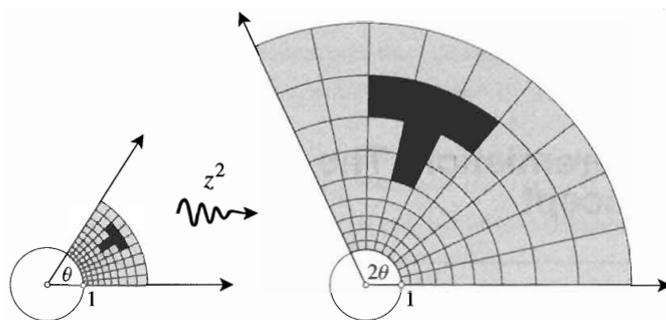


## 4.1. Funzioni analitiche.

4.1.1. *Un fenomeno strano.* Le funzioni viste finora hanno la proprietà “quadrati → quadrati”. Abbiamo detto che questo è un segno che le funzioni sono conformi, ma per il momento abbiamo solo dimostrato che le trasformazioni di Möbius sono conformi.

Consideriamo  $w = f(z) = z^2$



Tra poco mostreremo che è conforme dappertutto eccetto che nei due punti critici  $z = 0$  e  $z = \infty$  dove gli angoli sono raddoppiati. In particolare, ogni coppia di curve ortogonali è trasformata in una coppia di curve ortogonali. La figura sopra ne fornisce un esempio. Vediamone un altro esempio. Come al solito, scriviamo  $w = u + iv$  e  $z = x + iy$ , allora

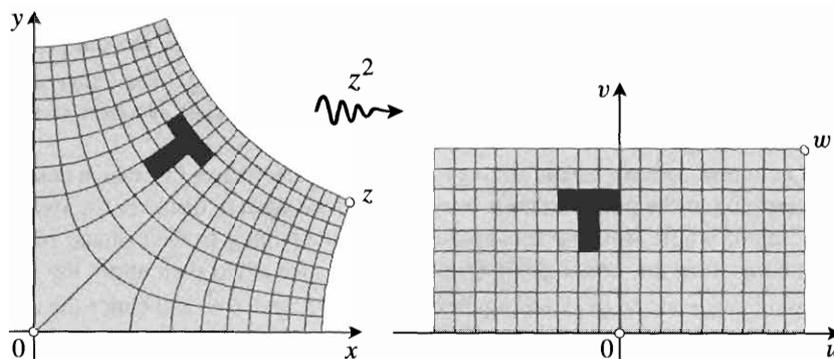
$$u + iv = w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$$

Pensiamo a questa trasformazione come ad un *cambiamento di coordinate* nel piano reale

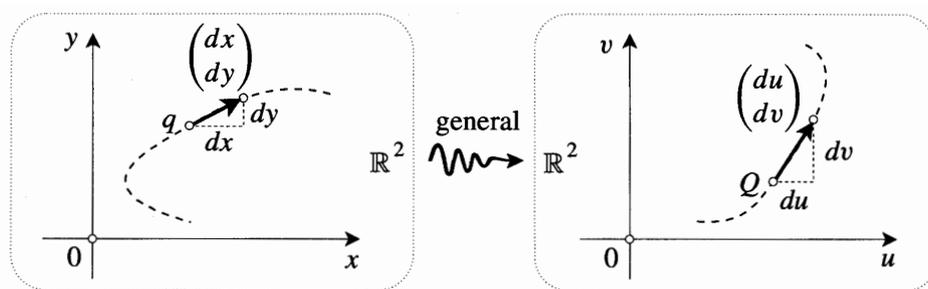
$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 \\ v &= 2xy \end{aligned}$$

$u$  e  $v$  sono coordinate ortogonali, come si verifica facilmente mostrando che le curve  $u = \text{cost}$  e  $v = \text{cost}$  sono ortogonali: mediante differenziazione implicita si vede immediatamente che hanno il prodotto delle pendenze pari a -1,

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \text{cost} \Rightarrow x - yy' = 0 \Rightarrow y' = +y/x \\ 2xy &= \text{cost} \Rightarrow y + xy' = 0 \Rightarrow y' = -y/x \end{aligned}$$



4.1.2. **Descrizione locale di trasformazioni del piano.** Usiamo il calcolo vettoriale per descrivere la trasformazione  $\mathbf{r} = (x, y) \mapsto \mathbf{w} = (u, v)$ . Ricordiamo il significato geometrico della matrice Jacobiana  $J$ , come trasformazione dei vettori infinitesimi in  $\mathbf{r}$  nei vettori infinitesimi in  $\mathbf{w}$ ,  $d\mathbf{w} = Jd\mathbf{r}$ , cioè,



$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$$

Per  $w = f(z) = z^2$  si ha

$$J = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = 2r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

[nel punto  $z = x + iy = re^{i\theta} \leftrightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta)$ ]. L'effetto locale della trasformazione è dunque di “stirare” i vettori infinitesimi e di ruotarli: è una *stiro-rotazione*, uno “*stiro-giro*” (come lo abbiamo chiamato a lezione). Risulta così dimostrato che  $z^2$  è conforme.

