

5.1. **Conseguenze del teorema di Cauchy I.** Nella lezione 4.2 abbiamo visto che la legge di Gauss nel piano è l'impalcatura su cui si basa il teorema di Cauchy, da cui discende immediatamente la formula di Cauchy. Schematicamente:

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{N} ds = 2\pi \sum_i q_i$$

↓

Teorema di Cauchy. Sia $f(z)$ analitica in una regione \mathcal{R} e sul suo bordo C . Allora

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

↓

Formula di Cauchy. Sia $f(z)$ sia analitica all'interno e lungo una curva semplice chiusa C e sia a un punto qualsiasi all'interno di C . Allora

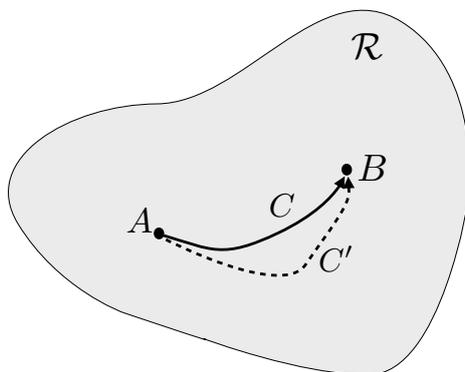
$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

In questa lezione incominciamo ad esplorare le conseguenze del teorema e della formula di Cauchy.

5.1.1. **Antiderivata di una funzione analitica.** Sia $H(z)$ una funzione analitica in una regione semplicemente connessa \mathcal{R} . Si vuole calcolare l'integrale

$$I = \int_C H(z) dz$$

dal punto A al punto B , lungo la curva C , come mostrato in figura:



Poiché la funzione è analitica, per il teorema di Cauchy si ha

$$\oint_L H(z)dz = 0$$

dove L è il circuito $L = C' - C$ e C' è un altro cammino da A a B . Ne segue che

$$I = \int_C H(z)dz = \int_{C'} H(z)dz$$

e quindi che l'integrale da A a B non dipende dal cammino. Scriveremo dunque

$$I = \int_A^B H(z)dz$$

omettendo il riferimento alla curva C . Deve quindi esistere una funzione $V = V(z)$ tale che

$$\int_A^B H(z)dz = V(B) - V(A)$$

La funzione V è chiamata *anti-derivata* o *primitiva* in matematica e *potenziale* in fisica (a meno di un segno irrilevante in questa sede); in entrambi i casi, è data a meno di una costante additiva.

Come di consueto, il potenziale $V(z)$ è costruito scegliendo arbitrariamente un punto P e il valore $V(P)$ (la "terra"), quindi V è definito in ogni punto Z di U nel seguente modo:

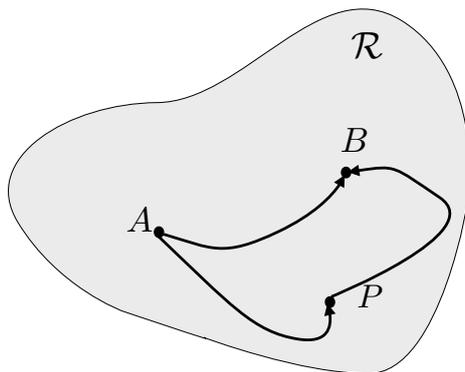
$$V(Z) = V(P) + \int_C H(z)dz ,$$

dove C è un qualunque cammino da P a Z . Si verifica facilmente che V è una funzione analitica, che vale il *teorema fondamentale del calcolo*

$$V'(z) = H(z)$$

(la convenzione usata in fisica è che la derivata del potenziale cambiata di segno sia pari al campo) e che

$$\int_A^B H(z)dz = (V(P) - V(A)) + (V(B) - V(A)) = V(B) - V(A)$$



Per l'antiderivata possiamo usare il simbolo di integrale indefinito, e scrivere

$$V(z) = \int H(z) dz$$

A questo punto dovrebbe essere ovvio (se non lo è, chiedete), che le regole note dall'analisi reale si estendono pari pari all'integrale delle funzioni analitiche, ad esempio (a meno di una costante additiva),

$$\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1), \quad \int \cos z dz = \sin z, \quad \int e^z dz = e^z, \quad \int \frac{dz}{z} = \ln z, \dots$$

