ogni modo è indefinito. È possibile anche scrivere  $|\Psi_1\rangle = b^*|0\rangle$ , dove l'operazione di creazione è  $b^* = ua_1^* + va_2^*$ .

Calcolando la (11.50) per lo stato  $|\Psi_1\rangle$ , otteniamo una probabilità di rivelazione dei fotoni proporzionale a

$$G^{(1)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, t) = C^2 \{|u|^2 + |v|^2 + 2\text{Re}[\bar{v}u e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}}]\} \quad (11.52)$$

La figura di interferenza, che si presenta con la stessa forma di quella dell'ottica classica, esiste anche per uno stato a singolo fotone. Ovviamente la figura di interferenza non può essere osservata rivelando un singolo fotone. Dobbiamo eseguire un insieme di misurazioni, preparare lo stato e rivelare il fotone in ogni ripetizione, e la distribuzione statistica dei fotoni rivelati assumerà la forma di una figura di interferenza.

**Box 11.3 — Stato a doppio fotone.** Consideriamo adesso il vettore di stato

$$|\Psi_2\rangle = u|2, 0\rangle + v|1, 1\rangle + w|0, 2\rangle, \quad |u|^2 + |v|^2 + |w|^2 = 1, \quad (11.53)$$

dove i tre vettori componenti descrivono due fotoni nel modo 1, un fotone in ogni modo, e due fotoni nel modo 2, rispettivamente. Calcolando (11.50) per questo vettore di stato, otteniamo una probabilità di rivelazione proporzionale a

$$G^{(1)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, t) = C^2 \left\{ |u|^2 + |v|^2 + |w|^2 + 2\text{Re}[\sqrt{2}(v^*u + w^*v)e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}}] \right\}$$

La figura di interferenza è generalmente simile a quella del Box 11.2; ci sono, però, due casi particolari che richiedono la nostra attenzione. Per  $u = w = 0, v = 1$ , ovvero nel caso in cui vi sia esattamente un fotone in ogni modo, non c'è interferenza. Per  $v = 0, u \neq 0, w \neq 0$  la figura di interferenza scompare nuovamente.

**Box 11.4 — Fasci laser indipendenti.** Il campo elettromagnetico prodotto da un laser a singolo modo, è descritto da un vettore di stato coerente  $|\alpha_M\rangle$ . Lo stato del campo prodotto da due fasci laser che si intersecano, è quindi descritto dal vettore di stato

$$|\Psi\rangle = |\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle \quad (11.54)$$

Questa espressione è appropriata poiché i laser sono indipendenti, e ogni laser eccita un modo del campo. L'equazione (11.50) può facilmente essere valutata facendo uso della (9.58), ottenendo

$$G^{(1)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, t) = C^2 \{| \alpha_1|^2 + | \alpha_2|^2 + 2\text{Re}[\bar{\alpha}_2 \alpha_1 e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}}]\} \quad (11.55)$$

Questo risultato è stato derivato assumendo che le frequenze dei laser siano uguali. Se consideriamo la possibilità che le loro frequenze siano diverse, allora l'esponenziale dipendente dalle variabili spaziali dovrebbe essere moltiplicato per il fattore dipendente dal tempo  $e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t}$ . Sebbene possiamo avere  $\omega_1 - \omega_2 = 0$  in media, le due frequenze saranno soggette a oscillazioni indipendenti casuali, che produrranno variazioni casuali nella figura di interferenza. Quindi la figura di interferenza può essere osservata solo se un numero sufficiente di fotoni può essere raccolto prima che il fattore di fase  $e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t}$  vari troppo. L'interferenza tra due fasci laser indipendenti è stata osservata utilizzando tecniche sperimentali molto sofisticate

**Commenti**

A pagina 9 del suo libro, Dirac afferma, *Each photon then interferes only with itself. Interference between two different photons never occurs.* Esaminiamo l'affermazione di Dirac alla luce dei tre esempi riportati sopra. L'interferenza nello stato a singolo fotone è chiaramente compatibile con la frase di Dirac. L'assenza di interferenza nello stato a due fotoni  $|1, 1\rangle$  è ancora consistente con il fatto che l'interferenza non si verifica tra due differenti fotoni. Ma cosa dire riguardo all'esempio (iii), che sembra implicare la presenza dell'interferenza tra i fotoni provenienti da due laser diversi? In questo caso l'affermazione di Dirac perde di significato. In sostanza, non sono i fotoni che interferiscono, né con se stessi né con altri fotoni, ma piuttosto la figura di interferenza è dovuta al campo elettromagnetico. Ricordiamo che sono proprio i campi elettrici e magnetici le variabili dinamiche fondamentali della teoria, e sono questi (e non le posizioni e gli impulsi dei fotoni) che sono rappresentati da operatori quanto-meccanici. Il fotone entra nella teoria come una quantità secondaria, in particolare come un'eccitazione elementare del campo. Siamo di fronte a un esempio in cui viene enfatizzata l'importanza primaria dei campi, e in cui non è d'aiuto considerare il campo semplicemente come un flusso di particelle.

## 12. Formalismo di seconda quantizzazione

### 12.1 Seconda quantizzazione del campo di Schrödinger

Consideriamo l'equazione di Schrödinger di singola particella,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \mathcal{V}(\mathbf{x}) \right] \Psi(\mathbf{x}, t), \quad (12.1)$$

trascurando per il momento lo spin. A differenza del solito, abbiamo usato l'apice "(1)" per enfatizzare che stiamo considerando una particella singola. Siano  $u_M = u_M(\mathbf{x})$  le autofunzioni dell'equazione di Schrödinger stazionaria

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \mathcal{V}(\mathbf{x}) \right] u_M = \varepsilon_M u_M \quad (12.2a)$$

associate agli autovalori  $\varepsilon_M = \hbar\omega_M$ . Vale la condizione di ortonormalità

$$\int \overline{u_M(\mathbf{x})} u_{M'}(\mathbf{x}) dV = \delta_{M, M'}. \quad (12.2b)$$

Supponiamo che queste funzioni formino una base ortonormale in  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ . Questo non può essere vero se lo spettro dell'hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \mathcal{V}(\mathbf{x}) \quad (12.3)$$

ha una parte continua (come generalmente è il caso, p.es. l'atomo di idrogeno). Tuttavia, possiamo sempre eliminare la parte continua dello spettro immaginando di contenere il sistema in una scatola (reale o fittizia), con opportune condizioni al contorno. Allora, con questa stipulazione, una generica soluzione di (12.1) è della forma

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \sum_M \alpha_M(t) u_M(\mathbf{x}), \quad \alpha_M(t) = \alpha_M e^{-i\omega_M t} \quad (12.4)$$

dove  $\alpha_M$  sono le coordinate di Fourier generalizzate rispetto alla base delle autofunzioni  $u_M(\mathbf{x})$ .

Nella terminologia usata nei capitoli precedenti,  $u_M(\mathbf{x})$  è una funzione modale e  $\omega_M = \varepsilon_M/\hbar$  è la corrispondente frequenza modale. Supponiamo adesso di applicare al campo di Schroedinger la stessa “cura” di seconda quantizzazione che abbiamo applicato al campo di Klein-Gordon e al campo di Maxwell. Che sistema fisico otteniamo?

### 12.1.1 Sistema a numero indefinito di bosoni non relativistici non interagenti tra loro

La “cura” di seconda quantizzazione consiste in quanto segue.

1. Le coordinate di Fourier generalizzate di ciascun modo normale  $\alpha_M$  sono promosse ad operatori di distruzione  $a_M$  che annichilano lo stato di vuoto  $|0\rangle$  e i loro complessi coniugati  $\bar{a}_M$  sono promossi ai corrispondenti aggiunti  $a_M^*$ . Valgono le relazioni

$$a_M|0\rangle = 0 \quad \text{per tutti gli } M, \quad \langle 0|0\rangle = 1 \quad (12.5a)$$

$$[a_M, a_{M'}^*] = \delta_{MM'} \quad [a_M, a_{M'}] = [a_M^*, a_{M'}^*] = 0 \quad (12.5b)$$

dove  $[A, B] = AB - BA = [A, B]$  è l'usuale commutatore. Si noti che la prima riga delle (12.5) è semplicemente la *definizione* dello stato di vuoto per gli operatori di creazione e distruzione, mentre le relazioni della seconda riga fissano le proprietà algebriche di questi operatori e sono usualmente dette “CCR” (canonical commutation relations). Queste relazioni definiscono univocamente lo spazio degli stati del sistema  $\mathcal{F}$ , secondo la costruzione che illustreremo sotto.

2. Il campo “classico” (12.4) è promosso a operatore in rappresentazione di Heisenberg in (un dominio di)  $\mathcal{F}$ ,

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_M a_M(t) u_M(\mathbf{x}), \quad a_M(t) = a_M e^{-i\omega_M t} \quad (12.6a)$$

con aggiunto

$$\psi(\mathbf{x}, t)^* = \sum_M a_M^*(t) \overline{u_M(\mathbf{x})}, \quad a_M^*(t) = a_M^* e^{i\omega_M t} \quad (12.6b)$$

(in un opportuno dominio di  $\mathcal{F}$ ).

3. La funzione di Hamilton del campo “classico” diventa l'hamiltoniano del sistema

$$H = \int \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi + \mathcal{V} \psi^* \psi \right] dV = \int \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \psi^* \Delta \psi + \mathcal{V} \psi^* \psi \right] dV \quad (12.7a)$$

come operatore in (un dominio di)  $\mathcal{F}$ , che definisce l'evoluzione temporale del sistema in termini del gruppo ad un parametro

$$U_t = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \quad (12.7b)$$

Il punto 1 definisce lo spazio degli stati del sistema; il punto 2 il mattone fondamentale (il campo) per definire la dinamica del sistema data nel punto 3. In breve, il sistema quantistico è completamente definito; ma prima di vedere nel dettaglio in che modo, introduciamo l'operatore numero e mostriamo che l'hamiltoniano  $H$  può essere riscritta in una forma semplice.

**Spazio degli stati**

Gli operatori

$$N_M \equiv a_M^* a_M \quad \text{e} \quad N \equiv \sum_M a_M^* a_M = \sum_M N_M \quad (12.8)$$

sono ben definiti come operatori hermitiani in un opportuno dominio di  $\mathcal{F}$ . Si osservi che se si sostituiscono gli sviluppi (12.6) in (12.7) e si tiene conto delle (12.2), si ottiene

$$H = \sum_M \varepsilon_M a_M^* a_M = \sum_M \varepsilon_M N_M \quad (12.9)$$

Dunque  $N$  e  $H$  commutano tra loro.

Osserviamo che come conseguenza delle CCR, gli operatori  $N_M$  per  $M$  differenti commutano:

$$[N_M, N_{M'}] = [a_M^* a_M, a_{M'}^* a_{M'}] = a_M^* [a_M, a_{M'}^*] a_M + a_{M'} [a_{M'}^*, a_M] a_{M'} = 0.$$

Si può quindi scegliere una rappresentazione di  $\mathcal{F}$  in cui gli operatori  $N_M$  sono diagonali per tutti gli  $M$ . Investighiamo l'effetto degli operatori  $a_M$  e  $a_M^*$  in una rappresentazione in cui gli operatori  $N_M$  sono diagonali. A tal fine, notiamo che valgono le seguenti regole di commutazione tra  $N_M$  e gli operatori  $a_M$  e  $a_M^*$ :

$$[a_M, N_M] = [a_M, a_M^* a_M] = a_M \quad (12.10a)$$

$$[a_M^*, N_M] = -a_M^* \quad (12.10b)$$

Procedendo come per il singolo oscillatore quantistico, si dimostra che gli autovalori di  $N_M$  sono 0 e tutti gli interi positivi; lo stato di vuoto  $|0\rangle$  è in corrispondenza con l'autovalore 0.

Adesso, si definiscono i vettori  $\Phi_{n_1, n_2, n_3, \dots}$  generati mediante azione ripetuta degli operatori di creazione sul vuoto

$$\Phi_{n_1, n_2, n_3, \dots} = (a_1^*)^{n_1} (a_2^*)^{n_2} (a_3^*)^{n_3} \dots |0\rangle \quad (12.11)$$

al variare di  $n_1, n_2, n_3, \dots$  tra tutti gli interi tra 0 e infinito. Questi stati, per successioni differenti  $n_1, n_2, n_3, \dots$ , sono ortogonali tra loro perché autovettori di  $N_1, N_2, N_3, \dots$  associati ad autovalori distinti. A questo punto si formano tutte le combinazioni lineari (finite e infinite) dei vettori  $\Psi_{n_1, n_2, n_3, \dots}$

$$\Psi = \sum_{n_1=0, n_2=0, n_3=0, \dots}^{\infty, \infty, \infty, \dots} c_{n_1, n_2, n_3, \dots} \Phi_{n_1, n_2, n_3, \dots}$$

richiedendo che la norma dei vettori indotta dal prodotto scalare

$$\langle \Psi, \Psi \rangle = \sum_{n_1=0, n_2=0, n_3=0, \dots}^{\infty, \infty, \infty, \dots} |c_{n_1, n_2, n_3, \dots}|^2$$

sia finita. Lo spazio così ottenuto è uno spazio di Hilbert, lo spazio  $\mathcal{F}$  degli stati.

Adesso, ripetiamo la costruzione di  $\mathcal{F}$  in maniera più dettagliata, passo per passo.

**Stato di vuoto** Lo stato  $|0\rangle$  è per definizione normalizzato a 1, cioè  $\langle 0|0\rangle = 1$ . Chiaramente,  $N|0\rangle = 0$ . Moltiplicando questo stato per un numero complesso arbitrario, si genera uno spazio unidimensionale  $\mathcal{H}_0$ . Sul vuoto non c'è altro da dire.

**Stati di particella singola** Partendo dal vuoto, si costruiscono gli stati di singola particella  $|1_M\rangle \equiv a_M^*|0\rangle$  a modo definito, che sono chiaramente sono ortonormali,

$$\langle 1_M | 1_{M'} \rangle = \langle 0 | a_M a_{M'}^* | 0 \rangle = \langle 0 | \delta_{M,M'} + a_{M'}^* a_M | 0 \rangle = \delta_{M,M'} \quad (12.12)$$

Da questi stati a modo definito si passa alle loro sovrapposizione lineari

$$|\Psi_1\rangle = \sum_M c_M |1_M\rangle$$

la cui totalità forma lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  di singola particella, il prodotto scalare tra due stati di questo tipo essendo

$$\langle \Psi_1 | \Psi_1 \rangle = \sum_{M',M} \overline{c_{M'}} c_M \langle 1_{M'} | 1_M \rangle = \sum_M \overline{c_M} c_M.$$

Si osservi che il prodotto scalare è completamente determinato dalle CCR. Un semplice calcolo fornisce

$$N|\Psi_1\rangle = \sum_{M'} a_{M'}^* a_{M'} \sum_M a_M^* |0\rangle = \sum_{M'} c_M a_{M'}^* (\delta_{M,M'} + a_M^* a_{M'}) |0\rangle = \sum_M c_M a_M^* |0\rangle = |\Psi_1\rangle. \quad (12.13)$$

Gli stati di particella singola sono dunque autostati dell'operatore  $N$  con autovalore 1. Poiché  $N$  è auto-aggiunto, e quindi gli autovettori associati ad autovalori distinti sono ortogonali, lo spazio  $\mathcal{H}$  di singola particella è ortogonale allo stato di vuoto.

**Stati di due particelle** Gli stati di due particelle a modi definiti, diciamo la particella “1” nel modo  $M'$  e la particella “2” nel modo  $M$ , sono ottenuti agendo due volte sul vuoto con gli operatori di creazione:  $|1_M, 1_{M'}\rangle \equiv a_M^* a_{M'}^* |0\rangle$  (conveniamo quindi che gli operatori di creazione siano ordinati da sinistra a destra rispetto alle etichette delle particelle). Tuttavia, per le CCR,  $a_M^* a_{M'}^* = a_{M'}^* a_M^*$ , per cui lo stato di due particelle è simmetrico per lo scambio delle etichette “1” e “2”: *le particelle sono bosoni* come peraltro avevamo già visto a proposito dei fononi.