Se usiamo la notazione complessa per i vettori infinitesimi nei punti  $z$  e  $w$ ,

$$dz = dx + idy, \quad dw = du + idv$$

vediamo che l'effetto dello Jacobiano su  $(dx, dy)$  è semplicemente la moltiplicazione per il numero complesso  $2z$ , cioè

$$dw = (2z)dz$$

Se invece di  $z^2$ , avessimo considerato la funzione  $w = z^n$  avremmo trovato

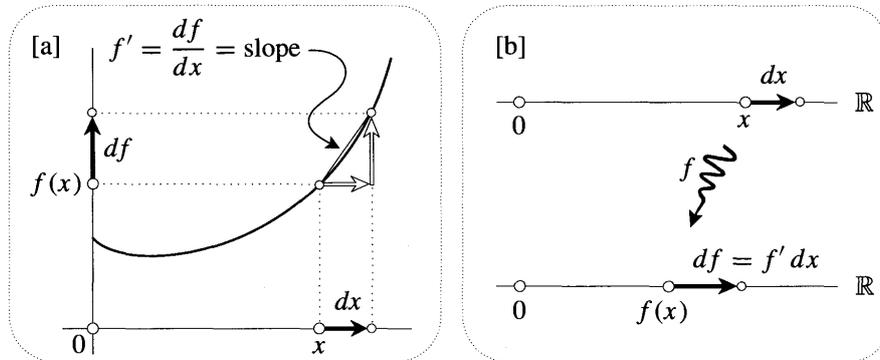
$$dw = nz^{n-1}dz,$$

che è quello che si ottiene applicando formalmente le regole della derivazione, cioè

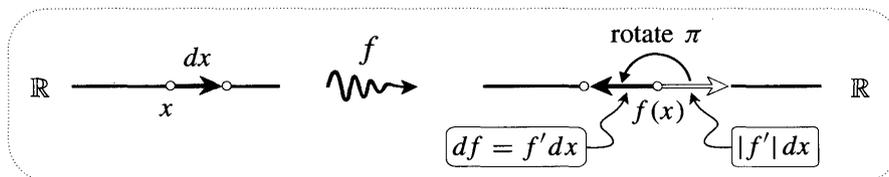
$$dw = f'(z)dz$$

Questa non è un'osservazione formale ma sostanziale, come intendiamo spiegare nel seguito.

4.1.3. **Significato geometrico della derivata complessa.** Per comprendere in generale la nozione di *derivata complessa*  $f'(z)$  rivediamo il significato geometrico della derivata reale. Se  $f'(x) > 0$ :

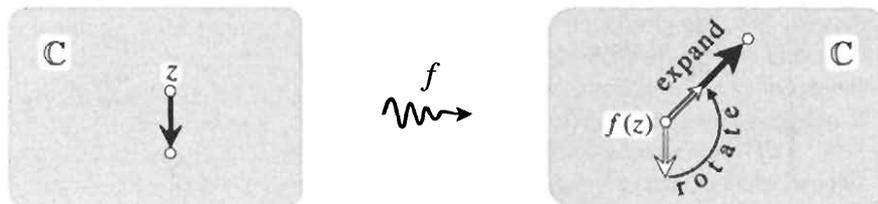


Se  $f'(x) < 0$ :

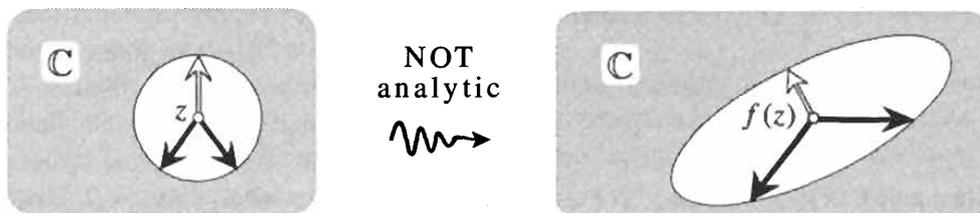


cioè, espansione di  $|f'(x)|$  e rotazione di  $\pi = \arg[f'(x)]$ .

