

11.1. Regolarizzazione di integrali contenenti $1/x$.

11.1.1. *Parte principale di Cauchy.* Integrali del tipo

$$(1) \quad \int_{a-b}^{a+d} \frac{g(x)}{x-a} dx$$

lungo l'asse reale sono mal definiti a meno che non sia $g(x) = 0$. Consideriamo, per esempio

$$\int_{-b}^d \frac{dx}{x}$$

Potremmo pensare di definire l'integrale come processo di limite intorno al punto singolare $x = 0$,

$$\int_{-b}^d \frac{dx}{x} = \lim_{\delta \downarrow 0, \epsilon \downarrow 0} \left[\int_{-b}^{-\delta} \frac{dx}{x} + \int_{\epsilon}^d \frac{dx}{x} \right] = \lim_{\delta \downarrow 0, \epsilon \downarrow 0} \left[- \int_{\delta}^b \frac{dx}{x} + \int_{\epsilon}^d \frac{dx}{x} \right]$$

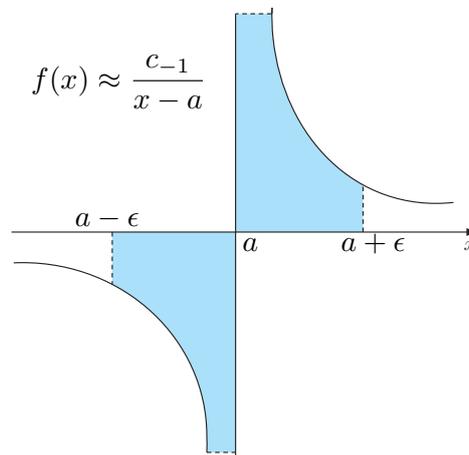
Ma per

$$- \int_{\delta}^b \frac{dx}{x} + \int_{\epsilon}^d \frac{dx}{x} = \ln \left[\frac{\delta d}{b \epsilon} \right]$$

il limite è mal definito, perché dipende da come ϵ e δ tendono a zero.

Ci sono sostanzialmente tre modi diversi di rendere regolare un limite di questo tipo.

Il più antico risale a Cauchy e consiste nel fare la mossa ovvia: *definiamo* l'integrale come ciò che si ottiene facendo tendere a zero ϵ e δ con la stessa velocità, cioè poniamo $\delta = \epsilon$. In questo modo c'è un'esatta cancellazione tra parti positive e negative dell'integrale, ciascuna delle quali diventa infinita nel limite, come illustrato in figura:



Risulta così definita la *parte principale di Cauchy*,

$$P \int_{a-b}^{a+d} \frac{g(x)}{x-a} dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left[\int_{-b}^{a-\epsilon} \frac{g(x)}{x-a} dx + \int_{a+\epsilon}^d \frac{g(x)}{x-a} dx \right]$$

Supponiamo (i) che $f(z)$ sia una funzione complessa con polo semplice in a , e quindi nel suo intorno (reale) sia della forma

$$f(x) \approx \frac{g(x)}{x-a}, \quad g(a) = c_{-1} = \text{Res}(f, a),$$

(ii) che $f(z)$ sia integrata lungo un cammino chiuso che contiene l'asse reale e che sia chiudibile o nel semipiano superiore o in quello inferiore da un semicerchio di contributo nullo nel limite di raggio infinito; (iii) che $|f(z)| \rightarrow 0$ per $|z| \rightarrow \infty$ più velocemente di $1/|z|$ in modo tale che gli integrali in questione siano finiti. Allora, per la (★) della lezione 9.1.4,

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{a-\epsilon} f(x) dx + \int_{a+\epsilon}^{\infty} f(x) dx \right] = 2\pi i \sum (\text{res. nel s.p.}) + \pi i \times (\text{res. in } a),$$

cioè

$$P \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum (\text{res. nel s.p.}) + \pi i \times (\text{res. in } a)$$

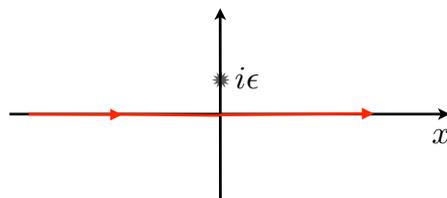
Osserviamo che la nozione di parte principale permette di scrivere la formula di Cauchy per una funzione analitica dentro e lungo un contorno C per un punto z che si trova sul contorno di integrazione:

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} P \oint \frac{f(Z) dZ}{Z-z}, \quad z \in C \quad (**)$$

Si osservi infine che per poli di ordine pari, $P \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ non è finito perché non c'è cancellazione.

