

PROVA SCRITTA DI METODI MATEMATICI DELLA FISICA 1
(10 gennaio 2012)

1. Con un metodo di vostra scelta, calcolare l'integrale reale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta}.$$

2. Calcolare l'integrale nel piano complesso

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{1 + z^2}.$$

3. Dimostrare che

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1.$$

4. Sia

$$F_1(z) = \int_0^\infty \cosh(t) e^{-zt} dt.$$

(i) Mostrare che $F_1(z)$ è analitica per $\operatorname{Re}(z) > 1$.

(ii) Trovare una funzione $F(z)$ che sia un prolungamento analitico di $F_1(z)$ (specificare dove la funzione trovata è analitica).

5. Determinare i coefficienti c_0 , a_i e b_i nella combinazione lineare

$$c_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$$

che danno la migliore approssimazione in $L^2[-\pi, \pi]$ di $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

6. Mostrare che la funzione $u(x) = x e^{-x^2/2}$ è un'autovettore della trasformata di Fourier

$$\mathbb{F}f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-ixy} dx.$$

e determinare il corrispondente autovalore.

7. Trovare la soluzione $Y = Y(x)$ dell'equazione

$$\int_{-\infty}^\infty Y(u) Y(x-u) du = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-x^2/4}.$$