Consideriamo l'effetto locale di una trasformazione  $w = f(z)$ , cioè l'effetto sui vettori infinitesimi nel punto  $z$ ,

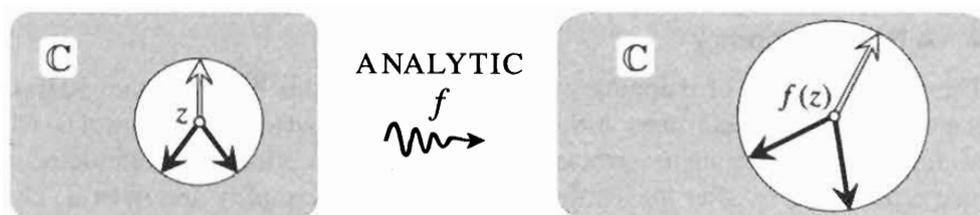


In generale,



cioè, in generale l'amplificazione e la rotazione sono diverse per diversi vettori infinitesimi nel punto  $z$ . Quando sono le stesse, la trasformazione  $f$  è detta

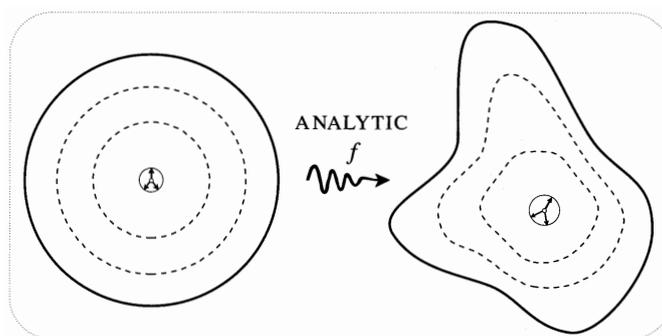
analitica:



**Definizione 4.1.1.** Le trasformazioni analitiche<sup>1</sup> sono precisamente quelle il cui effetto locale è uno stiro-giro: tutti i vettori infinitesimi che emanano da un singolo punto sono amplificati e ruotati della stessa entità.

Quindi: *se una trasformazione è analitica, è anche conforme.*

Se una trasformazione è analitica, cerchi e quadrati infinitesimi si trasformano rispettivamente in cerchi e quadrati infinitesimi, ma, in generale, questo non vale per cerchi e quadrati finiti, che risultano deformati:



Uno stiro-giro locale in  $z$  è la moltiplicazione per un numero complesso che dipende da  $z$  e che denoteremo  $f'(z)$ ,

$$dw = f'(z)dz.$$

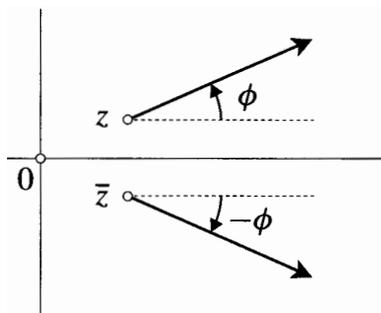
La funzione  $f'(z)$  è detta la *derivata* della funzione  $f$  nel punto  $z$  ( $dz$  è espanso di  $|f'(z)|$  e ruotato di  $\arg[f'(z)]$ ).

**Esempi.**

- $f(z) = z^2$  è analitica e  $f'(z) = 2z$ .
- $f(z) = \bar{z}$  non è analitica, non essendo conforme (ma anti-conforme, come abbiamo già visto). Possiamo comunque essere più espliciti. L'amplificazione è 1 per tutti, quindi OK. Il problema è la rotazione:  $\phi$  deve essere

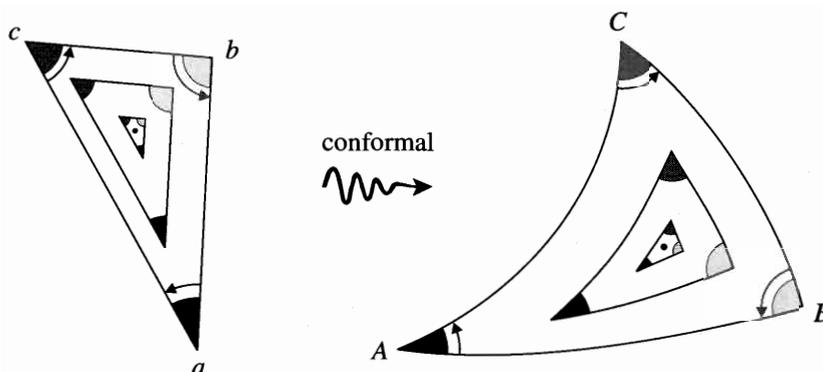
<sup>1</sup>Anche dette olomorfe.

ruotato di  $-2\phi$  per ottenere un vettore immagine con angolo  $-\phi$ .



