

4.1

- (1) Mostrare che nessuna scelta della funzione reale $v = v(x, y)$ può rendere la funzione $f(x + iy) = (x^2 + y^2) + iv$ analitica.
- (2) Per $z \neq 0$, sia $f(z) \equiv f(x + iy) = xy/\bar{z}$.
 - (a) Mostrare che $f(z)$ tende a 0 quando z tende verso qualunque punto dell'asse reale o dell'asse immaginario, inclusa l'origine.
 - (b) Avendo stabilito che $f = 0$ su entrambi gli assi, dedurre che le equazioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte nell'origine.
 - (c) Malgrado questo, mostrare che f non è analitica in 0 (lo si mostri in termini di caratterizzazione geometrica: localmente, su vettori infinitesimi nello 0, f non agisce come una stiro-rotazione)
- (3) Mostrare che $f(z) = e^z$ soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann e trovare $(e^z)'$.
- (4) Si consideri l'inversione complessa $I(z) = 1/z$.
 - (a) Se $z = x + iy$ e $I = u + iv$, esprimere u e v in termini di x e y .
 - (b) Mostrare che le equazioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte dappertutto eccetto che nell'origine, cosicché I è analitica ovunque eccetto che nell'origine (è analitica all'infinito?).
 - (c) Determinare la matrice Jacobiana e, usando coordinate polari, determinare l'effetto geometrico locale di I .
 - (d) Usare $f'(z) = \partial_x f$ per mostrare che la derivata è $-1/z^2$, come nell'usuale calcolo. Utilizzare questo per confermare il risultato di (c).