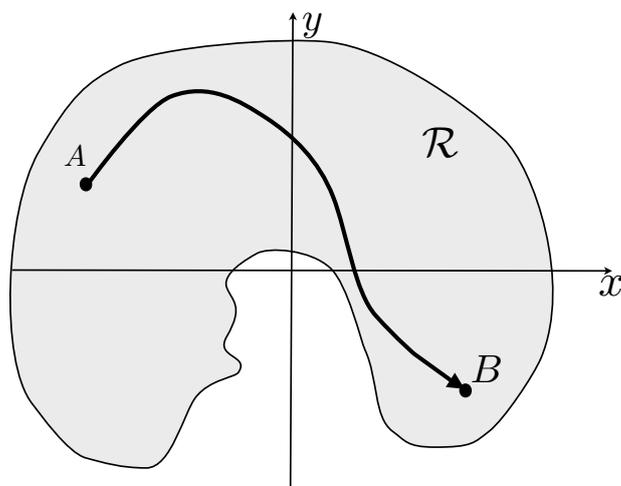
Concludiamo questa parte del discorso sugli integrali con un'utile disuguaglianza che vale sia per integrali di funzioni analitiche sia per integrali di funzioni non analitiche

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq [\text{valore massimo di } |f(z)| \text{ lungo } C] \times [\text{lunghezza di } C]$$

Questa disuguaglianza è intuitivamente ovvia (discende immediatamente dal significato di integrale complesso come integrale di linea).

5.1.2. **Qualche esempio.** Si vuole calcolare

$$\int_A^B \frac{dz}{z^2}$$



Se A e B sono nella regione semplicemente connessa \mathcal{R} che non include l'origine, la risposta è immediata: in \mathcal{R} la funzione integranda è analitica, la primitiva è $-1/z$ e quindi

$$\int_A^B \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{A} - \frac{1}{B}$$

Ci si rende facilmente conto che la restrizione a \mathcal{R} come in figura non è necessaria: possiamo farci passare l'ansia della singolarità $z = 0$ perché, essendo la primitiva $-1/z$ una funzione ad un solo valore, *tutti i cammini nel piano complesso da A a B danno lo stesso valore per l'integrale* (ovviamente vanno esclusi i cammini che passano attraverso $z = 0$). Dunque

$$\int_A^B \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{A} - \frac{1}{B}$$

è un'identità del tutto generale. In particolare,

$$\oint_C \frac{dz}{z^2} = 0$$

qualunque sia il circuito C (sia che la singolarità $z = 0$ sia dentro il circuito o fuori). Analogo discorso vale per potenze negative di z , eccetto la potenza -1 , e per singolarità arbitraria $z = a$,

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = 0, \quad n \geq 2$$

Per la funzione integranda $1/(z-a)$ il discorso è diverso: la primitiva è il logaritmo, e il logaritmo è una multifunzione, quindi

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = 0,$$

se C è una curva semplice chiusa che non include il punto a , ma se C racchiude il punto a , dopo un giro completo si guadagna un fattore $2\pi i$ e quindi

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \quad \text{se } a \text{ è dentro } C$$

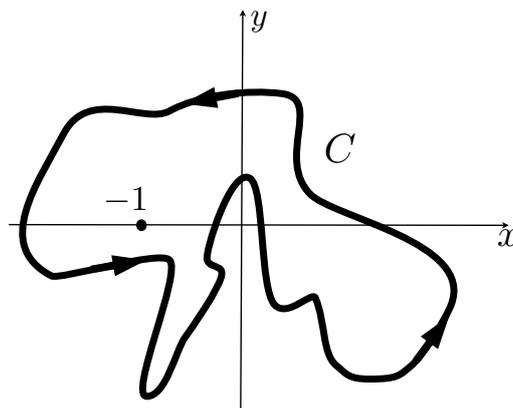
Si osservi che avremmo potuto ottenere questo risultato applicando direttamente la formula di Cauchy

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

alla funzione $f(z) = 1$.