11.1.2. **Spostamento infinitesimo di poli reali nel piano complesso.** Gli altri due modi per regolarizzare integrali contenenti $1/x$ sfruttano la libertà che abbiamo di muoverci nel piano complesso e di spostare la singolarità un pelino sopra l'asse reale.

Prima possibilità.



Definiamo

$$\int_{-b}^d \frac{g(x)}{x} dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int \frac{g(x)}{x - i\epsilon} dx$$

Il polo è sopra l'asse reale. Allora il cammino può essere deformato in



e

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-b}^d \frac{g(x)}{x - i\epsilon} dx = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left[\int_{-b}^{\epsilon} \frac{g(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^d \frac{g(x)}{x} dx \right] + i\pi g(0) = P \int_{-b}^d \frac{g(x)}{x} dx + i\pi g(0)$$

Poichè

$$g(0) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) f(x) dx$$

possiamo scrivere

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-b}^d \frac{g(x)}{x - i\epsilon} dx = P \int_{-b}^d \frac{g(x)}{x} dx + \int_{-b}^d i\pi \delta(x) g(x) dx$$

Per esprimere questa identità, possiamo simbolicamente scrivere

$$\boxed{\frac{1}{x - i\epsilon} = P \frac{1}{x} + i\pi \delta(x)}$$

Seconda possibilità.

È analoga alla precedente, ma adesso la singolarità è spostata un pelino sotto l'asse reale. Questo fornisce la definizione

$$\int \frac{g(x)}{x} dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int \frac{g(x)}{x + i\epsilon} dx$$

Adesso il cammino equivalente a



e quindi

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-b}^d \frac{g(x)}{x + i\epsilon} dx = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left[\int_{-b}^{\epsilon} \frac{g(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^d \frac{g(x)}{x} dx \right] - i\pi g(0) = P \int_{-b}^d \frac{g(x)}{x} dx - i\pi g(0)$$

Simbolicamente,

$$\boxed{\frac{1}{x + i\epsilon} = P \frac{1}{x} - i\pi \delta(x)}$$

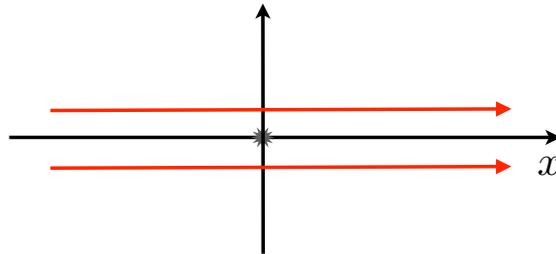
Combinando le due formule incorniciate otteniamo

$$P \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x - i\epsilon} + \frac{1}{x + i\epsilon} \right]$$

Vediamo così che la parte principale è la media dei cammini appena sopra e appena sotto il polo,

$$P \int_{-b}^d \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left[\int_{-b-i\epsilon}^{d-i\epsilon} \frac{g(x)}{x} dx + \int_{-b+i\epsilon}^{d+i\epsilon} \frac{g(x)}{x} dx \right]$$

Graficamente,



Verifichiamo le formule ottenute con un esempio semplice:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x - i\epsilon} dx$$

Usando

$$\cos x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

otteniamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x - i\epsilon} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x - i\epsilon} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x - i\epsilon} dx$$

Il primo termine permette di chiudere il cammino con un semicerchio nel piano superiore, il secondo nel semipiano inferiore (cfr. lezione su Lemma di Jordan). Poiché il polo $z = +i\epsilon$ è nel semipiano superiore, solo il semicerchio superiore circonda il polo. Il residuo nel polo vale 1. Quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x - i\epsilon} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x - i\epsilon} dx = \frac{1}{2} \times 2\pi i \times 1 = \pi i$$

D'altro canto, la parte principale dell'integrale è zero

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0$$

in quanto $\cos x$ è pari e la cancellazione è esatta. Dalla definizione della $\delta(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\cos x) (i\pi\delta(x)) dx = i\pi \cos(0) = i\pi$$

Dunque la formula

$$\frac{1}{x - i\epsilon} = P\frac{1}{x} + i\pi\delta(x)$$

risulta verificata.