Si osservi che per  $M \neq M'$  lo stato  $|1_M, 1_{M'}\rangle$  è correttamente normalizzato in quanto

$$\langle 1_M, 1_{M'} | 1_M, 1_{M'} \rangle = \langle 0 | a_{M'} a_M a_M^* a_{M'}^* | 0 \rangle = \langle 0 | a_{M'} a_{M'}^* a_M a_M^* | 0 \rangle = \langle 0 | (1 + a_{M'}^* a_{M'}) (1 + a_M^* a_M) | 0 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle = 1$$

Se invece  $M = M'$  si ha,

$$\langle 0 | (a_M)^2 (a_M^*)^2 | 0 \rangle = \langle 1_M | a_M a_M^* | 1_M \rangle = \langle 1_M | a_M^* a_M + 1 | 1_M \rangle = \langle 0 | 0 \rangle + \langle 1_M | 1_M \rangle = 2$$

Quindi gli stati normalizzati a due particelle nel modo  $M$  sono

$$|2_M\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_M^*)^2 |0\rangle$$

Dunque, come avevamo già visto per i fononi, gli stati

$$|2_M\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_M^*)^2 |0\rangle, \quad |1_M, 1_{M'}\rangle = a_M^* a_{M'}^* |0\rangle \quad (M \neq M')$$

descrivono stati di 2 particelle a modo definito.

Passando alle sovrapposizioni lineari di questi stati si ottengono gli stati  $\Psi_2$  la cui totalità forma lo spazio di Hilbert di due particelle. Questo spazio è il sotto-spazio

simmetrico di  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ , cioè lo spazio  $\mathcal{H}_{\text{sym}}^2$  dei vettori che sono completamente simmetrici per lo scambio di particelle. Per 2 particelle, è ovvio come costruire tali vettori:

$$|2_M\rangle = |1_M\rangle \otimes |1_M\rangle, \quad |1_M, 1_{M'}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1_M\rangle|1_{M'}\rangle + |1_{M'}\rangle|1_M\rangle) \quad (M \neq M')$$

Si osservi che nei prodotti tensori a secondo membro i ket sono ordinati da sinistra a destra rispetto alle etichette delle particelle:  $|a\rangle|b\rangle$  significa particella “1” nello stato  $|a\rangle$  e particella “2” ’ nello stato  $|b\rangle$ . Il prodotto scalare in  $\mathcal{H}_2$  è semplicemente quello ereditato da  $\mathcal{H}$  per prodotto tensore. Si osservi inoltre che gli stati  $\Psi_2$  sono autovettori di  $N$  con autovalore 2 (esercizio), per cui  $\mathcal{H}_{\text{sym}}^2$  è ortogonale sia a  $\mathcal{H}_0$  sia a  $\mathcal{H}$ .

**Stati di  $n$  particelle** Gli stati per  $n$  particelle, con  $n_1$  particelle nel modo 1,  $n_2$  nel modo  $n_2$  e così via sono

$$|n_1, n_2, n_3, \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! n_3! \dots}} (a_1^*)^{n_1} (a_2^*)^{n_2} (a_3^*)^{n_3} \dots |0\rangle, \quad \sum_i n_i = n \quad (12.14)$$

Il fattore di normalizzazione c’è per le ragioni spiegate nel caso di 2 particelle e la (12.14) non è altro che la naturale generalizzazione della nota formula (9.11) per gli stati eccitati dell’oscillatore armonico. La totalità degli stati associati ad ogni successione dei numeri  $n_1, n_2, n_3, \dots$  di occupazione dei modi, e tali che la loro somma sia  $n$ , forma una base ortonormale nello spazio degli stati di  $n$  particelle  $\mathcal{H}_{\text{sym}}^n$ . Denotando con  $\mathcal{H}^{\otimes n}$  prodotto tensore di  $\mathcal{H}$  con se stesso  $n$  volte, cioè

$$\mathcal{H}^{\otimes n} \equiv \underbrace{\mathcal{H} \otimes \dots \otimes \dots \otimes \mathcal{H}}_{n \text{ volte}},$$

e definendo il proiettore  $S_n$  da  $\mathcal{H}^{\otimes n}$  al suo sottospazio simmetrico, abbiamo

$$\mathcal{H}_{\text{sym}}^n = S_n(\mathcal{H}^{\otimes n})$$

Per maggiori dettagli sul proiettore  $S_n$ , si rimanda al box 12.1 sotto.

Notiamo che le funzioni d’onda  $\Psi_n$  in  $\mathcal{H}_{\text{sym}}^n$  sono autovettori dell’operatore  $N$  con autovalore  $n$ . Dunque gli spazi  $\mathcal{H}_{\text{sym}}^n$  e  $\mathcal{H}_{\text{sym}}^m$  per  $n \neq m$  sono ortogonali tra loro.

**Spazio di Fock** Sulla base delle considerazioni precedenti, lo spazio degli stati del sistema  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_B$ , con “B” che sta per “bosoni”, risulta decomposto nella somma ortogonale

$$\mathcal{F}_B = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_2^S \oplus \dots = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_{\text{sym}}^n \quad (12.15)$$

dove  $\mathcal{H}_{\text{sym}}^0 \equiv \mathcal{H}_0$  (lo spazio unidimensionale di vuoto) e  $\mathcal{H}_{\text{sym}}^1 \equiv \mathcal{H}$  (lo spazio di singola particella). Questa è la *rappresentazione di Fock* dello spazio degli stati.

$\mathcal{F}_B$  è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare  $\langle \bullet | \bullet \rangle$  ereditato dal prodotto scalare in  $\mathcal{H}$ . Un generico stato  $\Psi$  in  $\mathcal{F}_B$  può avere componenti nei vari settori  $\mathcal{H}_{\text{sym}}^n$  e ovviamente deve soddisfare la condizione che  $\langle \Psi | \Psi \rangle < \infty$ .

Osserviamo che valgono le relazioni

$$a_M^* |\dots, n_M, \dots\rangle = \sqrt{1 + n_M} |\dots, n_M + 1, \dots\rangle \quad (12.16a)$$

$$a_M |\dots, n_M, \dots\rangle = \sqrt{n_M} |\dots, n_M - 1, \dots\rangle \quad (12.16b)$$

del tutto analoghe a quelle del singolo oscillatore armonico. Queste formule mostrano chiaramente che  $a_M$   $a_M^*$  sono operatori illimitati e quindi definiti solo in un opportuno dominio in  $\mathcal{F}$ . È importante osservare che tutta la struttura dello spazio degli stati è determinata dalle CCR (12.5)

**Bosoni non relativistici**

Chiarita la struttura dello spazio degli stati, per comprendere quali sia il sistema fisico associato al campo di Schrödinger, consideriamo il settore di particella singola. Notiamo che gli stati a modo definito  $|1_M\rangle = a_M^*|0\rangle$  sono autostati dell'hamiltoniano (12.9) con autovalori  $\varepsilon_{M'} = \hbar\omega_M$ . Si ha infatti

$$H|1_M\rangle = \sum_{M'} \varepsilon_{M'} a_{M'}^* a_{M'} a_M^* |0\rangle = \sum_{M'} \varepsilon_{M'} a_{M'}^* (\delta_{M,M'} + a_M^* a_{M'}) |0\rangle = \varepsilon_M a_M^* |0\rangle = \varepsilon_M |1_M\rangle. \quad (12.17)$$

Quindi gli stati  $|1_M\rangle$  sono rappresentati dalle funzioni d'onda  $u_M = u_M(\mathbf{x})$ , cioè le funzioni modali, cioè, le autofunzioni dell'equazione di Schrödinger stazionaria (12.2).

Poiché  $H$  commuta con  $N$ , uno stato  $\Psi_1$  in  $\mathcal{F}$  che ha solo componenti nel settore di singola particella rimarrà confinato in quel settore e la sua dinamica sarà la dinamica di Schrödinger (12.4). Ritorniamo così al punto da cui siamo partiti: *ristretta al settore di singola particella, la dinamica generata dall'hamiltoniano  $H$  di seconda quantizzazione non è altro che la dinamica di una particella quantistica non relativistica in un campo esterno  $\mathcal{V}$  e quindi governata dall'hamiltoniano  $\mathcal{H}$  data dalla* (12.3)

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \mathcal{V}(\mathbf{x}) \equiv H^{(1)} \quad (12.18)$$

dove  $H^{(1)}$  è la restrizione di  $H$  al settore di singola particella.

Il passaggio a  $n$  particelle è intuitivamente chiaro: ristretta al settore  $n$  particelle, la dinamica generata dall'hamiltoniano  $H$  di seconda quantizzazione è semplicemente la dinamica di  $n$  bosoni non relativistici, non interagenti tra loro, e soggetti ad un campo esterno  $\mathcal{V}$  e quindi governata dall'hamiltoniano

$$H^{(1)} + H^{(2)} + \dots H^{(n)} \quad (12.19)$$

dove  $H^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , è l'hamiltoniano per la  $j$ -esima particella

$$H^{(j)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta^{(j)} + \mathcal{V}(\mathbf{x}_j)$$

Abbiamo detto “intuitivamente chiaro”, una spiegazione più rigorosa verrà data nella sezione 12.3.

Ritroviamo così un sistema ben noto dalla meccanica quantistica elementare, l'unica differenza è che il formalismo di seconda quantizzazione contempla stati iniziali con numero di particelle non definito. È per questa ragione che abbiamo intitolato questa sezione “Sistema a numero indefinito di bosoni non relativistici non interagenti tra loro”. Questo è il sistema fisico associato al campo di Schrödinger che otteniamo.

**12.1.2 Sistema a numero indefinito di fermioni non relativistici non interagenti tra loro**

Supponiamo adesso di apportare una sola modifica ai punti 1,2,3 all'inizio della sezione 12.1.1: sostituiamo le CCR (12.5b) con le CAR (canonical anti-commutation relations):

$$[a_M, a_{M'}^*]_+ = \delta_{MM'} \quad [a_M, a_{M'}]_+ = [a_M^*, a_{M'}^*]_+ = 0 \quad (12.20a)$$

dove  $[A, B]_+ = AB + BA$  è l'anticommutatore di due operatori. Tutto il resto rimane uguale. Che sistema fisico otteniamo? Credo che tutti abbiano intuito la risposta, ma procediamo con calma.

Nulla cambia per il vuoto, ma neanche per lo spazio di particella singola. Infatti, i cambiamenti di segno nelle (12.12), (12.13) e (12.17) sono ininfluenti:

$$\begin{aligned} \langle 1_M | 1_{M'} \rangle &= \langle 0 | a_M a_{M'}^* | 0 \rangle = \langle 0 | \delta_{M,M'} - a_{M'}^* a_M | 0 \rangle = \delta_{M,M'} \\ N | \Psi_1 \rangle &= \sum_{M'} a_{M'}^* a_{M'} \sum_M a_M^* | 0 \rangle = \sum_{M'} c_M a_{M'}^* (\delta_{M,M'} - a_M^* a_{M'}) | 0 \rangle = \sum_M c_M a_M^* | 0 \rangle = | \Psi_1 \rangle. \\ H | 1_M \rangle &= \sum_{M'} \varepsilon_{M'} a_{M'}^* a_{M'} a_M^* | 0 \rangle = \sum_{M'} \varepsilon_{M'} a_{M'}^* (\delta_{M,M'} - a_M^* a_{M'}) | 0 \rangle = \varepsilon_M a_M^* | 0 \rangle = \varepsilon_M | 1_M \rangle. \end{aligned}$$

Resta quindi valida la conclusione a cui siamo giunti sopra: *ristretta al settore di singola particella, la dinamica generata dall'hamiltoniano  $H$  di seconda quantizzazione non è altro che la dinamica di una particella quantistica non relativistica in un campo esterno  $\mathcal{V}$* . Tuttavia, il cambiamento di segno nelle relazioni di commutazione produce una modifica profonda nella struttura dello spazio degli stati a partire da due particelle.

Dalle CAR segue che  $(a_M^*)^2 = 0$ . Il che vuol dire che non possiamo aggiungere una particella al modo  $M$  se questo già contiene una particella. Le CAR contengono il principio di Pauli per i fermioni. Dunque, agendo sul vuoto con operatori di creazione che soddisfano le CAR, si otterranno vettori non nulli

$$|n_1, n_2, n_3, \dots\rangle = (a_1^*)^{n_1} (a_2^*)^{n_2} (a_3^*)^{n_3} \dots |0\rangle \quad (12.21)$$

se  $n_1, n_2, n_3, \dots$  assumono soltanto i valori 0 o 1 (in tal caso i vettori risultano automaticamente normalizzati non essendo possibili ripetizioni dello stesso stato).

Per comprendere la struttura di questi stati, consideriamo 2 particelle e usiamo la stessa convenzione che abbiamo usato per etichettare i bosoni:  $|1_M, 1_{M'}\rangle \equiv a_M^* a_{M'}^* |0\rangle$  significa particella "1" nel modo  $M'$  e la particella "2" nel modo  $M$ . Quindi, se scambiamo le etichette, lo stato cambia segno in quanto adesso  $a_M^* a_{M'}^* = -a_{M'}^* a_M^*$ . Le particelle sono dunque *fermioni*: gli stati sono antisimmetrici per lo scambio delle etichette di particella. Per 2 particelle gli stati a modo definito sono solo gli stati  $|1_M, 1_{M'}\rangle$ ,  $M \neq M'$ , non dandosi il caso di due particelle nello stesso modo.

Passando alle sovrapposizioni lineari di questi stati, al variare di  $M$  e  $M'$  tra tutti i modi (con  $M \neq M'$ ), si ottengono gli stati  $\Psi_2$  la cui totalità forma lo spazio di Hilbert di due particelle. Questo spazio è la parte anti-simmetrica dello spazio  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ , cioè  $\mathcal{H}_{\text{antisym}}^2 = A_2(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ , dove  $A_2$  è il proiettore sul sottospazio antisimmetrico di  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ . Questo si vede immediatamente mediante l'identificazione

$$|1_M, 1_{M'}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1_M\rangle \otimes |1_{M'}\rangle - |1_{M'}\rangle \otimes |1_M\rangle) \quad (M \neq M')$$

dove i ket sono ordinati da sinistra a destra rispetto alle etichette delle particelle secondo la stessa convenzione che abbiamo usato per i bosoni. Come per i bosoni, il prodotto scalare in  $\mathcal{H}_{\text{antisym}}^2$  è semplicemente quello ereditato da  $\mathcal{H}$  per prodotto tensore. Si osservi inoltre che gli stati  $\Psi_2$  sono autovettori di  $N$  con autovalore 2 (esercizio), per cui  $\mathcal{H}_{\text{antisym}}^2$  è ortogonale sia a  $\mathcal{H}_0$  sia a  $\mathcal{H}$ .

Gli stati a modo definito per  $n$  particelle, sono dati dai vettori (12.21) con  $\sum n_i = n$  e con ciascun  $n_i$  che assume solo i valori 0 o 1. Essi generano lo spazio degli stati

$$\mathcal{H}_{\text{antisym}}^n = A_n \mathcal{H}^{\otimes n}$$

cioè, il sottospazio anti-simmetrico del prodotto tensore di  $\mathcal{H}$  con se stesso  $n$  volte. Le funzioni d'onda  $\Psi_n$  in  $\mathcal{H}_{\text{sym}}^n$  sono ancora autovettori dell'operatore  $N$  con autovalore  $n$

(esercizio). Gli spazi  $\mathcal{H}_{\text{antisym}}^n$  e  $\mathcal{H}_{\text{antisym}}^m$  per  $n \neq m$  sono quindi ortogonali tra loro e lo spazio  $\mathcal{F}$  del sistema ha la struttura di Fock (12.22),

$$\mathcal{F} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_{\text{antisym}}^2 \oplus \dots = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_{\text{antisym}}^n, \quad (12.22)$$

con adesso “F” che sta per “fermioni” e con i diversi settori  $\mathcal{H}_{\text{antisym}}^n$  formati da stati antisimmetrici, cioè *stati che guadagnano un segno “meno” moltiplicativo per ogni scambio di etichetta di particella, vale a dire, per ogni scambio di operatori di creazione associati a modi differenti*. Per definizione,  $\mathcal{H}_{\text{antisym}}^0 = \mathcal{H}_0$  e  $\mathcal{H}_{\text{antisym}}^1 = \mathcal{H}$ .