Vediamo adesso due esempi un po' più complicati.

- (1) Si vuole calcolare $\oint_C f(z) dz$ per $f(z) = z^5/(z+1)^2$, dove C è la curva mostrata in figura:



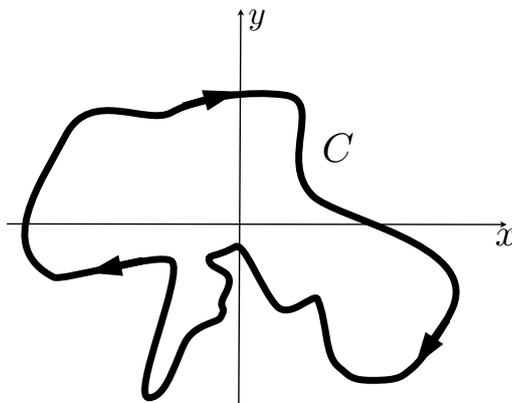
Scrivendo il numeratore come $[(z+1) - 1]^5$, otteniamo

$$f(z) = (z+1)^3 - 5(z+1)^2 + 10(z+1) - 10 + 5 \left[\frac{1}{z+1} \right] - \frac{1}{(z+1)^2}$$

Sulla base di quanto abbiamo discusso sopra (tutte le potenze positive e negative eccetto la potenza -1 danno contributo nullo all'integrale), e poichè la curva racchiude il punto $a = -1$, l'unico contributo proviene dall'inversione complessa $5/(z+1) = 5/[z - (-1)]$. Si ottiene

$$\oint_C f(z) dz = 5 \oint_C \frac{dz}{z+1} = 5 \times 2\pi i = 10\pi i$$

- (2) Si vuole calcolare $\oint_C f(z)dz$ per $f(z) = \sin z/z^6$ e per la curva mostrata in figura:



Ricordiamo lo sviluppo in serie del seno:

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \dots$$

Allora

$$\frac{\sin z}{z^6} = \frac{1}{z^5}z - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!} \left[\frac{1}{z} \right] - \frac{1}{7!}z + \frac{1}{9!}z^3 - \dots$$

Per le stesse ragioni di prima, essendo il punto $a = 0$ dentro la curva, l'unico contributo proviene dall'inversione complessa:

$$\oint_C f(z)dz = \frac{1}{5!} \oint_C \frac{dz}{z} = -\frac{2\pi i}{5!}$$

Il segno negativo è dovuto al fatto che la curva è percorsa in senso negativo (orario).

5.1.3. **Calcolo di integrali.** Dagli esempi precedenti traiamo la morale: *se nell'intorno del punto a la funzione $f(z)$ ha la forma*

$$(1) \quad f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{(z-a)} \\ + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \dots$$

allora

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i c_{-1}$$

per ogni curva semplice chiusa C percorsa in senso positivo, che racchiude il punto a , e al cui interno $f(z)$ è analitica (fatta eccezione, ovviamente, per il punto a). Naturalmente, se C è percorsa in senso negativo, il valore dell'integrale è $-2\pi i c_{-1}$.

Abbiamo così una potente regola per calcolare integrali lungo linee chiuse di funzioni della forma (1): basta trovare il suo c_{-1} e il gioco è fatto! Poichè c_{-1} è

la sola parte della funzione che rimane dopo che integriamo, è chiamato il *residuo* della funzione nella singolarità $z = a$ ed è denotato $\text{Res}(f, a)$.

