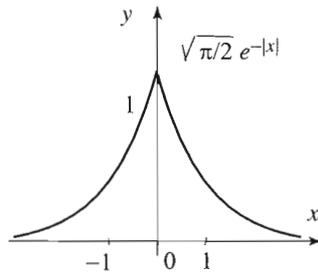


SOLUZIONI 19.1

1 La funzione nella condizione iniziale è mostrata in figura



Applichiamo alla PDE il metodo di soluzione basato su trasformata di Fourier F rispetto alla variabile x (usiamo la convenzione $\textcircled{3}$ per F). Otteniamo, a primo membro,

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right) = F\left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{d}{dt} F\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = ik \frac{d}{dt} \hat{u}(k, t)$$

A secondo membro

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = -k^2 \hat{u}(k, t)$$

Dunque,

$$ik \frac{d\hat{u}(k, t)}{dt} = -k^2 \hat{u}(k, t) \quad \Rightarrow \quad \text{ODE: } \frac{d\hat{u}(k, t)}{dt} = ik \hat{u}(k, t)$$

La soluzione della ODE con dato iniziale $\hat{u}(k, 0)$ è

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}(k, 0) e^{ikt}$$

dove

$$\hat{u}(k, 0) = F\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x|}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x|} e^{-ikx} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-ikx} dx$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-ikx} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^x e^{-ikx} dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{ikx} dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x(1-ik)} dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x(1+ik)} dx \\
 &= \frac{1}{2} \frac{-1}{1-ik} e^{-x} e^{ikx} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2} \frac{-1}{1+ik} e^{-x} e^{-ikx} \Big|_0^{\infty} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-ik} + \frac{1}{1+ik} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1+ik+1-ik}{1+k^2} \right) \\
 &= \frac{1}{1+k^2}
 \end{aligned}$$

Quindi

$$\widehat{u}(k, t) = \frac{1}{1+k^2} e^{ikt}$$

Allora

$$u(x, t) = F^{-1} \left(\frac{1}{1+k^2} e^{ikt} \right).$$

Detta $f(x)$ la F^{-1} di $\frac{1}{1+k^2}$, per la proprietà che una modulazione diventa una traslazione (attenzione al segno!), la soluzione sarà

$$f(x+t)$$

Ma $f(x)$ è chiaramente $\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x|}$, visto che abbiamo appena mostrato che la trasformata di Fourier di questa funzione è $1/(1+k^2)$. Dunque, la soluzione del problema al contorno è

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x+t|}$$

2

$$\frac{d^2 \widehat{u}}{dt^2} = -k^2 \widehat{u}$$

$$\widehat{u}(k, t) = A(k) \cos(kt) + B(k) \sin kt$$

dato iniziale implica $B = 0$ e

$$\widehat{u} = \widehat{u}(k, 0) \cos(kt)$$

dove

$$\widehat{u}(k, 0) = F\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}$$

per l'esercizio precedente (e la relazione di reciprocità: vedere esercizi 18.2).

Quindi

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos(kt) e^{ikx} dk = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|} \cos(kt) e^{ikx} dk$$

Ma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|} \cos(kt) e^{ikx} dk &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|} \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|} e^{ik(x+t)} dk + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|} e^{ik(x-t)} dk \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+(x+t)^2} + \frac{1}{1+(x-t)^2} \right] \end{aligned}$$

come si poteva anticipare sin dall'inizio.

3

$$\frac{d\widehat{u}}{dt} = -\frac{1}{4} k^2 \widehat{u} \quad \Rightarrow \quad \widehat{u}(k, t) = \widehat{u}(k, 0) e^{-k^2 t/4}$$

$$\widehat{u}(k, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\pi} e^{-k^2/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4}$$

$$\widehat{u}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4} e^{-k^2 t/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2(1+t)/4}$$

Dunque,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2(1+t)/4} e^{ikx} dk \quad (a = (1+t)/4) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{(1+t)/4}} e^{-x^2/[4(1+t)/4]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1+t}} e^{-\frac{x^2}{1+t}} \end{aligned}$$

4 Stesso procedimento di **2**. Risultato:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-1}^1 \cos(ckt) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\sin(x+ct)}{x+ct} + \frac{\sin(x-ct)}{x-ct} \right] \end{aligned}$$

5 Stesso procedimento degli esercizi precedenti. Risultato:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dk^2 t} e^{ik(x+Kt)} \hat{f}(k) dk$$

6 Idem. Risultato:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iak^3 t} e^{ikx} \hat{f}(k) dk$$

7

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = -atk^2 \hat{u} \quad \hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k)$$

Risolvendo la ODE, si trova

$$\hat{u}(k, t) = \hat{f}(k) e^{-at^2 k^2 / 2}$$

$$F^{-1} \left[e^{-at^2 k^2 / 2} \right] (x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2 k^2 / 2} e^{ikx} dk = \frac{1}{t} e^{-x^2 / (2t^2)}$$

Quindi

$$u(x, t) = f \star \frac{1}{t} e^{-x^2 / (2t^2)} = \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2 / (2t^2)} f(y) dy$$

(si faccia attenzione al fattore $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ della convoluzione quando si usa la convenzione **3** per F).

8 Stesso procedimento dell'esercizio precedente. Risultato:

$$u(x, t) = f \star g_t(x)$$

dove

$$g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2(1-e^{-t})}} e^{-\frac{x^2}{4(1-e^{-t})}}$$

9 Discende dalla soluzione come convoluzione vista in classe per la data condizione iniziale.

10

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_s(k) e^{-Dk^2 t} \sin(kx) dk$$

dove

$$\hat{f}_s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx \quad k > 0$$