La morale è la stessa che abbiamo tratto nel capoverso sotto l’equazione (12.17) con “fermione” che sostituisce “bosone”. Anche in questo caso è importante osservare che tutta la struttura dello spazio degli stati è determinata dalle CAR (12.20).

Un’osservazione finale. Notiamo che l’analogo delle relazioni (12.16) per i fermioni sono

$$a_M^* |\dots, n_M, \dots\rangle = \sqrt{1-n_M} (-1)^{n_s(M)} |\dots, n_M+1, \dots\rangle \quad (12.23a)$$

$$a_M |\dots, n_M, \dots\rangle = \sqrt{n_M} (-1)^{n_s(M)} |\dots, n_M-1, \dots\rangle \quad (12.23b)$$

dove  $n_s(M)$  è il numero di operatori di creazione con esponente non nullo che sono a sinistra di  $a_M^*$  nel secondo membro della (12.21). Dimostriamolo. Notiamo che il vettore

$$a_M^* |n_1, n_2, \dots, n_M, \dots\rangle = a_M^* (a_1^*)^{n_1} (a_2^*)^{n_2} \dots (a_M^*)^{n_M} \dots |0\rangle$$

sarà diverso da zero solo se  $n_M = 0$ ; in tal caso per spostare  $a_M$  nel posto che gli compete, dobbiamo fargli scavalcare tutti gli operatori che sono a sinistra di  $M$  e che hanno un numero di occupazione diverso da zero. Ad ogni scavalcamento si ha un’anticommutazione e quindi complessivamente si guadagna un fattore  $-1$  elevato al numero di operatori di creazione con esponente non nullo che sono a sinistra di  $M$ . Questo dimostra la (12.23a); la (12.23b) segue in quanto  $a_M$  è l’aggiunto di  $a_M^*$ .

Ovviamente, poiché  $\sqrt{1} = 1$  e  $\sqrt{0} = 0$ , potevamo evitare di usare la radice nelle (12.23). Lo abbiamo fatto solo per mettere in evidenza l’analogia formale con le relazioni bosoniche (12.16). Notiamo infine che le (12.23) mostrano che gli operatori fermionici  $a_M$   $a_M^*$  sono operatori limitati.

**Box 12.1 — Proiettori sui sottospazi simmetrici e antisimmetrici.** Sia  $u_M$ ,  $M = 1, \dots, \infty$  una qualunque base ortonormale in  $\mathcal{H}$  (non necessariamente quella delle funzioni modali). Allora

$$|u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle \dots |u_{M_n}\rangle, \quad M_k = 1, 2, \dots, \quad k = 1, \dots, N \quad (12.24)$$

è una base ortonormale in  $\mathcal{H}^{\otimes n} = \underbrace{\mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}}_{n \text{ volte}}$ . Il prodotto tensore è ordinato secondo l’etichetta di particella: lo stato (12.24) corrisponde alla particella 1 nello stato  $|u_{M_1}\rangle$ , la particella 2 nello stato  $u_{M_2}$  e così via.

Per definire i sottospazi simmetrico e antisimmetrico di  $\mathcal{H}^{\otimes n}$ , occorre richiamare alcune nozioni riguardanti il gruppo delle permutazioni di  $n$  oggetti; una generica permutazione sarà denotata con  $P$ . Questo gruppo ha  $n!$  elementi. Per esempio, per

$n = 3$  le permutazioni sono  $3! = 6$ :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \right\}.$$

il primo elemento è l'identità  $e$  del gruppo. La legge di composizione del gruppo consiste nel seguire le frecce, per esempio

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right\} \circ \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \right\}$$

L'inverso  $P^{-1}$  è quella permutazione tale che  $P \circ P^{-1} = P^{-1} \circ P = e$ . Per esempio, se

$$P = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right\}, \quad \text{allora} \quad P^{-1} = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right\} \quad (12.25)$$

Ogni permutazione  $P$  può essere espressa come un prodotto di trasposizioni, una trasposizione essendo lo scambio di due oggetti; una permutazione è pari se contiene un numero pari di trasposizioni e dispari altrimenti. Per esempio

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \right\} \circ \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \right\}$$

è pari, mentre

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \right\}$$

è dispari perché contiene una sola trasposizione.

Gli elementi del gruppo delle permutazioni di  $n$  oggetti hanno una rappresentazione naturale in  $\mathcal{H}^{\otimes n}$  in termini di operatori unitari. Dato  $P$ , si definisce l'operatore

$$U_P |u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle \cdots |u_{M_n}\rangle = |u_{M_{P^{-1}(1)}}\rangle |u_{M_{P^{-1}(2)}}\rangle \cdots |u_{M_{P^{-1}(n)}}\rangle, \quad (12.26)$$

che è chiaramente unitario (esercizio). Per esempio, se  $n = 3$  e  $|u_{M_1}\rangle$ ,  $|u_{M_2}\rangle$  e  $|u_{M_3}\rangle$  sono tre stati distinti e  $P$  è data dalla (12.25), allora

$$U_P |u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle |u_{M_3}\rangle = |u_{M_3}\rangle |u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle$$

La composizione di permutazioni  $P \circ P'$  è rappresentata dal prodotto degli operatori corrispondenti:

$$U_{P \circ P'} = U_P U_{P'}.$$

Poiché il gruppo è non commutativo, cioè in generale,  $P \circ P' \neq P' \circ P$ , i corrispondenti operatori, in generale, non commutano (fa eccezione il gruppo per  $n = 2$ , che contiene due soli elementi).

Abbiamo adesso il bagaglio minimo per definire il proiettore  $S_n$  da  $\mathcal{H}^{\otimes n}$  al sottospazio simmetrico  $\mathcal{H}_{\text{sym}}^n$ . Questo operatore è definito assegnandone l'azione sui vettori della base,

$$S_n |u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle \cdots |u_{M_n}\rangle = \frac{1}{n!} \sum_P U_P |u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle \cdots |u_{M_n}\rangle, \quad (12.27)$$

dove la somma è su tutte le permutazioni  $P$  di  $1, \dots, n$ . Verifichiamo che l'operatore  $S_n$  è un proiettore:

$$S_n^2 = \left( \frac{1}{n!} \sum_P U_P \right) = \left( \frac{1}{n!} \right)^2 \sum_P \sum_{P'} U_P U_{P'} = \left( \frac{1}{n!} \right)^2 \sum_P \sum_{P'} U_{P \circ P'}$$

Sommare  $U_{P \circ P'}$  su tutte le permutazioni  $P'$  per  $P$  fissato è equivalente a sommare su tutte le permutazioni, quindi

$$S_n^2 = \left( \frac{1}{n!} \right)^2 \sum_P \sum_{P'} U_{P'} = \left( \frac{1}{n!} \right)^2 n! \sum_{P'} U_{P'} = \frac{1}{n!} \sum_P U_P = S_n$$

Quindi  $S_n$  è un proiettore.

Gli stati

$$S_n |u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle \cdots |u_{M_n}\rangle = \frac{1}{n!} \sum_P P |u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle \cdots |u_{M_n}\rangle \quad (12.28)$$

formano una base ortogonale per il sottospazio simmetrico  $\mathcal{H}_{\text{sym}}^n$ . Se  $u_M$  sono le funzioni modali, questi vettori rappresentano gli stati a modo definito di  $n$  bosoni. Questi stati non sono normalizzati a uno. Per chiarire questo e far pratica con le nozioni introdotte, vediamo alcuni esempi.

Per  $n = 2$  ci sono solo 2 permutazioni possibili, una delle quali è l'identità, per cui se  $u_{M_1} \neq u_{M_2}$

$$S_2 |u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle = \frac{1}{2} (|u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle + |u_{M_2}\rangle |u_{M_1}\rangle),$$

Se poniamo  $u_{M_1} = u_{M_2} = u_M$  nella formula precedente, otteniamo

$$S_2 |u_M\rangle |u_M\rangle = \frac{1}{2} (2|u_M\rangle |u_M\rangle) = |u_M\rangle |u_M\rangle$$

in accordo col fatto che  $|u_M\rangle |u_M\rangle$  è già simmetrizzato e quindi,  $S_2$  non lo modifica (essendo il proiettore sul sottospazio simmetrico). Per  $n = 3$ , se  $u_{M_1} \neq u_{M_2} \neq u_{M_3}$

$$S_3 |u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle |u_{M_3}\rangle = \frac{1}{3!} (|u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle |u_{M_3}\rangle + |u_{M_2}\rangle |u_{M_3}\rangle |u_{M_1}\rangle + |u_{M_3}\rangle |u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle + |u_{M_2}\rangle |u_{M_1}\rangle |u_{M_3}\rangle + |u_{M_3}\rangle |u_{M_2}\rangle |u_{M_1}\rangle + |u_{M_1}\rangle |u_{M_3}\rangle |u_{M_2}\rangle)$$

Se ci sono ripetizioni, per esempio  $u_{M_1} = u_{M_2}$ , la somma a secondo membro contiene meno termini distinti, più precisamente i tre termini della seconda riga della formula precedente coincidono con i primi tre e quindi si ha

$$S_3 |u_{M_1}\rangle |u_{M_1}\rangle |u_{M_3}\rangle = \frac{1}{3!} (2!) (|u_{M_1}\rangle |u_{M_1}\rangle |u_{M_3}\rangle + |u_{M_1}\rangle |u_{M_3}\rangle |u_{M_1}\rangle + |u_{M_3}\rangle |u_{M_1}\rangle |u_{M_1}\rangle)$$

Si osservi che il fattore numerico in fronte alla somma è l'inverso del numero  $3!/2! = 3$  dei termini della somma.

Quest'ultima osservazione si generalizza alla somma a secondo membro nella (12.27): se  $u_{M_1}$  si ripete  $n_1$  volte,  $u_{M_2}$  si ripete  $n_2$  volte e così via, la somma contiene  $n!/(n_1!n_2!\dots)$  termini distinti e quindi la norma al quadrato del vettore a primo membro della (12.27) è

$$\|S_n |u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle \cdots |u_{M_n}\rangle\|^2 = \left(\frac{n_1!n_2!\cdots}{n!}\right)^2 \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots} = \frac{n_1!n_2!\cdots}{n!}$$

Allora i vettori

$$|u_{M_1}\rangle \otimes |u_{M_2}\rangle \otimes \cdots \otimes |u_{M_n}\rangle = \sqrt{\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots}} S_n |u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle \cdots |u_{M_n}\rangle, \quad (12.29)$$

per costruzione totalmente simmetrici, ortogonali tra loro e normalizzati a 1, sono una base ortonormale nello spazio simmetrico  $\mathcal{H}_{\text{sym}}^n$ .

È utile rappresentare questi stati in termini dei numeri di occupazione rispetto alla base delle funzioni modali. Conveniamo di denotare con  $|n_{M_1}, n_{M_2}, \dots, n_{M_s}\rangle$  lo stato in cui ci sono  $n_{M_1}$  particelle nel modo 1,  $n_{M_2}$  nel modo 2 e così via, omettendo lo 0 se un modo non è occupato;  $s$  è un numero tra 1 e  $n$

$$\sum_{j=1}^s n_{M_j} = n.$$

Allora i vettori (12.29) possono essere riscritti come

$$|n_{M_1}, n_{M_2}, \dots, n_{M_s}\rangle = \sqrt{\frac{n!}{n_{M_1}!n_{M_2}!\cdots n_{M_s}!}} S_n |u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle \cdots |u_{M_n}\rangle \quad (12.30)$$

Passiamo adesso ai fermioni. Il proiettore  $A_n$  da  $\mathcal{H}^{\otimes n}$  al sottospazio antisimmetrico  $\mathcal{H}_{\text{antisym}}^n$  è definito in modo analogo in termini dalla sua azione sui vettori della base, che è

$$A_n |u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle \cdots |u_{M_n}\rangle = \frac{1}{n!} \sum_P (-1)^P U_P |u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle \cdots |u_{M_n}\rangle \quad (12.31)$$

dove  $(-1)^P$  è la parità della permutazione che è uguale a 1 se la permutazione è pari e  $-1$  se la permutazione è dispari. Si lascia come esercizio la dimostrazione che  $A_n$  è un proiettore e che  $S_n A_n = S_n A_n = 0$ , relazione che corrisponde all'ortogonalità di  $\mathcal{H}_{\text{sym}}^n$  e  $\mathcal{H}_{\text{antisym}}^n$ .

Per  $n = 2$  ci sono solo 2 permutazioni possibili, l'identità che è pari e la trasposizione ( $1 \rightarrow 2$ ), che è dispari, quindi

$$A_2 |u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle = |u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle - |u_{M_2}\rangle |u_{M_1}\rangle,$$

mentre per  $n = 3$  si ha

$$\begin{aligned} A_3 |u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle |u_{M_3}\rangle &= |u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle |u_{M_3}\rangle + |u_{M_2}\rangle |u_{M_3}\rangle |u_{M_1}\rangle + |u_{M_3}\rangle |u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle \\ &\quad - |u_{M_2}\rangle |u_{M_1}\rangle |u_{M_3}\rangle - |u_{M_3}\rangle |u_{M_2}\rangle |u_{M_1}\rangle - |u_{M_1}\rangle |u_{M_3}\rangle |u_{M_2}\rangle \end{aligned}$$

Poiché adesso non possono aversi ripetizioni, la somma a secondo membro nella (12.31) contiene  $n!$  elementi. Dunque, per normalizzare gli stati a uno, occorre moltiplicare il secondo membro della (12.31) per  $\sqrt{n!}$ . Allora i vettori

$$|u_{M_1}\rangle \wedge |u_{M_2}\rangle \wedge \cdots \wedge |u_{M_n}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_P (-1)^P U_P |u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle \cdots |u_{M_n}\rangle \quad (12.32)$$

formano una base ortonormale in  $A_n \mathcal{H}^{\otimes n}$ . Poiché una trasposizione fa cambiare segno al vettore, per esempio,

$$|u_{M_1}\rangle \wedge |u_{M_2}\rangle \wedge \cdots \wedge |u_{M_n}\rangle = -|u_{M_2}\rangle \wedge |u_{M_1}\rangle \wedge \cdots \wedge |u_{M_n}\rangle$$

conveniamo di fissare l'ordinamento  $M_1 < M_2 < \cdots < M_n$  per denotare i vettori della base. Inoltre, vale una forma analoga alla (12.30):

$$|n_{M_1}, n_{M_2}, \dots, n_{M_n}\rangle \equiv |u_{M_1}\rangle \wedge |u_{M_2}\rangle \wedge \cdots \wedge |u_{M_n}\rangle = \sqrt{n!} A_n |u_{M_1}\rangle |u_{M_2}\rangle \cdots |u_{M_n}\rangle \quad (12.33)$$

dove a primo membro sono indicati solo i modi occupati da un fermione (per cui  $s = n$ ).

Concludiamo con due osservazioni.