Il trucco per estrarre $\text{Res}(f, a) = c_{-1}$ da una funzione della forma (1) è presto trovato. Si moltiplichi per $(z - a)^m$ ambo i membri dell'equazione, in modo da ottenere una serie di potenze

$$(z - a)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - a) + \dots + c_{-2}(z - a)^{m-2} + c_{-1}(z - a)^{m-1} \\ + c_0(z - a)^m + c_1(z - a)^{m+1} + c_2(z - a)^{m+2} + \dots$$

In una serie di potenze, il coefficiente di $(z - a)^n$ è ottenuto con la regola di Taylor: si deriva n volte la serie, si divide per $n!$ e si calcola la serie così ottenuta nel punto $z = a$. Allora, essendo $\text{Res}(f, a) = c_{-1}$ è il coefficiente della potenza $(z - a)^{m-1}$ della serie, si avrà

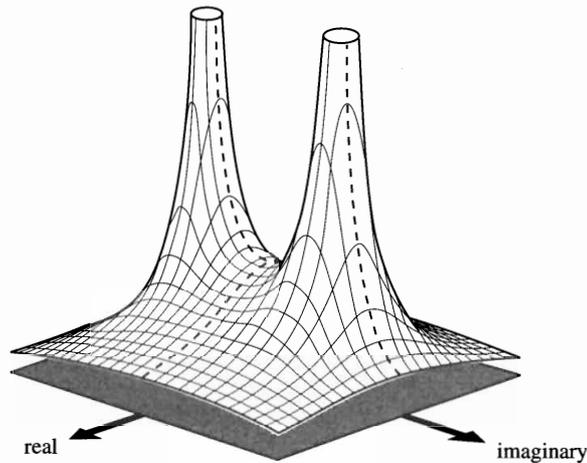
$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(m - 1)!} \left[\frac{d}{dz} \right]^{m-1} [(z - a)^m f(z)] \Big|_{z=a}$$

5.1.4. Poli e calcolo dei residui. Le singolarità delle funzioni appena considerate ($z = -1$ per il primo esempio, $z = 0$ per il secondo e $z = a$ per una funzione della forma (1)) sono dette *poli*. I poli sono le singolarità di gran lunga più comuni nelle applicazioni dell'analisi complessa. Ecco la definizione:

Definizione 5.1.1. *Il punto $z = a$ è un polo della funzione analitica $f(z)$ (non in $z = a$) sse: (1) a è una singolarità isolata di $f(z)$ e (2) $F(z) = 1/f(z)$ (che esiste perchè $f(z)$ è analitica) ha uno zero in a .*

(Una singolarità è detta isolata se esiste un intorno finito di a in cui non ci sono altre singolarità.) Insomma, se la funzione $f(z)$ tende all'infinito quando z tende ad a da qualunque direzione, allora a è un polo di $f(z)$. Un polo si vede bene in un grafico della superficie modulare della funzione, il grafico del modulo di $f(z)$: in prossimità del polo, la superficie ha un picco che tende all'infinito man mano che ci si avvicina al polo. Per esempio, come abbiamo già visto, la superficie modulare

della funzione $1/(1+z^2)$ mostra nitidamente i due poli $+i$ e $-i$.



Se a è uno zero di $F(z) = 1/f(z)$ allora

$$F(z) = (z - a)^m \Omega(z)$$

dove Ω è analitica e non nulla in a e m è la molteplicità dello zero. Ne segue che il comportamento locale di f vicino ad a è dato da

$$f(z) = \frac{\tilde{\Omega}(z)}{(z - a)^m}$$

dove $\tilde{\Omega} = 1/\Omega$ è analitica e non nulla in a . Il numero m è la molteplicità algebrica o ordine del polo. Diciamo un polo *semplice*, *doppio*, *triplo*, etc., a seconda che sia $m = 1, 2, 3$ etc.. C'è una regola semplice per calcolare l'ordine di un polo, che è conseguenza immediata di quanto è stato appena detto: m è l'ordine della prima derivata non nulla di $F = 1/f$ calcolata in $z = a$.