Quindi differenti vettori devono essere ruotati di quantità differenti, e quindi  $f(z) = \bar{z}$  non è una stiro-rotazione.

4.1.4. **Conforme = analitico.** Abbiamo già visto che se la trasformazione è analitica, allora è conforme. Cerchiamo di capire in che senso, se è conforme allora è analitica. Guardiamo la figura



Il triangolo finito (non infinitesimo)  $abc$  è trasformato conformemente nel triangolo  $ABC$ : i lati si distorcono, ma gli angoli restano invariati. Si immagini adesso, mediante trasformazione di scala, di comprimere il triangolo  $abc$  verso un punto arbitrario dentro la regione. Mentre facciamo questo, i lati delle immagini dei triangoli diventano sempre più linee rette, mentre gli angoli, ovviamente, non cambiano. Perciò un triangolo infinitesimo a sinistra è trasformato in un triangolo infinitesimo *simile* a destra. Quindi è ottenuto mediante stiro-rotazione dall'originale. Quindi la trasformazione è analitica. Perciò, **se una trasformazione è conforme in un intorno comunque piccolo del punto  $p$ , allora è analitica in  $p$ .** In particolare,

- L'inversione complessa  $z \mapsto 1/z$  è analitica (abbiamo già mostrato che è conforme).
- Le trasformazioni di Möbius  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  sono analitiche (abbiamo già mostrato che sono conformi).
- L'inversione  $z \mapsto 1/\bar{z}$  **non** è analitica.

4.1.5. **Le equazioni di Cauchy-Riemann.** Alla moltiplicazione per un numero complesso

$$(x + iy) \mapsto (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay)$$

è associata la trasformazione vettoriale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Quindi, affinché la trasformazione  $z = x + iy \mapsto w = u + iv$  sia analitica, la matrice Jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$$

deve essere della forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{aligned} \partial_x u &= +\partial_y v \\ \partial_x v &= -\partial_y u \end{aligned}$$

Queste sono le famose *equazioni di Cauchy-Riemann*. Forniscono un criterio per riconoscere una funzione analitica.

La derivata è, localmente, la moltiplicazione per il numero complesso  $a + ib$  che rappresenta lo stiro-giro, quindi

$$f'(z) = a + ib = \partial_x u + i\partial_x v = \partial_x(u + iv) = \partial_x f$$

Per Cauchy-Riemann abbiamo anche

$$f'(z) = \partial_y v - i\partial_y u = -i\partial_y(u + iv) = -i\partial_y f$$

In altre parole (per  $\delta x$  e  $\delta y$  infinitesimi reali),

$$f'(z) = \frac{f(z + \delta x) - f(z)}{\delta x} = \frac{f(z + i\delta y) - f(z)}{i\delta y}$$

il che non è sorprendente, visto che lo stiro-giro dei vettori infinitesimi in  $z$  è lo stesso per tutti, se la funzione è analitica. Quindi, anche per un arbitrario  $\delta z$  in  $z$ , si avrà

$$f'(z) = \frac{f(z + \delta z) - f(z)}{\delta z}$$

Questo giustifica il fatto che le usuali regole di calcolo delle derivate reali si estendono pari-pari alle derivate delle funzioni analitiche (notazione di Leibniz inclusa):

$$\frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}, \quad \frac{d \sin z}{dz} = \cos z, \quad \frac{de^z}{dz} = e^z, \quad \dots$$

4.1.6. **Definizioni analitica di derivata e di funzione analitica.** Per concludere, diamo le definizioni puramente analitiche delle nozioni di derivata complessa e di funzione analitica. Sono del tutto equivalenti alle nozioni geometriche.

**Definizione 4.1.2.** Sia  $U$  un sottoinsieme aperto del piano complesso  $\mathbb{C}$ . Una funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  è **differenziabile in senso complesso** in un punto  $z_0$  se esiste il limite

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Questo significa che per ogni successione di numeri complessi che convergono a  $z_0$ , il rapporto incrementale deve tendere allo stesso numero, indicato con  $f'(z_0)$ .

**Definizione 4.1.3.** Una funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  è detta **analitica**<sup>2</sup> su  $U$  se è differenziabile in senso complesso in ogni punto di  $U$ .

Da queste definizioni seguono rigorosamente le regole di calcolo della derivata accennate sopra e le proprietà della derivata, in particolare

**La regola di Leibniz:**  $(fg)' = f'g + fg'$

**La regola della funzione composta:**  $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\mathfrak{z}} \frac{d\mathfrak{z}}{dz}$

Queste regole potrebbero essere ottenute anche in modo puramente geometrico.

---

<sup>2</sup>Equivalentemente, olomorfa.