Uno. Passiamo dai vettori alle funzioni d'onda corrispondenti inglobando lo spin nella coordinata  $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{x}, \sigma)$ , dove  $\mathbf{x}$  è la coordinata spaziale della particella e  $\sigma \in [-s, \dots, 0, \dots, s]$ , con  $s$  lo spin della particella. Quindi scriviamo  $u_M = u_M(\boldsymbol{\xi})$ . Allora, la (12.32) può essere riscritta senza l'uso del prodotto tensore, ma semplicemente in termini del prodotto di funzioni di argomenti differenti:

$$u_{M_1}(\boldsymbol{\xi}_1) \wedge u_{M_2}(\boldsymbol{\xi}_2) \wedge \cdots \wedge u_{M_n}(\boldsymbol{\xi}_n) \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_P (-1)^P u_{M_1}(\boldsymbol{\xi}_1) u_{M_2}(\boldsymbol{\xi}_2) \cdots u_{M_n}(\boldsymbol{\xi}_n)$$

Riconosciamo che la somma a secondo membro è semplicemente lo sviluppo del determinante

$$\begin{vmatrix} u_{M_1}(\boldsymbol{\xi}_1) & u_{M_1}(\boldsymbol{\xi}_2) & \cdots & u_{M_1}(\boldsymbol{\xi}_n) \\ u_{M_2}(\boldsymbol{\xi}_1) & u_{M_2}(\boldsymbol{\xi}_2) & \cdots & u_{M_2}(\boldsymbol{\xi}_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{M_n}(\boldsymbol{\xi}_1) & u_{M_n}(\boldsymbol{\xi}_2) & \cdots & u_{M_n}(\boldsymbol{\xi}_n) \end{vmatrix}$$

noto come *determinante di Slater* e utilizzato per la descrizione dei fermioni in prima quantizzazione.

Due. Non è casuale che abbiamo usato a primo membro della (12.32) lo stesso simbolo “ $\wedge$ ” di prodotto esterno che abbiamo introdotto nella sezione 4.1.2. Si tratta infatti della stessa nozione, le uniche differenze sono il fattore di normalizzazione che, convenzionalmente, non compare nella definizione di prodotto esterno in geometria, e il fatto che lo spazio vettoriale adesso può essere infinito-dimensionale.

**Box 12.2** — Relazione di commutazione per gli operatori di campo e formule di inversione.

Riscriviamo le (12.6a) omettendo la dipendenza dal tempo

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_M a_M u_M(\mathbf{x}) \quad (12.34a)$$

$$\psi(\mathbf{x})^* = \sum_M a_M^* \overline{u_M(\mathbf{x})}. \quad (12.34b)$$

Dalle CCR/CAR seguono le relazioni di commutazione per i campi:

$$[\psi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x}')^*]_{\pm} = \sum_{M, M'} u_M(\mathbf{x}) \overline{u_{M'}(\mathbf{x}')} [a_M, a_{M'}]_{\pm} = \sum_M u_M(\mathbf{x}) \overline{u_M(\mathbf{x}')} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la completezza delle funzioni modali. Chiaramente, si avrà

$$[\psi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x}')]_{\pm} = [\psi(\mathbf{x})^*, \psi(\mathbf{x}')^*]_{\pm} = 0.$$

Lo spin può essere trattato come alla fine del box 12.1, sostituendo  $\mathbf{x}$  con  $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{x}, \sigma)$  nelle formula precedenti. Se rendiamo esplicita questa dipendenza, le relazioni di commutazione dei campi possono essere riscritte come

$$[\psi_{\sigma}(\mathbf{x}), \psi_{\sigma'}(\mathbf{x}')^*]_{\pm} = \delta_{\sigma, \sigma'} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (12.35a)$$

$$[\psi_{\sigma}(\mathbf{x}), \psi_{\sigma'}(\mathbf{x}')]_{\pm} = [\psi_{\sigma}(\mathbf{x})^*, \psi_{\sigma'}(\mathbf{x}')^*]_{\pm} = 0 \quad (12.35b)$$

Le equazioni (12.34) danno i campi in funzione degli operatori di creazione e distruzione e possono essere riguardate formalmente come sviluppi generalizzati in serie di Fourier rispetto alla base delle funzioni modali con gli operatori di creazione e distruzione che giocano il ruolo di coordinate di Fourier. Formalmente, possono quindi essere invertite nello stesso modo che utilizzò Fourier con le sue serie. Moltiplicando ambo i membri della (12.34a) per  $\overline{u_N(\mathbf{x})}$ , integrando su  $\mathbf{x}$  e sommando su  $N$ , si ottiene

$$\int \psi(\mathbf{x}) \overline{u_N(\mathbf{x})} dV = \int \sum_M a_M u_M(\mathbf{x}) \overline{u_N(\mathbf{x})} dV = \sum_M a_M \delta_{M, N} = a_N$$

(dove nel penultimo passaggio abbiamo scambiato la somma con l'integrale). Otteniamo così le formule di inversione

$$a_M = \int \psi(\mathbf{x}) \overline{u_M(\mathbf{x})} dV \quad (12.36a)$$

$$a_M^* = \int \psi(\mathbf{x})^* u_M(\mathbf{x}) dV. \quad (12.36b)$$

**Box 12.3 — Operatore di campo come mappa dagli stati di singola particella ad operatori sullo spazio di Fock.** Gli operatori di creazione  $a_M^*$  e distruzione  $a_M$  sono naturalmente associati al modo  $u_M$ . Vogliamo adesso mostrare che ad ogni vettore nello spazio  $\mathcal{H}$  di singola particella è associato un operatore nello spazio di Fock. Questa corrispondenza è analoga a quella tra vettori 3-dimensionali e matrici che abbiamo incontrato nella sezione 4.2, con adesso gli operatori  $a_M^*$  che giocano lo stesso ruolo delle matrici di Pauli. nell'equazione (4.42). Più precisamente, se  $f = \sum f_M u_M$  è un vettore in  $\mathcal{H}$  con

componenti  $f_M = \langle u_M | f \rangle$  rispetto alla base  $u_M$ , si definisce la mappa

$$a^* : f \mapsto a^*(f) = \sum_M f_M a_M^* \quad (12.37)$$

da  $\mathcal{H}$  ad operatori nello spazio di Fock. Questa mappa è lineare, si ha infatti

$$a^*(\alpha f + \beta g) = \alpha a^*(f) + \beta a^*(g).$$

Inoltre, prendendo l'aggiunto di ambo i membri della (12.37), si ottiene

$$a(f) = \sum_\alpha f_\alpha^* a_\alpha$$

per cui la mappa  $a : f \mapsto a(f)$  è anti-lineare. In particolare, si ha

$$a^*(u_M) = a_M^* \quad \text{e} \quad a(u_M) = a_M. \quad (12.38)$$

Dalle CCR/CAR, per vettori qualunque  $f$  e  $g$  in  $\mathcal{H}$ , si ottengono le relazioni (esercizio)

$$[a(f), a(g)]_\pm = 0 \quad (12.39a)$$

$$[a^*(f), a^*(g)]_\pm = 0 \quad (12.39b)$$

$$[a(f), a^*(g)]_\pm = \langle f | g \rangle \quad (12.39c)$$

dove  $\langle f | g \rangle$  è il prodotto scalare in  $\mathcal{H}$ . Queste relazioni costituiscono la forma più generale delle CCR/CAR in quanto insieme alla definizione del vuoto

$$a(f)|0\rangle = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H} \quad (12.40)$$

definiscono completamente la struttura dello spazio di Fock, indipendentemente dalla scelta di una base. Queste relazioni sono invarianti per trasformazioni unitarie in  $\mathcal{H}$ , cioè, continuano a valere per  $f' = Uf$  e  $g' = Ug$ , con  $U$  operatore unitario in  $\mathcal{H}$  (esercizio).

**Box 12.4 — Operatori di creazione e distruzione rispetto ad una base arbitraria.** Vogliamo determinare come si trasformano gli operatori di creazione e distruzione in seguito ad un cambiamento di base.  $v_N = \sum_M \langle u_M | v_N \rangle u_M$ . Allora, per la linearità della mappa (12.37),

$$a^*(v_N) = a^* \left( \sum_M \langle u_M | v_N \rangle u_M \right) = \sum_M \langle u_M | v_N \rangle a^*(u_M) = \sum_M \langle u_M | v_N \rangle a_M^*. \quad (12.41)$$

Scambiando  $u_M$  con  $v_N$ , si trova la formula di inversione

$$a_M^* = \sum_N \langle v_M | u_N \rangle a^*(v_N) \quad (12.42)$$

e prendendo l'aggiunto delle formule precedenti, si ottengono le regole di trasformazione per gli operatori di distruzione. Poiché la matrice di trasformazione dalla base  $\{u_N\}$  alla base  $\{v_N\}$  è unitaria, le CCR/CAR continuano a valere nella nuova base. In particolare, possiamo costruire lo spazio di Fock usando gli operatori  $b_N^* = a^*(v_N)$ .

Nulla cambia nella struttura dello spazio, solamente l'interpretazione fisica degli stati  $(a^*(v_1))^{n_1}(a^*(v_2))^{n_2}(a^*(v_3))^{n_3} \dots |0\rangle$  che, ovviamente, non sono più a modo definito.

Se anziché  $\{v_N\}$ , si considera una base impropria continua, per esempio, gli autostati impropri  $|\mathbf{x}\rangle \equiv \delta_{\mathbf{x}}$  dell'operatore posizione, le precedenti formule di trasformazione continuano a valere a patto di sostituire la somma su  $N$  con un integrale su  $\mathbf{x}$ . In questo caso si ha

$$\delta_{\mathbf{x}} = \sum_M \langle u_M | \mathbf{x} \rangle u_M, \quad \Rightarrow \quad a^*(\delta_{\mathbf{x}}) = \sum_M u_M(\mathbf{x}) a_M$$

Riconosciamo a secondo membro lo sviluppo (12.34) del campo  $\psi^*(\mathbf{x})$ , che è dunque ottenuto dalla mappa (12.37) estendendola al vettore improprio  $\delta_{\mathbf{x}}$ , vale a dire

$$\psi^*(\mathbf{x}) = a^*(\delta_{\mathbf{x}}). \quad (12.43)$$

## 12.2 Intermezzo: teoria cinetica ed entropia di Boltzmann

Spazi bosonici e fermionici finito-dimensionali giocano un ruolo importante nella teoria cinetica quantistica e nella caratterizzazione dell'entropia di Boltzmann.

### 12.2.1 Descrizione cinetica

Si consideri un fluido costituito da  $N$  particelle contenuto in un recipiente  $V$ . Si suddivida il volume  $V$  in un numero finito di cellette  $\Delta x \Delta y \Delta z$  e, assunto un valore massimo di taglio sugli impulsi, di modo che gli impulsi ammissibili siano dentro una regione finita  $\Omega$ , si proceda analogamente con  $\Omega$ , suddividendolo in un numero finito di cellette  $\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$ . Allora lo spazio delle fasi di singola particella (di dimensione 6) risulta ripartito in cellette  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_J$  di volume

$$\Delta^3 \mathbf{q} \Delta^3 \mathbf{p} = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$$

La descrizione cinetica dello stato del fluido consiste nella specificazione della distribuzione dei numeri  $N_1, \dots, N_J$  di particelle che si trovano nelle varie cellette. Se il sistema non è in equilibrio, questi numeri di possono variare nel corso del tempo. Le cellette sono microscopicamente grandi, in modo da contenere molte particelle cosicché la distribuzione  $N_\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, J$ , non è soggetta a fluttuazioni statistiche. L'assenza di fluttuazioni quantistiche è garantita dalla condizione

$$|\Delta_\mu| \gg h^3$$

Al contempo le cellette sono assunte macroscopicamente piccole; in tal modo, la distribuzione  $N_\mu$  è ben approssimata da una funzione di distribuzione continua  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  tale che

$$N_\mu = \int_{\Delta_\mu} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d^3 \mathbf{q} d^3 \mathbf{p}$$

### 12.2.2 Microstati e Macrostati

Lo stato microscopico del fluido è descritto da una funzione d'onda (o da una matrice densità). Se il sistema contenuto in  $V$  è isolato, come in effetti assumiamo, la funzione d'onda del sistema avrà componenti d'energia nel guscio  $[E, E + \delta E]$ , essendo  $\delta E \ll E$ . Denotiamo con  $\mathcal{H}$  lo spazio degli stati del sistema soggetto ai vincoli appena descritti (la struttura di  $\mathcal{H}$  dipenderà, ovviamente, dalla natura bosonica o fermionica delle particelle che compongono il fluido).

I macrostati del fluido sono descritti dalla distribuzione  $(N_1, \dots, N_J)$  delle particelle nelle cellette. Ad ogni dato macrostato  $(N_1, \dots, N_J)$  corrisponde uno spazio di stati microscopici compatibili con esso, che denoteremo

$$\mathcal{H}_{N_1, \dots, N_J}$$

Allora lo spazio  $\mathcal{H}$  ammette la seguente decomposizione in spazi ortogonali

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{N_1, \dots, N_J} \mathcal{H}_{N_1, \dots, N_J}$$

### Struttura di $\mathcal{H}_{N_1, \dots, N_J}$

Poiché le cellette  $\Delta_\mu$  sono grandi rispetto alla scala microscopica, possiamo assumere che le funzioni d'onda delle particelle contenute in diverse cellette abbiano supporto disgiunto e quindi siano assenti effetti dovuti alle statistiche quantistiche per particelle in diverse cellette. Allora

$$\mathcal{H}_{N_1, \dots, N_J} = \mathcal{H}^{N_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}^{N_J}$$

dove  $\mathcal{H}^{N_\mu}$ ,  $\mu = 1, \dots, J$ , è lo spazio di  $N_\mu$  particelle associato alla celletta  $\Delta_\mu$ . Per queste particelle non possiamo trascurare l'effetto dovuto alle statistiche quantistiche.

### Dimensione di $\mathcal{H}_{N_1, \dots, N_J}$

Conveniamo di denotare con  $D(\mathcal{H})$  la dimensione di uno spazio  $\mathcal{H}$ . Allora per quanto appena visto

$$D(\mathcal{H}_{N_1, \dots, N_J}) = \prod_{\mu=1}^J D(\mathcal{H}^{N_\mu})$$

### 12.2.3 Spazio degli stati associato ad una celletta nello spazio delle fasi

Particella in una dimensione confinata in un tratto  $\Delta x$ , c.c. periodiche. Quanti modi normali ci sono in un intervallo  $\Delta k$  di numeri d'onde? La spaziatura tra i livelli è  $\frac{2\pi}{\Delta x}$ . Quindi in  $\Delta k$  ci sono

$$\frac{\Delta x}{2\pi} \Delta k = \frac{\Delta x \Delta p}{h} \quad \left( \text{essendo } p = \hbar k = \frac{h}{2\pi} k \right)$$

modi normali. Allora il numero di modi normali in una celletta  $\Delta^3 \mathbf{q} \Delta^3 \mathbf{p}$  è

$$D = \frac{\Delta^3 \mathbf{q} \Delta^3 \mathbf{p}}{h^3}$$

che è quindi la dimensione dello spazio degli stati associato ad una celletta nello spazio delle fasi di singola particella.

### Dimensione dello spazio degli stati della $\mu$ -esima celletta contenente $N_\mu$ particelle

Sia  $D_\mu$  la dimensione dello spazio degli stati di singola particella associato alla celletta  $\Delta_\mu$ . Allora la dimensione dello spazio degli stati per  $N_\mu$  particelle nella celletta  $\Delta_\mu$  è

$$D(\mathcal{H}^{N_\mu}) = \binom{D_\mu}{N_\mu} = \frac{D_\mu!}{N_\mu! (D_\mu - N_\mu)!} \quad \text{per fermioni}$$

e

$$D(\mathcal{H}^{N_\mu}) = \binom{N_\mu + D_\mu - 1}{N_\mu} = \frac{(N_\mu + D_\mu - 1)!}{(D_\mu - 1)! N_\mu!} \quad \text{per bosoni}$$

**Dimensione di  $\mathcal{K}_{N_1, \dots, N_J}$** 

Mettendo insieme le formule ricavate abbiamo

$$D(\mathcal{K}_{N_1, \dots, N_J}) = \prod_{\mu=1}^J \binom{D_\mu}{N_\mu} = \prod_{\mu=1}^J \frac{D_\mu!}{N_\mu!(D_\mu - N_\mu)!} \quad \text{per fermioni}$$

e

$$D(\mathcal{K}_{N_1, \dots, N_J}) = \prod_{\mu=1}^J \binom{N_\mu + D_\mu - 1}{N_\mu} = \prod_{\mu=1}^J \frac{(N_\mu + D_\mu - 1)!}{(D_\mu - 1)!N_\mu!} \quad \text{per bosoni}$$

**12.2.4 Entropia di Boltzmann**

L'entropia (di Boltzmann) di un macrostato  $M$  descritto da uno spazio degli stati  $\mathcal{K}_M$  è definita come

$$S(M) = k_B \log D(\mathcal{K}_M)$$

dove  $D(\mathcal{K}_M)$  è la dimensione di  $\mathcal{K}_M$  e  $k_B$  è la costante di Boltzmann. In particolare, l'entropia del macrostato definito dalla distribuzione  $(N_1, \dots, N_J)$  è

$$S(N_1, \dots, N_J) = k_B \log D(\mathcal{K}_{N_1, \dots, N_J})$$

L'entropia (di Boltzmann) del microstato  $\Psi$ ,  $S(\Psi)$ , è definita come l'entropia del macrostato  $M$  al quale il microstato  $\Psi$  appartiene. Se il sistema non è in equilibrio, la sua entropia cambierà nel corso del tempo.

