

ESERCITAZIONE 1

1.1. Sia $f(z) = R(r, \theta)e^{i\Phi(r, \theta)}$. $z = x + iy = re^{i\theta}$. Quali relazioni devono esserci tra $R(r, \theta)$ e $\Phi(r, \theta)$ se $f(z)$ è analitica?

1.2. Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$$

1.3. Considerate l'insieme C_n delle radici n-esime dell'unità, $C_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$. Questo insieme è un gruppo rispetto all'operazione di moltiplicazione di numeri complessi? Spiegare. In caso affermativo, caratterizzare il gruppo.

1.4. Sia $w = f(z) = (z^2+1)^{1/2}$. Dimostrare che un giro completo intorno a tutti i punti di diramazione di $f(z)$ non produce alcun cambiamento di ramo per $f(z)$.

1.5. Calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a \cos x + x \sin x}{x^2 + a^2} dx$$

1.6. Supponete che qualcuno vi dica: “ $w = z^2$ non è analitica nello 0 (perché $dw = 2zdz = 0$ per $z = 0$ e quindi, per $z = 0$, l'idea stessa di stiro-rotazione locale viene meno”. Come gli rispondete? Come mostrate che $w = z^2$ è analitica nello zero? È conforme nello zero? Spiegare.

1.7. Calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta$$

1.8. (a) Trovare la soluzione generale $z = z(t)$ dell'equazione differenziale

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -z$$

e darne un'interpretazione meccanica. (b) Studiare l'effetto della trasformazione conforme $z \mapsto w = z^2$ sulla soluzione generale $z = z(t)$. Sapete darne un'interpretazione fisica?

[Aiuto: I fuochi di un'ellisse $z = \cos t + ib \sin t$ sono in $\pm\sqrt{a^2 - b^2}$.]

1.9. Calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx, \quad n \text{ intero positivo, } a \text{ reale positivo}$$

1.10. Calcolare l'integrale di Fourier

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx$$

1.11. Dimostrare che

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\sinh x} = \frac{\pi}{2} \tanh \frac{a\pi}{2}$$

1.12. Dimostrare che

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$