11.1.3. **Un esempio fisico: scattering quantistico.** È un'ovvietà dire che il mondo fisico non si cura del nostro modo di definire integrali mal definiti e che la soluzione di un problema di fisica non può dipendere da come noi definiamo le cose. Se un problema di fisica porta ad un integrale mal definito, sarà la fisica del problema a decidere qual è la regolarizzazione adeguata e non noi. Per illustrare questo punto consideriamo un esempio.

L'analisi quantistica dello scattering porta alla funzione

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - \sigma^2} dx$$

L'integrale è divergente e ambiguo. Possiamo regolarizzarlo in diversi modi. Tuttavia, la fisica del problema impone un ulteriore requisito: $I(\sigma)$ deve aver la forma $e^{i\sigma}$ perché deve rappresentare un'onda diffusa uscente. Senza preoccuparci del significato di σ , e di come l'integrale sopra sia stato ottenuto, abbiamo tutti gli elementi per decidere se *le condizioni fisiche del problema determinano la regolarizzazione appropriata*. Nel caso questo non si realizzasse diremo che il problema è *fisicamente mal posto*.

Usando

$$\cos x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

otteniamo

$$I(\sigma) = I_1 + I_2,$$

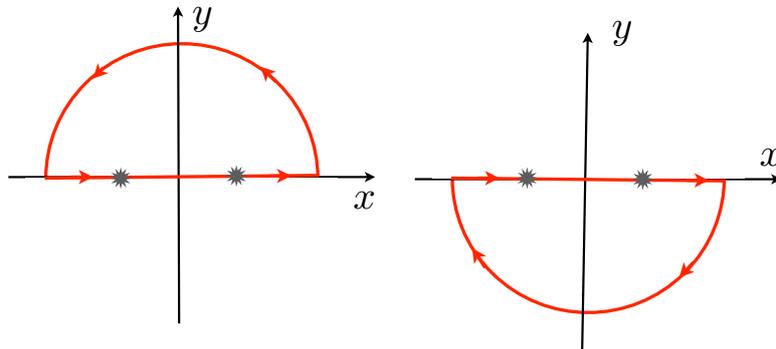
dove

$$I_1 = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 - \sigma^2}$$

$$I_2 = -\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{-ix}}{x^2 - \sigma^2}$$

Il primo integrale permette di chiudere il cammino con un semicerchio nel piano superiore, il secondo nel semipiano inferiore (cfr. lemma di Jordan), come mostrato

in figura



Ci sono poli in $z = -\sigma$ e $z = +\sigma$. Ecco i loro residui:

	$z = \sigma$	$z = -\sigma$
I_1	$\frac{e^{i\sigma}}{2}$	$\frac{e^{-i\sigma}}{2}$
I_2	$\frac{e^{-i\sigma}}{2}$	$\frac{e^{i\sigma}}{2}$

Consideriamo le 3 regolarizzazioni:

$$PI = PI_1 + PI_2 \quad (1)$$

$$I_- = \lim_{\epsilon \downarrow 0} I(\sigma - i\epsilon) \quad (2)$$

$$I_+ = \lim_{\epsilon \downarrow 0} I(\sigma + i\epsilon) \quad (3)$$

(1)

$$PI_1 = \pi i [(\text{res. in } +\sigma) + (\text{res. in } -\sigma)] = \pi i \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{i\sigma} + e^{-i\sigma}}{2} \right] = \frac{\pi}{2} \cos \sigma$$