Tra poco dimostreremo l'importante risultato che *se una funzione è analitica in a , allora esiste il suo sviluppo di Taylor in $z = a$* . In particolare, $\tilde{\Omega}(z)$ è sviluppabile in serie di Taylor in $z = a$. Quindi, nell'intorno di a , $f(z)$ è della forma (1). In altre parole, per una funzione $f(z)$ essere della forma (1) significa avere in a un polo di ordine m . Risulta così dimostrata la seguente proposizione:

Proposizione 5.1.1. *Sia a un polo di ordine m della funzione $f(z)$ e C una curva semplice chiusa, percorsa nel verso positivo, tale che $f(z)$ è analitica al suo interno (fatta eccezione per $z = a$). Allora*

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, a)$$

dove

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d}{dz} \right]^{m-1} [(z-a)^m f(z)] \Big|_{z=a}$$

è il residuo di $f(z)$ nel polo a .

5.1.5. **Funzioni meromorfe.** Una funzione è detta meromorfa in una regione \mathcal{R} , se le sue singolarità sono solo dei poli e se, fatta eccezione per i poli, la funzione è analitica nella regione.

Esempi:

- Tutte le funzioni razionali, come

$$f(z) = \frac{z^3 - 2z + 10}{z^5 + 3z - 1}$$

sono meromorfe sull'intero piano complesso \mathbb{C} .

- Le funzioni

$$f(z) = \frac{e^z}{z} \quad \text{e} \quad f(z) = \frac{\sin z}{(z-1)^2}$$

sono meromorfe sull'intero piano complesso \mathbb{C} .

- La funzione Gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

(estesa per continuazione analitica¹ a tutto \mathbb{C}) è meromorfa sull'intero piano complesso \mathbb{C} .

- La funzione zeta di Riemann, ottenuta per continuamento analitico della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{Re}(s) > 1,$$

è meromorfa sull'intero piano complesso \mathbb{C} .

- La funzione

$$f(z) = e^{1/z}$$

non ha un polo in $z = 0$, ma una singolarità essenziale (vedi sotto). È meromorfa (persino analitica) in $\mathbb{C} - 0$.

- La funzione

$$f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}$$

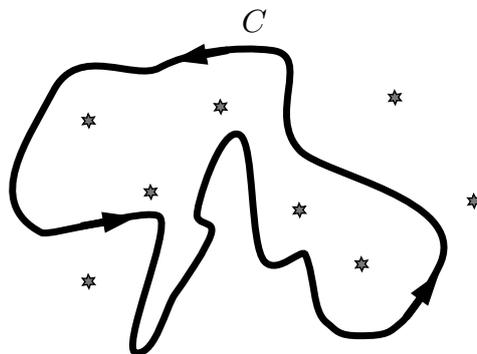
non è meromorfa sull'intero piano complesso \mathbb{C} , poiché $z = 0$ è un punto di accumulazione di poli.

La regola di calcolo per l'integrale $\oint_C f(z) dz$ per una funzione meromorfa è semplice: sia $f(z)$ meromorfa e C la solita curva semplice chiusa orientata positivamente, allora

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res}(f, a_i)$$

¹In una lezione successiva chiariremo che cosa sia la “continuazione analitica”.

dove la somma a secondo membro è estesa solo ai poli a_i dentro C .