**Fermioni**

$N$  fermioni debolmente interagenti:

$$S(N_1, \dots, N_J) = k_B \log \prod_{\mu=1}^J \frac{D_\mu!}{N_\mu!(D_\mu - N_\mu)!}$$

Applicando la formula di Stirling  $N! = N^N e^{-N}$ , si ottiene

$$S(N_1, \dots, N_J) = -k_B \sum_{\mu} \left[ \frac{N_\mu}{D_\mu} \log \frac{N_\mu}{D_\mu} + \left(1 - \frac{N_\mu}{D_\mu}\right) \log \left(1 - \frac{N_\mu}{D_\mu}\right) \right] D_\mu$$

che nel limite continuo

$$\frac{N_\mu}{D_\mu} \rightarrow f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad D_\mu \rightarrow \frac{d^3 \mathbf{q} d^3 \mathbf{p}}{h^3}$$

diventa

$$S(f) = -k_B \int [f \log f + (1 - f) \log(1 - f)] \frac{d^3 \mathbf{q} d^3 \mathbf{p}}{h^3}$$

**Bosoni**

$N$  bosoni debolmente interagenti:

$$S(N_1, \dots, N_J) = k_B \log \prod_{\mu=1}^J \frac{(N_\mu + D_\mu - 1)!}{(D_\mu - 1)!N_\mu!}$$

Procedendo come per i fermioni, si ottiene

$$S(N_1, \dots, N_J) = -k_B \sum_{\mu} \left[ \frac{N_\mu}{D_\mu} \log \frac{N_\mu}{D_\mu} - \left(1 + \frac{N_\mu}{D_\mu}\right) \log \left(1 + \frac{N_\mu}{D_\mu}\right) \right] D_\mu$$

che nel limite continuo diventa

$$S(f) = -k_B \int [f \log f - (1 + f) \log(1 + f)] \frac{d^3 \mathbf{q} d^3 \mathbf{p}}{h^3}$$

### 12.2.5 Regime classico

Il regime classico corrisponde a livelli scarsamente popolati:

$$\frac{N_\mu}{D_\mu} \ll 1$$

In questo regime le entropie per bosoni e fermioni coincidono con l'espressione classica trovata da Boltzmann:

$$S(f) = -k_B \int f \log f \frac{d^3\mathbf{q}d^3\mathbf{p}}{h^3}$$

(a parte  $h^3$ ).

### 12.2.6 Distribuzione di equilibrio

Corrisponde ai valori  $N_1, \dots, N_J$  che massimizzano della funzione entropia  $S(N_1, \dots, N_J)$ . La massimizzazione di  $S$  deve tenere conto dei vincoli

$$\sum_{\mu} N_{\mu} = N \quad (\text{numero totale di particelle})$$

$$\sum_{\mu} \epsilon_{\mu} N_{\mu} = E \quad (\text{energia totale})$$

per cui si usa il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e si massimizza la funzione

$$S(N_1, \dots, N_J) - \lambda \sum_{\mu} N_{\mu} - \beta \sum_{\mu} \epsilon_{\mu} N_{\mu}$$

imponendo che le derivate rispetto a  $N_1, \dots, N_J$  si annullino.

Si ottiene

$$f_{\mu} \equiv \frac{N_{\mu}}{D_{\mu}} = \frac{1}{e^{\lambda + \beta \epsilon_{\mu}} + 1} \quad \text{per } \textit{fermioni}$$

e

$$f_{\mu} \equiv \frac{N_{\mu}}{D_{\mu}} = \frac{1}{e^{\lambda + \beta \epsilon_{\mu}} - 1} \quad \text{per } \textit{bosoni}$$

Impoendo i vincoli e tenuto conto delle relazioni termodinamiche di equilibrio si collegano  $\lambda$  e  $\beta$  a potenziale chimico e temperatura, rispettivamente.

## 12.3 Operatori in seconda quantizzazione

In questa sezione sviluppiamo il formalismo che permette di rappresentare nello spazio di Fock gli operatori rilevanti per costruire l'hamiltoniano di un sistema di bosoni o fermioni in termini degli operatori di campo o degli associati operatori di creazione e distruzione.

### 12.3.1 Seconda quantizzazione di operatori a singola particella

Dato un operatore autoaggiunto  $A = A^{(1)}$  nello spazio di singola particella  $\mathcal{H}$ , esso può essere alzato a tutto lo spazio di Fock nel seguente modo. Si definisca in  $\mathcal{H}^{\otimes n}$  (il prodotto tensore di  $\mathcal{H}$  con se stesso  $n$  volte) l'operatore

$$A \otimes \mathbf{1} \otimes \dots \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes A \otimes \mathbf{1} \otimes \dots \otimes \mathbf{1} + \dots + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \dots \otimes A \equiv \sum_{j=1}^n A^{(j)} \quad (12.44)$$

cioè,  $A^{(j)}$  è l'operatore  $A$  che agisce solo sulla particella  $j$ . Questo operatore è simmetrico per permutazioni delle particelle ed è quindi ben definito come operatore sia nello spazio  $\mathcal{H}_{\text{sym}}^n$  di  $n$  bosoni sia nello spazio  $\mathcal{H}_{\text{antisym}}^n$  di  $n$  fermioni. Allora l'estensione formale di  $A$  a tutto lo spazio di Fock (fermionico o bosonico) è

$$\widetilde{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n A^{(j)} \quad (12.45)$$

Un operatore così definito è detto *operatore a singola particella* ed è chiamato la *seconda quantizzazione* dell'operatore di singola particella  $A$ . L'esempio paradigmatico di un operatore di questo tipo è l'*operatore energia cinetica* che in ogni settore  $n$  dello spazio di Fock (bosonico o fermionico) è definito come

$$\sum_{j=1}^n -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta^{(j)} \quad (12.46)$$

L'operatore  $\widetilde{A}$  ammette l'utilissima rappresentazione

$$\widetilde{A} = \sum_{M,N} \langle v_M | A | v_N \rangle a^*(v_M) a(v_N) \quad (12.47)$$

dove  $\langle v_M | A | v_N \rangle$  sono gli elementi di matrice di  $A$  rispetto ad una *qualunque base*  $\{v_M\}$  nello spazio di singola particella  $\mathcal{H}$  e  $a^*(v_M)$  e  $a(v_M)$  sono, rispettivamente, gli operatori di creazione e distruzione rispetto alla base  $\{v_M\}$  (si veda il box 12.4). Questa formula, che è dimostrata nel box sotto, permette di esprimere un qualunque operatore a singola particella in termini degli operatori di creazione e distruzione rispetto ad una qualunque base nello spazio di singola particella. Poiché la base è arbitraria, la sua scelta è dettata da ragioni di convenienza.

In particolare, per la seconda quantizzazione dell'hamiltoniano  $\mathcal{H}$  di singola particella (12.18) conviene scegliere la base delle funzioni modali  $u_M$ , cioè gli auto-stati di  $\mathcal{H}$ . Allora  $\langle u_M | \mathcal{H} | u_N \rangle = \delta_{M,N} \varepsilon_M$ . Denotando come di consueto gli operatori di creazione  $a_M^*$  e distruzione  $a_M$  rispetto alla base delle funzioni modali, dalla formula (12.47) otteniamo

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \sum_{M,N} \langle u_M | \mathcal{H} | u_N \rangle a_M^* a_N = \sum_M \varepsilon_M a_M^* a_M,$$

che coincide con l'hamiltoniano (12.9). Risulta così stabilito che  $H = \widetilde{\mathcal{H}}$ , cioè che l'hamiltoniano  $H$  nello spazio di Fock definita dal campo di Schrödinger, coincide con la seconda quantizzazione dell'hamiltoniano di singola particella, il che dimostra la formula (12.19) per la restrizione di  $H$  al settore di  $n$  particelle dello spazio di Fock.

La rappresentazione (12.47) si estende ad una base impropria continua. In particolare, per gli autostati impropri  $|\mathbf{x}\rangle = \delta_{\mathbf{x}}$  dell'operatore posizione, si ha

$$\widetilde{A} = \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{y} \langle \mathbf{x} | A | \mathbf{y} \rangle a^*(\delta_{\mathbf{x}}) a(\delta_{\mathbf{y}}) = \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{y} \langle \mathbf{x} | A | \mathbf{y} \rangle \psi^*(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{y}) \quad (12.48)$$

dove  $\langle \mathbf{x} | A | \mathbf{y} \rangle$  sono gli elementi di matrice di  $A$  rispetto alla base della posizione (si veda il box 12.4). Questa formula è particolarmente utile per esprimere la seconda quantizzazione di funzioni  $F = F(\mathbf{X})$  dell'operatore posizione  $\mathbf{X}$ . Poiché operatori di questo tipo hanno elementi di matrice  $\langle \mathbf{x} | F | \mathbf{y} \rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) F(\mathbf{x})$ , la loro seconda quantizzazione è

$$\widetilde{F} = \int F(\mathbf{x}) \psi^*(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \quad (12.49)$$

Notiamo infine che esiste un altro modo per alzare un operatore  $U$  in  $\mathcal{H}$  allo spazio di Fock: usare invece della (12.44) l'operatore  $\underbrace{U \otimes U \otimes \cdots \otimes U}_{n \text{ volte}}$  ed estenderlo allo spazio di

Fock come prima:

$$\tilde{U} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{U \otimes U \otimes \cdots \otimes U}_{n \text{ volte}} \quad (12.50)$$

Questa estensione è appropriata per operatori unitari, che si compongono moltiplicativamente, mentre la (12.44) è appropriata per operatori hermitiani, che si compongono additivamente. L'esempio paradigmatico dell'estensione (12.50) è l'operatore di evoluzione temporale  $\mathcal{U} = e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}$  di singola particella. Notiamo che si ha l'importante relazione

$$\tilde{\mathcal{U}} = e^{-i\tilde{\mathcal{H}}t/\hbar} = e^{-iHt/\hbar} \equiv U_t \quad (12.51)$$

che stabilisce che la dinamica  $U_t$  nello spazio di Fock è completamente determinata dall'operatore di evoluzione temporale  $\mathcal{U}$  nello spazio di singola particella.

**Box 12.5 — Operatori a singola particella in termini degli operatori di creazione e distruzione.** Dimostriamo la formula (12.47). Poiché i secondi membri delle (12.62) e (12.47) non cambiano il numero di particelle, ci basta dimostrare che

$$\sum_{j=1}^n A^{(j)} = \sum_{M,N} \langle v_M | A | v_N \rangle a^*(v_M) a(v_N) \quad (12.52)$$

quando l'operatore a destra è ristretto al settore  $n$  dello spazio di Fock. Poiché l'uguaglianza deve essere soddisfatta qualunque sia la base, scegliamo quella in cui l'operatore  $A$  è diagonale. Assumiamo per semplicità che  $A$  abbia spettro discreto e quindi che la sua rappresentazione spettrale sia

$$A = \sum_N \lambda_N |v_N\rangle \langle v_N|.$$

Allora la (12.52) diventa

$$\sum_N \lambda_N \sum_{j=1}^n |v_N^{(j)}\rangle \langle v_N^{(j)}| = \sum_N \lambda_N a^*(v_N) a(v_N)$$

e la formula da dimostrare si riduce a

$$\sum_{j=1}^n |v_N^{(j)}\rangle \langle v_N^{(j)}| = a^*(v_N) a(v_N) \quad (12.53)$$

Ora, un generico vettore  $|\dots n_N \dots\rangle$  della base dello spazio di  $n$  particelle (bosoni o fermioni) contenente  $n_N$  particelle nello stato  $v_N$  è un autostato di  $a^*(v_N) a(v_N)$  con autovalore  $n_N$ . Per dimostrare che lo stesso vale per l'operatore

$$O = \sum_{j=1}^n |v_N^{(j)}\rangle \langle v_N^{(j)}|,$$

consideriamo, per bosoni, la rappresentazione (12.30) di  $|\dots n_N \dots\rangle$  con  $v_N$  al posto di  $u_M$ :

$$|\dots n_N \dots\rangle \propto S_n |v_{N_1}\rangle |v_{N_2}\rangle \cdots |v_N\rangle \cdots$$

(dove abbiamo tralasciato il fattore moltiplicativo, perché i numeri di occupazione dono cambiano). Poiché l'operatore  $O$  è simmetrico, commuta con l'operatore di simmetrizzazione  $S_n$ , per cui

$$O|\dots n_N \dots\rangle \propto S_n O|v_{N_1}\rangle |v_{N_2}\rangle \cdots |v_N\rangle \cdots$$

L'effetto di  $O$  sul prodotto tensore dei vettori della base è

$$\delta_{N,N_1} |v_N\rangle |v_{N_2}\rangle \cdots |v_N\rangle + \delta_{N,N_2} |v_{N_1}\rangle |v_N\rangle |v_{N_3}\rangle \cdots |v_{N_n}\rangle + \dots \delta_{N,N_n} |v_{N_1}\rangle |v_{N_2}\rangle \cdots |v_N\rangle$$

e quando questo vettore viene simmetrizzato da  $S_n$  si ottengono  $n_N$  termini stati finali identici a quello iniziale, per cui l'azione di  $O$  sugli stati  $|\dots n_N \dots\rangle$  è la stessa di  $a^*(v_N)a(v_N)$ . Quindi, vale la (12.53). Risulta così dimostrata la formula (12.47) per il caso bosonico. Il caso fermionico è lasciato per esercizio (☺).

**Box 12.6 — Operatore densità ed operatore energia potenziale esterna.** Due casi particolari ma rilevanti della formula (12.49) si hanno per  $F(\mathbf{X}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X})$  e  $F(\mathbf{X}) = \mathcal{V}(\mathbf{X})$  dove  $\mathcal{V}$  è l'energia potenziale esterna che compare nell'hamiltoniano di singola particella (12.3). Il primo operatore, mediato su uno stato  $\Psi_1$  di singola particella

$$\langle \Psi_1 | \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) | \Psi_1 \rangle = |\Psi_1(\mathbf{x})|^2$$

fornisce la (densità di) probabilità che la particella si trovi in  $\mathbf{x}$ . Dalla (12.49) segue che la sua seconda quantizzazione

$$\delta(\widetilde{\mathbf{x} - \mathbf{X}}) = \psi^*(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) \equiv \rho(\mathbf{x}) \quad (12.54)$$

Questo operatore, ristretto al settore ad  $n$  particelle è

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_j)$$

e quindi rappresenta l'*operatore densità di particelle* (per unità di volume). La seconda quantizzazione dell'energia potenziale esterna è

$$\widetilde{\mathcal{V}} = \int \mathcal{V}(\mathbf{x}) \psi^*(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \int \mathcal{V}(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) dV \quad (12.55)$$

Si osservi che la seconda espressione per l'energia potenziale è formalmente identica a quella classica di un sistema di particelle di densità  $\rho$  in un campo esterno  $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ .

**Box 12.7 — Operatore energia cinetica.** Per ottenere la seconda quantizzazione dell'ope-

ratore energia cinetica

$$\mathcal{K} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta \quad (12.56)$$

in una scatola di volume  $V = L_x L_y L_z$ , con condizioni al contorno periodiche, è conveniente prendere la base delle onde piane,

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (12.57)$$

parametrizzate dal numero d'onde

$$\mathbf{k} = \left( \frac{2\pi n_x}{L_x}, \frac{2\pi n_y}{L_y}, \frac{2\pi n_z}{L_z} \right) \quad \text{con} \quad n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

In questa base, infatti,  $\mathcal{K}$  è diagonale:  $\mathcal{K}u_{\mathbf{k}} = \hbar\varepsilon_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}}$ , con

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2|\mathbf{k}|^2}{2m}. \quad (12.58)$$

Allora dalla (12.47) si ottiene immediatamente

$$\widetilde{\mathcal{K}} = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} \quad (12.59)$$

dove  $a_{\mathbf{k}}^* = a^*(u_{\mathbf{k}})$  e  $a_{\mathbf{k}} = a(u_{\mathbf{k}})$ .

**Box 12.8 — Energia potenziale esterna in rappresentazione di Fourier.** La seconda quantizzazione di  $\mathcal{H} = \mathcal{K} + \mathcal{V}$  in rappresentazione spaziale deve ridare l'espressione di  $H$  da cui siamo partiti, cioè la (12.9), che per comodità riscriviamo

$$H = \int \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \psi^* \Delta \psi + \mathcal{V} \psi^* \psi \right] dV. \quad (12.9)$$

Infatti, il primo termine è ottenuto da (12.59) utilizzando le formule di inversione (12.36) e il secondo coincide con la formula (12.55) per  $\widetilde{\mathcal{V}}$ .

Nelle applicazioni è utile rappresentare  $H$  nella base delle onde piane. La (12.59) fornisce già l'espressione per  $\widetilde{\mathcal{K}}$  in questa base. Si ottiene la rappresentazione di Fourier di  $\widetilde{\mathcal{V}}$ , semplicemente sostituendo (12.55) gli sviluppi (12.34) degli operatori di campo:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{V}} &= \int_V \left[ \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}'} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} a_{\mathbf{k}'}^* \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a_{\mathbf{k}} \right] \mathcal{V}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \\ &= \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} \left[ \frac{1}{V} \int_V e^{-i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \mathcal{V}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \right] a_{\mathbf{k}'}^* a_{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Quindi, definendo la trasformata di Fourier del potenziale

$$\hat{\mathcal{V}}(\mathbf{k}) = \int_V e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathcal{V}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$$

otteniamo

$$\tilde{\mathcal{V}} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} \hat{\mathcal{V}}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) a_{\mathbf{k}'}^* a_{\mathbf{k}}$$

Dunque, la formula per  $H$  nella rappresentazione di Fourier è

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^2 a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} \hat{\mathcal{V}}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) a_{\mathbf{k}'}^* a_{\mathbf{k}} \quad (12.60)$$

### 12.3.2 Seconda quantizzazione di operatori a più particelle

Sia dato un operatore autoaggiunto  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{(1,2)}$  nello spazio di due particelle  $\mathcal{H}_{\text{sym}}^2$  (bosoni) o  $\mathcal{H}_{\text{antisym}}^2$  (fermioni), per esempio, l'energia potenziale di interazione tra le due particelle  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ . Si osservi che un operatore di questo tipo non deve cambiare la simmetria dello stato e deve quindi essere una funzione simmetrica delle variabili che descrivono le due particelle, cioè  $\mathcal{U}^{(1,2)} = \mathcal{U}^{(2,1)}$ . Allora  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{(1,2)}$  può essere alzato a tutto lo spazio di Fock in maniera analoga a quanto visto per gli operatori di singola particella. Si definisca in  $\mathcal{H}^{\otimes n}$  l'operatore

$$\frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^n V^{(ij)}, \quad (12.61)$$

che è chiaramente simmetrico per permutazioni delle particelle. Un operatore di questo tipo è detto *operatore a due particelle*. L'estensione formale di questo operatore a tutto lo spazio di Fock (fermionico o bosonico) è

$$\tilde{\mathcal{U}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^n \mathcal{U}^{(ij)} \quad (12.62)$$

e la rappresentazione di  $\tilde{\mathcal{U}}$  in termini di operatori di creazione e distruzione è analoga alla (12.47),

$$\tilde{\mathcal{U}} = \sum_{M'_1, M'_2, M_1, M_2} \langle u_{M'_1} | \langle u_{M'_2} | \mathcal{U} | u_{M_1} \rangle | u_{M_2} \rangle a_{M'_2}^* a_{M'_1}^* a_{M_1} a_{M_2}, \quad (12.63)$$

e la si dimostra in modo analogo. Si tratta di una formula molto importante per lo sviluppo del formalismo di seconda quantizzazione. In maniera analoga si definiscono *operatori a  $p$  particelle*.

Come per gli operatori ad una particella, la rappresentazione (12.47) si estende ad una base impropria continua, formata, per esempio, dagli autostati impropri dell'operatore posizione. Questa rappresentazione è particolarmente conveniente per esprimere la seconda quantizzazione dell'energia potenziale di interazione tra le due particelle  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ . Poiché questo operatore è diagonale nella posizione due delle somme nella (12.63) scompaiono e si ottiene

$$\tilde{\mathcal{U}} = \frac{1}{2} \int_V d^3 \mathbf{x}_1 \int_V d^3 \mathbf{x}_2 \psi^*(\mathbf{x}_1) \psi^*(\mathbf{x}_2) \mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) \psi(\mathbf{x}_2) \quad (12.64)$$

Riscrivendo questa formula in termini dell'operatore densità (12.54),

$$\tilde{\mathcal{U}} = \frac{1}{2} \int_V \int_V \rho(\mathbf{x}_1) \mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \rho(\mathbf{x}_2) dV_1 dV_2, \quad (12.65)$$

si riconosce nuovamente la completa analogia con la corrispondente formula classica per l'energia potenziale di interazione di un sistema di particelle con densità  $\rho$ .

**Box 12.9** — Energia potenziale di interazione (invariante per traslazioni) in rappresentazione di Fourier. Calcoliamo gli elementi di matrice nella (12.63):

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{k}'_1 | \langle \mathbf{k}'_2 | \mathcal{U} | \mathbf{k}_1 \rangle | \mathbf{k}_2 \rangle &= \frac{1}{V^2} \int_V dV_1 \int_V dV_2 e^{-i\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{x}_1} e^{-i\mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x}_1} \mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2} \\ &= \frac{1}{V^2} \int_V dV_1 \int_V dV_2 e^{-i(\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x}_1} e^{-i(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}_2} \mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ &= \frac{1}{V^2} \hat{\mathcal{U}}(\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1, \mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_2)\end{aligned}$$

dove  $\hat{\mathcal{U}}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  è la trasformata di Fourier dell'energia potenziale di coppia

$$\hat{\mathcal{U}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_V dV_1 \int_V dV_2 e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_1} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_2} \mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

Se l'energia potenziale dipende solo dalle coordinate relative delle due particelle, cioè,

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathcal{U}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$$

dove  $\mathcal{U}(\mathbf{r})$  è l'energia potenziale di due particelle con coordinata relativa  $\mathbf{r}$ , allora

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{U}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \int_V d^3\mathbf{x}_1 \int_V d^3\mathbf{x}_2 e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_1} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_2} \mathcal{U}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \\ &= \int_V d^3\mathbf{x} \int_V d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{r})} \mathcal{U}(\mathbf{r}) \\ &= \int_V d^3\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}} \int_V d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \mathcal{U}(\mathbf{r}) \\ &= V \delta_{\mathbf{p}, -\mathbf{q}} \hat{\mathcal{U}}(\mathbf{q}) \quad \text{con} \quad \hat{\mathcal{U}}(\mathbf{q}) = \int_V dV e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \mathcal{U}(\mathbf{r})\end{aligned}$$

la trasformata di Fourier di  $\mathcal{U}(\mathbf{r})$ . Ne segue che

$$\langle \mathbf{k}'_1 | \langle \mathbf{k}'_2 | \mathcal{U} | \mathbf{k}_1 \rangle | \mathbf{k}_2 \rangle = \frac{1}{V} \delta_{\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}'_2 + \mathbf{k}_2} \hat{\mathcal{U}}(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_2) = \frac{1}{V} \delta_{\mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2} \hat{\mathcal{U}}(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_2)$$

Si osservi che la “ $\delta$ ” garantisce la conservazione dell'impulso totale (come deve essere, essendo il potenziale invariante per traslazioni). In definitiva, dalla (12.63) si ottiene

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{U}} &= \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \delta_{\mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2} \hat{\mathcal{U}}(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_2) a_{\mathbf{k}'_1}^* a_{\mathbf{k}'_2}^* a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} \\ &= \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \hat{\mathcal{U}}(\mathbf{q}) a_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}}^* a_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}}^* a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}\end{aligned}$$

## 12.4 Dinamica di bosoni e fermioni

Adesso disponiamo di tutti gli elementi per rappresentare l'hamiltoniano

$$H = H_{\text{lib}} + H_{\text{ext}} + H_{\text{int}} \quad (12.66)$$

di bosoni o fermioni sotto l'influenza di un campo esterno  $\mathcal{V}(\mathbf{x})$  e interagenti tra loro attraverso un'energia potenziale di coppia  $\mathcal{U}(\mathbf{x})$ . Scriviamo i tre termini sia nella rappresentazione

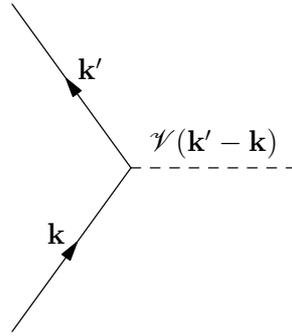


Figura 12.1: Diagramma di Feynman che descrive lo scattering di una particella in un potenziale esterno (il tempo scorre dal basso verso l'alto).

spaziale sia in quella di Fourier:

$$H_{\text{lib}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \psi^*(\mathbf{x}) \Delta \psi(\mathbf{x}) dV = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^2 a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} \quad (12.67)$$

$$H_{\text{ext}} = \int \mathcal{V}(\mathbf{x}) \psi^*(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) dV = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} \hat{\mathcal{V}}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) a_{\mathbf{k}'}^* a_{\mathbf{k}} \quad (12.68)$$

$$\begin{aligned} H_{\text{int}} &= \frac{1}{2} \int_V d^3 \mathbf{x}_1 \int_V d^3 \mathbf{x}_2 \psi^*(\mathbf{x}_1) \psi^*(\mathbf{x}_2) \mathcal{U}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) \psi(\mathbf{x}_2) \\ &= \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \hat{\mathcal{U}}(\mathbf{q}) a_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}}^* a_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}}^* a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} \end{aligned} \quad (12.69)$$

### 12.4.1 Particelle in campo esterno

Incominciamo con un problema semplice.

**Box 12.10 — Scattering da potenziale in approssimazione di Born.** Supponiamo che  $H_{\text{int}} = 0$ . Allora in rappresentazione di Fourier

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^2 a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} \hat{\mathcal{V}}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) a_{\mathbf{k}'}^* a_{\mathbf{k}} \quad (12.70)$$

Dalla regola di Fermi è immediatamente chiaro che se trattiamo perturbativamente  $H_{\text{ext}}$ , l'interazione ha l'effetto di creare una particella in  $\mathbf{k}'$ , dopo averne distrutta una in  $\mathbf{k}$ , vale a dire, di far passare una particella dallo stato  $\mathbf{k}$  allo stato  $\mathbf{k}'$  con un'ampiezza di probabilità proporzionale alla trasformata di Fourier del potenziale (che poi non è altro che l'ampiezza di scattering in approssimazione di Born). Quindi assumendo che lo stato iniziale sia di singola particella e, in particolare, sia un'onda piana  $|\mathbf{k}\rangle$ , nei limiti di validità della regola di Fermi, il tasso di probabilità del processo  $|\mathbf{k}\rangle \rightarrow |\mathbf{k}'\rangle$  è

$$\Gamma_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \mathbf{k}' | H_{\text{ext}} | \mathbf{k} \rangle|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \frac{1}{V} \hat{\mathcal{V}}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \right|^2 \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\mathbf{k}})$$

L'ampiezza di probabilità (per unità di tempo) di questo processo è rappresentata dal diagramma in figura 12.1.

### 12.4.2 Collegamento con la meccanica statistica

Nello studio della dinamica di particelle in campo esterno ci siamo limitati al caso di stato iniziale di singola particella. Studiamo adesso il caso di un stato generico  $|\{n_{\mathbf{k}}\}\rangle$  (in rappresentazione numero di occupazione). Abbiamo in mente l'applicazione ad un gas, vale a dire un sistema con un numero elevato di particelle (che per semplicità, assumiamo non interagenti) sotto l'azione di un potenziale esterno (che potrebbe rappresentare l'interazione delle particelle con le pareti della scatola).

Poiché

$$H_{\text{ext}} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} \tilde{\mathcal{V}}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) a_{\mathbf{k}'}^* a_{\mathbf{k}}$$

per uno stato iniziale  $|\dots n_{\mathbf{k}} \dots n_{\mathbf{k}'} \dots\rangle$  gli elementi di matrice non nulli di  $H_{\text{ext}}$  sono quelli in cui  $n_{\mathbf{k}'}$  aumenta di 1 e  $n_{\mathbf{k}}$  diminuisce di 1. Il calcolo di questi elementi di matrice dipende dalla natura bosonica o fermionica delle particelle:

$$\langle \dots n_{\mathbf{k}} - 1 \dots n_{\mathbf{k}'} + 1, \dots | H_{\text{ext}} | \dots n_{\mathbf{k}} \dots n_{\mathbf{k}'} \dots \rangle = \frac{1}{V} \sqrt{1 \pm n_{\mathbf{k}'}} \sqrt{n_{\mathbf{k}}} \tilde{\mathcal{V}}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \left( \times (-1)^\theta \text{ per fermioni} \right)$$

con “+” per bosoni e “-” per fermioni, da cui seguono le probabilità di transizione (per unità di tempo)

$$\Gamma \propto n_{\mathbf{k}} (1 \pm n_{\mathbf{k}'}) \left| \tilde{\mathcal{V}}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \right|^2 \quad (12.71)$$

Che la probabilità di transizione sia proporzionale al numero di particelle con impulso  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$  è un effetto classico: in teoria cinetica classica il numero di particelle che dopo l'urto hanno impulso  $\mathbf{p}'$  è proporzionale al numero di particelle che prima dell'urto hanno impulso  $\mathbf{p}$ . Quindi  $\Gamma \propto n_{\mathbf{k}}$  ce lo aspettavamo. Ma il secondo termine  $(1 \pm n_{\mathbf{k}'})$  è puramente quantistico e dovuto all'interazione di scambio (cioè all'effetto delle statistiche quantistiche): *se le particelle sono bosoni, si ha un potenziamento delle probabilità classiche proporzionale a  $n_{\mathbf{k}}^2$ ; se le particelle sono fermioni si ha una riduzione dell'effetto*. Il primo, scoperto da Einstein, è il fenomeno della *stimolazione indotta*; il secondo, che provoca una riduzione delle probabilità classiche e potrebbe essere chiamato “emissione inibita” è la manifestazione del principio di Pauli.

