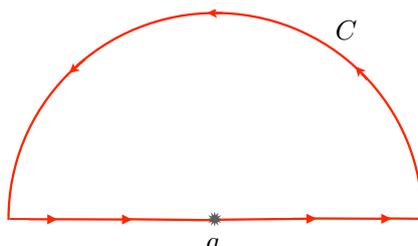


10.1. Ancora ancora integrali.

10.1.1. *Poli lungo il cammino e loro aggiramento.* Quando si considera

$$\oint_C f(z)dz$$

può accadere che un polo isolato del prim'ordine si trovi sul cammino di integrazione, come ad esempio nel caso mostrato in figura,



Ricordiamo che nell'intorno del polo $z = a$, la funzione è approssimata da

$$\frac{c_{-1}}{z - a}$$

dove c_{-1} è il coefficiente dello sviluppo di Laurent in a , cioè il suo residuo in a .

In questo caso, possiamo deformare il contorno in modo da includere o escludere il polo con un aggiramento semicircolare S_ϵ^- di raggio infinitesimo ϵ , ponendo $z - a = \epsilon e^{i\theta}$, da cui $dz = i\epsilon e^{i\theta} d\theta$. Allora, se decidiamo di escluderlo, avremo

$$\int_{S_\epsilon^-} \frac{dz}{z - a} = \int_\pi^0 \frac{\epsilon i e^{i\theta} d\theta}{\epsilon e^{i\theta}} = i \int_\pi^0 d\theta = -i\pi$$

Mentre se decidiamo di includerlo, si avrà

$$\int_{S_\epsilon^+} \frac{dz}{z - a} = \int_{-\pi}^{2\pi} \frac{\epsilon i e^{i\theta} d\theta}{\epsilon e^{i\theta}} = i \int_{-\pi}^{2\pi} d\theta = i\pi$$

In entrambi i casi, otterremo lo stesso risultato per il calcolo dell'integrale lungo C . Infatti, nel limite, $\epsilon \downarrow 0$, seguendo la prima procedura si ottiene

$$\oint_C f(z)dz - i\pi c_{-1} = 2\pi i \sum (\text{residui dentro } C_-)$$

mentre seguendo la seconda,

$$\oint_C f(z)dz + i\pi c_{-1} = 2\pi i \sum (\text{residui dentro } C_+) = \sum (\text{residui dentro } C_-) + 2\pi i c_{-1}$$

Quindi

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum (\text{residui dentro } C) + \pi i c_{-1}$$

In definitiva, il contributo all'integrale di contorno di un polo sul cammino d'integrazione è metà del suo residuo (metà dentro, metà fuori, come si poteva anticipare):

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum (\text{residui dentro } C) + 2\pi i \times \frac{1}{2} (\text{residui su } C) \quad (\star)$$

10.1.2. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx$ (**Integrale di Fourier della Gaussiana**). Il metodo precedente non si applica (perchè?). Osserviamo che, completando i quadrati, $e^{-ax^2} e^{-ikx}$ può essere riscritto come

$$e^{-ax^2} e^{-ikx} = e^{-a(x^2 + i\frac{k}{a}x)} = e^{-a(x + i\frac{k}{2a})^2} e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

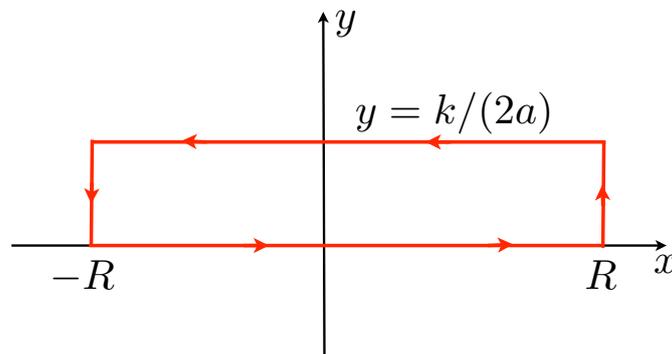
Allora

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x + i\frac{k}{2a})^2} dx$$

La sostituzione $x' = x + i\frac{k}{2a}$, $dx' = dx$, fornisce

$$I = e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{x'=-\infty + i\frac{k}{2a}}^{\infty + i\frac{k}{2a}} e^{-ax'^2} dx' = e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{x=-\infty + i\frac{k}{2a}}^{\infty + i\frac{k}{2a}} e^{-ax^2} dx$$

Qual è il significato dell'integrale a secondo membro? Ricordando l'esercizio (3), l'integrale in questione non è altro che l'integrale sul lato superiore del rettangolo:



Poiché i cammini verticali danno contributo nullo nel limite $R \rightarrow \infty$ e la funzione è analitica nel rettangolo, l'integrale in questione è uguale all'integrale sull'asse reale e quindi

$$I = e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

L'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx$ si calcola facilmente con i metodi dell'analisi reale:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx\right)^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ay^2} dx dy} \\ &= \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy} = \sqrt{\int_{\rho=0}^{\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} e^{-a\rho^2} \rho d\rho d\phi} \\ &= \sqrt{2\pi \int_0^{\infty} e^{-a\rho^2} \rho d\rho} = \sqrt{\frac{\pi}{a} \int_0^{\infty} e^{-a\rho^2} (2a\rho) d\rho} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \end{aligned}$$

Im conclusione,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

10.1.3. Calcolo di integrali mediante derivazione sotto il segno di integrale. Abbiamo già accennato a questo metodo nella lezione 7.2.1. Illustriamo la versatilità di questo metodo calcolando due integrali, precedentemente calcolati con i metodi dell'analisi complessa.

• **Integrale di Fourier della gaussiana**

Si consideri

$$I(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx$$

Allora

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dk} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix) e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = \frac{i}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(-2ax)}_{\text{derivative of } e^{-ax^2}} \underbrace{e^{-ikx}}_{\text{derivative of } e^{-ikx}} dx \\ &= \frac{i}{2a} \left[e^{-ax^2} e^{-ikx} \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \frac{i}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} (-ik) e^{-ikx} dx \\ &= 0 - \frac{k}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = -\frac{k}{2a} I \end{aligned}$$

Si ha così l'equazione differenziale elementare

$$\frac{dI(k)}{dk} = -\frac{k}{2a} I(k), \quad I(0) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

che si risolve a vista

$$\frac{dI}{I} = -\frac{k}{2a} dk \Rightarrow \ln I = -\frac{k^2}{4a} + c \Rightarrow I(k) = I(0) e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

In definitiva,

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

che è quanto avevamo trovato precedentemente con i metodi dell'analisi complessa.

• **Integrale di $\sin x/x$**

Con il metodo dei residui abbiamo visto che

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Rifacciamo il calcolo con il metodo di derivazione sotto il segno di integrale.

Consideriamo

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx$$

L'integrale che si vuole calcolare è $I(0)$. Sappiamo calcolare agevolmente

$$\begin{aligned} I'(a) &= - \int_0^{\infty} \sin x e^{-ax} dx = -\operatorname{Im} \int_0^{\infty} e^{ix} e^{-ax} dx \\ &= -\operatorname{Im} \int_0^{\infty} e^{(i-a)x} dx = \operatorname{Im} \frac{1}{i-a} = \frac{-1}{1+a^2} \end{aligned}$$

che, integrata, fornisce

$$I(a) = -\tan^{-1}(a) + c$$

Poichè $I(\infty) = 0 = -\pi/2 + c$, si ha $c = \pi/2$ e quindi

$$I(a) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(a)$$

In definitiva,

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = I(0) = \frac{\pi}{2}$$