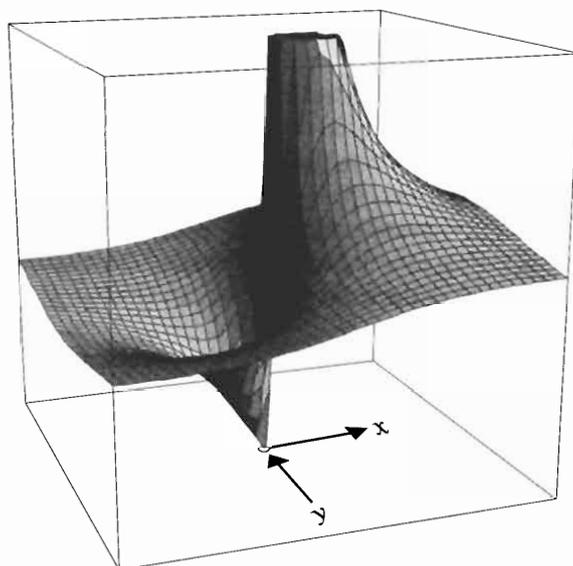


5.1.6. **Singolarità essenziali.** In aggiunta ai poli, una funzione altrimenti analitica, può avere quelle che sono chiamate *singolarità essenziali*. In prossimità di una singolarità essenziale a il comportamento di f è abbastanza selvaggio e strano: infatti, se f fosse limitata, a non sarebbe una singolarità, e se f andasse all'infinito man mano che ci si avvicina ad a da qualunque direzione, a sarebbe un polo.

Consideriamo l'esempio standard $g(z) = e^{1/z}$, che chiaramente ha una singolarità di qualche tipo nell'origine. Se scriviamo $z = re^{i\theta}$, allora

$$|g(z)| = e^{\frac{\cos \theta}{r}}$$

La figura sotto ne mostra la superficie modulare



Se f si avvicina a 0 lungo l'asse immaginario, allora $g(z)$ tende a 1. Ma se l'avvicinamento avviene lungo un cammino a sinistra dell'asse immaginario, dove

$\cos \theta < 0$, allora $g(z)$ tende a 0. Infine, se z si avvicina lungo un cammino a destra dell'asse immaginario, $g(z)$ tende all'infinito. In effetti, in quest'ultimo caso, non solo $f(z)$ tende all'infinito, ma la velocità con cui ci va è al di là della comprensione di qualunque polo.

Se a è una singolarità essenziale, non esiste alcun m tale la moltiplicazione per $(z - a)^m$ possa annullare l'esplosione della funzione in a . In particolare, per mostrare che questo è vero per $g(z)$, basta ricordare dall'analisi reale che

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^m e^{1/x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{y^m} = \infty$$

qualunque sia il valore di m .

Se a è una singolarità essenziale non significa che

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, a)$$

cessa di valere, ma che non abbiamo più una formula semplice per calcolare il residuo in a . Se a è una singolarità essenziale, a volte il residuo può essere calcolato usando sviluppi in serie già noti. Ad esempio, possiamo ottenere lo sviluppo in serie di $g(z) = e^{1/z}$ a partire da quello di e^u per $u = 1/z$, vale a dire. sviluppiamo in serie $g(z)$ nel punto all'infinito (poiché lo sviluppo in serie di e^u ha raggio infinito, lo stesso varrà per lo sviluppo di $g(z)$),

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

Essendo il residuo il coefficiente dell'inversione complessa, si ha immediatamente

$$\text{Res}(e^{1/z}, 0) = 1$$

5.1.7. Tabella riassuntiva delle singolarità di una funzione. Un punto a in cui una funzione, altrimenti analitica, non è analitica è detto punto singolare o singolarità.

Singolarità isolata: se esiste un intorno finito di a in cui non ci sono altre singolarità.

Polo: se nell'intorno di a si ha $1/f(z) = (z - a)^m \Omega(z)$, dove Ω è analitica e non nulla in a . Il numero m è detto ordine del polo.

Punto di diramazione: se un giro completo attorno ad a fa cambiare il valore di $f(z)$. Se ci vogliono non meno di N giri per tornare al valore di partenza, a è un pd algebrico di ordine $N - 1$; se non si torna mai al valore di partenza, a è un pd logaritmico.

Singolarità eliminabile: se esiste $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$.

Singolarità essenziale: se $f(z)$ diverge in a , ma non è un polo.