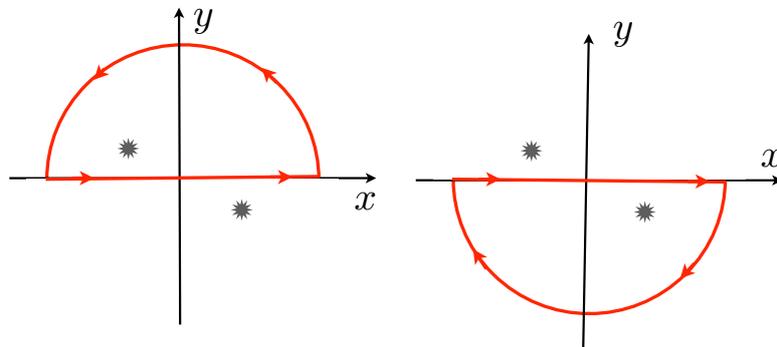
$$PI_2 = -\pi i [(\text{res. in } +\sigma) + (\text{res. in } -\sigma)] = -\pi i \frac{1}{-2i} \left[\frac{e^{-i\sigma} + e^{i\sigma}}{2} \right] = \frac{\pi}{2} \cos \sigma$$

(segno negativo in fronte perché il cammino nel semipiano inferiore è orario).
Quindi

$$PI = \frac{1}{2}(I_+ + I_-) = \pi \cos \sigma$$

non soddisfa le condizioni fisiche del problema (onda stazionaria invece di onda uscente).

(2) I poli si spostano di una quantità infinitesima: $\sigma \rightarrow \sigma - i\epsilon$, $-\sigma \rightarrow -\sigma + i\epsilon$. Per I_1 resta un polo e l'altro contribuisce a I_2 , come mostrato in figura



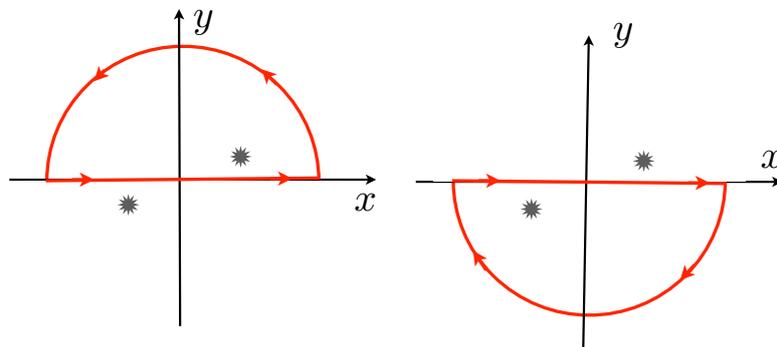
$$I_1(\sigma - i\epsilon) = (2\pi i) \frac{1}{2i} \frac{e^{i(-\sigma+i\epsilon)}}{2}, \quad I_2(\sigma - i\epsilon) = -(2\pi i) \frac{1}{-2i} \frac{e^{i(-\sigma+i\epsilon)}}{2}$$

Da cui

$$I_- = 2\pi \frac{e^{-i(\sigma-i\epsilon)}}{2} = \pi e^{-i\sigma}$$

che **non soddisfa** le condizioni fisiche del problema (onda entrante anziché uscente).

(3) I poli si spostano di una quantità infinitesima: $\sigma \rightarrow \sigma + i\epsilon$, $-\sigma \rightarrow -\sigma - i\epsilon$. Per I_1 resta un polo e l'altro contribuisce a I_2 , come mostrato in figura



$$I_1(\sigma + i\epsilon) = (2\pi i) \frac{1}{2i} \frac{e^{i(\sigma+i\epsilon)}}{2}, \quad I_2(\sigma + i\epsilon) = -(2\pi i) \frac{1}{-2i} \frac{e^{i(\sigma+i\epsilon)}}{2}$$

Da cui

$$I_+ = \pi e^{i\sigma}$$

che, finalmente, **soddisfa** le condizioni fisiche del problema di onda uscente. La (3) è dunque la regolarizzazione adeguata al problema. Ecco un esercizio da fare a casa: ce ne sono altre di possibili regolarizzazioni (sia adeguate sia inadeguate)?