**Box 12.11 — Distribuzioni di Bose-Einstein e di Fermi-Dirac.** La formula (12.71) per  $\Gamma$  può essere usata per ricavare le distribuzioni di BE e FD mediante il seguente argomento. Supponiamo che il gas di particelle (bosoni o fermioni) sia in equilibrio termico con un serbatoio di calore, trattato come sistema classico. In conseguenza degli urti con le pareti i numeri di occupazione dei modi normali cambieranno nel corso del tempo; consideriamo due modi normali  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{k}'$  che contengono in media  $n$  e  $n'$  particelle (questo significa che  $n$  e  $n'$  non sono necessariamente interi). In conseguenza dell'interazione con il serbatoio l'energia si conserva solo in media e supponiamo che la differenza di energia tra i suoi modi sia  $\epsilon - \epsilon' \equiv \Delta$ . Possiamo cioè pensare ai tassi di transizione tra questi modi come relativi a processi in cui l'energia  $\Delta$  è ceduta al serbatoio, oppure è assorbita da esso. Questi tassi devono essere della forma generale

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'} &= n(1 \pm n') f_1 P_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \\ \Gamma_{\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k}} &= n'(1 \pm n) f_2 P_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} \end{aligned}$$

dove

1. “+” per bosoni e “-” per fermioni;

2.  $f_1$  è la probabilità che il serbatoio sia nel suo stato di energia più basso (pronto ad assorbire l'energia  $\Delta$  dalle particelle);
3.  $f_2$  è la probabilità che il serbatoio sia nel suo stato di energia più alto (pronto a cedere l'energia  $\Delta$  alle particelle);
4.  $P_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$  e  $P_{\mathbf{k}',\mathbf{k}}$  sono i tassi di transizione senza i fattori statistici. Nel modello di scattering da potenziale sono  $|\tilde{\mathcal{V}}(\mathbf{k}' - \mathbf{k})|^2$  (all'ordine più basso). In generale, avranno una forma più complicata, ma per ragioni di reversibilità microscopica devono essere uguali.

Adesso facciamo riferimento a due principi generali che regolano lo stato di equilibrio termodinamico:

- (a) Per il *principio di bilancio dettagliato* (scoperto da Maxwell e affinato da Boltzmann):

$$\Gamma_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'} = \Gamma_{\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k}}$$

- (b) Per il *principio generale della MS* (scoperto da Boltzmann):

$$\frac{f_1}{f_2} = e^{\Delta/kT}$$

Da (a) e (b) segue l'equazione funzionale

$$\frac{n(1 \pm n')}{n'(1 \pm n)} = e^{-\Delta/kT} \quad (12.72)$$

Se assumiamo che  $n$  sia solo una funzione dell'energia del modo, cioè  $n = n(\epsilon)$ ,  $n' = n(\epsilon')$ , è facile mostrare che l'equazione funzionale sopra, soggetta al vincolo di conservazione dell'energia  $\epsilon - \epsilon' = \Delta$ , ha soluzione

$$n(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} \mp 1}$$

che riconosciamo corrispondere alla distribuzione di BE (-) e FD (+).

**Box 12.12** Risolviamo l'equazione funzionale (12.72). Consideriamo l'equazione per bosoni e prendiamone il logaritmo

$$\ln n + \ln(1 + n') - \ln n' - \ln(1 + n) = -\frac{\Delta}{kT} = -\frac{\epsilon}{kT} + \frac{\epsilon'}{kT}$$

da cui

$$\ln \frac{n}{1+n} + \frac{\epsilon}{kT} = \ln \frac{n'}{1+n'} + \frac{\epsilon'}{kT}$$

Poiché  $n = n(\epsilon)$  e  $n' = n(\epsilon')$ , deve essere

$$\ln \frac{n}{1+n} + \frac{\epsilon}{kT} = \text{costante} \equiv \frac{\mu}{kT}$$

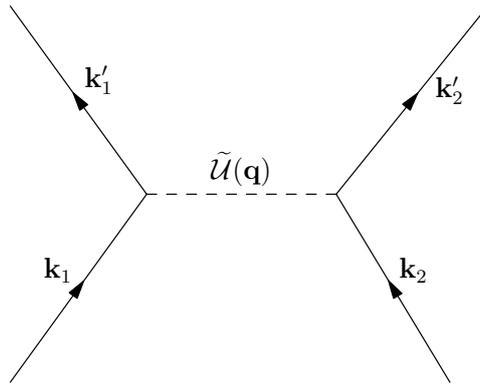


Figura 12.2: Diagramma di Feynman che descrive una collisione tra particelle ( $\mathbf{q} = \mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_2$ ).

da cui

$$\frac{n}{1+n} = e^{(\mu-\epsilon)/kT}$$

e infine

$$n = e^{(\mu-\epsilon)/kT} + n e^{(\mu-\epsilon)/kT}$$

cioè

$$n = \frac{e^{(\mu-\epsilon)/kT}}{1 - e^{(\mu-\epsilon)/kT}} = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} - 1}$$

che è BE. Analogamente, si ottiene FD per fermioni.

### 12.4.3 Interazione tra particelle

Consideriamo adesso l'hamiltoniano  $H = H_{\text{lib}} + H_{\text{int}}$ , trascurando per semplicità il potenziale esterno  $H_{\text{ext}}$ . Assumiamo che  $H_{\text{int}}$  possa essere trattata come una perturbazione della dinamica libera. Assumiamo, inoltre, che lo stato iniziale sia a due particelle e, in particolare, sia  $|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle$  (simmetrizzato se bosoni, antisimmetrizzato se fermioni). Allora, all'ordine più basso, l'ampiezza di probabilità (per unità di tempo) del processo  $|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle \rightarrow |\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2\rangle$  è rappresentata dal diagramma in figura 12.2 e il tasso di probabilità è

$$\Gamma_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \rightarrow \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \mathbf{k}' | H_{\text{int}} | \mathbf{k} \rangle|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \frac{1}{V} \tilde{u}(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_2) \right|^2 \delta(\epsilon_{\mathbf{k}'_1} + \epsilon_{\mathbf{k}'_2} - \epsilon_{\mathbf{k}_1} - \epsilon_{\mathbf{k}_2}) \delta(\mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$$

Si osservi la conservazione dell'energia e della quantità di moto nel processo.

### 12.5 Quasi-particelle e buche per un sistema di fermioni

In molti sistemi fisici si hanno insiemi densi di fermioni di spin 1/2, per esempio, gli elettroni in un metallo o i nucleoni in materia nucleare. Se le particelle non interagiscono fortemente, il principio di esclusione di Pauli funziona in modo molto efficace, e lo stato fondamentale del sistema può essere descritto come un *gas di Fermi condensato*. Questo vuol dire che tutti i modi normali sono occupati fino ad un certo valore massimo di energia, detta *energia di Fermi*

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$$

dove  $k_F$  è il numero d'onde di Fermi. La sfera piena  $S_F$ , di raggio  $k_F$  nello spazio  $\mathbf{k}$ , è detta sfera di Fermi e la sua superficie è detta superficie di Fermi.

### 12.5.1 Raggio della sfera di Fermi per $N$ particelle non interagenti in un volume $V$

Determiniamo  $k_F$  per  $N$  particelle in una scatola di volume  $V$ . Se trascuriamo le interazioni tra le particelle e le loro interazioni con campi esterni, il numero  $N$  di particelle nello stato fondamentale è pari alla dimensione dello spazio degli stati di  $N$  particelle fermioniche, che è dato da una formula che abbiamo già usato (sezione 12.2.3):

$$N = D = 2 \int_V \int_{S_F} \frac{d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{p}}{h^3} = 2 \int_V d^3\mathbf{x} \int_0^{k_F} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = 2V \frac{1}{(2\pi)^3} \left( \frac{4}{3} \pi k_F^3 \right) = \frac{V k_F^3}{3\pi^2}$$

(il fattore 2 è dovuto ai due stati di spin  $1/2$ ). Quindi  $N$  fermioni di spin  $1/2$  in una scatola di volume  $V$ , hanno come stato fondamentale, cioè come stato di minima energia, lo stato in cui sono occupati tutti i modi normali nella sfera nello spazio  $\mathbf{k}$  di raggio

$$k_F = \sqrt[3]{3\pi^2 \rho}, \quad \rho = \frac{N}{V}$$

La superficie della sfera è la superficie di Fermi per il caso particolare di fermioni non interagenti. La superficie di Fermi per gli elettroni in un metallo (che ovviamente interagiscono tra loro!) può essere un oggetto geometrico piuttosto complicato; gli stati elettronici possono ancora essere classificati come “sopra” o “sotto” la superficie di Fermi secondo che  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  sia maggiore o minore di  $\epsilon_F$ .

### 12.5.2 Hamiltoniano libero e suo stato fondamentale

Sia  $H = H_{\text{lib}} + H_{\text{ext}} + H_{\text{int}}$ . Tratteremo  $H_{\text{ext}} + H_{\text{int}}$  perturbativamente. Supponiamo che  $H_{\text{lib}}$  sia della forma

$$H_{\text{lib}} = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}$$

con  $\epsilon_{\mathbf{k}} = \epsilon_{-\mathbf{k}}$  (condizione che è automaticamente soddisfatta per l'usuale relazione di dispersione di particelle libere non relativistiche (12.58)) e  $a_{\mathbf{k}} = a(u_{\mathbf{k}})$ , dove  $u_{\mathbf{k}}$  sono gli auto-vettori associati agli autovalori  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  (per  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  data (12.58) sono le usuali onde piane  $V^{-1/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ ). Allora lo stato fondamentale  $|\text{FS}\rangle$  di  $H_0$  (cioè lo stato di minima energia) è lo stato in cui tutti i livelli dentro la sfera di Fermi di raggio  $k_F$  sono occupati, cioè

$$|\text{FS}\rangle = \prod_{|\mathbf{k}| \leq k_F} a_{\mathbf{k}}^* |0\rangle$$

(“FS” sta per “Fermi sea”, mare di Fermi, o “stato fondamentale”).

Si osservi che la creazione di un modo con  $|\mathbf{k}| < k_F$  o la distruzione di un modo  $|\mathbf{k}| > k_F$  in  $|\text{FS}\rangle$  danno zero:

$$a_{\mathbf{k}}^* |\text{FS}\rangle = 0 \quad \text{per} \quad |\mathbf{k}| \leq k_F \quad (12.73a)$$

$$a_{\mathbf{k}} |\text{FS}\rangle = 0 \quad \text{per} \quad |\mathbf{k}| > k_F \quad (12.73b)$$

Inoltre, l'operatore numero di particelle commuta non solo con  $H_{\text{lib}}$  ma anche con  $H_{\text{ext}}$  e  $H_{\text{int}}$ . Dunque, il numero di particelle è una costante del moto: Quindi

$$\sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} = \sum_{|\mathbf{k}| \leq k_F} 1 = N \quad (12.74)$$

(dove  $N$  è un numero, non un operatore). Infine, l'energia dello stato fondamentale è

$$\mathcal{E}_F = \sum_{|\mathbf{k}| \leq k_F} \epsilon_{\mathbf{k}}$$

È conveniente eliminare la (grande) costante di energia dello stato fondamentale: definiamo un nuovo hamiltoniano  $H_0$  sottraendo  $\mathcal{E}_F$  da  $H_{\text{lib}}$  di modo che  $|\text{FS}\rangle$  è ancora autostato di  $H_0$ , ma adesso con autovalore 0:

$$H_0 = H_{\text{lib}} - \mathcal{E}_F = H_{\text{lib}} - \sum_{|\mathbf{k}| \leq k_F} \epsilon_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} - \sum_{|\mathbf{k}| \leq k_F} \epsilon_{\mathbf{k}}$$

La ridefinizione della scala d'energia non ha alcuna implicazione fisica: hamiltoniane che differiscono per una costante definiscono la stessa dinamica.

Usiamo l'equazione (12.74) per riscrivere  $H_0$  nel seguente modo:

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}} [\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_F] a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_F a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} - \sum_{|\mathbf{k}| \leq k_F} \epsilon_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} [\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_F] a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} - \sum_{|\mathbf{k}| \leq k_F} [\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_F] \quad (12.75)$$

Introduciamo adesso oltre agli operatori  $a_{\mathbf{k}}^*, a_{\mathbf{k}}$ , che manteniamo per  $|\mathbf{k}| > k_F$ , nuovi operatori

$$b_{\mathbf{k}}^* = a_{-\mathbf{k}}, \quad b_{\mathbf{k}} = a_{-\mathbf{k}}^* \quad \text{per } |\mathbf{k}| \leq k_F \quad (12.76)$$

In altre parole, per modi all'interno della superficie di Fermi scambiamo i ruoli degli operatori di creazione e distruzione e invertiamo il vettore d'onda  $\mathbf{k}$ . Si verifica facilmente che gli operatori  $b$  soddisfano le relazioni di anti-commutazione fermioniche,

$$[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^*]_+ = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \quad (12.77)$$

Inoltre, dalle (12.73) segue che

$$b_{\mathbf{k}} |\text{FS}\rangle = 0 \quad \text{per } |\mathbf{k}| \leq k_F \quad (12.78a)$$

$$a_{\mathbf{k}} |\text{FS}\rangle = 0 \quad \text{per } |\mathbf{k}| > k_F \quad (12.78b)$$

Quindi  $|\text{FS}\rangle$  è uno stato di vuoto per entrambi gli operatori  $a$  e  $b$ .

Se sostituiamo (12.76) in (12.75), otteniamo

$$\begin{aligned} H_0 &= \sum_{|\mathbf{k}| \leq k_F} [\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_F] b_{-\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}^* + \sum_{|\mathbf{k}| > k_F} [\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_F] a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} - \sum_{|\mathbf{k}| \leq k_F} [\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_F] \\ &= \sum_{|\mathbf{k}| \leq k_F} [\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_F] [1 - b_{-\mathbf{k}}^* b_{-\mathbf{k}}] + \sum_{|\mathbf{k}| > k_F} [\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_F] a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} - \sum_{|\mathbf{k}| \leq k_F} [\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_F] \\ &= \sum_{|\mathbf{k}| \leq k_F} -[\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_F] b_{-\mathbf{k}}^* b_{-\mathbf{k}} + \sum_{|\mathbf{k}| > k_F} [\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_F] a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (12.79)$$

avendo usato le relazioni di anticommutazione (12.77). Adesso definiamo

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = |\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_F|$$

e osserviamo che nella (12.79) è equivalente sommare su  $\mathbf{k}$  o su  $-\mathbf{k}$ . Allora possiamo riscrivere  $H_0$  come

$$H_0 = \sum_{|\mathbf{k}| \leq k_F} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}} + \sum_{|\mathbf{k}| > k_F} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} \quad (12.80)$$

### 12.5.3 Quasi-particelle negative e positive

L'hamiltoniano (12.80) descrive il sistema nella cosiddetta *rappresentazione delle buche*. In questa rappresentazione, il sistema ha come stato di *vuoto* lo stato fondamentale di energia 0 (nella nuova scala) è  $|\text{FS}\rangle$ ,  $H_0|\text{FS}\rangle = 0$ . Le proprietà del sistema sono esattamente quelle di un insieme di fermioni di due tipi, tutti di energia positiva, che possono essere creati da  $|\text{FS}\rangle$  dagli operatori  $a_{\mathbf{k}}^*$  e  $b_{\mathbf{k}}^*$ . Questi stati fermionici a singola particella,  $|1_{\mathbf{k}}^{(a)}\rangle = a_{\mathbf{k}}^*|\text{FS}\rangle$  e  $|1_{\mathbf{k}}^{(b)}\rangle = b_{\mathbf{k}}^*|\text{FS}\rangle$  sono in realtà stati a moltissime particelle (essendo  $|\text{FS}\rangle$  lo stato fondamentale di un gas condensato di Fermi), ma si comportano *come se* fossero stati a singola particella, per cui sembra appropriato parlare di “quasi-particelle” o di *eccitazioni collettive* (come per i fononi). Chiameremo gli stati fermionici  $|1_{\mathbf{k}}^{(a)}\rangle$  stati di singola *quasi-particella negativa* e gli  $|1_{\mathbf{k}}^{(b)}\rangle$  stati di singola *quasi-particella positiva*. La terminologia sarà chiara tra breve. Le quasi particelle positive sono note come *buche* o *lacune*.

Quando il gas libero di Fermi è debolmente perturbato (dalle interazioni interne o da un potenziale esterno), e quindi si trova in stati che sono in prossimità dello stato fondamentale  $|\text{FS}\rangle$ , esso può quindi essere trattato come un gas di quasi-particelle di due tipi, estremamente rarefatto; quindi con collisioni tra quasi-particelle che sono pochissimo frequenti, in forte contrasto con il sistema denso da cui siamo partiti. Dunque, nella rappresentazione delle buche si ha un'enorme semplificazione della dinamica del sistema.

Tuttavia, nella rappresentazione delle buche, in presenza di una perturbazione, i numeri di quasi-particelle di tipo *a* e di tipo *b* non si conservano separatamente. Infatti, il vincolo (12.74),  $N - \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} = 0$ , passando ai nuovi operatori di creazione e distruzione, diventa

$$\begin{aligned} N - \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} &= N - \sum_{|\mathbf{k}| \leq k_F} [1 - b_{-\mathbf{k}}^* b_{-\mathbf{k}}] - \sum_{|\mathbf{k}| > k_F} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} \\ &= \sum_{|\mathbf{k}| \leq k_F} b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}} - \sum_{|\mathbf{k}| > k_F} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} \\ &= N_{|\mathbf{k}| \leq k_F}^{(b)} - N_{|\mathbf{k}| > k_F}^{(a)} = 0, \end{aligned}$$

vale a dire,  $N^{(a)}$ , il numero di quasi-particelle sopra il livello di Fermi, deve essere uguale a  $N^{(b)}$ , il numero di particelle sotto, ma, separatamente i due numeri non sono vincolati. La situazione è dunque la seguente: per modi normali sotto il livello di Fermi, l'operatore  $b_{\mathbf{k}}^* = a_{-\mathbf{k}}$  distrugge un elettrone in  $-\mathbf{k}$ , cioè crea una quasi-particella di tipo *b* in questo modo normale; ciò richiede una quantità d'energia  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = -[\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_F]$  relativa a  $\epsilon_F$ , e questa quantità è positiva. Inoltre, la distruzione di una vera particella di impulso  $-\mathbf{k}$  aumenta la quantità di moto del sistema di  $-(-\mathbf{k})$ . È quindi coerente attribuire un impulso  $+\mathbf{k}$  alla quasi-particella positiva, cioè la buca, creata da questo operatore.

Inoltre, possiamo associare una carica negativa alle quasi-particelle negative ed una carica positiva a quelle positive e introdurre l'operatore di carica totale

$$Q = \sum_{|\mathbf{k}| \leq k_F} b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}} - \sum_{|\mathbf{k}| > k_F} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} = N_{|\mathbf{k}| \leq k_F}^{(b)} - N_{|\mathbf{k}| > k_F}^{(a)} \quad (12.81)$$

La carica totale è una quantità conservata nei processi fisici, come accade nei processi rappresentati in figura 12.3.

Osserviamo infine che nella rappresentazione delle buche, gli operatori di campo diventano

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \sum_{|\mathbf{k}| > k_F} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \sum_{|\mathbf{k}| < k_F} b_{-\mathbf{k}}^* e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \sum_{|\mathbf{k}| > k_F} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \sum_{|\mathbf{k}| < k_F} b_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

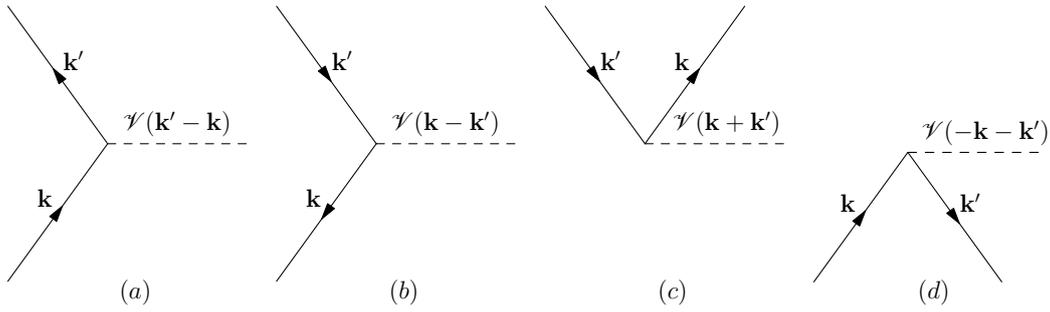


Figura 12.3: I quattro tipi di processi possibili al prim'ordine: il tempo scorre dal basso verso l'alto; una freccia in sù rappresenta una quasi-particella negativa, un freccia in giù una quasi-particella positiva (buca).

#### 12.5.4 Effetto dell'interazione

Consideriamo l'effetto di un potenziale esterno. La dinamica libera è perturbata dall'hamiltoniano di interazione

$$H_{\text{ext}} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} \tilde{\mathcal{V}}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) a_{\mathbf{k}'}^* a_{\mathbf{k}}$$

Riscriviamo questo hamiltoniano nelle variabili di quasi-particella. La somma si spezza in 4 termini:

$$\sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} = \underbrace{\sum_{k, k' > k_F}}_{(a)} + \underbrace{\sum_{k', k < k_F}}_{(b)} + \underbrace{\sum_{k < k_F < k'}}_{(c)} + \underbrace{\sum_{k' < k_F < k}}_{(d)}$$

dove

$$\begin{aligned} (a) &= \sum_{k, k' > k_F} \hat{\mathcal{V}}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) a_{\mathbf{k}'}^* a_{\mathbf{k}} \\ (b) &= \sum_{k, k' < k_F} \hat{\mathcal{V}}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) b_{-\mathbf{k}'} b_{-\mathbf{k}}^* = \sum_{k, k' < k_F} \hat{\mathcal{V}}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') b_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}}^* \\ (c) &= \sum_{k < k_F < k'} \tilde{\mathcal{V}}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) a_{\mathbf{k}'}^* b_{-\mathbf{k}}^* = \sum_{k < k_F < k'} \tilde{\mathcal{V}}(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) a_{\mathbf{k}'}^* b_{\mathbf{k}}^* \\ (d) &= \sum_{k' < k_F < k} \tilde{\mathcal{V}}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) b_{-\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}} = \sum_{k' < k_F < k} \tilde{\mathcal{V}}(-\mathbf{k}' - \mathbf{k}) b_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

I primi due termini descrivono processi in cui una quasi-particella (positiva o negativa) è diffusa in un'altra quasi-particella dello stesso tipo, ma il terzo termine descrive un processo in cui viene creata dal vuoto una coppia di quasi particelle di carica opposta e il termine finale descrive due quasi particelle di carica opposta che si annichilano reciprocamente. I diagrammi di questi processi sono riportati in figura 12.3.

“Accendiamo” adesso l'interazione  $H_{\text{int}}$  tra i fermioni. I possibili processi di interazione tra le quasi-particelle sono molto più complicati di quelli tra le particelle “genuine”. Li possiamo caratterizzare con una serie di diagrammi dove in entrata e in uscita ci sono le quasi-particelle: una freccia in sù rappresenta una quasi-particella negativa, un freccia in giù una quasi-particella positiva. Allora il processo tra particelle genuine di figura

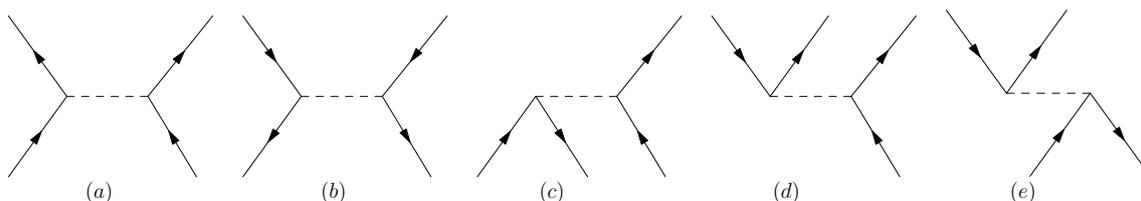


Figura 12.4: Diagrammi di Feynman descrittivi della collisione tra quasi particelle; una freccia in sù rappresenta una quasi-particella negativa, una freccia in giù una quasi-particella positiva.

12.2, diventa uno qualunque dei processi rappresentati in figura 12.4. Per esempio, (d) rappresenta una quasi-particella negativa che è diffusa mentre crea dal vuoto una coppia di quasi particelle di carica opposta. Si osservino le seguenti leggi di conservazione:

- (1) in ogni vertice si conserva la carica elettrica;
- (2) la quantità di moto totale entrante è uguale alla quantità di moto totale uscente;
- (2) l'energia totale entrante è uguale all'energia totale uscente.

### 12.5.5 Particelle e anti-particelle

Quanto discusso finora fornisce un modello per una teoria in cui ogni particella ha la sua antiparticella, di simile proprietà dinamiche, ma di carica opposta; in altre parole, una teoria in cui *il comportamento delle antiparticelle è completamente determinato da quello delle particelle*. Il prototipo di tali teorie è l'ipotesi Dirac relativa al *positrone*.

In una teoria relativistica la relazione di dispersione di una particella libera è del tipo  $\omega(\mathbf{k})^2 = c^2(|\mathbf{k}|^2 + \mu^2)$  dove  $\mu = \frac{mc}{\hbar}$  è l'inverso della lunghezza d'onda Compton della particella di massa (a riposo)  $m$  (per i fotoni, ovviamente,  $\mu = 0$ ). Si hanno così due autovalori di energia per ciascun valore di  $\mathbf{k}$ , uno positivo e l'altro negativo, vale a dire,  $\pm\epsilon_{\mathbf{k}}$ , con  $\epsilon_{\mathbf{k}} = c\sqrt{\hbar^2|\mathbf{k}|^2 + m^2c^2}$ . Se assumiamo che tutti i modi di energia negativa sono occupati, e trattiamo questo stato come il vuoto  $|\text{DS}\rangle$  ("Dirac sea", "mare di Dirac"), possiamo sviluppare una teoria in cui tutte le eccitazioni osservate sono quasi-particelle di energia positiva. Il concetto di "superficie di Fermi" ora si riduce al punto  $\mathbf{k} = 0$ , e bisogna distinguere tra i modi a seconda che siano di energia positiva o negativa, ma altrimenti la formulazione che abbiamo appena dato è applicabile. Così, per esempio, ogni interazione che può far scatterare elettroni reali tra loro, come in figura 12.4 (a), deve essere in grado anche di produrre dal vuoto coppie elettrone-positrone, come in figura 12.4 (d).

## 12.6 Interazione tra fermioni mediata da bosoni

Per sviluppare una teoria relativistica dell'interazione tra fermioni, occorre abbandonare l'idea che l'interazione tra particelle sia descritta da un potenziale che dipende dalla posizione istantanea tra due particelle e *rendere il potenziale stesso una variabile dinamica*. Questo può essere fatto, per esempio, introducendo un campo bosonico che media l'interazione tra i fermioni.

### 12.6.1 Hamiltoniano del modello

Nell'interazione tra elettroni, il campo bosonico è quello elettromagnetico. Per evitare complessità e semplificare al massimo la trattazione, considereremo, in aggiunta al campo fermionico  $\psi(\mathbf{x})$ , con hamiltoniano libero  $H^F$ , un campo bosonico  $\phi(x)$ , con hamiltoniano libero  $H^B$  e relazione di dispersione  $\omega_{\mathbf{k}} = c\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \mu^2}$ . Sia inoltre  $H^{FB}$  l'hamiltoniano di

interazione tra bosoni e fermioni, di modo che l'hamiltoniano del sistema è della forma

$$H = H^F + H^B + H^{FB}$$

Tascureremo lo spin e tratteremo i fermioni in regime nonrelativistico con relazione di dispersione

$$\epsilon(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}.$$

I campi associati a fermioni e bosoni sono scritti, con le seguenti notazioni per gli operatori di creazione e distruzione:

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a_{\mathbf{k}} \\ \phi(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2V\omega(\mathbf{k})}} (b_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + b_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}})\end{aligned}$$

con le usuali CCR(bosoni) e CAR(fermioni); inoltre gli operatori bosonici e fermionici commutano tra loro. Chiameremo “psioni” le particelle del campo  $\psi$  e “phioni” le particelle del campo  $\phi$ . Allora,

$$\begin{aligned}H^F &= \sum_{\mathbf{k}} \epsilon(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} \\ H^B &= \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega(\mathbf{k}) b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

(avendo sottratto l'energia di vuoto del campo bosonico).

### 12.6.2 Hamiltoniano di interazione

Nel caso realistico in cui il campo bosonico è il campo elettromagnetico, l'interazione tra fermioni e bosoni è data dalla regola del minimo accoppiamento  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A}$  dove  $e$  è l'unità di carica elettrica. Nel modello in esame, possiamo assumere

$$H^{FB} = g \int \psi(\mathbf{x})^* \psi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) dV$$

dove  $g$  è una costante di accoppiamento. Una motivazione euristica per questa scelta è la seguente: nel caso limite in cui gli psioni non si muovono, per esempio, sono dei nucleoni pesanti,

$$\psi(\mathbf{x})^* \psi(\mathbf{x}) = \sum_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_j)$$

dove  $\mathbf{X}_j$  sono le posizione dei nucleoni. Allora

$$H^{FB} = g \sum_j \phi(\mathbf{X}_j)$$

che è proprio il potenziale classico generato da  $N$  particelle ferme.

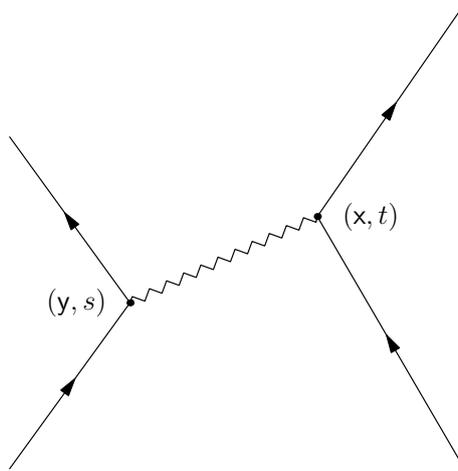


Figura 12.5: Lo psione a sinistra emette un phione nel punto  $\mathbf{y}$  al tempo  $s$  che viene assorbito dallo psione proveniente da destra nel punto  $\mathbf{x}$  al tempo  $t$ .

### 12.6.3 Ampiezza di transizione

Consideriamo l'interazione tra due psioni mediata da un phione come mostrato in figura 12.5

Vogliamo calcolare l'ampiezza di probabilità di questo processo. È chiaro che questa ampiezza dipenderà dalle funzioni d'onda degli psioni entranti e dall'ampiezza del processo di creazione di un phione nel punto  $\mathbf{y}$  al tempo  $s$  seguito dalla sua distruzione nel punto  $\mathbf{x}$  al tempo successivo  $t$ . Sembra ragionevole assumere che quest'ultima ampiezza sia data dalla formula

$$\text{ampiezza per } t > s \propto \langle 0 | \phi^+(\mathbf{x}, t) \phi^-(\mathbf{y}, s) | 0 \rangle$$

dove usiamo le stesse convenzioni “ $\pm$ ” che abbiamo introdotto per il campo EM; inoltre, siamo passati alla *rappresentazione interazione*, come abbiamo fatto quando abbiamo studiato l'interazione del campo EM con la materia in approssimazione di dipolo. Si osservi che se il tempo  $s$  è successivo a  $t$ , occorrere invertire i ruoli degli operatori di creazione e distruzione e usare la formula

$$\text{ampiezza per } t < s \propto \langle 0 | \phi^+(\mathbf{y}, s) \phi^-(\mathbf{x}, t) | 0 \rangle$$

Allora l'ampiezza bosonica per entrambi i casi  $s \lesseqgtr t$  è data da

$$\text{ampiezza} \propto \langle 0 | \mathbb{T} \{ \phi(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{y}, s) \} | 0 \rangle \quad (12.82)$$

dove  $\mathbb{T}$  è il prodotto cronologico (10.25).

In effetti, (12.83) è l'ampiezza del processo all'ordine più basso della serie di Dyson (9.106), data dalla formula (9.105). Riconosciamo che (12.83) è proprio il propagatore di Feynman (10.27). Dunque,

$$\text{ampiezza} = -i\hbar c G^F(x - x') \quad (12.83)$$



## **13. Campo di Dirac e campi quantistici relativistici**